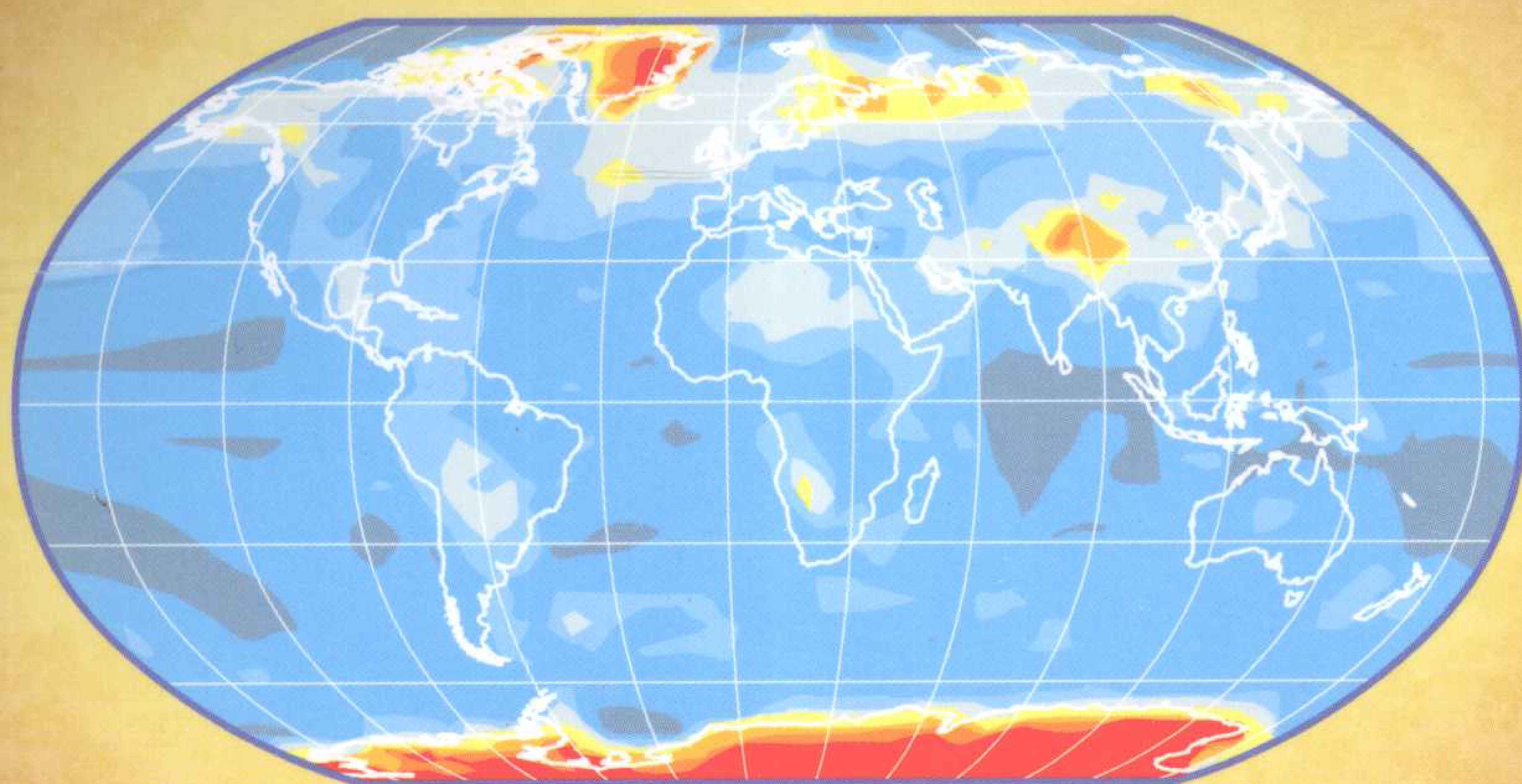
TURING 图灵数学·统计学丛书 48

WILEY



Applied Calculus

实用微积分

（第3版）

[美] Deborah Hughes-Hallett Andrew M. Gleason Patti Frazer Lock Daniel E. Flath 等著

朱来义 刘刚 黄志勇 范红岗 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

实用微积分（第3版）
Applied Calculus

“这是一本极具创新的教材。目标读者是工商管理、社会科学、生命科学等专业的学生，所以应用实例也主要来自这些领域。本书叙述清晰，足以使学生理解微积分的数学本质并且掌握应用微积分解决特定领域问题的能力。”

——亚马逊读者评论

本书由美国微积分联合会组织编写，并得到了美国国家科学基金会的资助，是美国著名的微积分教学改革计划——哈佛计划的产物，在美国数学界产生了广泛而深远的影响，被国外很多学校用作教材或主要参考书。

本书内容涉及导数、积分、概率初步、微分方程和几何级数。书中充满了创意，包含了很多非常特别的问题，充分体现了美国微积分教学改革奉行的“四原则”。本教材旨在培养学生对概念的理解能力、解决问题的技巧、分析与举一反三的技能，同时，通过减少冗长乏味的计算，追求精简活泼的风格，让微积分的学习充满活力，不再枯燥乏味。

Deborah Hughes-Hallett 现为亚利桑那大学教授，英国剑桥大学博士毕业，曾在土耳其中东科技大学任教。Hughes-Hallett致力于提升数学教育的水平，促进国际间的数学合作和交流。她是美国微积分联合会的创始人之一，著述颇丰，她的很多经典教材被翻译为多种语言文字流传世界。

Andrew M. Gleason (1921—2008) 20世纪的著名数学家，美国艺术与科学院、国家科学院和哲学会院士，曾任美国数学会主席。1942年获耶鲁大学学士学位，从1969年起任哈佛大学数学和自然哲学教授，直至1992年退休。著名的Gleason定理即以他的名字命名。





WILEY
www.wiley.com

图灵网站：www.turingbook.com 热线：(010)51095186
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com
有奖勘误：debug@turingbook.com
分类建议 数学/微积分
人民邮电出版社网址：www.ptpress.com.cn

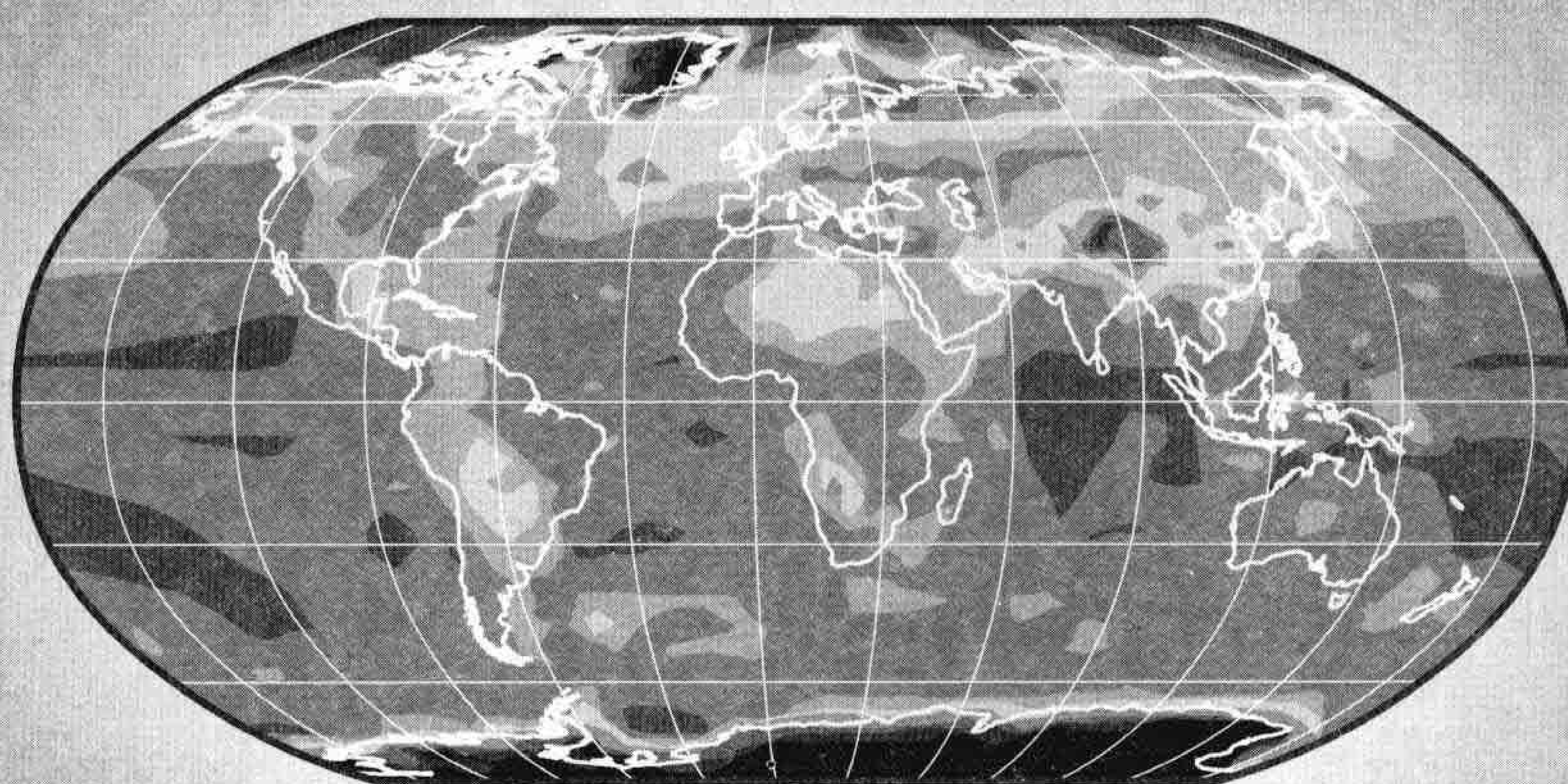


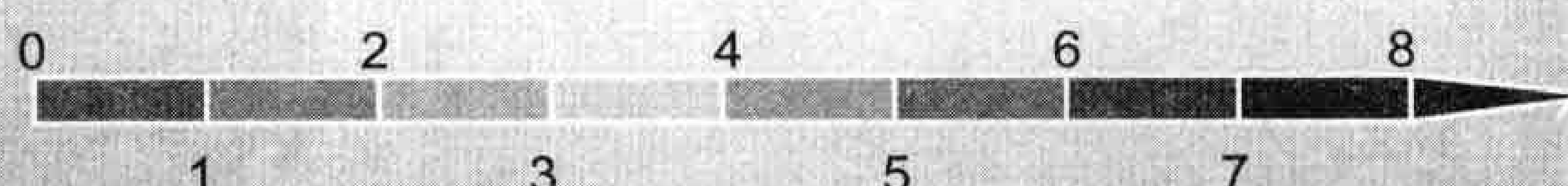


ISBN 978-7-115-23129-1
定价：89.00元

TURING 图灵数学·统计学丛书 48

WILEY







Appl culus

实用微积分

（第3版）

[美] Deborah Hughes-Hallett Andrew M. Gleason Patti Frazer Lock Daniel E. Flath 等著

朱来义 刘刚 黄志勇 范红岗 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

实用微积分：第3版/(美) 休斯-哈利特
(Hughes-Hallett, D.) 等著；朱来义等译. —北京：
人民邮电出版社, 2010.8
(图灵数学·统计学丛书)
书名原文：Applied Calculus
ISBN 978-7-115-23129-1

I.① 实… II.①休…②朱… III.① 微积分 IV.① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第118832号

内容提要

本书是美国微积分联合会组织编写的微积分教材，内容包括函数、导数、积分、概率初步、微分方程和几何级数. 全书充分体现了美国微积分教学改革奉行的"四原则"，将微积分概念的四个侧面——图像、数值、符号和语言展现给学生，并配以大量微积分在商业、经济、生物以及其他领域的应用实例.

本书最大的特点是直观性和实用性强，可作为工商管理、社会科学和生命科学专业的本科微积分教材或参考书.

图灵数学·统计学丛书

实用微积分（第3版）

◆ 著　(美) Deborah Hughes-Hallett　Andrew M. Gleason　Patti Frazer Lock　Daniel E. Flath 等
译　朱来义　刘　刚　黄志勇　范红岗
责任编辑　傅志红

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
网址：http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000 1/16
印张：36.5
字数：787千字　2010年8月第1版
印数：1–3 000册　2010年8月北京第1次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2009-4228号

ISBN 978-7-115-23129-1

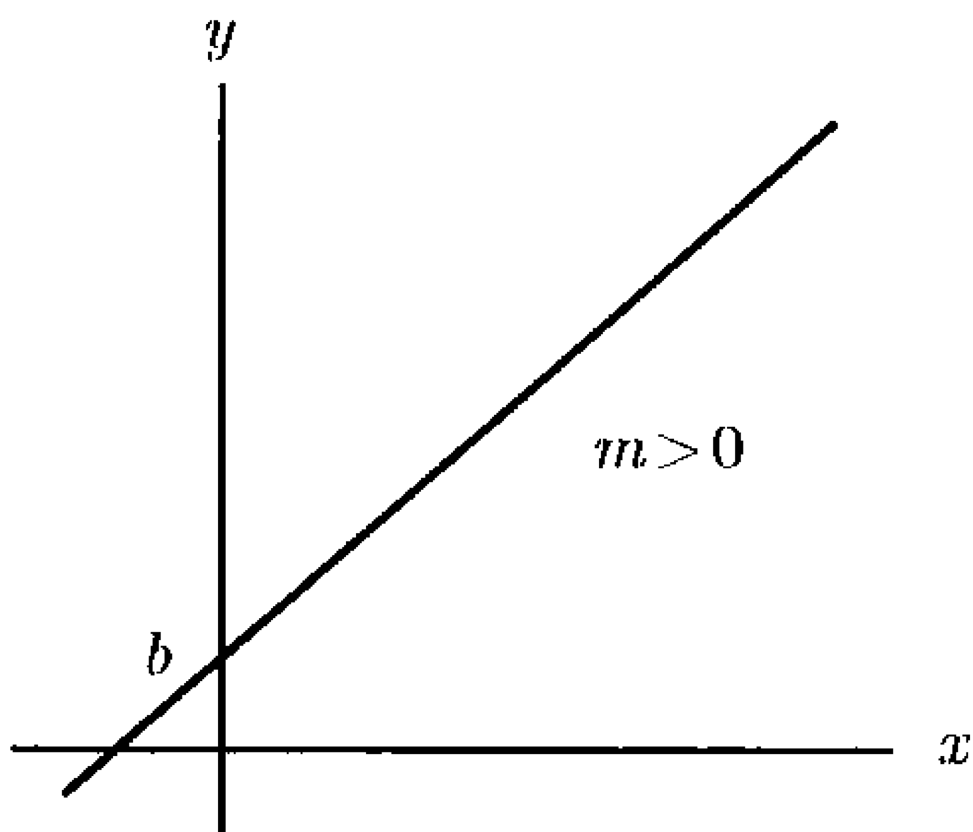
定价：89.00元

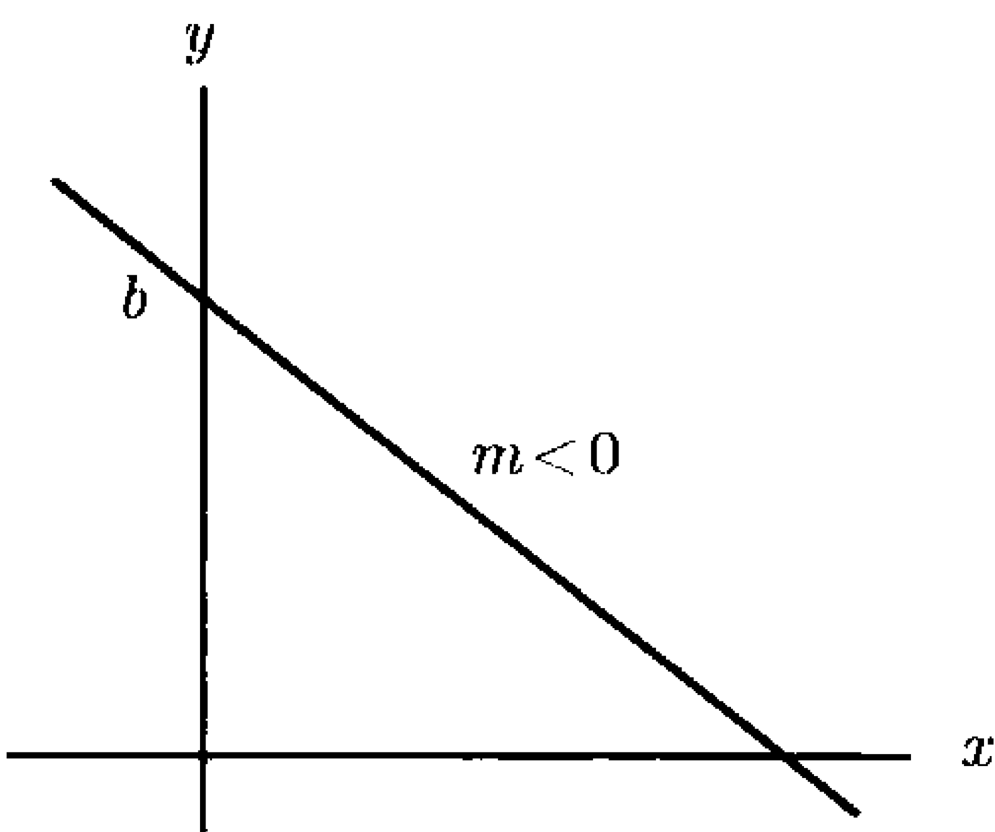
读者服务热线：(010)51095186　印装质量热线：(010) 67129223

反盗版热线：(010)67171154

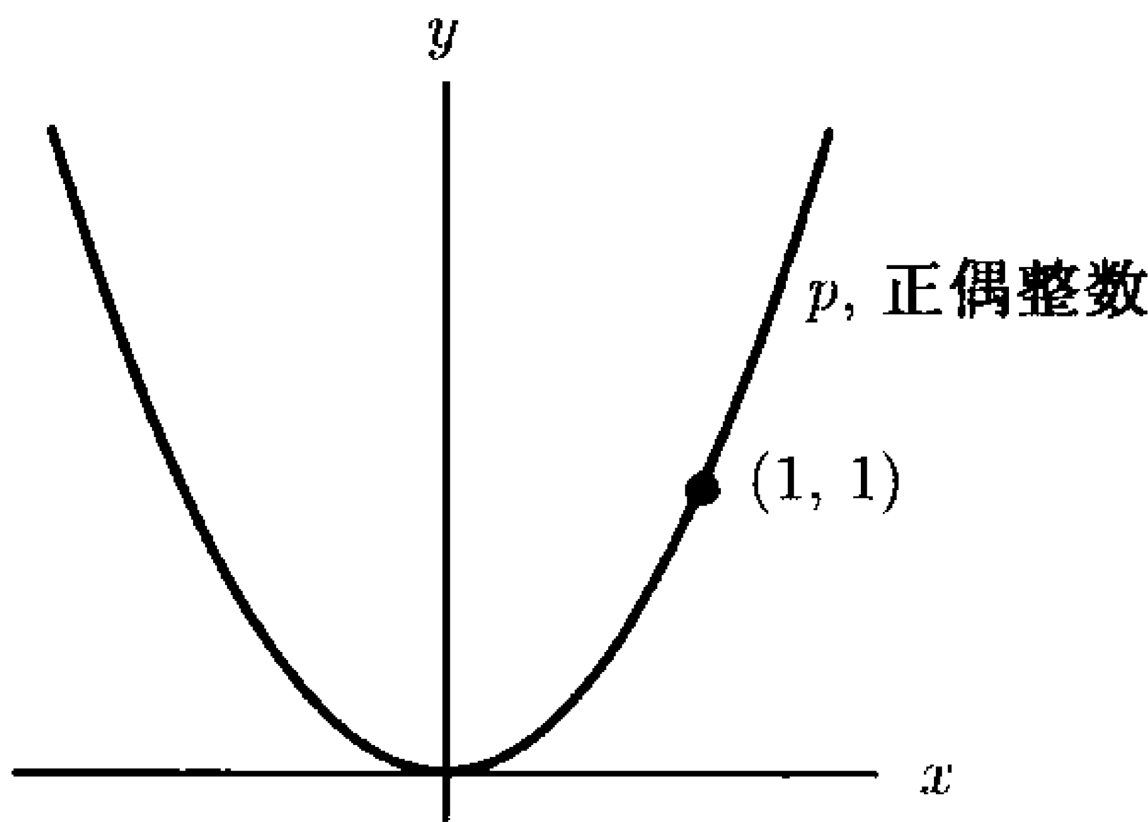
函数族的图形

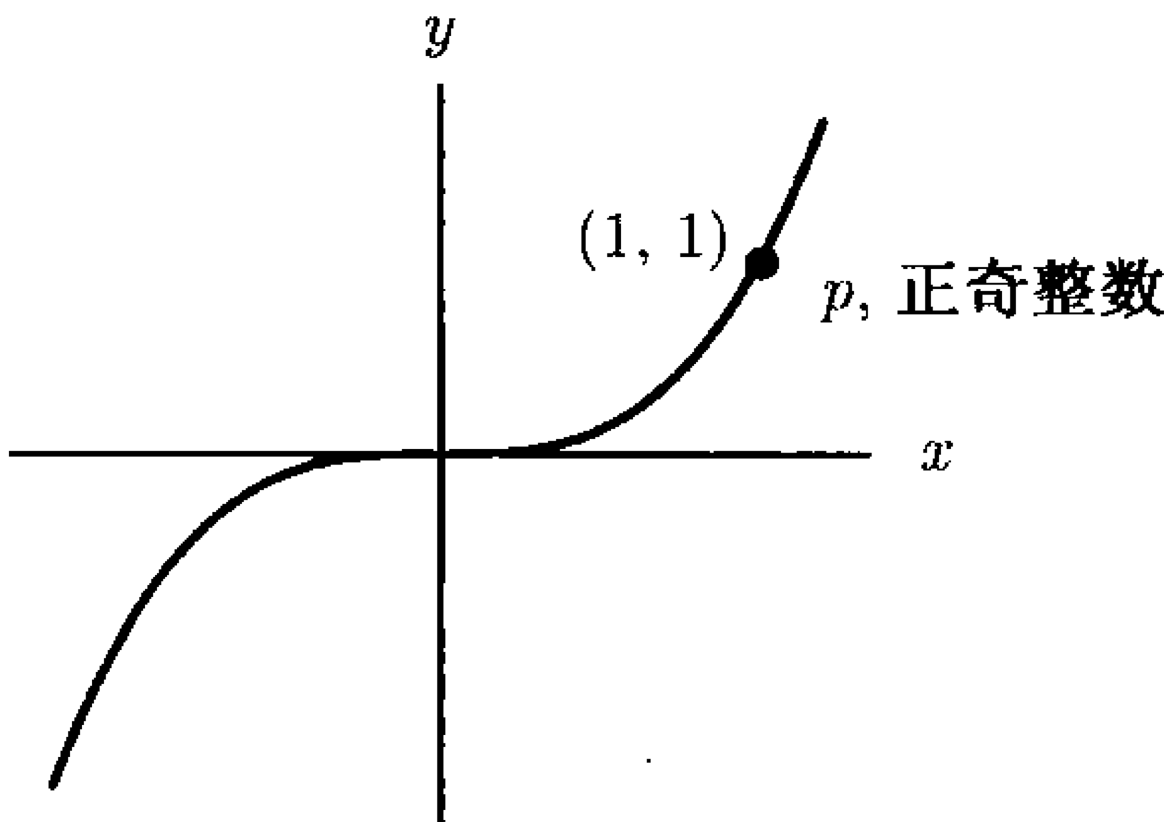
线性函数：$y=b+mx$

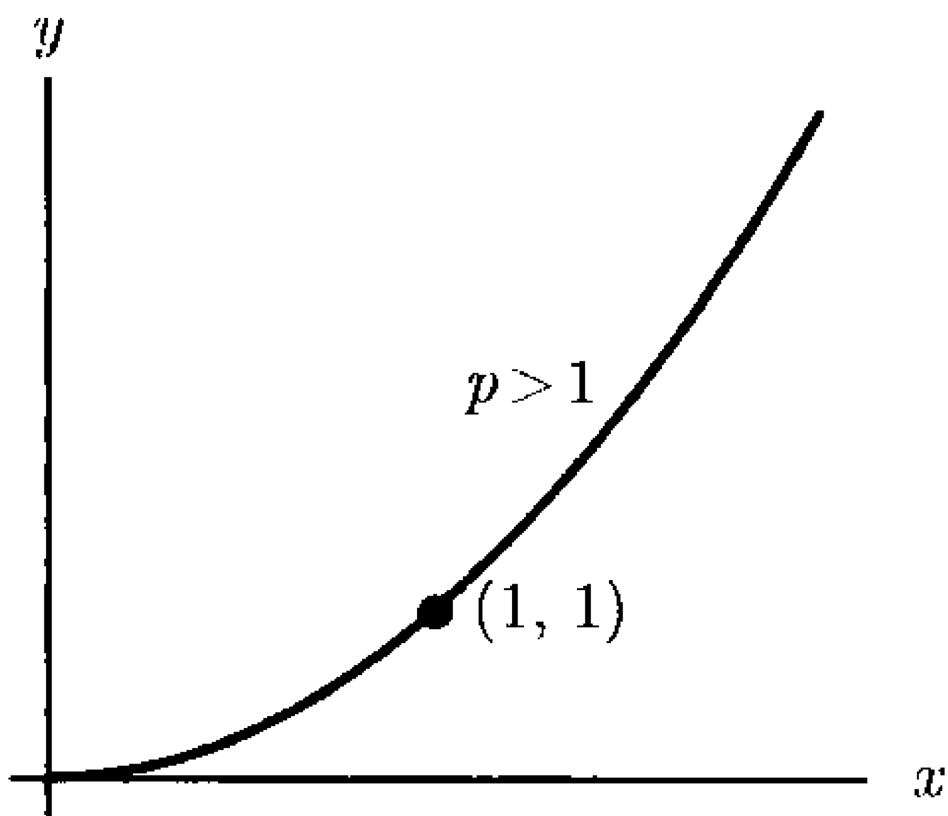


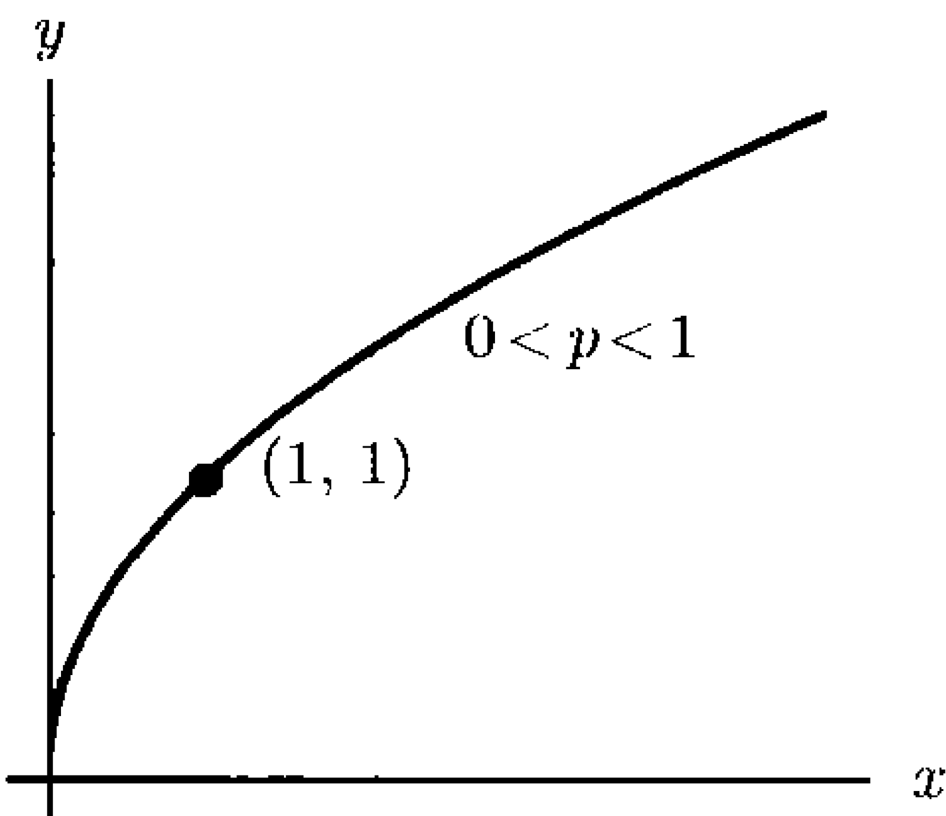


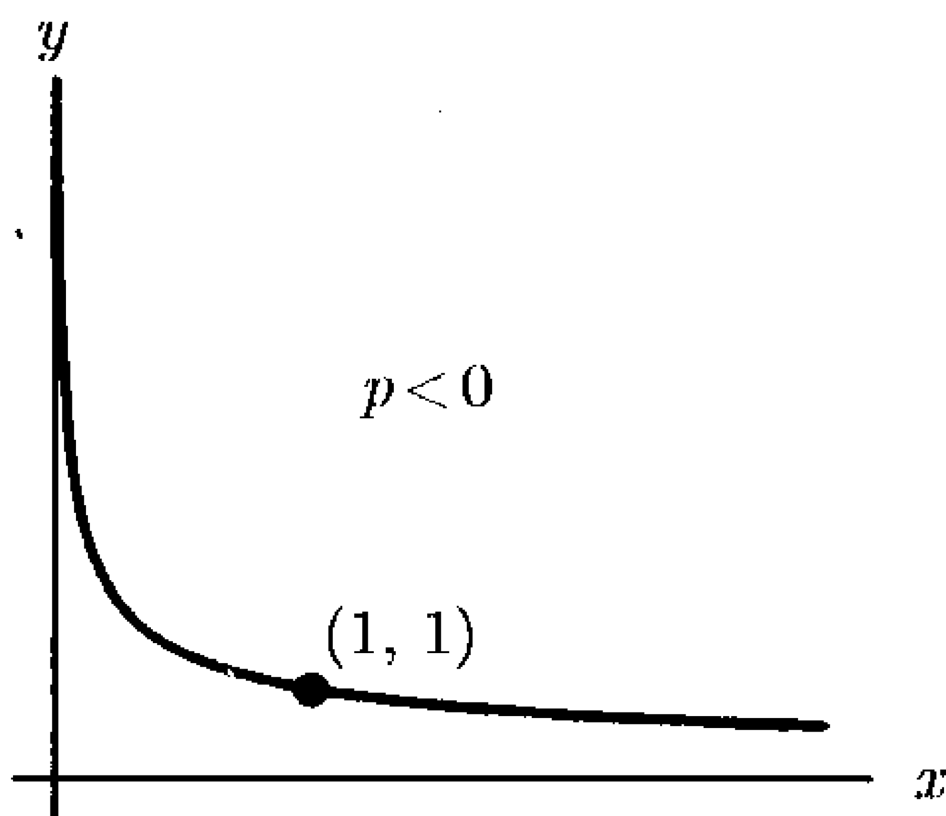
幂函数：$y=x^p$



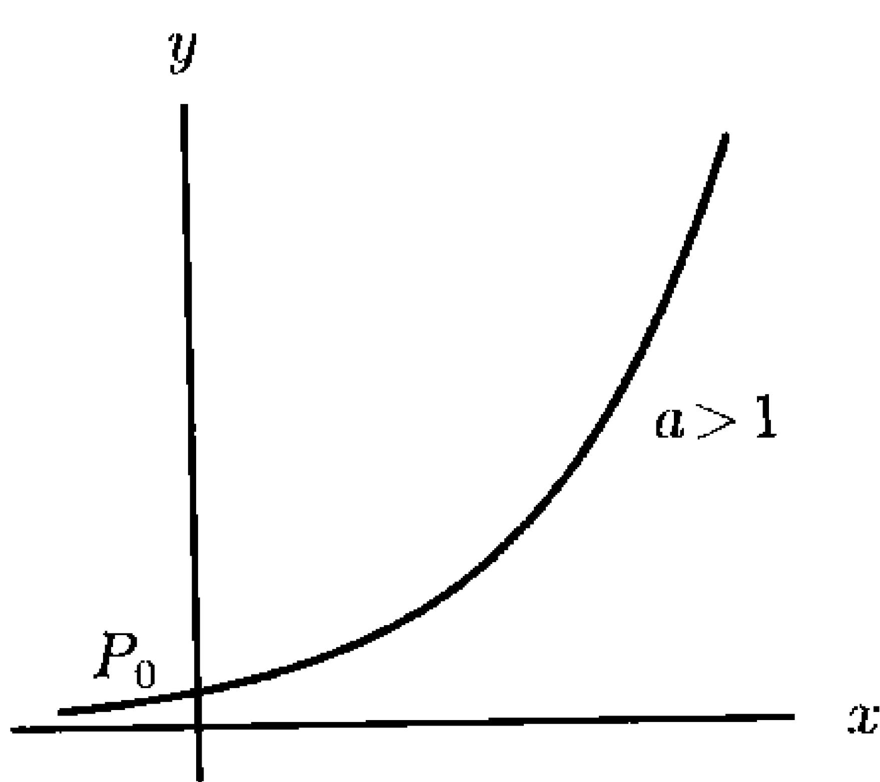


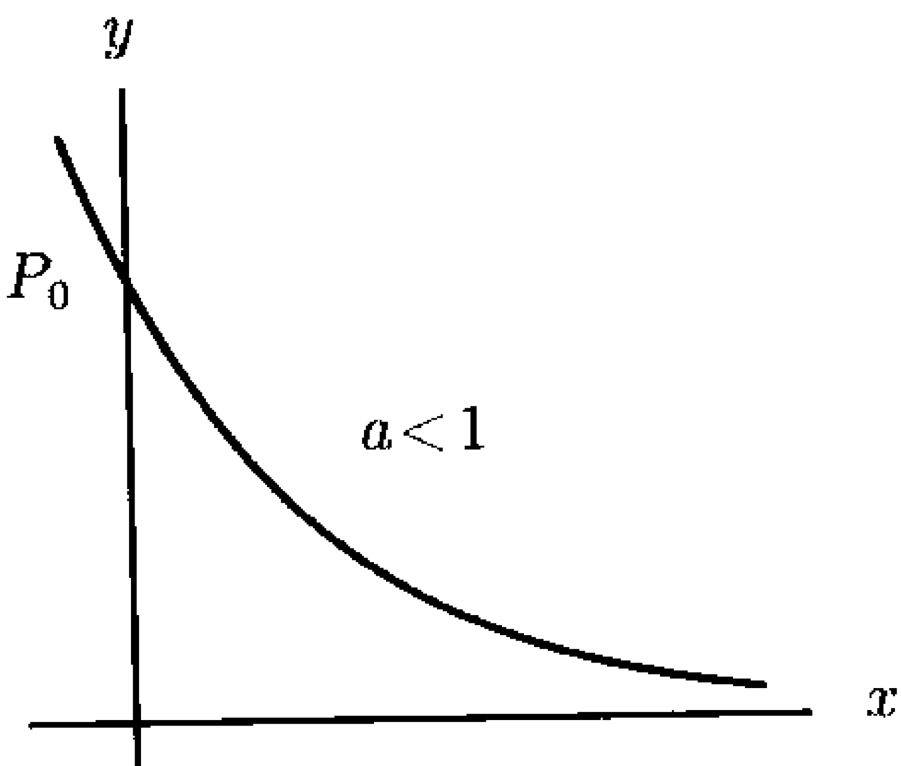




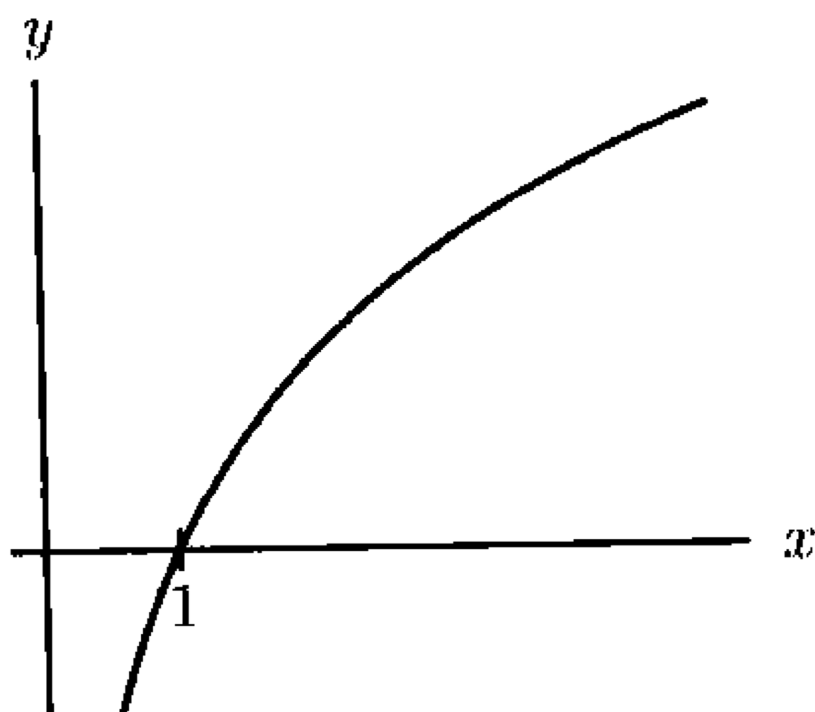


指数函数： $y = P_0a^x$

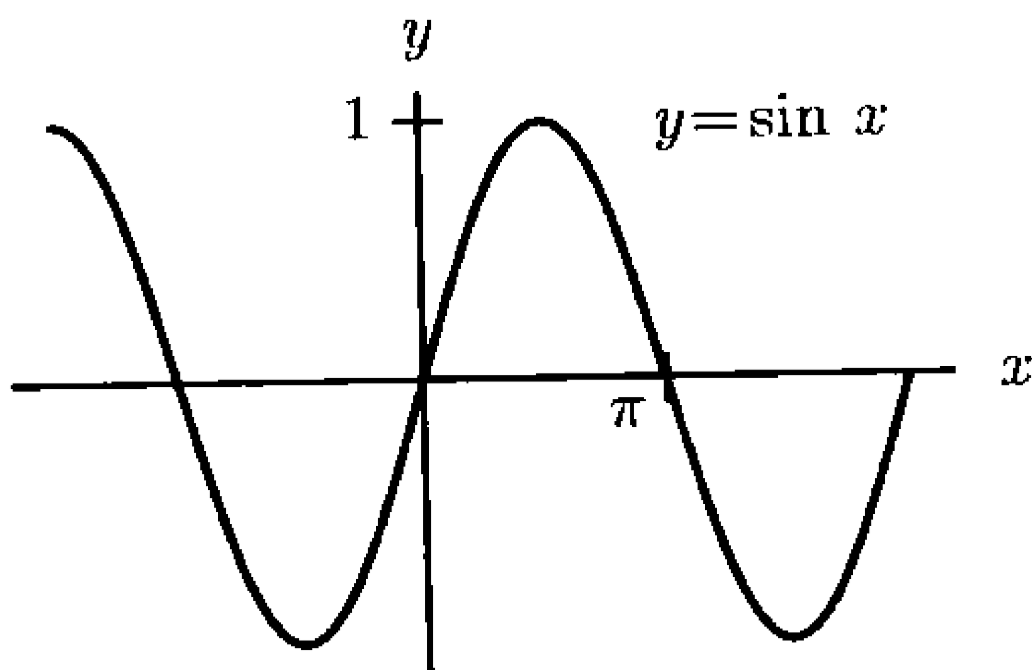


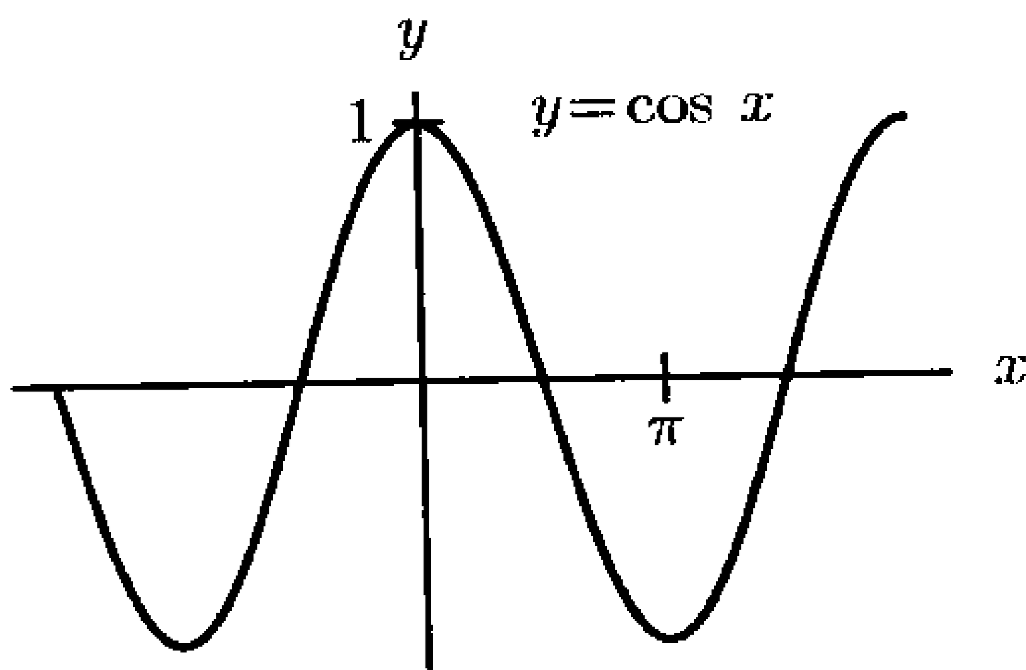


对数函数： $y = \ln x$

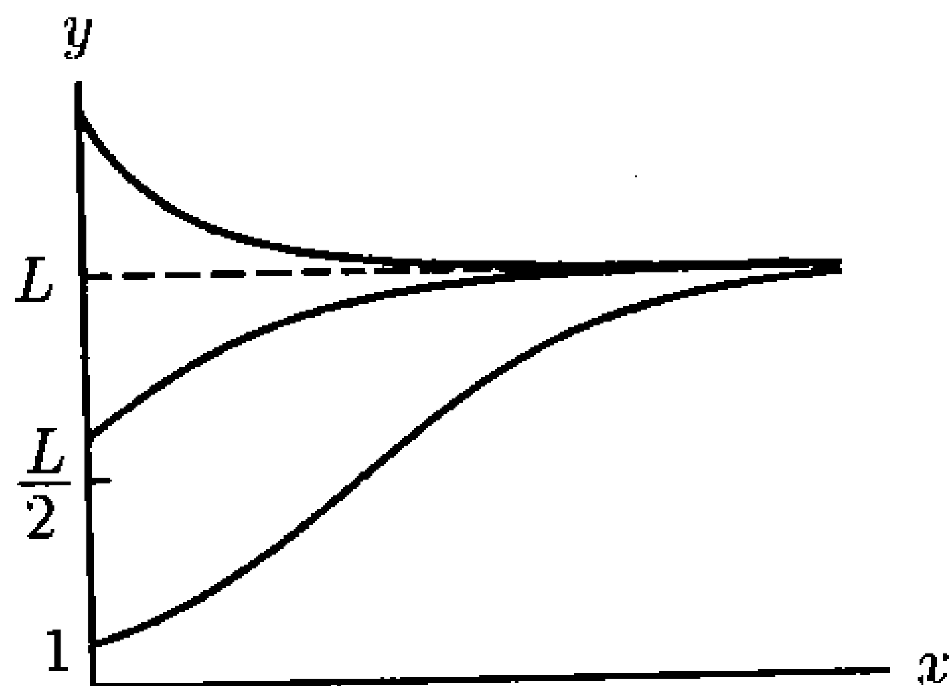


周期函数

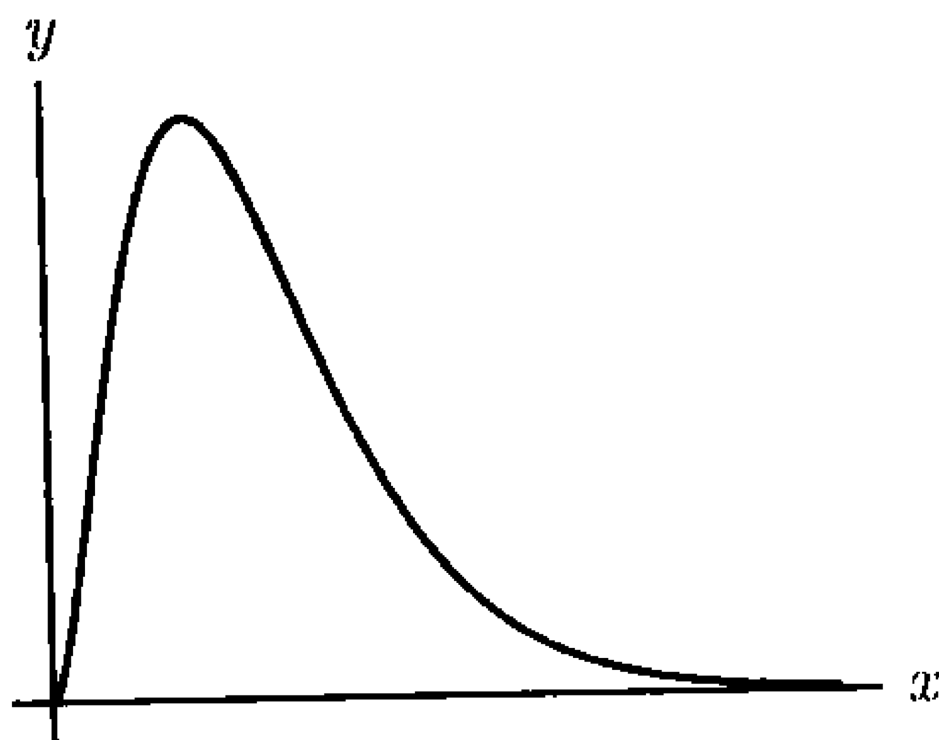




Logistic 函数： $y = \frac{L}{1+Ce^{-kx}}$



电涌函数： $y = axe^{-bx}$



公式速查: 代数

直线

过 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的直线斜率:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

过 (x_1, y_1), 斜率为 m 的直线的点斜式方程:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

斜率为 m, y 轴截距为 b 的直线的斜截式方程:

$$y = b + mx$$

零指数, 负指数和分数指数的定义

$$a^0 = 1,\ a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{及一般形式} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

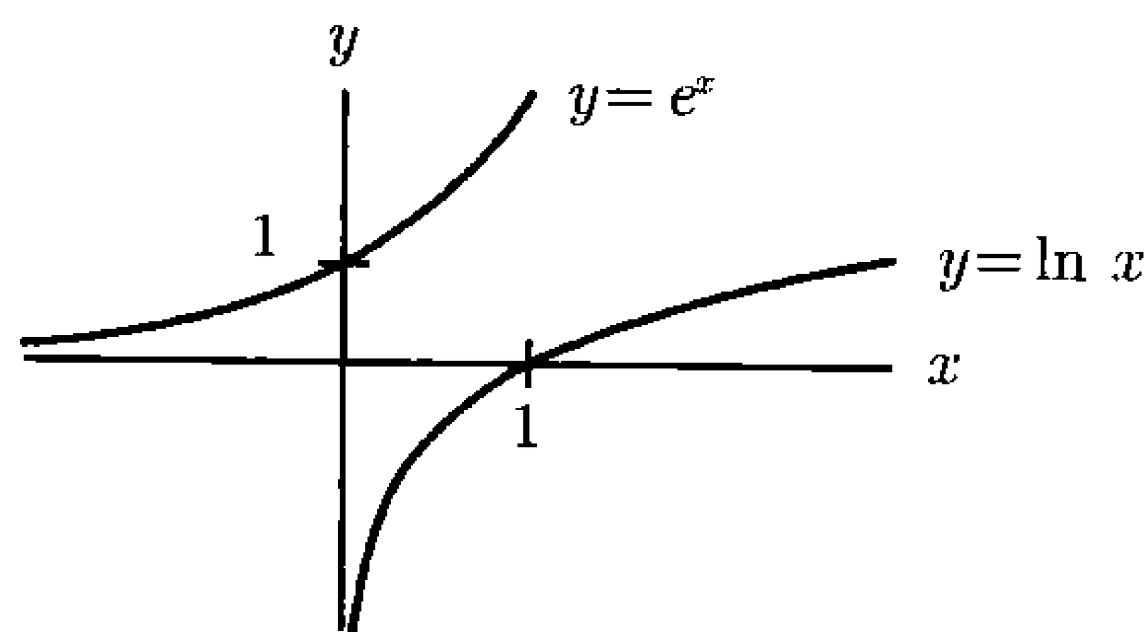
$$a^{1/2} = \sqrt{a},\ a^{1/3} = \sqrt[3]{a} \quad \text{及一般形式} \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \text{ 或 } a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

指数函数运算法则

1. $a^x \cdot a^t = a^{x+t}$ 例如, $2^4 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^7$
2. $\dfrac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$ 例如, $\dfrac{2^4}{2^3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^1$
3. $(a^x)^t = a^{xt}$ 例如, $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^6$

自然对数的定义

$y = \ln x$ 意思就是 $\mathrm{e}^y = x$, 例如, $\ln 1 = 0$, 因为 $\mathrm{e}^0 = 1$.



自然对数运算法则

$$\ln(AB) = \ln A + \ln B$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$$

$$\ln A^p = p \ln A$$

等价表达式

$$\ln e^{x} = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

公式速查：微积分

微分公式

1. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $(kf(x))' = kf'(x)$
3. $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
6. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
7. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$
8. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \ (a > 0)$
9. $\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$
10. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
11. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

积分公式

1. $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C,\ n \neq -1$
2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int e^{kx} dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$

版权声明

Original edition, entitled *Applied Calculus*, third edition, by Deborah Hughes-Hallett, Andrew M. Gleason, Patti Frazer Lock, Daniel E. Flath, et al., ISBN 978-0-471-68121-2, published by John Wiley & Sons, Inc.

实用微积分

第 3 版

由微积分联合会组织编写，美国国家科学基金优先赞助.

D. Hughes-Hallett
亚利桑那大学

W. G. McCallum
亚利桑那大学

A. M. Gleason
哈佛大学

B. G. Osgood
斯坦福大学

P. F. Lock
圣劳伦斯大学

D. Quinney
基尔大学

D. E. Flath
麦卡莱斯特学院

K. Rhea
密歇根大学

D. O. Lomen
亚利桑那大学

J. Tecosky-Feldman
哈弗福德学院

D. Lovelock
亚利桑那大学

T. W. Tucker
科尔盖特大学

协助

O. K. Bretscher
科尔比学院

S. P. Gordon
纽约州立大学法明代尔分校

E. Connally
哈佛大学成教学院

A. Pasquale
切姆斯福德高中

R. D. Porter
东北大学

J. B. Thrash
南密西西比大学

协调

E. J. Marks

献给 Robin, Kari, Eric 和 Dennis

以及

Laura, Pearl, Felix, Natt, Isaac 和 Matthias

前　　言

微积分是人类智慧的最伟大成就之一. 300 年前, 受天文学的影响, 牛顿和莱布尼茨建立了微积分的思想. 此后的每个世纪, 微积分都显示了其在解决数学、物理学、工程、社会科学和生物学问题的威力.

微积分有如此的成就是由于它具有能够将复杂的问题转化为简单的法则和过程的非凡能力. 在讲授微积分时存在这样的危险: 除了法则和过程以外, 可能就没什么可讲的了——从而忽略了数学本质及其实际价值. 我们将继续尝试在这个版本中既讲授微积分的概念又讲授微积分的过程.

视角: 概念的理解

我们的目的是让学生透彻地理解微积分的思想, 为后续的课程打下坚实的基础. 在着手写作本书时, 我们先与商业、经济、生物以及其他领域的教员进行交谈, 也和许多讲授实用微积分的数学老师进行了交流. 根据这些讨论的结果, 我们在本书中引入了一些新的内容, 同时删除了一些传统的难以讲透的内容. 在这个过程中, 我们还调整了一些内容的重点.

第 3 版: 灵活性和四种方式

自第 1 版, 我们在概念、模型和技巧间做出合理的安排, 为微积分教师提供了更宽的选择范围. 我们选定了四种方式, 着重强调函数的多种表示, 鼓励学生对所提供的材料进行思考.

学生越是积极主动越会学到更多的东西, 所以我们觉得课本中的练习是极其重要的. 我们的习题往往在一些很多人想当然的地方检查学生的理解. 这些习题所具有的创造性和多样性受到高度赞扬, 其影响力已经远远超出本教材使用者的范围. 我们始终遵循以下原则.

- 我们的习题是多变的. 一些题容易而另一些题则很具挑战性. 许多习题需要学生理解其中的概念, 如果只是模仿课本中的例题是做不出来的.
- 四种方式: 阐述问题的方式有几何图形、数值规律、解析表达式和语言叙述, 每种场合用最适当的方式进行阐述.

- 导数和定积分章节 (第 2 章和第 5 章) 中的关键概念在本课程的开头 (第 1 章的后面) 作了一些铺垫.
- 由于在一个学期的实用微积分课程中, 不同的使用者经常会选择不同的内容, 所以我们将这本书构思为既可以适合一个学期的课程 (在选择内容时具有很大的灵活性) 又可以适合两个学期的课程. 在教师手册中提供了供参考的教学大纲.

第 3 版的变化

第 3 版的视角同前两版相同. 前两版曾被许多学校采纳过. 有的学校将其作为两学期制和四学期制的教材, 有的在大课和小课上讲授, 有的在计算机实验课、小组和传统的分班上讲授, 并结合很多不同的数学软件使用. 在准备第 3 版时, 我们征求了许多使用过本教材的数学老师的意见, 并不断与一些应用学科的同事讨论他们的学生在数学上的需求. 我们获得了很多有价值的建议. 这些意见会考虑纳入书中, 同时保持我们原有的对少量主题重点处理的理念. 这一版所作的修改如下.

- 更新了全书的数据. 增加了更多的习题以及一些新的课外自修制表项目.
- 简化了 1.4 节中税收相关的材料, 并且增加了一些较容易的习题.
- “由数据拟合公式”一节中的“相关模型”包含了对相关性的介绍.
- 最大利润的内容从 2.5 节移到了 4.4 节.
- 关于链式法则的 3.3 节扩充了更多的实际应用, 尤其是对由图形给出的函数.
- 4.3 节和 4.4 节包含了更多中等水平的习题. 第 4 章中关于经济学的内容写得更加明晰.
- 第 9 章给出了引入对偶概念的新项目, 这一概念在经济学中很重要.
- 第 10 章中的“相关理论”——分离变量法——是新的, 并且增加了一个关于 2003 年爆发 SARS 的新项目.
- 增加了两个新的课外自修制表项目: 其一关于买新车还是买旧车, 另一个关于第一次世界大战期间流行性感冒的爆发.
- 设计了预先测验, 以督促学生在学习本课程之前对需要的知识进行复习.

学生应具备的知识背景

本书是给工商管理、社会科学和生命科学专业的学生使用的. 我们编写的内容对于准备充分的学生是具有启发性的, 同时也适合代数知识较弱的学生. 给出数值上的、图形上的和代数上的处理方法是给学生提供多种掌握这些内容的途径. 这些

方法能够促进学生坚持, 从而降低不及格率. 附录中给出了关于预备知识的预先测验, 代数复习材料可以从学生用书指南中找到, 网址: www.wiley.com/college.

技 术

我们利用计算机和绘图仪帮助学生建立数学思维. 例如, 利用绘图仪对准函数图形上的目标进行放大是观察局部直线性的极佳方式. 有效地利用技术作为工具的能力很重要. 希望学生运用自己的判断确定技术在什么地方是有用的.

阅读本书不需要任何特别的软件或技术. 教师已经通过绘图仪、作图软件和计算机代数系统运用这些材料了. 任何具有作函数图形和演算数值积分能力的技术就足够了.

本书内容

这里给出了我们对如何进行实用微积分教学的观点. 它非常灵活, 能适合各个课程的需要和要求. 可以很容易地进行内容的添加、删除和顺序调整.

第 1 章: 函数和变化

第 1 章介绍函数的概念和变化的思想, 包括总变化和变化率之间的区别. 这里介绍了所有初等函数. 虽然这些函数或许为大家所熟悉, 但是它们的图形、数值、语言描述以及模型处理可能较为新奇. 我们及早地介绍指数函数, 是因为它们是理解现实世界变化过程的基础.

相关模型: 第一节向学生介绍由数据拟合公式的方法, 第二节进一步探讨了复利以及数 e 的定义.

相关理论: 本节讨论趋于无穷大的极限过程以及终极性态.

第 2 章: 变化率: 导数

第 2 章按照四种方式介绍导数的关键概念. 其目的是让学生理解导数及其解释为瞬时变化率的实际意义. 学完了这一章, 学生能够通过差商近似地求出导数值, 从图形上将导数显现为图形的斜率, 并且解释各种应用中一阶和二阶导数的含义. 学生还能够理解边际的概念, 并且认识到导数本身也是一个函数.

相关理论: 本节讨论极限和连续性, 并且介绍导数的符号定义.

第 3 章: 微分捷径

介绍第 1 章所有函数的导数, 以及乘积函数、商函数和复合函数的求导法则.

相关理论: 本节利用导数的定义获得求导法则.

集中练习: 本节提供了一批求导技巧方面的习题.

第 4 章: 导数的应用

这一章的目的是使学生能够运用导数解决问题, 其中包括最优化和作图. 其他内容就不多介绍了.

第 5 章: 累积变化: 定积分

这一章按照第 2 章的精神介绍定积分中的关键概念.

其目的是让学生理解定积分实际上是 Riemann 和的极限, 通过微积分基本定理明白导数和定积分之间的联系. 同第 2 章一样, 我们深入地介绍基本定义而不探究其中的技术. 通过学习, 学生将很好地掌握作为 Riemann 和极限的定积分, 具有数值上计算定积分值的能力, 并能够在各种场合下理解定积分的含义.

第 5 章可以毫无困难地紧接着第 2 章进行讲授.

相关理论: 本节介绍微积分第二基本定理和定积分的性质.

第 6 章: 定积分的应用

这一章介绍定积分的应用. 在此不作全面介绍.

第 7 章: 原函数

这一章从图形、数值和解析的观点介绍原函数, 包括换元积分法. 微积分基本定理常用来求定积分的值和分析原函数.

集中练习: 本节提供了一批积分技巧方面的习题.

第 8 章: 概率

这一章介绍概率密度函数、累积分布函数、中位数和均值.

第 9 章: 多元函数

这一章利用等值线图、公式和图表介绍二元函数. 向学生传授认识等值线图并进行图形思维、认识图表并进行数值思维的技巧, 并且结合代数技巧将它们应用到实际模型中. 用图形、数值和符号的观点介绍偏导数思想. 然后将偏导数应用于最优化问题, 并且用 Lagrange 乘数法讨论约束最优化问题.

相关理论: 本节利用最优化导出回归直线公式.

第 10 章: 运用微分方程建立数学模型

这一章介绍微分方程, 重点在于建模、定性解和解释. 它还包括一系列应用于人口模型、疾病的传播、捕食者和猎物之间相互影响的微分方程.

相关理论: 本节说明分离变量的方法.

第 11 章: 几何级数

这一章介绍几何级数以及它们在商业、经济和生命科学中的应用.

辅 助 材 料

辅助材料如下.

- **教师手册和试题库**, 包括教学提示、教学大纲样板、计算程序、幻灯片光盘以及每节的测试题和解答.
- **教师解答手册**, 包括对所有习题的完整解答.
- **学生解答手册**, 包括对奇数号习题的完整解答.
- **学生学习指导**, 包括对直接学习本书的学生提供的额外帮助.
- **教师附加材料**, 在以下网站上可以找到课文中特别关注点的详细阐述以及加密的教师助手电子版: www.wiley.com/college.
- **学生附加材料**, 包括代数复习和网络测试的学生用书指南网址是 www.wiley.com/college.

入门知识手册系列如下.

- **数学入门**, 第 2 版, 波士顿学院的 C-K. Cheung, G. E. Keough, Robert H. Gross 和 Charles Landraitis 著.
- **Maple 入门**, 第 2 版, 波士顿学院的 C-K. Cheung, G. E. Keough, 和圣路易斯大学的 Michael May 著.
- **T184/83 绘图仪指南**, 西雅图大学的 Carl Swenson 著.
- **T1-89 绘图仪指南**, 西雅图大学的 Carl Swenson 著.

概念测试

以哈佛大学物理学家 Eric Mazur 的开创性工作为模版设计的概念测试, 是一些能够促进课堂学习积极性的问题, 尤其是对大课. 我们的评价数据显示, 利用概念测试教出来的成绩好的学生与利用传统方法教出来的成绩好的学生的比例, 在概念题上是 73%比 17%, 在计算题上是 63%比 54%. 本书配有补充材料, 它含有按节设计的概念测试.

Wiley 教师网络

教师对等网络致力于有效地使用课堂上的技术. 这个群体可以帮助你应用创新的课堂教学技术, 实施特殊的软件包. 请访问 www.where faculty connect. com 获取更多信息.

eGrade Plus

eGrade Plus 是一个功能强大的在线工具, 它提供一个易学易用网站上的完善的集成教学资源包. eGrade Plus 含有课本的在线形式, 同时含有丰富的学生辅助材料集成电子版, 其中包括学生解答手册、学生学习指导、代数和三角复习. 教师可以访问教师手册电子版、教师解答电子版、新增项目以及其他有价值的资源. eGrade Plus 还提供了一个在线的评价系统, 包括全面的成绩册, 其中含有 1000 多道技巧方面的习题, 这些习题都来自每一章的习题部分. 请观看我们的在线演示片: www.wile.com/college/egradeplus. 在这里你可以找到关于eGrade Plus 的特色和效果的其他信息, 也可以找到如何申请eGrade Plus 的 "测试驱动" 以及如何在课堂上使用.

致 谢

首先, 我们要向美国国家科学基金会, 特别向 Louise Raphael, John Kenelly, John Bradley, Bill Haver 和 James Lightbourne 表达深深的谢意, 感谢他们相信我们具有创作充满活力的微积分课程体系的能力. 我们还要感谢我们的顾问委员会成员 Benita Albert, Lida Barret, Bob Davis, Lovenia DeConge-Watson, John Dossey, Ron Douglas, Don Lewis, Seymour Parter, John Prados 和 Steve Rodi, 感谢他们的不断指导和建议.

另外, 我们要向鼓励我们撰写这本书和提供许多有益评论的人们表达深深的谢意. 我们要感谢下面这些人, 感谢他们为了我们的项目顺利完成所做的一切: Ruth Baruth, Alon Ben-David, Jeffery Bergen, Ted Bick, Graeme Bird, Kelly Boyle, Kelly Brooks, Lucille Buonocore, J. Curtis Chipman, Dipa Choudhury, Larry Crone, Jane Devoe, Jeff Edmunds, Gail Ferrell, Joe Fiedler, Holland Filgo, Sally Fischbeck, David Flath, Ron Frazer, Lynn Garner, David Graser, Ole Hald, Jenny Harrison, John Hennessey, Yvette Hester, David Hornung, Richard Iltis, Adrian Iovita, Jerry Johnson, Thomas Judson, Bonnie Kelly, Mary Kittell, Donna Krawczyk, Theodore Laetsch, T.-Y. Lam, Sylvain Laroche,Kurt Lemmert, Suzanne Lenhart, Madelyn Lesure, Janny Leung, Ben Levitt, Thomas Lucas, Alfred Manaster, Peter McClure, Georgia Kamvosoulis Mederer, Kurt Mederer, David Meredith, Nolan Miller, Mohammad Moazzam, Saadat Moussavi, Patricia Oakley, Mary Ellen O'Leary, Jim Osterburg, Mary Parker, Ruth Parsons, Greg Peters, Laura Piscitelli, Kim Presser, Sarah Richardson, Laurie Rosatone, Daniel Rovey, Harry Row, Kenneth Santor, Anne Scanlan-Rohrer, Alfred Schipke, Virginia Stallings, Brian Stanley, Marian Stas, Mary Jane Sterling, Robert

Styer, "Suds" Sudholz, Thomas Timchek, Jake Thomas, Praja Trivedi, J. Jerry Uhl, Nicola Viegi, Tilaka Vijithakumara, Alan Weinstein, Rachel Deyette Werkema, Aaron Wootton, Hung-Hsi Wu, 和 Sam Xu.

下列审稿人员的审查报告对第 3 版的编写非常有益:

Victor Akatsa, Carol Blumberg, Mary Ann Collier, Murray Eisenberg, Donna Fatheree, Dan Fuller, Ken Hannsgen, Marek Kossowski, Sheri Lehavi, Deborah Lurie, Jan Mays, Jeffery Meyer, Bobra Palmer, Barry Peratt, Russ Potter, Ken Price, Maijian Qian, Emily Roth, Lorenzo Traldi, Joan Weiss 和 Christos Xenophontos.

下列审稿人员的审查报告对第 2 版的编写非常有益:

Victor Akatsa, Carol Joyce Blumberg, Jennifer Fowler, Helen Hancock, Ken Hannsgen, John Haverhals, Mako E.Haruta, Linda Hill, Thom Kline, Jill Messer Lamping, Dennis Lewandowski, Lige Li, William O. Martin, Ted Marsden, Michael Mocciola, Maijian Qian, Joyce Quella, Peter Penner, Barry Peratt, Emily Roth, Jerry Schuur, Barbara Shabell, Peter Sternberg, Virginia Stover, Bruce Yoshiwara 和 Katherine Yoshiwara.

特别感谢 Scott Clark 为数据集所做的工作.

Deborah Hughes-Hallett　David O. Lomen　Douglas Quinney
Andrew M. Gleason　David Lovelock　Karen Rhea
Patti Frazer Lock　William G. McCallum　Jeff Tecosky-Feldman
Daniel E. Flath　Brad G. Osgood　Thomas W. Tucker

致学生：如何学习这本书

- 本书与你使用过的数学课本可能不同, 所以预先了解其中的区别是有益的. 在每个阶段, 本书都强调你所使用的符号的含义 (在实际、图形和数值方面). 较少地强调 "数字游戏" 和应用公式, 而更多地强调公式的解释. 经常会要求你用文字说明你的想法, 用图形解释你的答案.
- 本书用平易的语言讲述了微积分的主要思想. 成功地使用本书取决于对书中所阐述的思想要认真地阅读、不断地提问和深入地思考. 除了设计的例题外, 还要仔细地阅读课文, 这样对你很有帮助.
- 课文中很少有和作业一样的例题, 因此不能通过寻找 "已经做好的" 例题来完成作业. 顺利地完成作业来自于对微积分思想的把握.
- 书中很多问题的正确处理方法和正确解答都不只一种. 有时解答一个问题要依靠常识性想法, 这些想法在问题中没有明确提出而是来自于你的日常生活.
- 本书中的一些问题基于你已经掌握了作图仪和计算器的假设. 有很多场合你可能没有办法正确解答一个问题, 但是你可以利用作图仪和计算器给出一个合理的近似解.
- 本书对描述函数的四种方法——图形的 (一个图像)、数值的 (一个数值表)、代数的 (一个公式) 和语言的 (一段话)——给予同等的重视. 有时候很容易将一个问题从一种方式转化为另一种方式. 例如, 你可以用抛物线的方程代替它的图形, 或者画一个数值表观察它的性态. 重要的是你的方法要灵活: 如果考察问题的一个途径失败了就要试一下另一个.
- 使用这本书的学生已经体会到, 在一个小组内探讨这些问题是很有帮助的. 有大量的问题都不是落入俗套的, 你的同伴提供的其他观点有助于攻克这些问题. 如果小组作业行不通, 看看你的老师是否能够组织一个研讨会, 在这个研讨会上可以讨论这些问题.
- 你也许感到纳闷, 从这本书中究竟能学到什么. 答案是, 如果你坚持不懈地努力, 就会对人类创造力的至高无上的成就之一——微积分——获得真实的理解, 同时你会真正意识到在科技时代数学的威力.

目 录

第 1 章　函数和变化

函数确实是数学的基础. 在日常用语中, 我们有 "股票市场的行为是用户信心的函数" 或者 "病人的血压是所开药物的函数". 在每种情形下, *函数*均表达了这样的思想: 对一个事实的认识将会引发我们对另一个事实的认识. 在数学中, 最重要的函数就体现了这种思想, 即在这些函数中对一个数的认识可以引发我们对另一个数的认识. 例如, 如果知道正方形的边长, 就能确定它的面积; 如果知道圆的周长, 就能确定它的半径.

微积分始于对函数的研究. 本章通过观察一些普通函数的性态来为我们学习微积分奠定基础. 另外, 我们还要考虑如何掌握表示这些函数的图形、表格以及公式.

微积分使我们能够研究变化. 本章将考虑如何测量变化量和平均变化率.

1.1　什么是函数

在数学中, *函数*用来表示一个量对另一个量的依赖关系.

我们来看一个例子. 2004 年 12 月, 明尼苏达 International Fall 市的气温在寒假期间异乎寻常的低. 表 1-1 给出了 12 月 17~26 日每天的低温.

表 1-1　2004 年 12 月 17~26 日, International Fall 市每天的低温

日期	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
低温 (°F)	−14	−21	−30	5	−9	−23	−31	−35	−14	−22

也许你没有想到像气温一样无法预言的东西还会是函数, 然而温度的确是日期的函数, 因为每天产生一个且只产生一个低温. 没有关于气温的公式 (否则我们就不需要气象局了), 不过气温仍满足函数的定义: 对每个日期 t, 有唯一的低温 L 与其对应.

我们定义函数如下.

> **函数**是一个法则, 即取某种数作为输入并且对每个数分配一个确定的输出数. 所有输入数的集合叫做函数的**定义域**, 而输出数的集合叫做函数的**值域**.

输入叫做*自变量*, 而输出叫做*因变量*. 在气温的例子中, 日期的集合{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26}是定义域, 而气温的集合{−35, −31, −30, −23, −22, −21, −14, −9, 5}是值域. 我们称这个函数为 f, 并记作 $L = f(t)$. 注意, 一个函数可以对

不同的输入有同样的输出 (例如 12 月 17 日和 25 日).

一些量 (如日期) 是**离散的**, 意思是说它们只取某种孤立的值 (日期一定是整数). 另一些量 (如时间) 是**连续的**, 则指它们可以取任何数. 对于连续的变量, 定义域和值域通常用区间符号来记:

满足 $a \leqslant t \leqslant b$ 的数 t 的集合记作 $[a, b]$;

满足 $a < t < b$ 的数 t 的集合记作 (a, b).

1.1.1 四种方式: 表格、图形、公式和语言

函数可以由表格、图形、公式和语言叙述来表示. 例如, 给出 International Fall 市中每天低温的函数可以由图 1-1 中的图形表示, 也可以由表 1-1 表示.

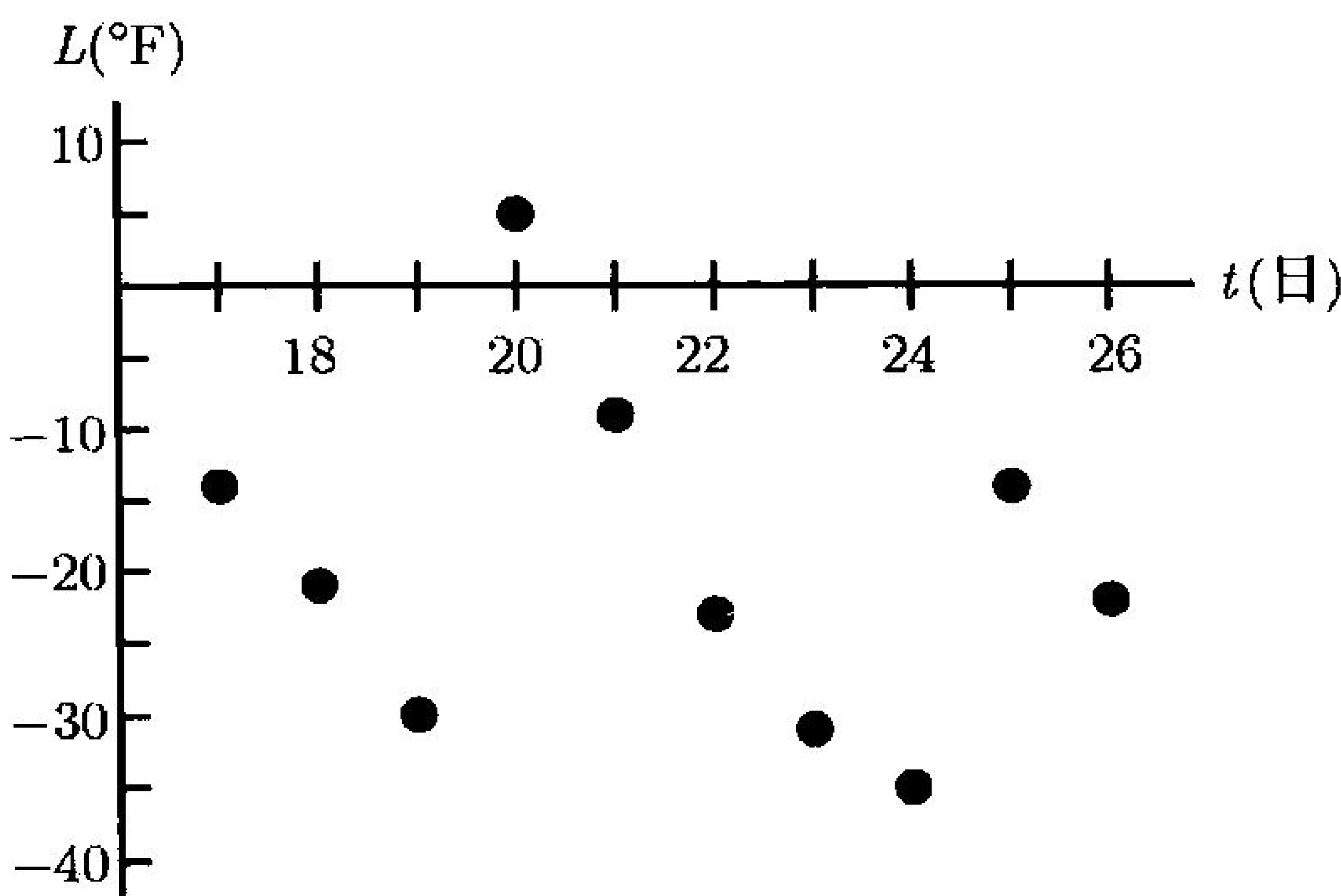


图 1-1 2004 年 12 月 International Fall 市的气温

另一些函数由图像自然产生. 图 1-2 中的心电图 (electrocardiogram, EKG) 反映了两个病人的心跳, 一个正常另一个不正常. 也许能够构造一个近似 EKG 函数的公式, 但我们很少这么做. 医生需要知道的是重复的图形, 比起公式, 医生更容易从图像中看出来. 每个 EKG 给出的是作为时间函数的心肌细胞的电活动.

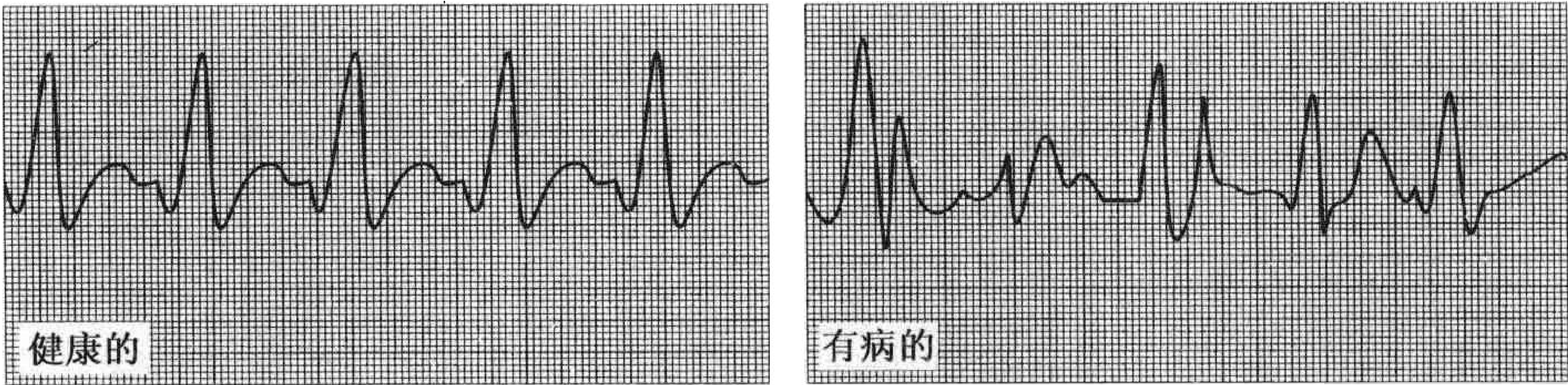


图 1-2 两个病人的 EKG 读数

来看雪树蟋蟀. 可能会令很多人惊讶, 所有这种蟋蟀在相同的气温下总是以同样的频率鸣叫. 这意味着鸣叫频率是气温的函数. 换句话说, 如果我们知道了气温,

那么就能确定鸣叫频率了. 更加令人惊奇的是, 鸣叫频率 C(每分钟鸣叫次数) 随着气温 T(°F) 稳定地增加, 并且可以由公式

$$C = f(T) = 4T - 160$$

计算, 达到一个合理的准确度. 该函数的图形如图 1-3 所示.

由于 $C = f(T)$ 随 T 增加, 所以我们称 f 是**递增函数**.

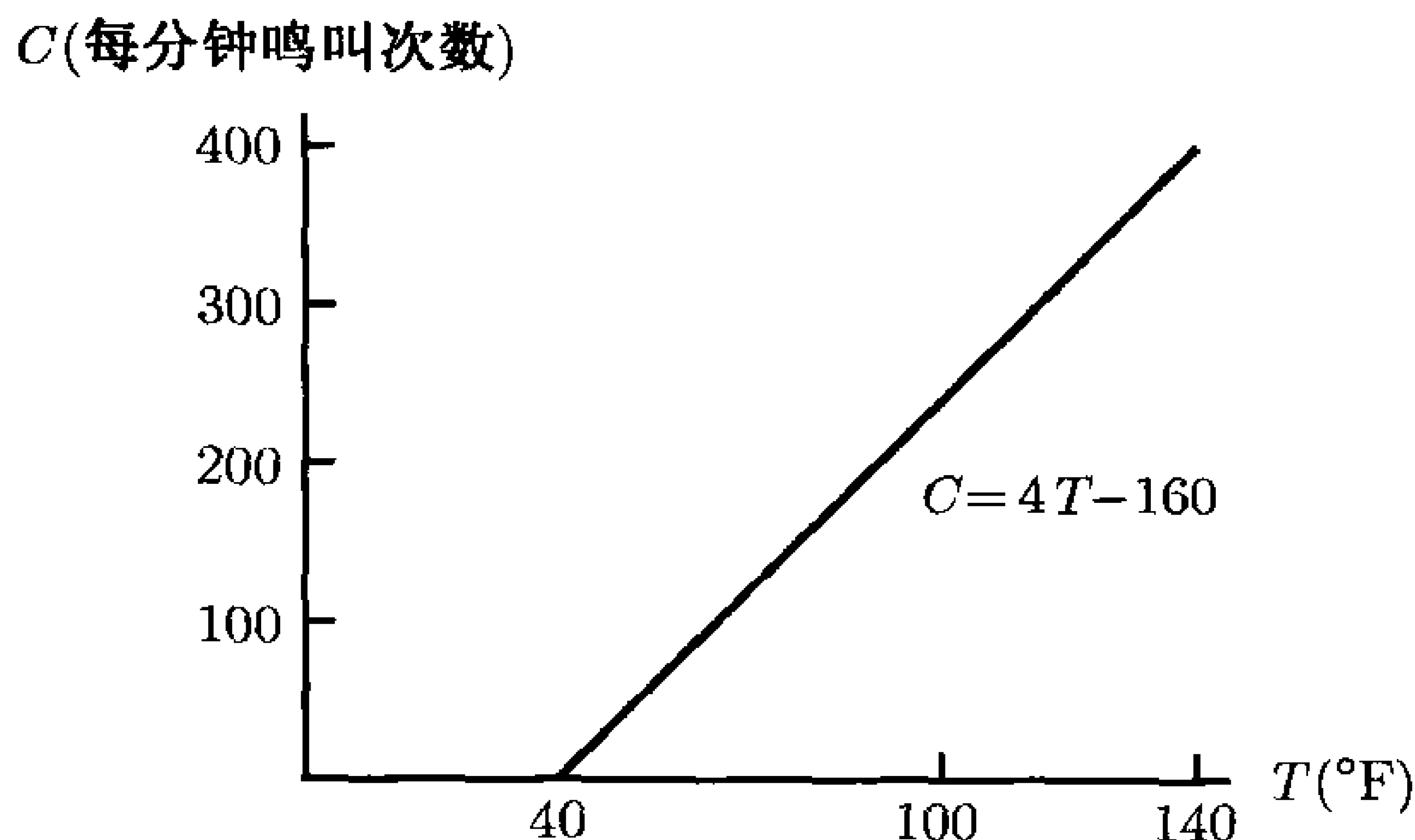


图 1-3 作为气温函数的蟋蟀鸣叫频率

1.1.2 函数符号和截距

我们记 $y = f(t)$ 表示 y 是 t 的函数. 自变量是 t, 因变量是 y, f 是函数名称. 函数图形有**截距**, 在那里图形与水平轴或者垂直轴相交. 水平截距又叫做函数的**零点**.

例 1 汽车的价值 V 是汽车使用时间 a 的函数, 所以 $V = f(a)$.

(a) 如果 V 的单位是千美元而 a 的单位是年, 请就汽车的价值来解释表达式 $f(5) = 9$.

(b) 在同样的单位下, 本田汽车[①] 的价值由 $f(a) = 13.25 - 0.9a$ 估计. 求出并且解释折旧函数 f 的垂直截距和水平截距.

解 (a) 因为 $V = f(a)$, 所以表达式 $f(5) = 9$ 意味着当 $a = 5$ 时 $V = 9$. 这告诉我们当汽车使用 5 年的时候值 9000 美元.

(b) 因为 $V = f(a)$, 所以函数 f 的图形以垂直轴表示汽车的价值, 水平轴表示汽车的使用时间. 垂直截距是 $a = 0$ 时的 V 的值. 它是 $V = f(0) = 13.25$, 所以新的本田汽车值 13 250 美元. 水平截距是使得 $V(a) = 0$ 的 a 的值, 所以

$$13.25 - 0.9a = 0$$

$$a = \frac{13.25}{0.9} = 14.7.$$

本田汽车在使用了 15 年时就没有价值了. □

① 从 Kelley Blue Book(www.kbb.com) 获取的数据.

因为 $V = f(a)$ 随 a 减少, 我们称 f 是递减函数.

习题

1. Dan 跑 x 公里所花费的时间 T(分钟) 是一个函数: $T = f(x)$. 从跑步方面说明表达式 $f(5) = 23$ 的实际含义.

2. 一个城市的人口 P(百万) 是从 1970 年开始的年数 t 的函数, 所以 $P = f(t)$. 从该城市的人口方面说明表达式 $f(35) = 12$ 的含义.

3. 设 $W = f(t)$ 表示阿根廷的小麦产量 (百万吨), 其中 t 是从 1990 年开始的年数. 从小麦产量方面解释表达式 $f(12) = 9$.

4. 每月的销售数量 S 是当月花费在广告上的钱数 a(美元) 的函数, 所以 $S = f(a)$.

(a) 解释表达式 $f(1000) = 3500$.

(b) 图 1-4 中哪个图形更可能表示这个函数?

(c) 该函数图形的垂直截距是什么? 从销售和广告方面进行解释.

5. 图 1-5 表示一个装配线的作为工人人数函数的生产率, 描述它的含义.

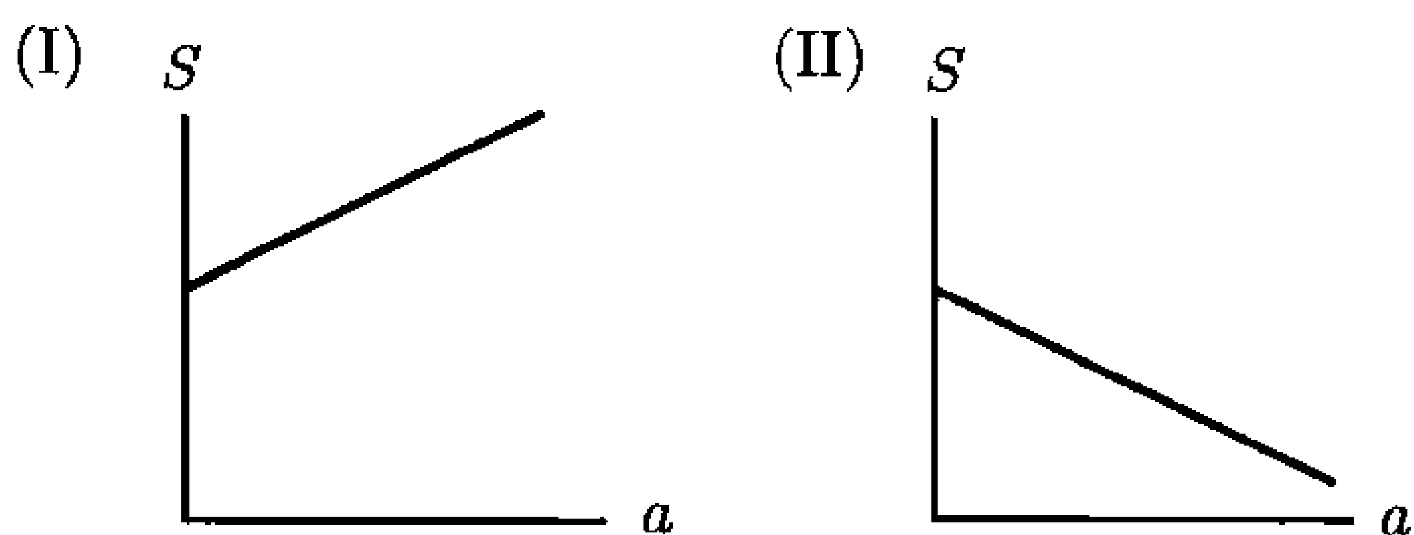


图 1-4

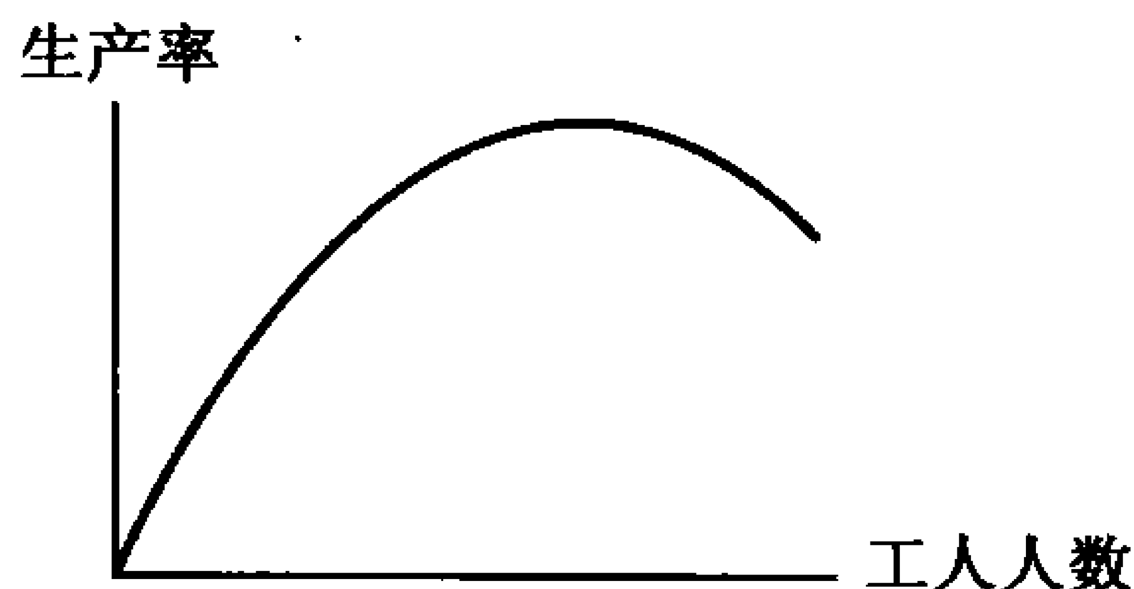


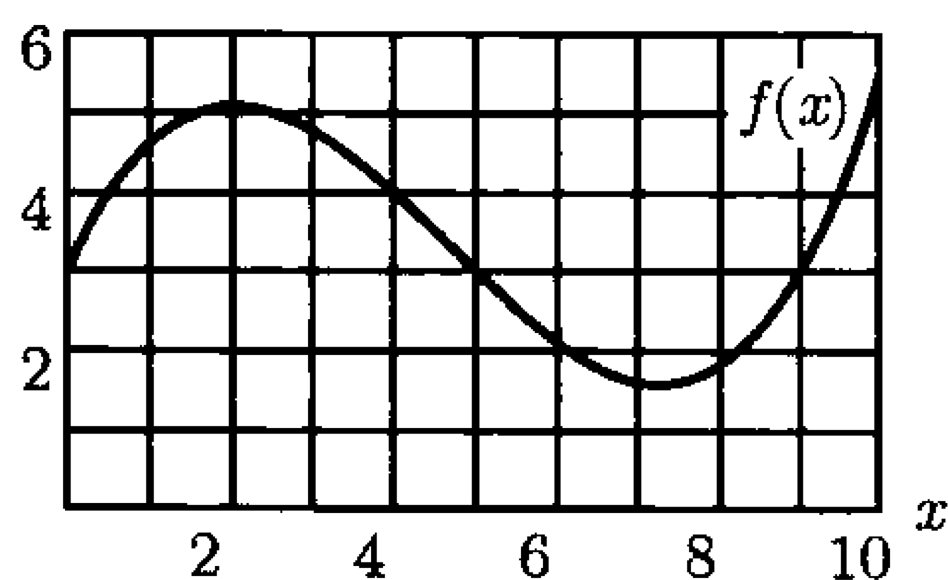
图 1-5

求习题 6~10 中的 $f(5)$.

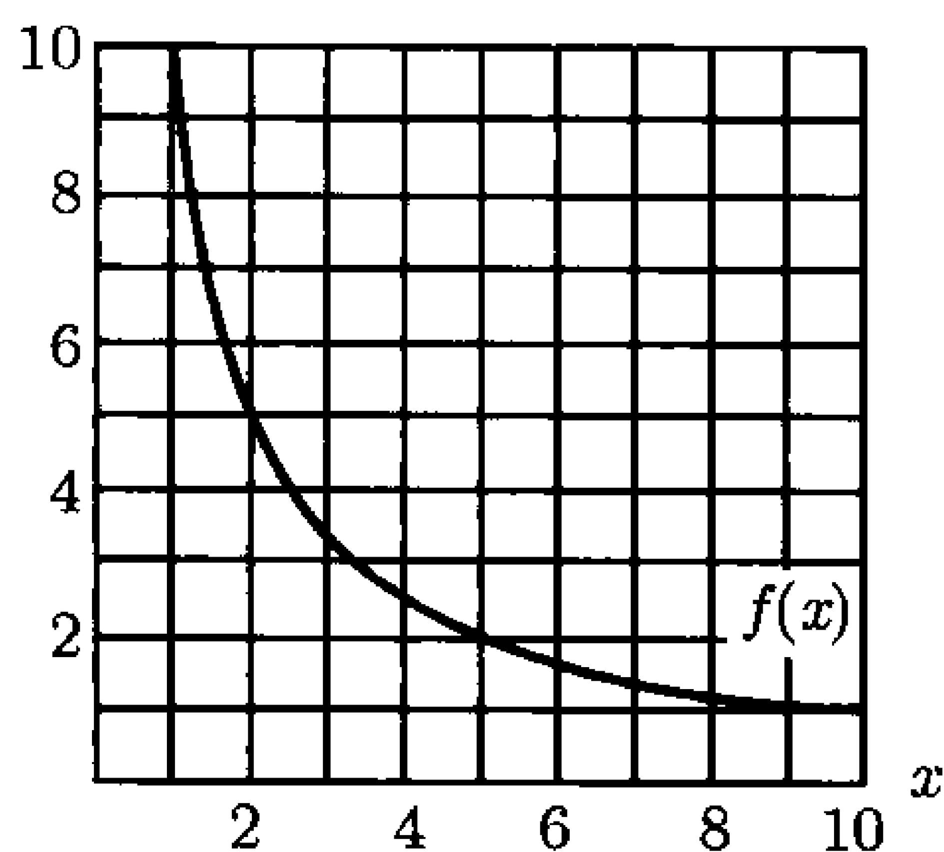
6. $f(x) = 2x + 3$

7. $f(x) = 10x - x^2$

8.



9.



10.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2.3	2.8	3.2	3.7	4.1	5.0	5.6	6.2

11. 对于一个严重污染的湖泊, 其基于过滤器的治理方案被采纳. 这种过滤器会渐渐被堵塞以致效率降低. 解决这个问题的方法是每周移开一次清理两天, 然后再重新放回去. 该

湖泊中的污染量是时间的函数, 作出该函数三周期限的图形.

12. 金融投资者知道, 一般地, 对投资的回报率期望越高相应的风险也就越大.

(a) 作出这一关系的图形, 它反映了预期的回报是风险的函数.

(b) 在 (a) 的图形上标出这样的一个点, 使其具有高的预期回报和小的风险. (投资者希望找到这样的机会.)

13. 在美国新英格兰地区的海岸潮池中, 蜗牛吃海藻. 图 1-6 反映蜗牛对海藻多样性① 的影响, 描述该图的含义. 该图是否支持在中级捕食水平下海藻的多样性达到峰值的结论?

14. 一个寒冷的日子 $t=0$ 时刻, 一个物体放在外面. 它的温度 $H=f(t)$(°C) 如图 1-7 所示.

(a) 表达式 $f(30)=10$ 从温度角度其含义是什么? 在你的答案中要包括 30 和 10 的单位.

(b) 从物体的温度和放在外面的时间两个方面说明垂直截距 a 和水平截距 b 的含义.

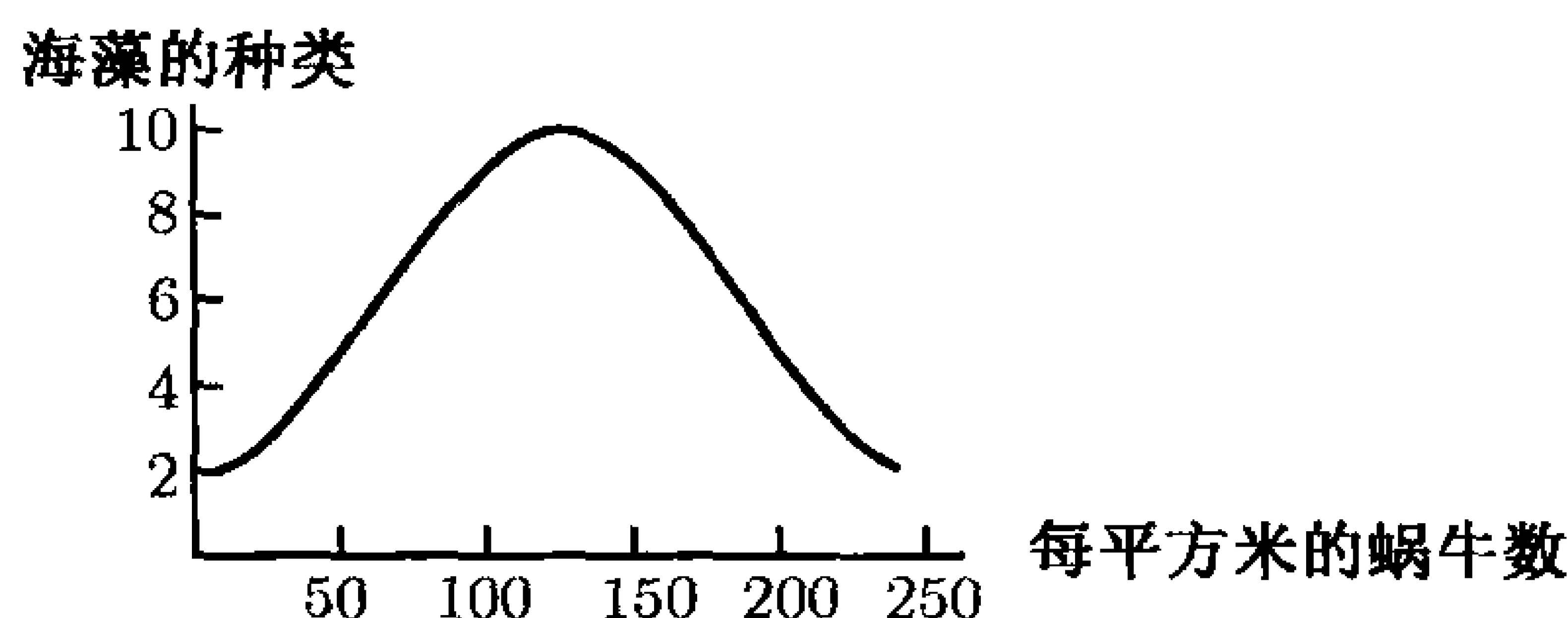


图 1-6

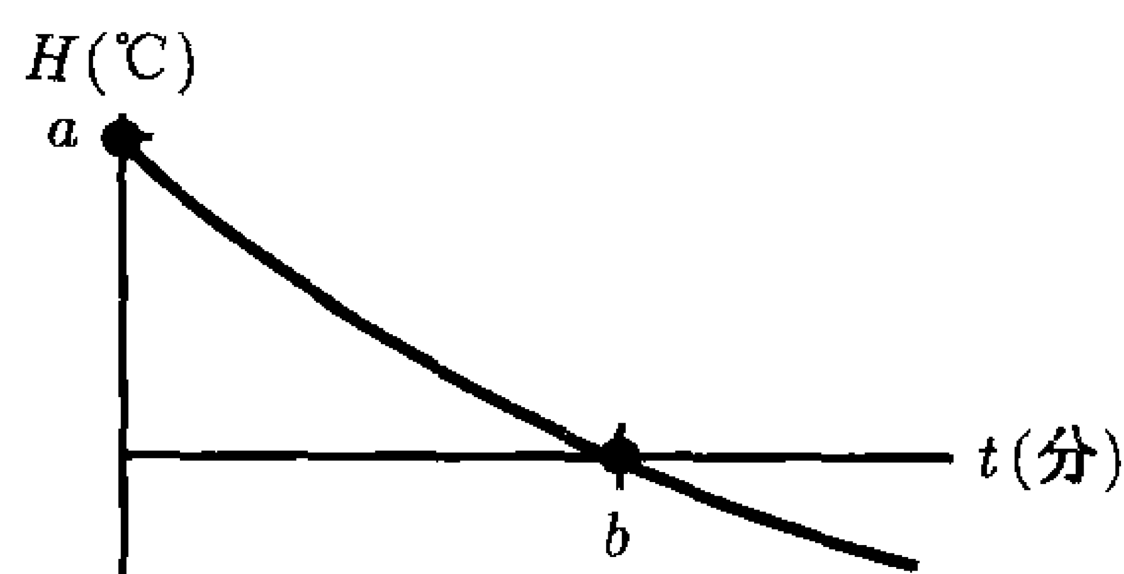


图 1-7

15. 在秘鲁安第斯山脉, 蝙蝠的种数 N 是海拔高度 h(ft)② 的函数, 所以 $N=f(h)$.

(a) 从蝙蝠种数方面解释表达式 $f(500)=100$.

(b) 图 1-8 中垂直截距 k 和水平截距 c 的含义是什么?

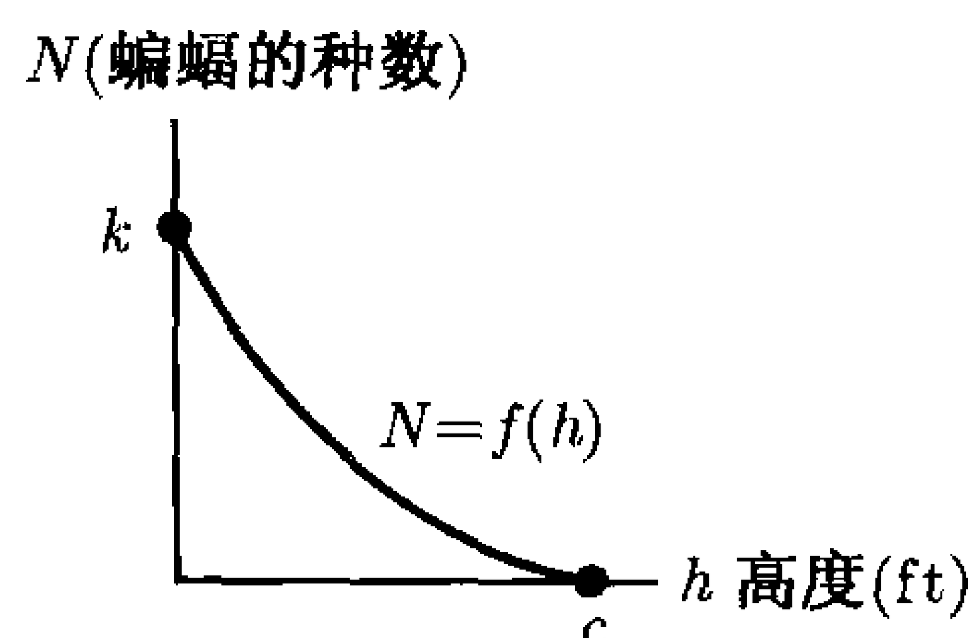


图 1-8

16. 注射后, 患者体内药物浓度快速地增加到顶点然后缓慢地下降. 患者体内药物浓度是注射后时间的函数, 作出该函数的图形. 假设注射前患者体内没有药物, 标出最高浓度以及达到该浓度所花的时间.

17. 图 1-9 表示某人抽完一支烟以后血液中尼古丁含量$N=f(t)$(mg)作为时间t(h)的函数.

(a) 估计 $f(3)$ 并从尼古丁的角度解释它.

(b) 在尼古丁水平降到 0.1 mg 时大约需要多少小时?

(c) 垂直截距是多少? 从尼古丁角度它表示什么?

(d) 如果该函数有水平截距, 那么它表示什么?

18. (a) 土豆在 $t=0$ 的时刻放入烤箱中烘烤. 图 1-10 中哪个图形表示土豆作为时间的函数?

(b) 就土豆的温度来说垂直截距表示什么?

---

① Rosenzweig, M. L., 《物种在空间和时间中的多样性》, 第 343 页 (剑桥: 剑桥大学出版社, 1995).

② 本书中的单位多采用单位符号表示, 其与国际单位制的转换关系参见书后单位对照和换算表.

—— 编者注

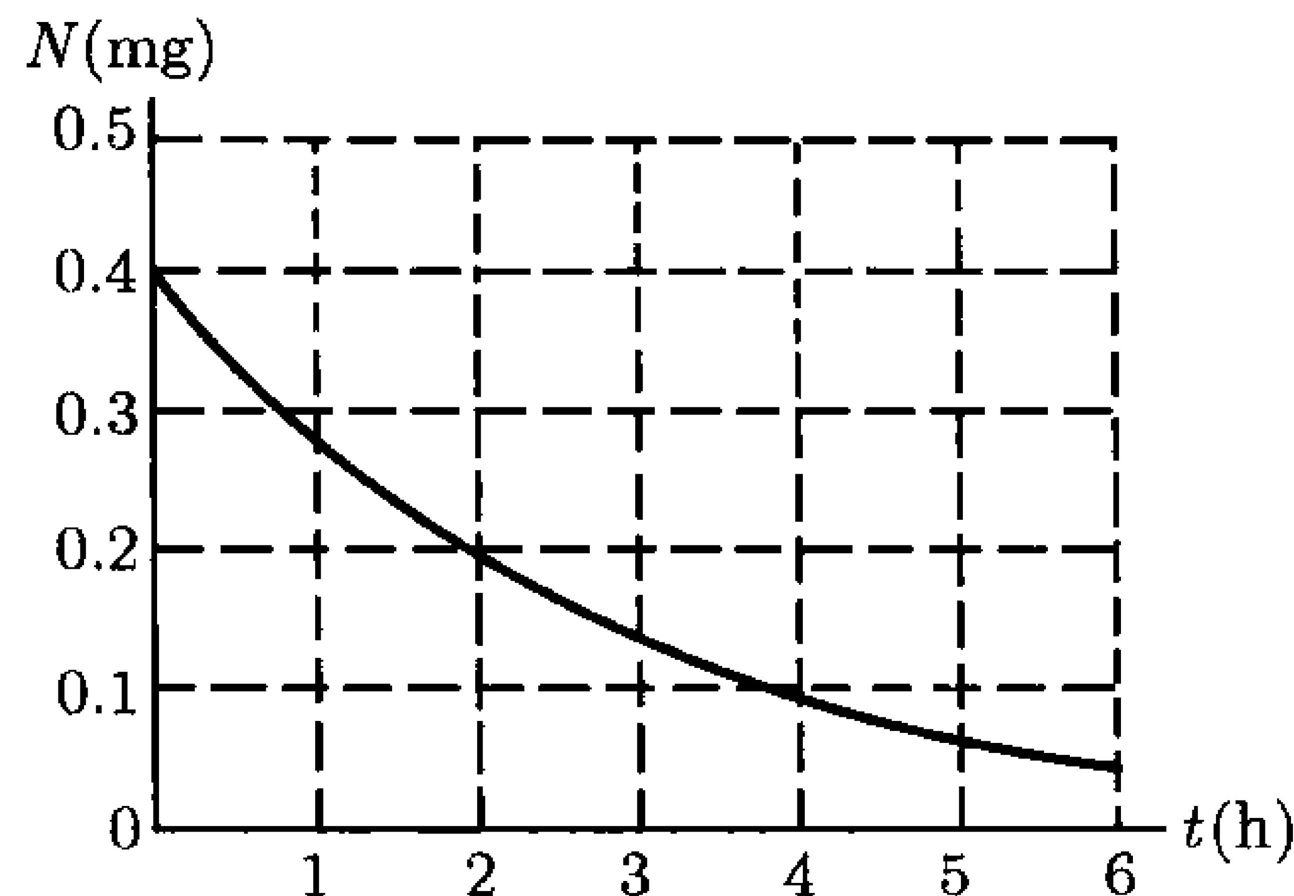


图 1-9

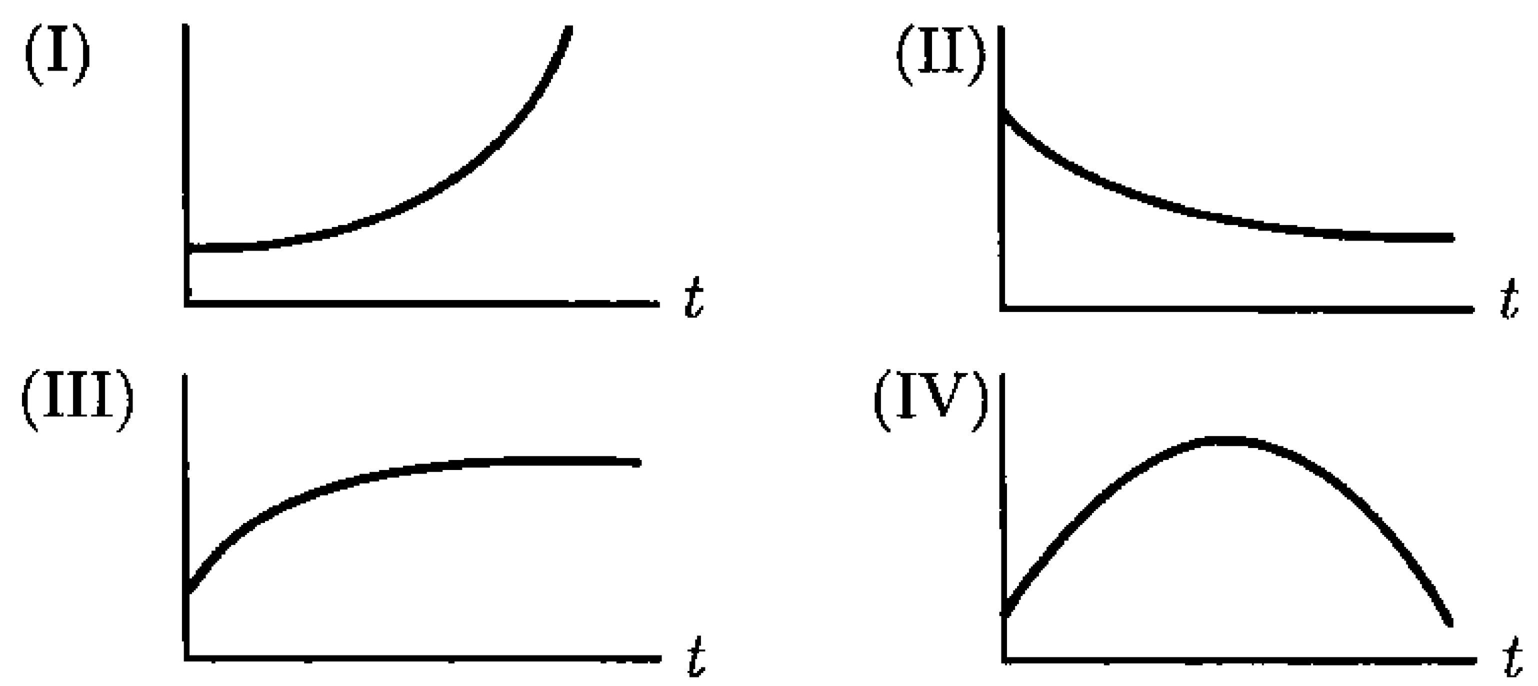


图 1-10

19. 一笔存款存入生息账户. 图 1-11 表示 t 年后账户中的余额 B.

(a) 最初的存款是多少?

(b) 估计 $f(10)$ 并解释它的含义.

(c) 什么时候余额会达到 5000 美元?

20. 心率过快的患者吃药后, 心率明显下降, 当药物耗尽时心率又慢慢上升. 画出从用药那一刻起心率关于时间变化的略图.

21. 图 1-12 反映美国、印度以及前苏联 50 年间化肥使用情况[①].

(a) 估计 1970 年美国、印度以及前苏联的化肥使用情况.

(b) 对图中的每一条曲线用一句话来描述每个地区这 50 年期间化肥的使用是如何变化的.

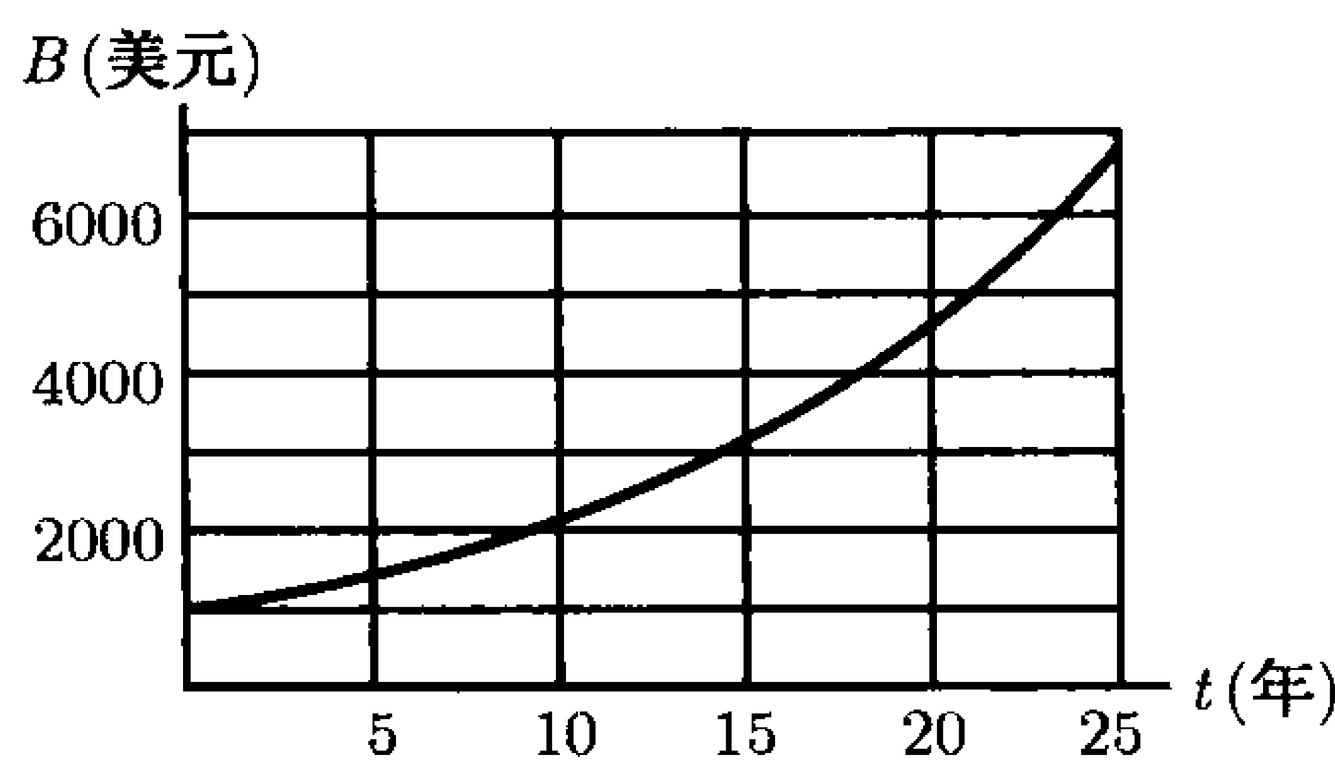


图 1-11

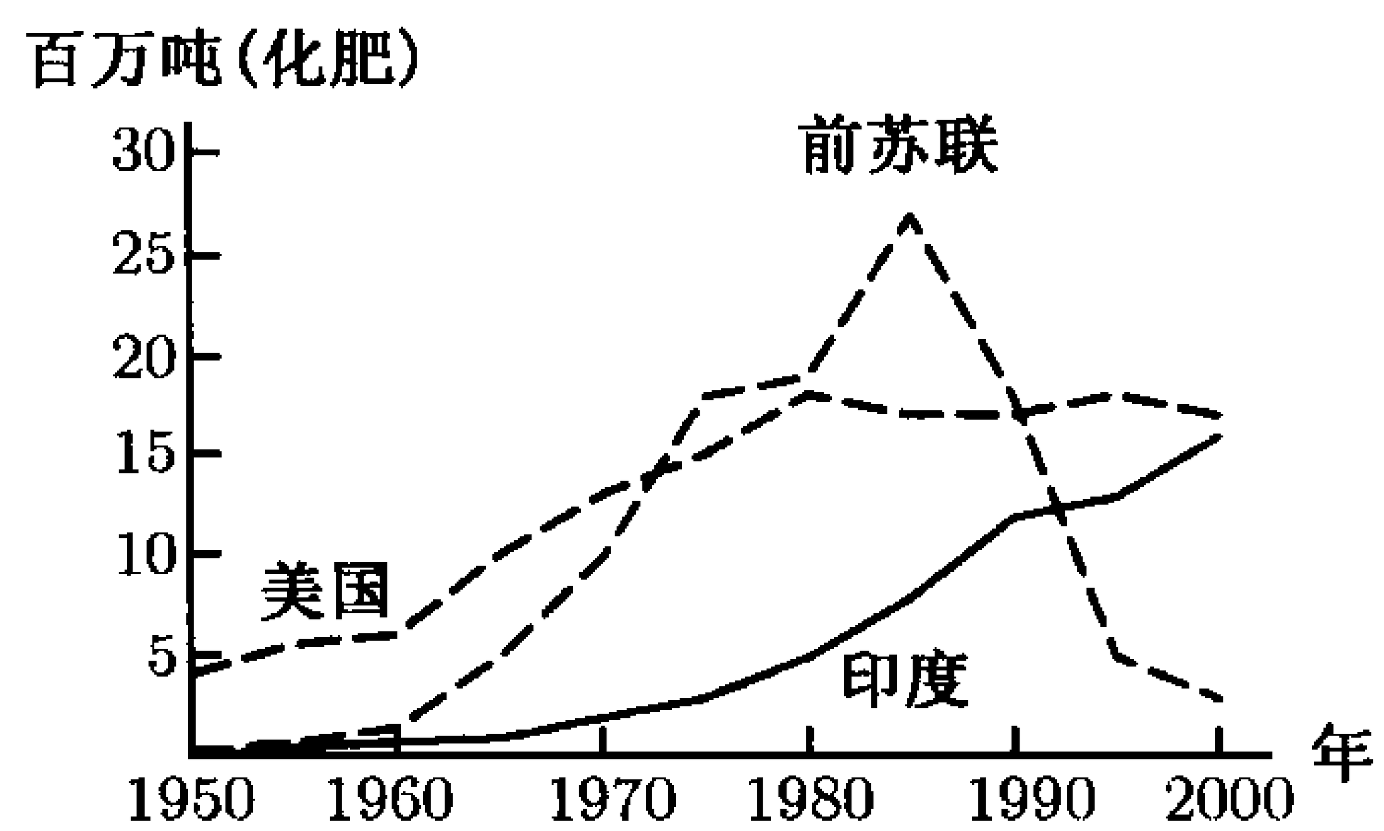


图 1-12

22. 设 $y = f(x) = x^2 + 2$.

(a) 求 x 为零时 y 的值.

(b) $f(3)$ 是多少?

(c) x 的值是多少时 y 的值是 11?

(d) 是否存在 x 使得 y 的值是 1?

23. 当汽车以每小时大约 45 mile 的速度行驶时汽车的汽油里程 (1 gal 汽油所行驶的里程, 单位: mile/gal) 最高, 当汽车以每小时大于或小于 45 mile 的速度行驶时汽车的汽油里程较低. 汽车的汽油里程是速度的函数, 作出该函数的图形.

---

① 世界观察研究所,《生命体征 2001》, 第 32 页 (纽约: W.W.Norton, 2001).

24. 图 1-13 中的 6 个图形是癌症发病率 (1000 人中患者数) 年龄比例的常见模式[1], 其中癌症发病率是年龄的函数. 竖轴上的标度都相等.

(a) 对每个图形用一句话说明年龄对癌症发病率的影响.

(b) 哪个图形说明儿童具有相对高的发病率? 指出一种这样的癌症.

(c) 哪个图形说明 50 岁左右癌症发病率稍微下降? 指出一种可能的癌症.

(d) 哪些图形可以表示由体内长期积累的毒素引起的癌症? (例如肺癌.) 说明一下.

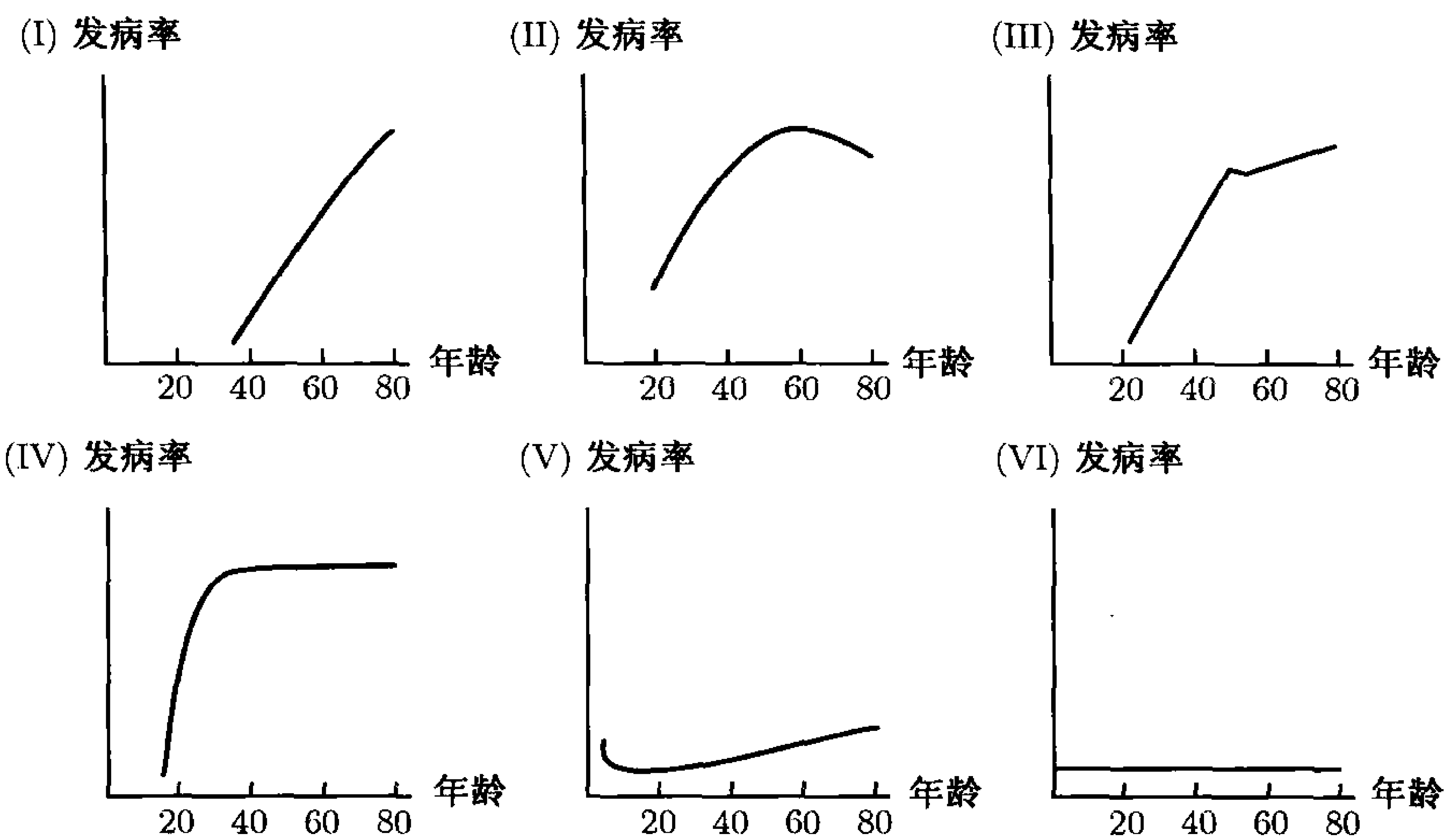


图 1-13

1.2 线性函数

也许最常用的函数是**线性函数**, 它的图形是直线. 上一节中的鸣叫频率和本田汽车折旧函数都是线性函数. 现在我们考虑更多的线性函数.

奥运会和世界纪录

早期的奥运会, 男子撑杆跳高的获胜高度每 4 年将近增加 8 in. 表 1-2 显示, 1900 年的高度是 130 in, 在 1900~1912 年每年增加 2 in. 所以这个高度是时间的线性函数.

表 1-2 男子奥运会撑杆跳高获胜高度 (近似值)

年	1900	1904	1908	1912
高度 (in)	130	138	146	154

① Abraham M. Lilienfeld,《流行病学基础》, 第 155 页 (纽约: 牛津大学出版社, 1976).

如果 y 表示获胜高度 (in), t 表示自 1900 年以来的年数, 那么我们可以记

$$y = f(t) = 130 + 2t.$$

因为 $y = f(t)$ 随着 t 增加, 所以我们看到 f 是一个递增函数. 系数 2 告诉我们速度 (in/年), 高度以该速度增加. 这个速度是图 1-14 中直线的**斜率**. 该斜率由比率

$$\text{斜率} = \frac{\text{上升高度}}{\text{水平距离}} = \frac{146-138}{8-4} = \frac{8}{4} = 2\ \text{in/年}$$

给出. 用直线上任何其他两个点计算斜率 (上升高度/水平距离) 都给出相同的值.

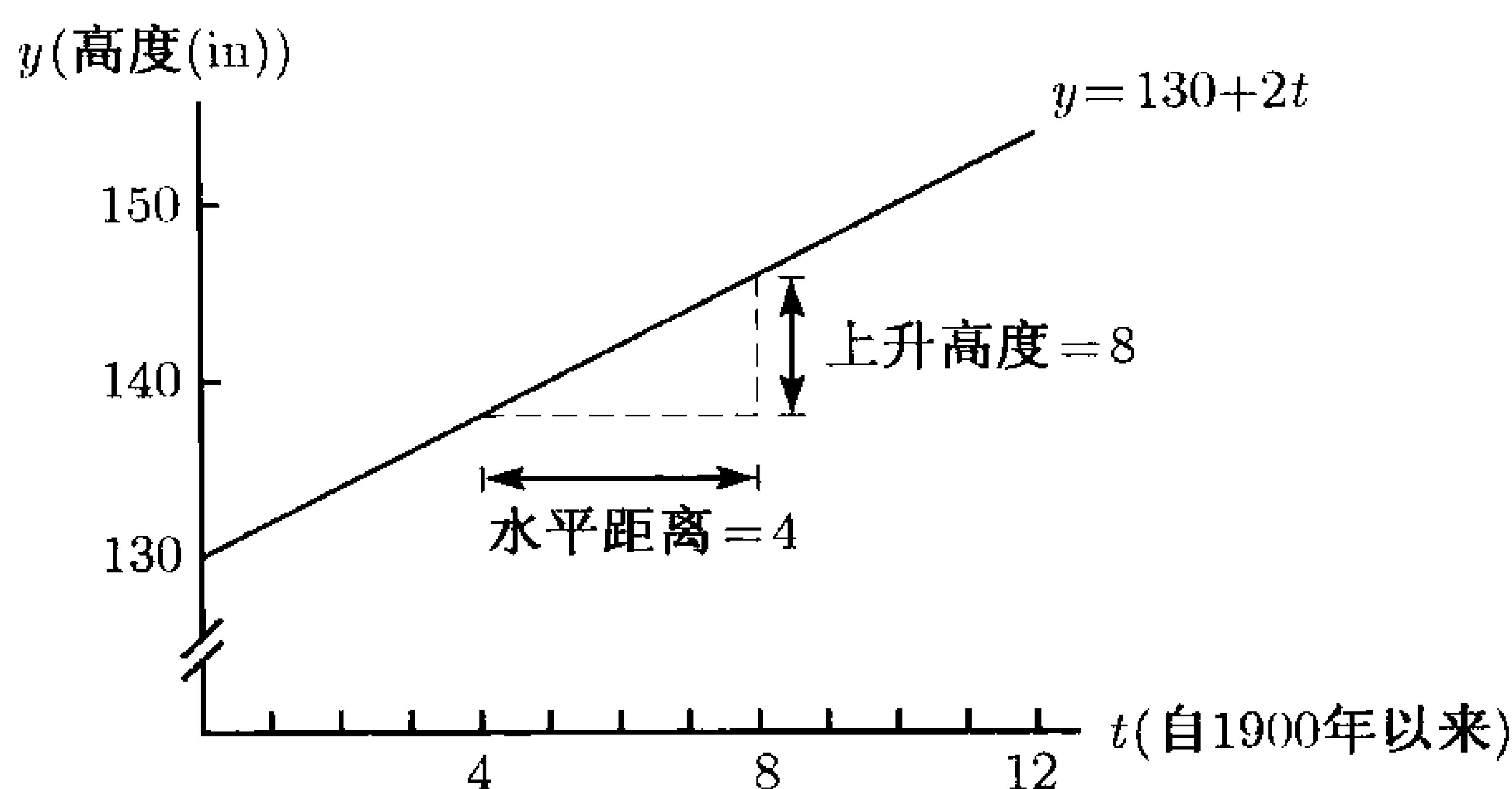


图 1-14 奥运会撑杆跳高纪录

常数 130 是什么呢? 它表示 $t = 0$ 时, 1900 年的初始高度. 在几何上, 130 是纵轴上的截距.

你也许想知道这种线性趋势是否会持续到 1912 年以后. 毫不奇怪, 不完全如此. 公式 $y = 130 + 2t$ 预示着 2004 年的奥运会中该高度将是 338 in 也就是 28 ft 又 2 in, 这一高度比实际值 19 ft 又 6.25 in 要高得多[①]. 显然由给定的数据过分外推是危险的. 你还应该注意到表 1-2 中的数据是**离散的**, 因为只在特殊的点 (每 4 年) 给出它的值. 然而, 我们已经把变量 t 当成**连续的**变量来处理了, 因为函数 $y = 130 + 2t$ 对 t 的所有值都有意义. 图 1-14 中图形是连续函数的图形, 因为它是一条实线, 而不是举办奥运会那些年的 4 个孤立的点.

例 1 若 y 表示 1 mile 赛跑的世界记录时间 (s), t 表示自 1900 年以来的年数, 那么记录表明, 近似地有

$$y = g(t) = 260 - 0.4t.$$

用 1 mile 赛跑的世界纪录说明截距 260 和斜率 -0.4 的含义并作出它的图形.

解 截距 260 告诉我们 1900 年 ($t = 0$ 时) 的世界纪录是 260 s. 斜率 -0.4 告诉我们世界纪录每年以大约 0.4 s 的速度下降. 参见图 1-15. □

---

① 《2005 年世界年鉴》, 第 866 页 (纽约).

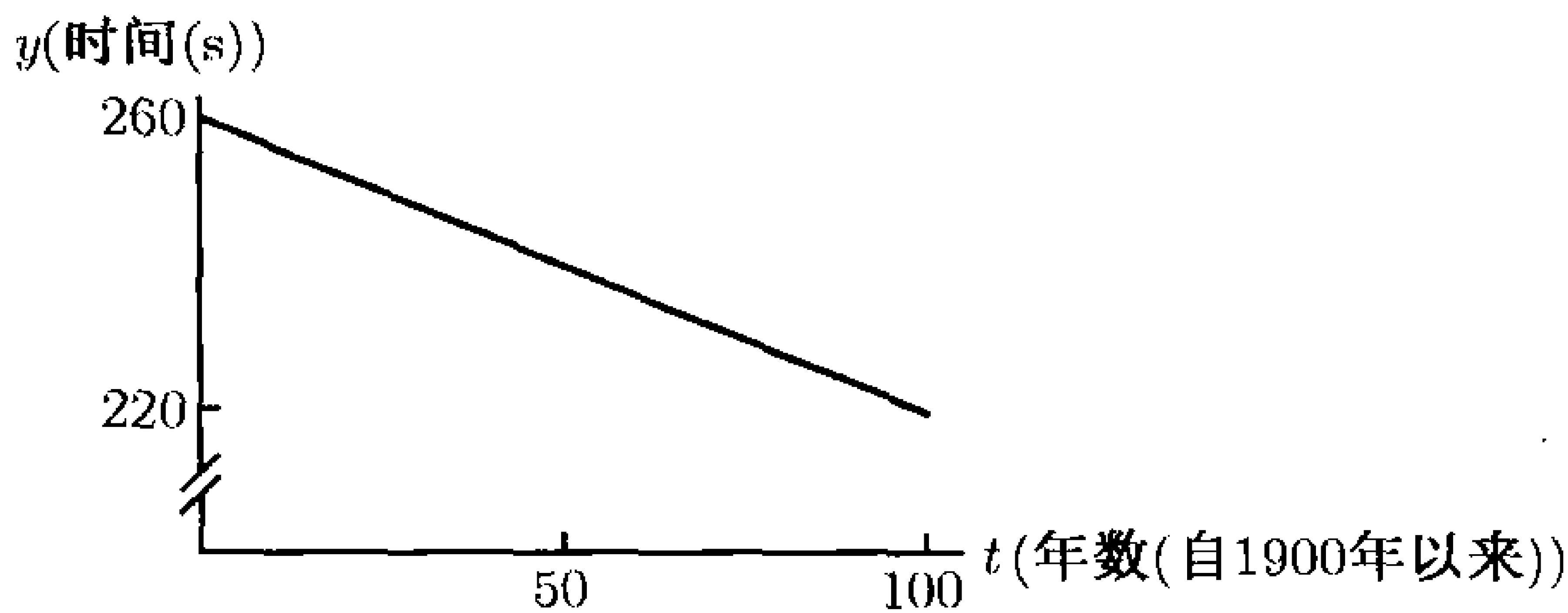


图 1-15　1 mile 赛跑的世界纪录

斜率和变化率

我们用符号 Δ(大写的希腊字母 δ) 表示 "关于什么的变化", 所以 Δx 表示关于 x 的变化, 而 Δy 表示关于 y 的变化.

线性函数 $y=f(x)$ 的斜率可以由两点 x_1 和 x_2 给出的函数值, 利用公式

$$\text{斜率}=\frac{\text{上升高度}}{\text{水平距离}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

算出. 量 $(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1)$ 叫做**差商**, 因为它是两个差的商. 参见图 1-16. 由于斜率 $=\Delta y/\Delta x$, 因此斜率表示 y 关于 x 的**变化率**. 斜率的单位是 y 的单位除以 x 的单位.

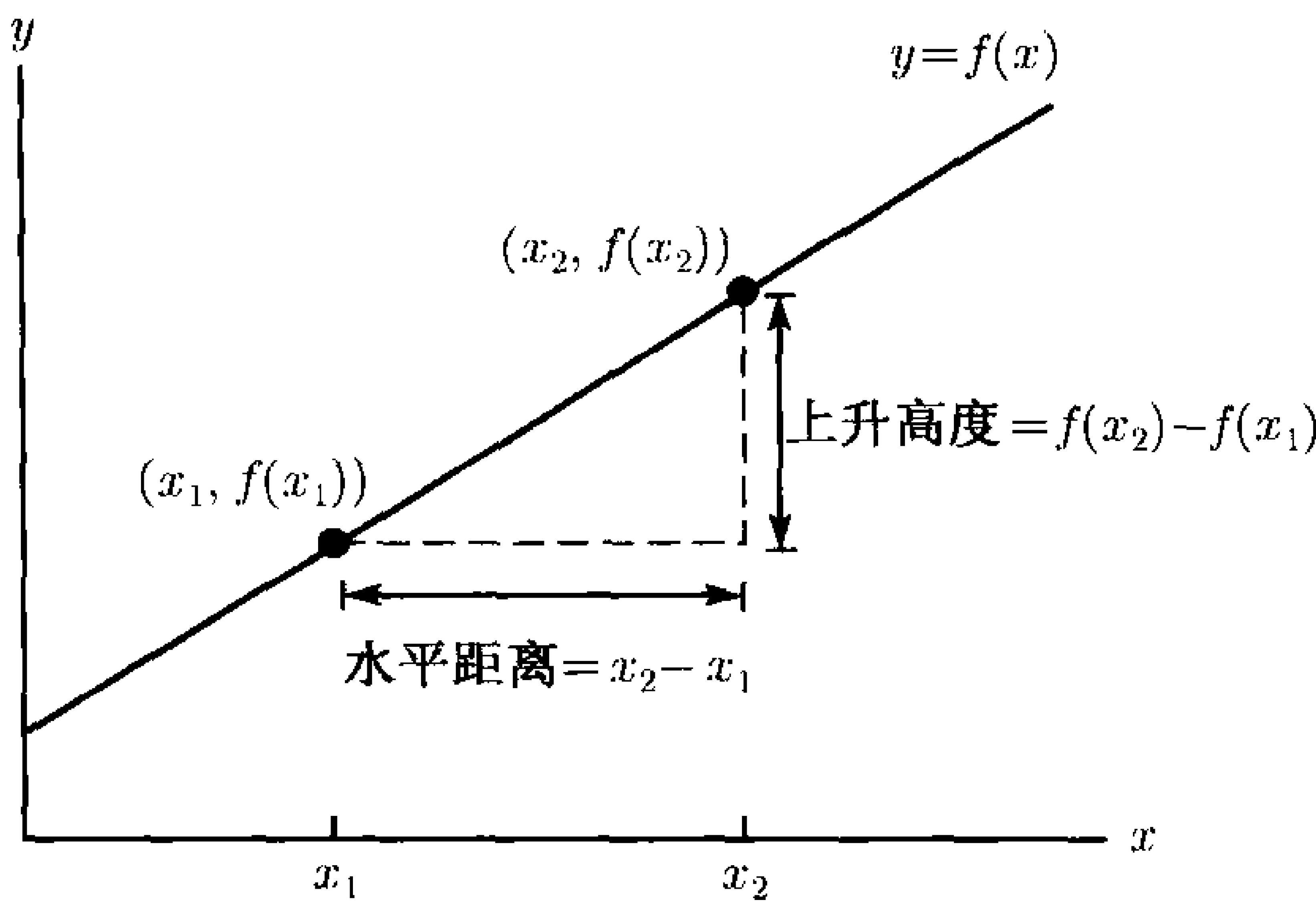


图 1-16　差商 $=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

1.2.1　一般的线性函数

线性函数具有形式

$$y=f(x)=b+mx.$$

它的图形是一条直线

- m 是它的**斜率**, 或者是 y 关于 x 的变化率.
- b 是它的**垂直截距**, 或者是 x 为零时 y 的值.

注意, 如果斜率 m 是零, 那么有 $y = b$, 这是一条水平线. 对于一条经过点 (x_0, y_0) 的直线, 其斜率为

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

因此我们能写出直线的*点斜式方程*.

> 斜率为 m 经过点 (x_0, y_0) 的直线方程是
>
> $$y - y_0 = m(x - x_0).$$

例 2 美国城市每年产生的固体垃圾[①]一直在增加. 产生的固体垃圾, 以百万吨计, 1990 年是 205.2, 而 2001 年是 229.2.

(a) 假设美国城市产生的固体垃圾数量是时间的线性函数, 利用经过这两个点的直线方程求出该函数的公式.

(b) 利用这个公式预测 2020 年产生的固体垃圾的数量.

解 (a) 我们来考虑固体垃圾的数量 W, 它是时间 t 的函数, 两个点是 (1990, 205.2) 和 (2001, 229.2). 直线的斜率是

$$m = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{229.2 - 205.2}{2001 - 1990} = \frac{24}{11} = 2.182 \text{ 百万吨/年}.$$

为了求直线方程, 我们来求垂直截距. 我们将点 (1990, 205.2) 和斜率 $m = 2.182$ 代入 W 的方程中:

$$\begin{aligned} W &= b + mt \\ 205.2 &= b + (2.182)(1990) \\ 205.2 &= b + 4342.18 \\ -4136.98 &= b. \end{aligned}$$

直线方程是 $W = -4136.98 + 2.182t$. 换一种写法, 我们用直线的点斜式, 方程变为 $W - 205.2 = 2.182(t - 1990)$.

(b) 为了计算预测的 2020 年固体垃圾, 我们将 $t = 2020$ 代入直线方程 $W = -4136.98 + 2.182t$, 计算 W:

$$W = -4136.98 + (2.182)(2020) = 270.66.$$

公式预测 2020 年将产生 270.66 百万吨的固体垃圾. □

> **由线性函数认识数据**: 一个表格中的数据, 如果由 x 的等差得到 y 的等差, 那么表格中 x 和 y 的值可能来自线性函数 $y = b + mx$.

例 3 下列数值表中的哪个表示线性函数?

x	0	1	2	3
$f(x)$	25	30	35	40

x	0	2	4	6
$g(x)$	10	16	26	40

① 《2004–2005 美国统计摘要》, 表格 363.

t	20	30	40	50
$h(t)$	2.4	2.2	2.0	1.8

解 因为 x 每增加 1, y 增加 5, 所以 $f(x)$ 的值可能来自斜率 =5/1=5 的线性函数.

在 $x=0$ 和 $x=2$ 之间, 当 x 的值增加 2 时 $g(x)$ 的值增加 6. 在 $x=2$ 和 $x=4$ 之间, 当 x 的值增加 2 时, y 的值增加 10. 因为斜率不是常数, 所以 $g(x)$ 不可能是线性函数.

因为 t 每增加 10, $h(t)$ 增加 0.2, 所以 $h(t)$ 的值可能来自斜率 =−0.2/10=−0.02 的线性函数. □

例 4 下表中的数据位于一条直线上. 求出下面每个函数的公式, 并给出每种情形下斜率的单位.

(a) q 为 p 的函数. (b) p 为 q 的函数.

p(美元)	5	10	15	20
q(吨)	100	90	80	70

解 (a) 如果我们想到 q 作为 p 的线性函数, 那么 q 是因变量而 p 是自变量. 我们可以利用任何两点求斜率. 前两个点给出

$$\text{斜率} = m = \frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{90-100}{10-5} = \frac{-10}{5} = -2.$$

其单位是 q 的单位除以 p 的单位, 也就是吨/美元.

为了将 q 写成 p 的线性函数, 我们利用公式 $q=b+mp$. 我们知道 $m=-2$, 并且可以利用表格中任何点求 b. 用 $p=10, q=90$ 代入得到

$$\begin{aligned} q &= b+mp \\ 90 &= b+(-2)(10) \\ 90 &= b-20 \\ 110 &= b. \end{aligned}$$

因此, 直线方程是

$$q = 110-2p.$$

(b) 现在考虑 p 作为 q 的线性函数, 则 p 是因变量而 q 是自变量. 我们有

$$\text{斜率} = m = \frac{\Delta p}{\Delta q} = \frac{10-5}{90-100} = \frac{5}{-10} = -0.5.$$

斜率的单位是美元/吨.

因为 p 是 q 的线性函数, 所以 $p=b+mq$ 并且 $m=-0.5$. 为了求 b, 我们将表格中任何一点, 例如 $p=10, q=90$, 代入方程:

$$\begin{aligned} p &= b+mq \\ 10 &= b+(-0.5)(90) \\ 10 &= b-45 \\ 55 &= b. \end{aligned}$$

因此直线方程是

$$p = 55 - 0.5q.$$

另一种方法, 我们可以利用 (a) 部分的答案, 即 $q = 110 - 2p$, 然后解出 p. □

1.2.2　线性函数族

形如 $f(x) = b + mx$ 的公式, 其中常数 m 和 b 可以取不同的值, 表示一个**函数族**. 在一个函数族中的所有函数都共同具有某种性质——在这个情形中, 图形都是直线. 常数 m 和 b 称为**参数**. 图 1-17 和图 1-18 显示了几个 m 和 b 的值的图形. 注意到 m 的值越大, 直线越陡.

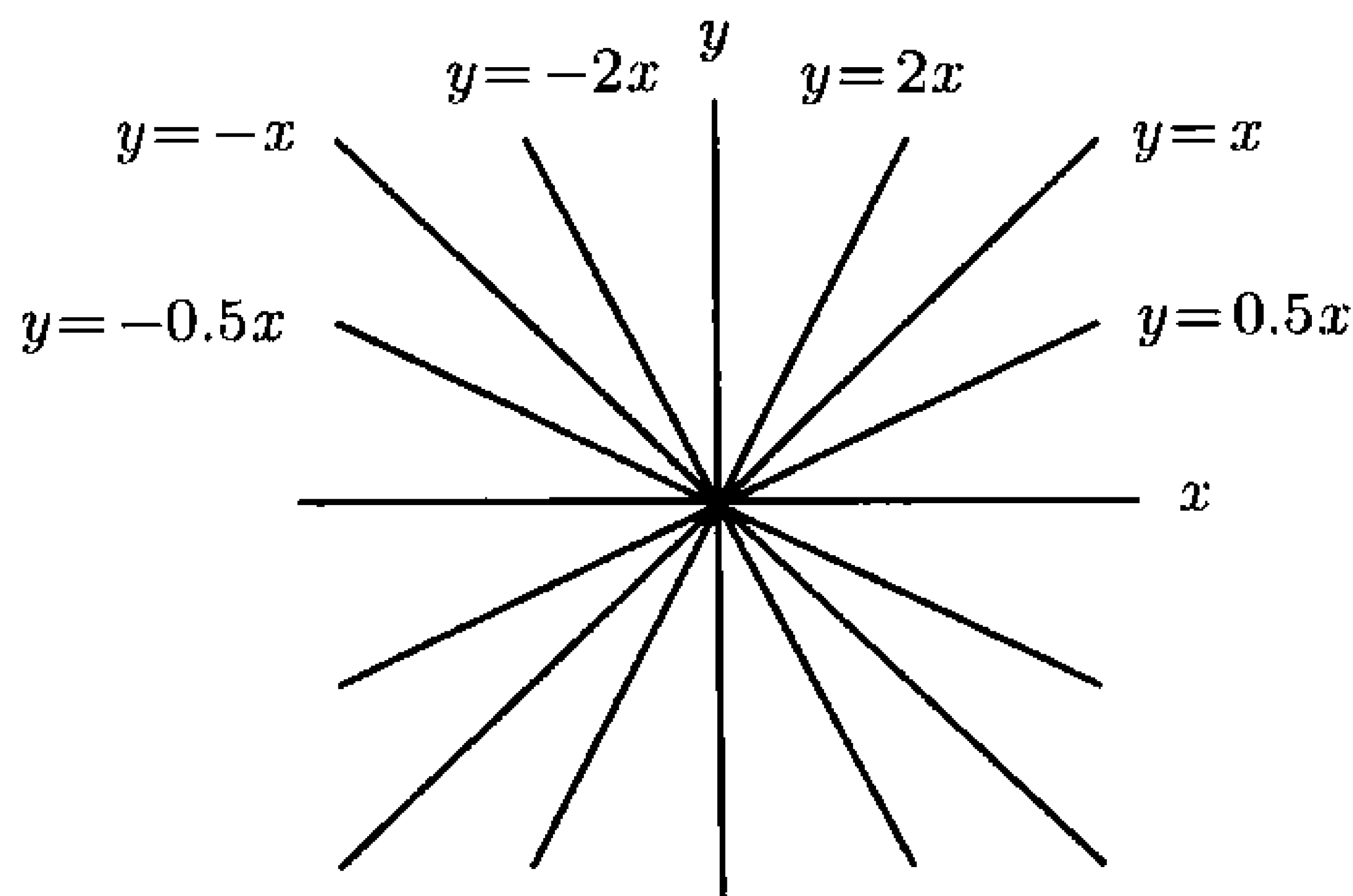


图 1-17　函数族 $y = mx$(其中 $b = 0$)

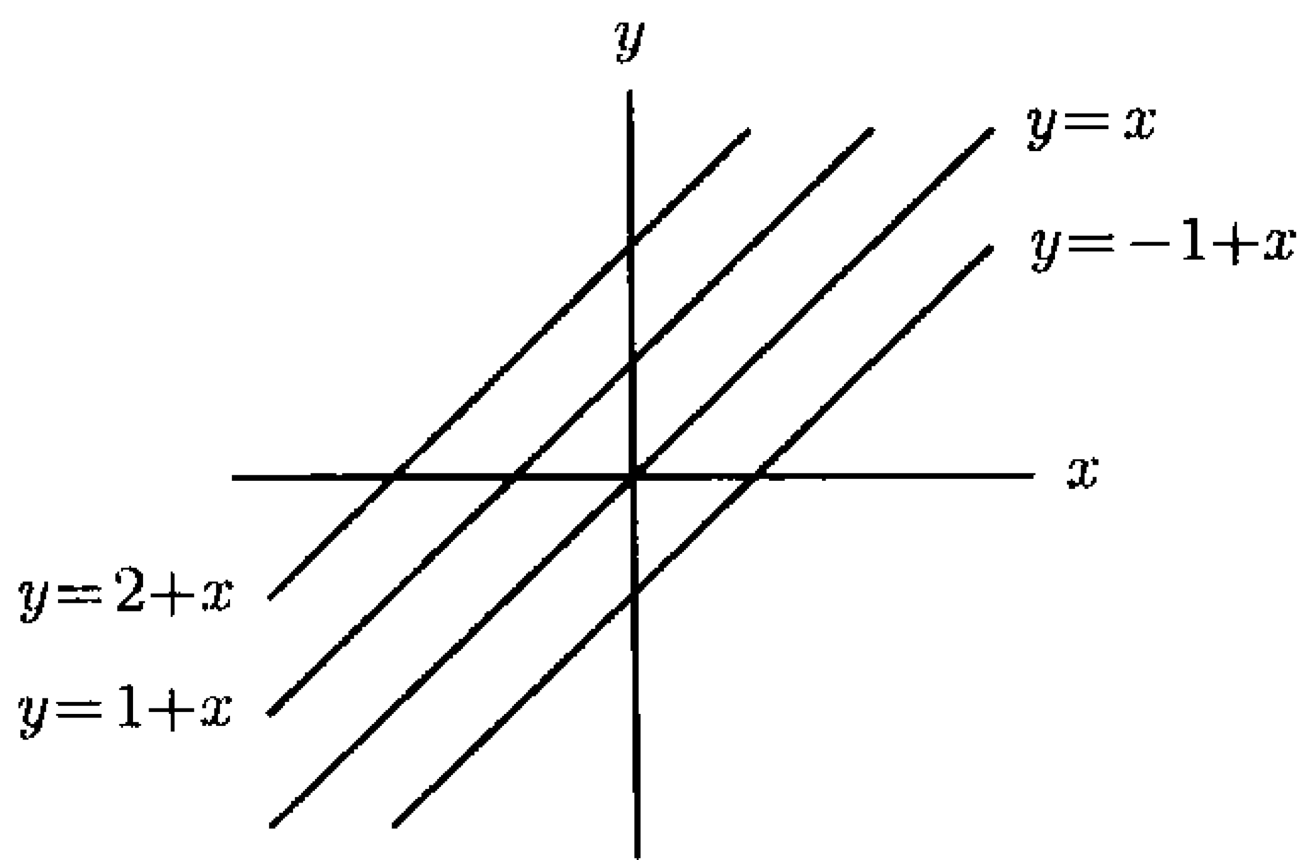


图 1-18　函数族 $y = b + x$(其中 $m = 1$)

习题

对于习题 1~4, 确定出给定方程的直线其斜率和 y 截距.

1. $7y + 12x - 2 = 0$　　**2.** $3x + 2y = 8$

3. $12x = 6y + 4$　　**4.** $-4y + 2x + 8 = 0$

对于习题 5~8, 求出经过已知点的直线方程.

5. (0, 2) 和 (2, 3)　　**6.** (0, 0) 和 (1, 1)

7. (−2, 1) 和 (2, 3)　　**8.** (4, 5) 和 (2, −1)

9. 图 1-19 给出四条直线, 其方程是 $y = b + mx$. 将这些直线与参数 m 和 b 的如下条件配对.

(a) $m > 0, b > 0$

(b) $m < 0, b > 0$

(c) $m > 0, b < 0$

(d) $m < 0, b < 0$

10. (a) 图 1-20 中哪两条直线斜率相同? 这两条直线中哪一条 y 截距较大?

(b) 哪两条 y 截距相同? 这两条直线中哪一条斜率较大?

11. 将图 1-21 中的图形与下列方程配对. (注意 x 和 y 的标度可能不等.)

(a) $y = x - 5$　　(b) $-3x + 4 = y$　　(c) $5 = y$

(d) $y = -4x - 5$　　(e) $y = x + 6$　　(f) $y = x/2$

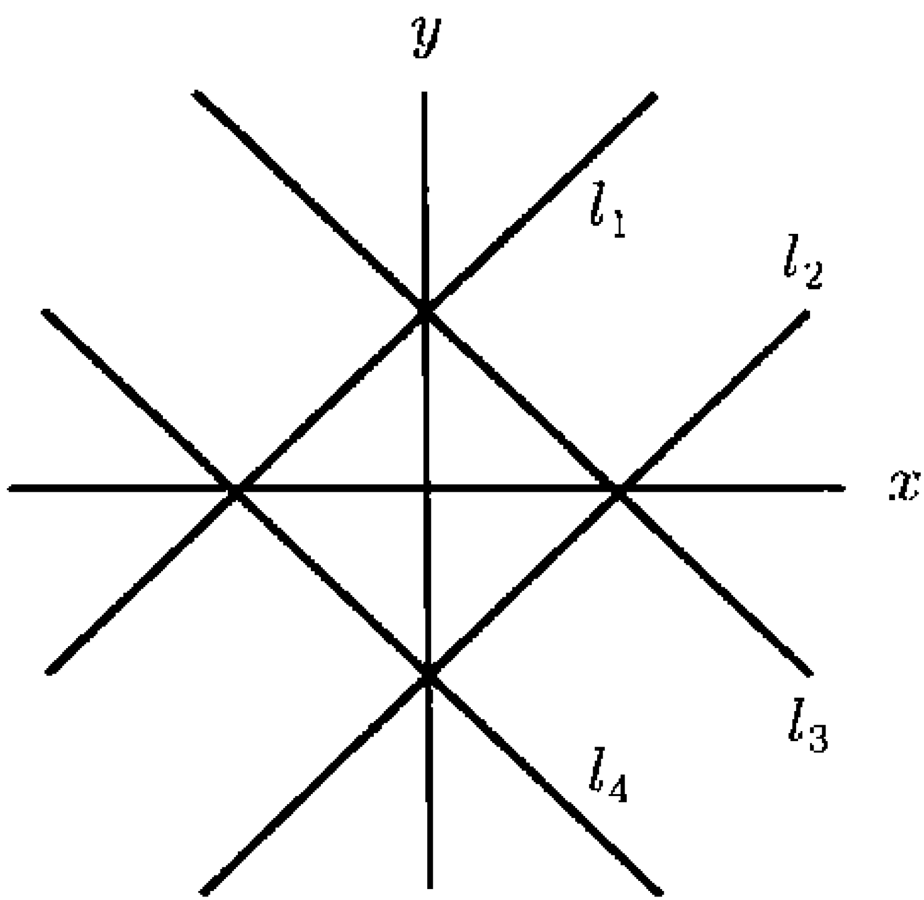


图 1-19

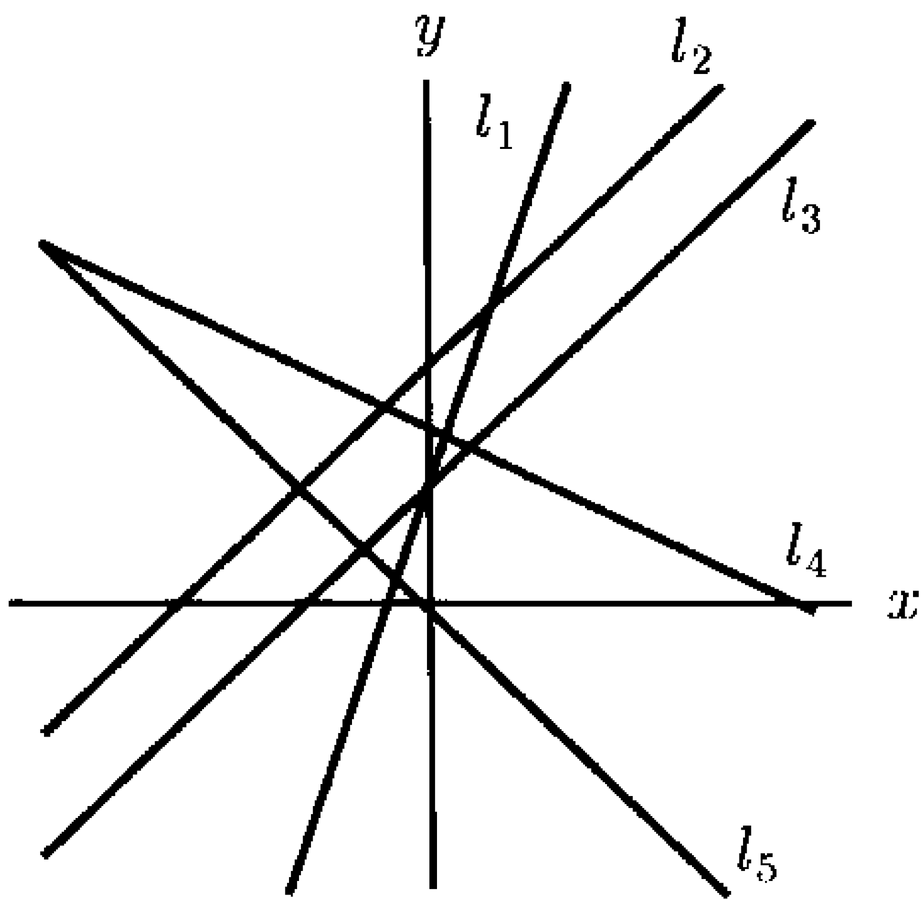


图 1-20

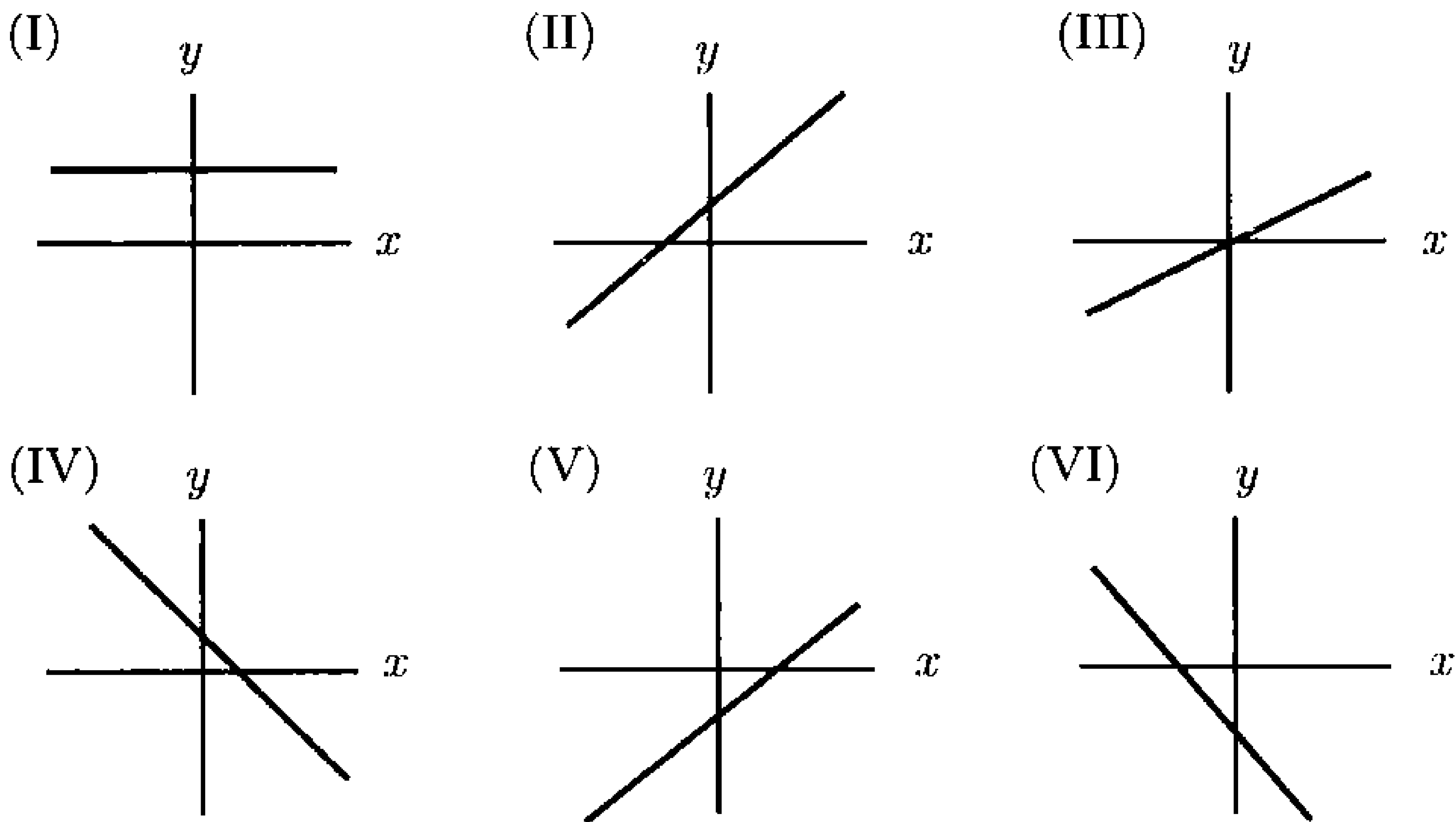


图 1-21

12. 2000 年, 某城市的人口是 30 700, 并且以每年 850 人的速度增长.

(a) 该城市的人口 P 是自 2000 年以来的年数 t 的函数, 给出该函数的公式.

(b) 预计 2010 年的人口是多少?

(c) 什么时候能达到 45 000?

13. 手机公司收取 25 美元的月租费和每分钟 0.05 美元的话费. 每月收费 C(美元) 是当月手机通话时间 m(min) 的函数, 求出该函数的公式.

14. 一个公司以每天 40 美元外加 1 mile 15 美分的价格出租汽车. 其竞争者出租的汽车是每天 50 美元并且 1 mile 10 美分.

(a) 出租车一天的价格是行驶距离的函数, 给出每个公司该函数的公式.

(b) 在同一个坐标系中作出两个函数的图形.

(c) 你如何确定哪个公司更便宜?

15. 下列哪个表表示线性函数?

(a)

x	0	1	2	3
y	27	25	23	21

(b)

t	15	20	25	30
s	62	72	82	92

(c)

u	1	2	3	4
w	5	10	18	28

16. 对习题 15 中表示线性函数的每个表格, 求出其函数的公式.

17. 下表是一个公司的定价表, 目的是鼓励大订单. (1 罗为 12 打.) 求公式:

(a) q 作为 p 的线性函数. (b) p 作为 q 的线性函数.

q(订货规模, 罗)	3	4	5	6
p(价格/打)	15	12	9	6

18. 1997~2003 年世界牛奶产量以一个近似常数的速度增加[①]. 参见图 1-22.

(a) 估计垂直截距并用牛奶产量解释它. (b) 估计斜率并用牛奶产量解释它.

(c) 牛奶产量 M 是 t 的函数, 给出该函数的一个近似公式.

19. 图 1-23 表明一个人经过 5 h 的旅行, 离家的距离 (mile).

(a) 估计垂直截距. 给出它的单位并用离家的距离解释它.

(b) 估计该线性函数的斜率. 给出它的单位并用离家的距离解释它.

(c) 给出离家的距离 D 作为时间 t(h) 的函数其函数公式.

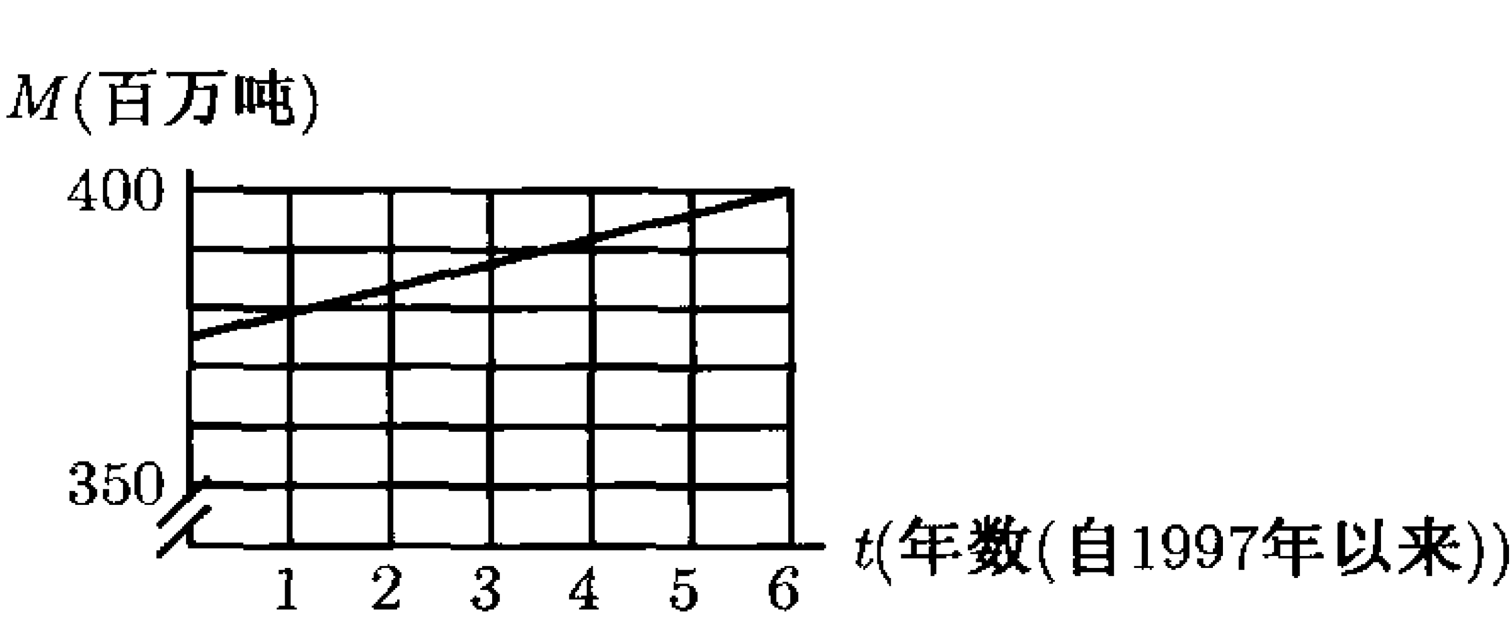


图 1-22

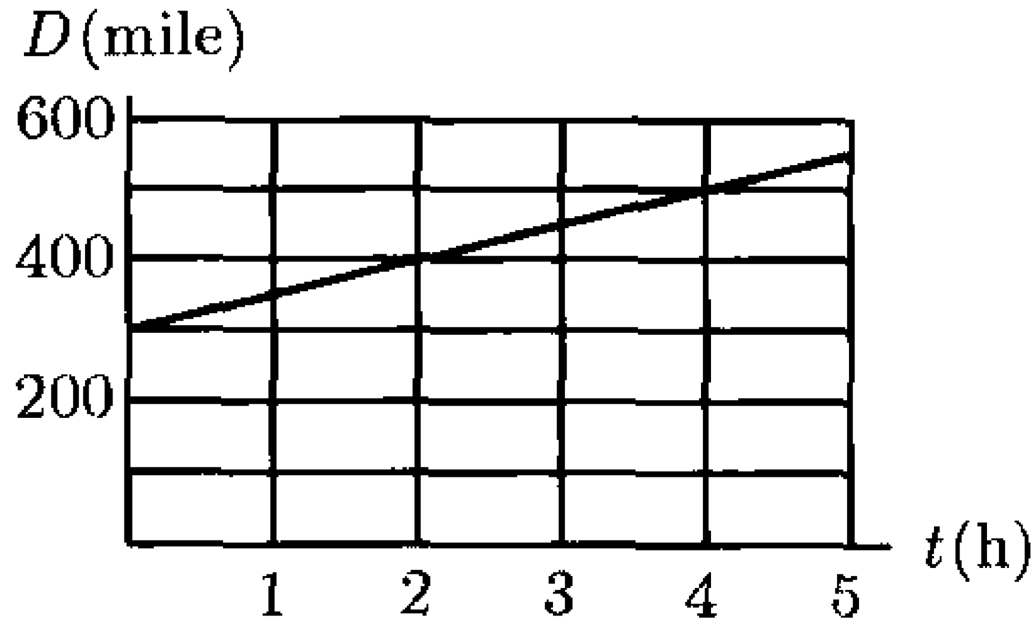


图 1-23

20. 搜救队寻找迷路的徒步旅行者. 搜救队成员分开并且相互平行地走过搜寻区域. 下表显示搜救队员在分开的各种距离 d 的情况下能够找到迷路者的百分数 P[②].

(a) 说明你是怎么知道找到的百分数 P 可能是分开的距离 d 的线性函数的.

(b) 求出 P 作为 d 的线性函数.

(c) 该函数的斜率是多少? 给出单位并作解释.

(d) 该函数的垂直截距和水平截距是多少? 给出单位并作解释.

分开的距离 d(ft)	20	40	60	80	100
找到的近似百分数 P	90	80	70	60	50

21. 下表给出美国男人 60 岁时各种身高 h(in) 的平均体重 w(lb)[③].

(a) 你是如何知道该表格中的数据可能表示一个线性函数的?

(b) 求出 w 作为身高 h 的线性函数. 该直线的斜率是多少? 斜率的单位是什么?

(c) 求出身高 h 作为 w 的线性函数. 该直线的斜率是多少? 斜率的单位是什么?

h(in)	68	69	70	71	72	73	74	75
w(lb)	166	171	176	181	186	191	196	201

① 《2004~2005 美国统计摘要》, 表格 1355.

② 引自《网格扫描搜索经验分析》, J. Wartes 著 (搜救探险家, Western Region, 1974).

③ 引自 "按身高和年龄区分的美国人的平均体重",《世界年鉴》(新泽西: Funk and Wagnalls, 1992), 第 956 页.

22. 音乐 CD 的销售量从 1999 年开始下降. 1999 年的销售量是 938.2 百万张, 而 2003 年是 745.9 百万张[①].

(a) 音乐 CD 的销售量 S (百万张) 是自 1999 年以来的年数 t 的线性函数, 求该函数的公式.

(b) 给出该函数的斜率和垂直截距的单位并解释它们.

(c) 用该公式预测 2010 年音乐 CD 的销售量.

23. 废物收集服务的月收费是 100 kg 废物 32 美元, 180 kg 废物 48 美元.

(a) 求一个线性函数公式表示废物收集的成本 C 作为废物的千克数 w 的函数.

(b) (a) 部分求出的直线斜率是多少? 给出它的单位并从废物收集成本的角度解释它.

(c) (a) 部分求出的垂直截距是多少? 给出它的单位并从废物收集成本的角度解释它.

24. 澳大利亚沿海沙丘植物种数随着纬度 (°S) 的增加而减少. 在 11°S 的地带有 34 种而在 44°S 的地带有 26 种[②].

(a) 澳大利亚沿海沙丘植物种数 N 是纬度 l(°S) 的线性函数, 求出该函数的公式.

(b) 给出该函数的斜率和垂直截距的单位并解释它们.

(c) 作出该函数在 $l = 11°\text{S}$ 和 $l = 44°\text{S}$ 之间的图形. (澳大利亚完全位于这些纬度之内.)

25. 一个有争议的 1992 年丹麦研究项目[③], 报道男人的平均精子数已经从 1940 年的每毫升 11300 降到 1990 年的每毫升 6600 万.

(a) 把平均精子数 S 表示成自 1940 年以来的年数 t 的线性函数.

(b) 如果一个男人的精子数降到大约每毫升 2000 万以下, 那么他的生育能力就会受到影响. 如果 (a) 部分所求的线性模型是准确的, 需要多少年男人的平均精子数将会降到这个水平以下?

习题 26~31 考虑最大心率 (MHR), 它是人的心脏在一分钟内安全跳动的最大次数. 若 a 是年龄 (岁), 那么用来估计医疗行业和健康锻炼的人群的 MHR 公式是

$$\text{男性: MHR}=226-a(\text{跳动次数/分钟}),$$
$$\text{女性: MHR}=220-a(\text{跳动次数/分钟}).$$

26. 下面哪个结论正确?

(a) 当你变老时, 你的最大心率每年减少一次.

(b) 当你变老时, 你的最大心率每分钟减少一次.

(c) 当你变老时, 你的最大心率每年每分钟减少一次.

27. 对年龄相同的男性和女性来说, 下面哪个结论正确?

(a) 他们的最大心率相同.

(b) 男性的最大心率超过女性的.

(c) 女性的最大心率超过男性的.

28. 关于具有相同最大心率的男性和女性的年龄, 有什么规律吗?

---

① 《2005 年世界年鉴》, 第 309 页 (纽约).

② Rosenzweig, M. L., 《物种在空间和时间中的多样性》, 第292页(剑桥: 剑桥大学出版社, 1995).

③ "下一个寂静春天的调查", 《美国新闻和世界报道》, 第 50–52 页 (3 月 11 日, 1996).

29. 最近[①]提出了更准确的关于男性和女性都适合的 MHR 预测公式

$$\text{MHR}=208-0.7a.$$

(a) 在哪个年龄旧的公式和新的公式对女性给出同样的 MHR? 对男性呢?

(b) 下面哪个是正确的?

(i) 对年轻人, MHR 新公式比旧公式预测的要高; 而对老年人, MHR 新公式比旧公式预测的要低.

(ii) 对年轻人, MHR 新公式比旧公式预测的要低; 而对老年人, MHR 新公式比旧公式预测的要高.

(c) 在检查心脏疾病时, 医生要求患者在踏车上走, 同时速度和坡度逐渐增加, 直到他的心率达到 MHR 的 85%. 对于一个 65 岁的男性老人, 用新公式达到的心率与用旧公式达到的心率每分钟相差多少次?

30. 试验[②]告诉我们, 男性到 21 岁时, 他的 MHR 每分钟要下降 12 次; 33 岁时, 他的 MHR 每分钟要下降 19 次. 该 MHR 关于年龄近似地是线性的吗?

31. 试验[③]告诉我们, 女性到 21 岁时, 她的 MHR 每分钟要下降 9 次; 33 岁时, 她的 MHR 每分钟要下降 26 次. 该 MHR 关于年龄近似地是线性的吗?

1.3 变 化 率

在上一节中, 我们看到 1900~1912 年, 奥运会撑杆跳高获胜高度以一个近似的常数速度 2 in/年增加. 类似地, 1 mile 赛跑的世界纪录以一个近似的常数速度 0.4 s/年减少. 我们现在考察如何计算不是常数的变化率.

例 1 表 1-3 给出 20 世纪 60 年代到 90 年代期间奥运会撑杆跳高的获胜高度[④]. 求 1960~1968 年以及 1992~2000 年获胜高度的变化率. 这两个期间中的哪个, 高度增加比 1900~1912 年要快?

表 1-3 男子奥运会撑杆跳高获胜高度 (近似值)

年	1960	1964	1968	···	1992	1996	2000
高度 (in)	185	201	213	···	228	233	232

解 从 1900~1912 年高度增加 2 in/年. 为了与 20 世纪 60 年代和 90 年代比较, 我们计算

$$1960\sim1968\text{年高度的平均变化率}=\frac{\text{高度变化}}{\text{时间变化}}=\frac{213-185}{1968-1960}=3.5\,\text{in/年}.$$

$$1992\sim2000\text{年高度的平均变化率}=\frac{\text{高度变化}}{\text{时间变化}}=\frac{232-228}{2000-1992}=0.5\,\text{in/年}.$$

① www.physsportsmed.com/issues/2001/07_01/ju101news.htm, 访问日期 2005 年 1 月 4 日.
② www.css.edu/users/tboone2/asep/May2002JEPonline.html, 访问日期 2005 年 1 月 4 日.
③ www.css.edu/users/tboone2/asep/May2002JEPonline.html, 访问日期 2005 年 1 月 4 日.
④ 《2005 年世界年鉴》, 第 866 页 (纽约).

因此, 在 20 世纪 60 年代期间要比 1900~1912 年高度增加得要快. 在 20 世纪 90 年代期间要比 1900~1912 年高度增加得要慢. □

在例 1 中, 函数没有常数变化率 (它不是线性的). 然而, 我们可以计算在任何区间的**平均变化率**. 用了词汇 "平均" 是由于变化率在该区间内可以变化. 我们有如下的一般公式.

> 若 y 是 t 的函数, $y=f(t)$, 那么, 在 $t=a$ 和 $t=b$ 之间
>
> $$y \text{ 的平均变化率} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$
>
> 函数平均变化率的单位是 y 的单位/t 的单位.

线性函数的平均变化率是它的斜率, 而且如果一个函数在所有区间上的变化率相同那么它就是线性的.

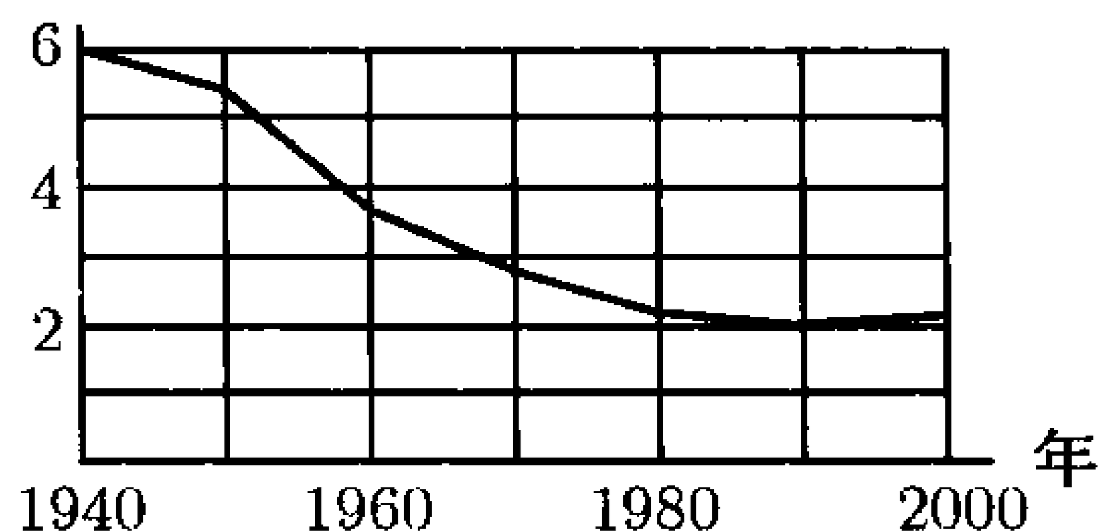


图 1-24 美国的农场数 (百万)

例 2 利用图 1-24, 估计美国在 1950~1970 年农场数①的平均变化率.

解 图 1-24 表明 1950 年美国的农场数 N 近似为 5.4 百万, 而 1970 年 N 近似为 2.8 百万. 如果时间 t 是年, 那么我们有

$$\text{平均变化率} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{2.8-5.4}{1970-1950} = -0.13\text{百万/年}.$$

平均变化率是负的是由于农场数在减少. 在这一期间, 农场数以每年 0.13 百万, 即每年 13 万的平均速度减少. □

1.3.1 递增函数和递减函数

因为撑杆跳高获胜高度的变化率是正的, 所以我们知道高度在增加. 农场数的变化率是负的, 所以农场数在减少. 参见图 1-25. 一般论述如下.

> 如果函数 $f(x)$ 的值随着 x 的增加而增加, 那么函数 f 是**递增的**.
> 如果函数 $f(x)$ 的值随着 x 的增加而减少, 那么函数 f 是**递减的**.
> 当我们从左向右移动时, 递增函数的图形上升.
> 当我们从左向右移动时, 递减函数的图形下降.



图 1-25 递增函数和递减函数

我们已经看到了奥运会记录和农场数是如何随时间变化的. 下一个例子中, 我们来看看关于时间以外的其他量的变化率.

例 3 环境中 PCB(多氯联苯, 一种工业污染物) 的水平高会对鹈鹕蛋造成影响. 表 1-4 表明当蛋壳中 PCB 的含量增加时, 蛋壳的厚度减小, 从而蛋更容易破碎[①].

当 PCB 的含量从 87 ppm 变到 452 ppm 时, 求蛋壳厚度的平均变化率. 给出单位并说明你的答案为什么是负的.

表 1-4 鹈鹕蛋壳的厚度和蛋壳中 PCB 的含量

含量 c(ppm)	87	147	204	289	356	452
厚度 h(mm)	0.44	0.39	0.28	0.23	0.22	0.14

解 因为我们要求厚度的变化关于 PCB 浓度变化的平均变化率, 所以有

$$\text{厚度的平均变化率}=\frac{\text{厚度变化}}{\text{PCB 水平变化}}=\frac{\Delta h}{\Delta c}=\frac{0.14-0.44}{452-87}=-0.00082\text{mm/ppm}.$$

单位是厚度单位 (mm) 除以 PCB 浓度单位 (ppm), 也就是 mm/ppm. 平均变化率为负是由于当 PCB 浓度增加时蛋壳厚度减少. 在蛋壳中 PCB 每增加一个百万分率鹈鹕蛋壳的厚度平均减小 0.000 82 mm. □

1.3.2 图形化变化率

对于函数 $y=f(x)$, 在 $x=a$ 和 $x=c$ 之间函数值的变化是 $\Delta y=f(c)-f(a)$. 因为 Δy 是两个 y 值的差, 所以在图 1-26 中它由垂直距离表示. 在 $x=a$ 和 $x=c$ 之间 f 的平均变化率在图 1-27 中由连接点 A 和点 C 的直线斜率表示. 这条直线叫做在 $x=a$ 和 $x=c$ 之间的**割线**.

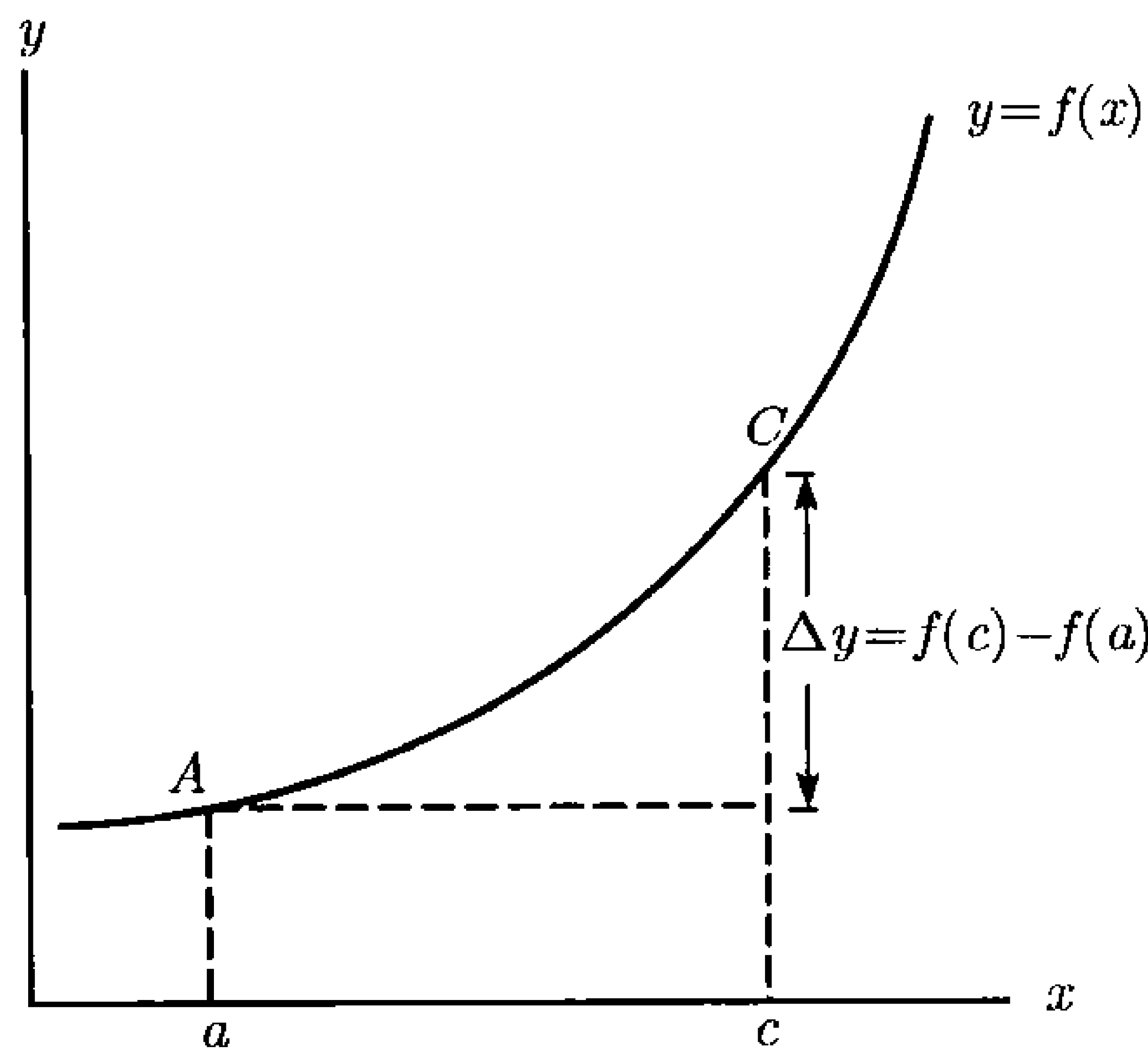


图 1-26 函数值的变化由垂直距离表示

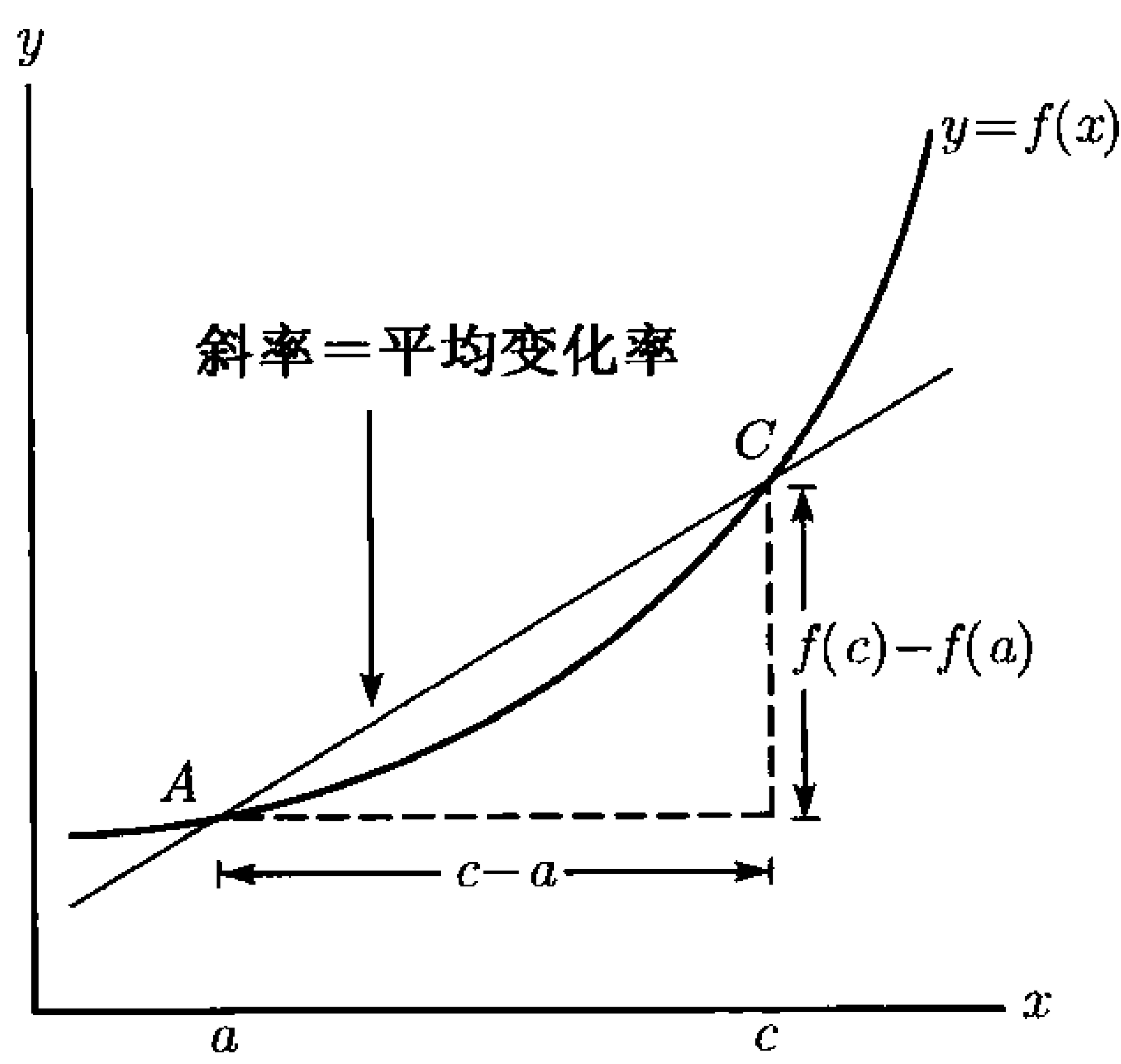


图 1-27 平均变化率由直线的斜率表示

① Risebrough, R. W., "环境污染对除了人以外的动物的影响."《第 6 届伯克利数学和统计学专题研讨会论文集》, 第四卷, 第 443–463 页 (伯克利: 加利福尼亚大学出版社, 1972).

例 4 (a) 求 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间的平均变化率.

(b) 作出 $f(x)$ 的图形并将该平均变化率表示成一条直线的斜率.

(c) 函数在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间的平均变化率与在 $x=4$ 和 $x=5$ 之间的平均变化率, 哪个大? 关于函数的图形这告诉了我们什么?

解 (a) 因为 $f(1)=\sqrt{1}=1$ 并且 $f(4)=\sqrt{4}=2$, 所以在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间, 我们有

$$\text{平均变化率}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}.$$

(b) $f(x)=\sqrt{x}$ 的图形由图 1-28 给出. 在 1 和 4 之间 f 的平均变化率是在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间的割线的斜率.

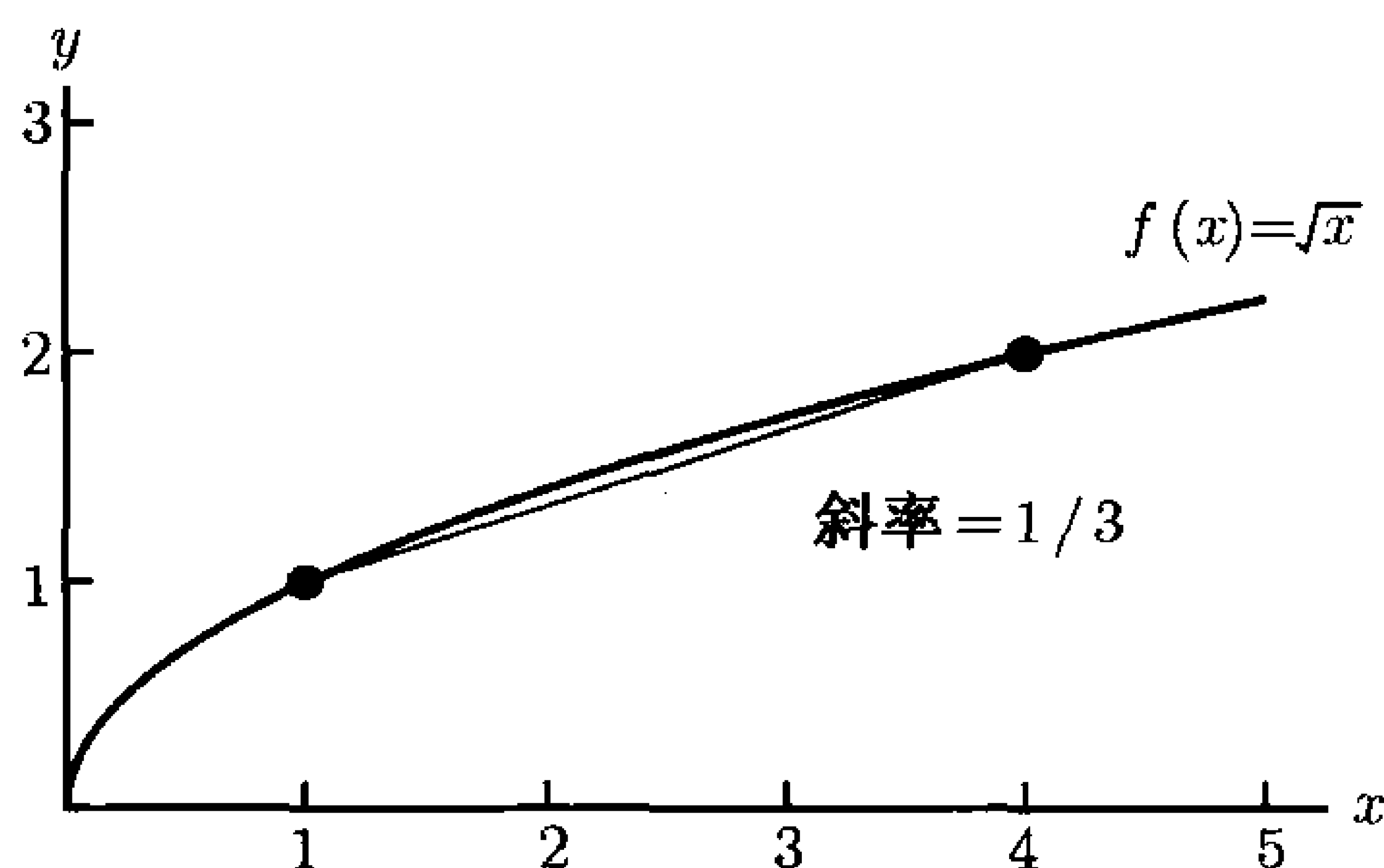


图 1-28 平均变化率 = 割线的斜率

(c) 因为在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间的割线比在 $x=4$ 和 $x=5$ 之间的割线陡, 所以在 $x=1$ 和 $x=4$ 之间的平均变化率比在 $x=4$ 和 $x=5$ 之间的平均变化率大. 平均变化率递减. 这告诉我们该函数的图形向下弯曲. □

1.3.3 凹性

图 1-28 展示了一个向下弯曲的图形, 由于其中的变化率是递减的. 图 1-26 中的图形是向上弯曲的, 因为函数的变化率是递增的. 我们给出下面的定义.

> 当我们从左向右移动时, 如果函数图形向上弯曲, 那么该图形是**上凹的**; 如果图形是向下弯曲的, 那么该图形是**下凹的**(见图 1-29).



图 1-29 图形的凹性

例 5 利用图 1-30 估计如下区间:

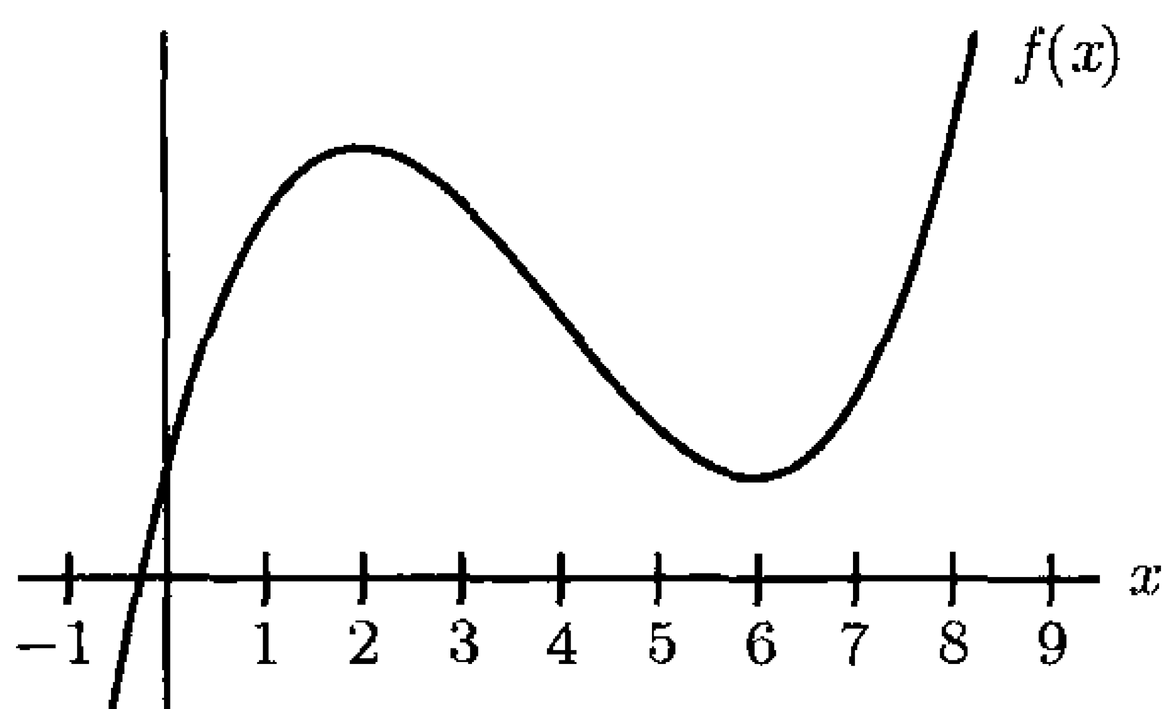


图 1-30

(a) 函数是递增的; 函数是递减的. (b) 图形是上凹的; 图形是下凹的.

解 (a) 图形指出 $x<2$ 和 $x>6$ 时函数是递增的. $2<x<6$ 出现递减.

(b) 在左边图形是下凹的而在右边图形是上凹的. 难以准确地说出图形中凹性改变的位置, 虽然像是 $x=4$. 近似地认为, $x<4$ 图形是下凹的而 $x>4$ 图形是上凹的. □

例 6 表 1-5 给出了 $f(t)$ 的值, f 看起来像是递增的还是递减的? 你认为它的图形是上凹的还是下凹的?

表 1-5 $f(t)$

t	0	5	10	15	20	25	30
$f(t)$	12.6	13.1	14.1	16.2	20.0	29.6	42.7

解 因为所给的 $f(t)$ 的值随 t 的增加而增加, 所以 f 看起来像是递增的. 当我们从左往右读时, $f(t)$ 的变化开始较小然后越来越大 (对 t 的恒量变化), 所以图形爬升越来越快. 因此, 该图形看起来像是上凹的. 另一种方法, 描出这些点, 注意到经过这些点的曲线向上弯曲. □

1.3.4 距离、速度和速率

向空中抛出一个柚子. 柚子离地面的高度开始增加然后减少. 参见表 1-6.

表 1-6 柚子抛出去后 t(s) 离地面的高度 y

t(s)	0	1	2	3	4	5	6
y(ft)	6	90	142	162	150	106	30

例 7 求柚子在最初 3 s 高度的变化和平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

解 最初 3 s 高度的变化是 $\Delta y=162-6=156$ ft. 这意味着柚子在最初 3 s 总共上升了 156 ft. 在这 3 s 期间平均变化率是 156/3=52 ft/s. 葡萄柚在最初 3 s 以 52 ft/s 的平均变化率上升. □

高度关于时间的平均变化率是速度. 你可以认为变化率单位 (ft/s) 就是速度的单位.

$$\text{平均速度}=\frac{\text{距离变化}}{\text{时间变化}}=\text{距离关于时间的平均变化率}$$

速度和**速率**之间是有区别的. 假设一个物体沿着一条直线运动. 如果我们取一个方向为正方向, 那么当物体沿着这一方向运动时其速度就是正的而沿着相反方向

运动时其速度就是负的. 对于柚子, 向上是正的而向下是负的. 速率是速度的量值, 所以它总是正的或者是零.

例 8 求柚子在 $t=4$ 到 $t=6$ 的区间上的平均速度. 解释你的答案的符号.

解 因为 $t=4$ 时的高度是 $y=150$ 而 $t=6$ 时的高度是 $y=30$, 所以我们有

$$\text{平均速度} = \frac{\text{距离变化}}{\text{时间变化}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{30-150}{6-4} = -60 \text{ ft/s}.$$

负号意味着高度在下降并且柚子在向下运动. □

例 9 汽车行驶在一条直道上离家远去. t 时刻它离开家的距离如图 1-31 所示. 汽车的平均速度是在第一个小时内大还是在第二个小时内大?

解 平均速度由割线的斜率表示. 图 1-32 显示在 $t=0$ 和 $t=1$ 之间的割线要比在 $t=1$ 和 $t=2$ 之间的割线陡. 因此, 平均速度在第一个小时内大.

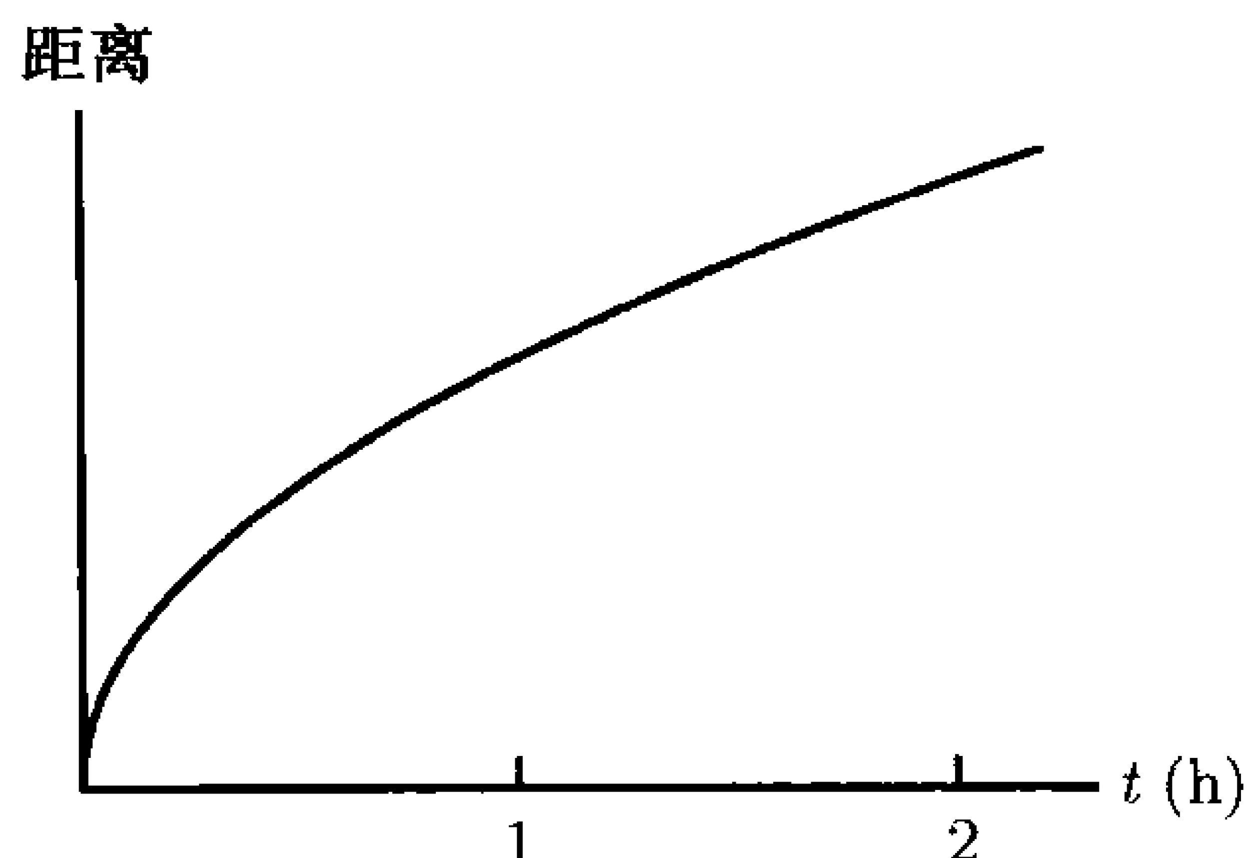


图 1-31 汽车离家的距离

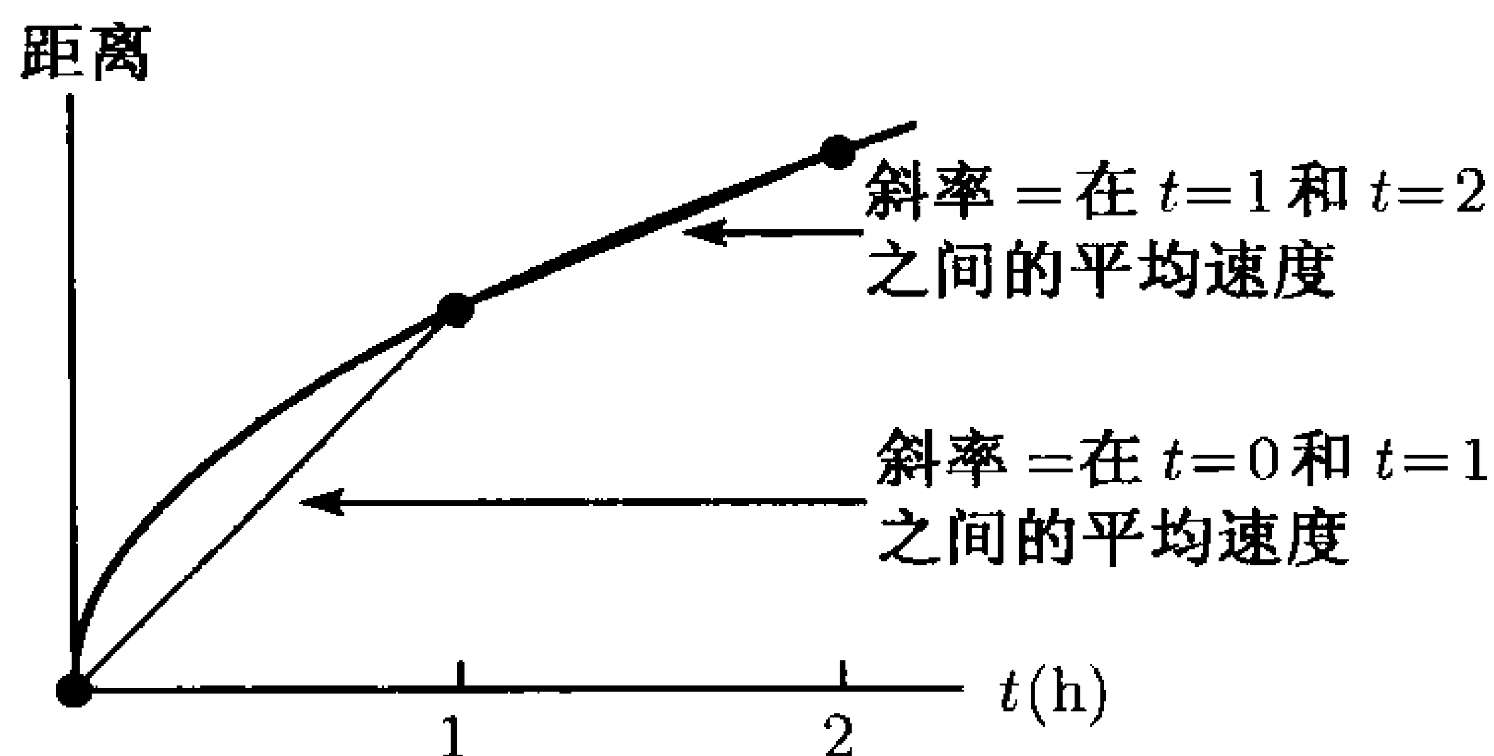


图 1-32 汽车的平均速度

□

习题

在习题 1~4 中, 确定图形是上凹的, 还是下凹的, 还是二者都不是.

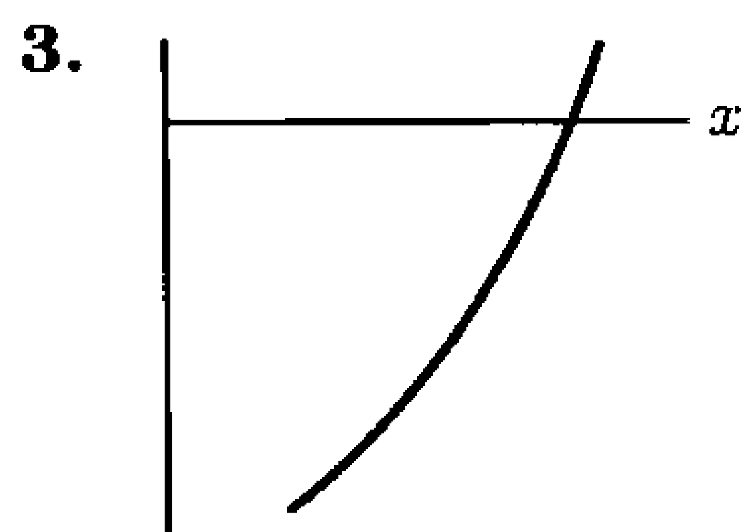
1.



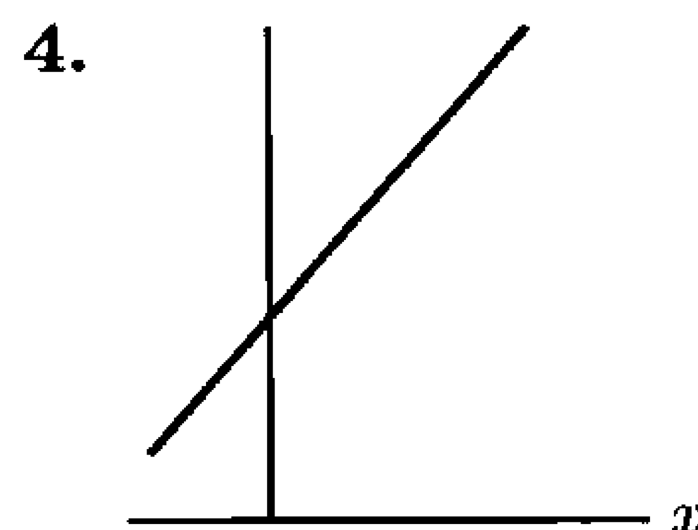
2.



3.



4.



5. 下表给出了函数 $w=f(t)$ 的值. 该函数是递增的还是递减的? 该函数的图形是上凹的还是下凹的?

t	0	4	8	12	16	20	24
w	100	58	32	24	20	18	17

6. 确定 x 区间使得图形为图 1-33 的函数是:

(a) 递增并且上凹的 (b) 递增并且下凹的

(c) 递减并且上凹的 (d) 递减并且下凹的

7. 新产品问世时, 越来越多的人要尝试. 然而, 随着时间的推移要尝试的人的比例会下降.

(a) 画出已经尝试过这种产品的总人数关于时间变化的图形.

(b) 该图形的凹性是什么?

8. 作一个函数 $f(x)$ 的图形, 该函数处处递增, 并且对负的 x 是上凹的, 对正的 x 是下凹的.

9. 求函数 $f(x) = 2x^2$ 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 之间的平均变化率.

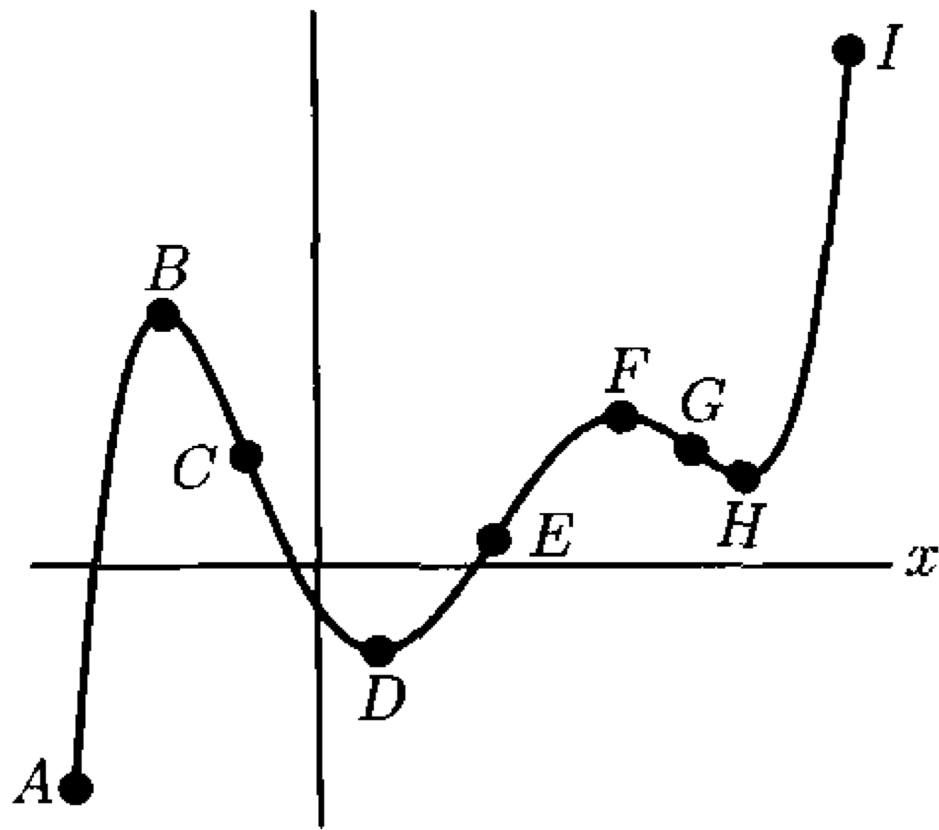


图 1-33

10. 1000 美元的存款存入一个账户, 按复利每年的年利率是 8%, t 年后账户里的余额 B 美元由 $B = 1000(1.08)^t$ 给出. 求余额在 $t = 0$ 到 $t = 5$ 的区间上的平均变化率. 给出它的单位并用账户中的余额解释你的答案.

11. 下表给出了美国的烟叶产量①.

(a) 在 1996~2003 年烟叶产量的平均变化率是多少? 给出单位并用烟叶的产量解释你的答案.

(b) 在这 7 年期间, 是否有这样的区间, 烟叶产量的平均变化率是正的? 如果有, 是什么时候?

年	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
产量 (百万磅)	1517	1787	1480	1293	1053	991	879	831

12. 你希望下面每个平均变化率 (单位: 每年) 是正的还是负的? 说明理由.

(a) 世界雨林的英亩数.

(b) 世界人口.

(c) 自 1950 年以来, 美国每年脊髓灰质炎患者数.

(d) 正在被侵蚀的沙丘高度.

(e) 美国的生活成本.

13. 图 1-34 表明鲟 (一种鱼) 的长度 L(cm) 是时间 t(年) 的函数②.

(a) 该函数是递增的还是递减的? 其图形是上凹的还是下凹的?

(b) 估计 $t = 5$ 到 $t = 15$ 之间鲟的平均增长率. 给出单位并用鲟解释你的答案.

14. 下表给出美国的总劳动力 L. 求出 1940~2000 年, 1940~1960 年, 1980~2000 年的平均变化率. 给出单位并用劳动力解释你的答案③.

---

① 《2005 年世界年鉴》, 第 138–139 页 (纽约).

② 数据来自 von Bertalanffy, L., 《一般系统论》, 第 177 页 (纽约: Braziller, 1968).

③ 《2005 年世界年鉴》, 第 144 页 (纽约).

年	1940	1960	1980	2000
L(千名工人)	47 520	65 778	99 303	136 891

15. 全世界海洋捕鱼量 (吨)[1], 1950 年是 1700 万吨, 而 2001 年是 9900 万吨. 在这期间海洋捕鱼量的平均变化率是多少? 给出单位并解释你的答案.

16. 图 1-35 表示美国进口总值 (10 亿美元)[2].

(a) 1985 年的进口总值高还是 2003 年的进口总值高? 大约高多少?

(b) 估计 1985~2003 年的平均变化率. 给出单位并用美国进口总值解释你的答案.

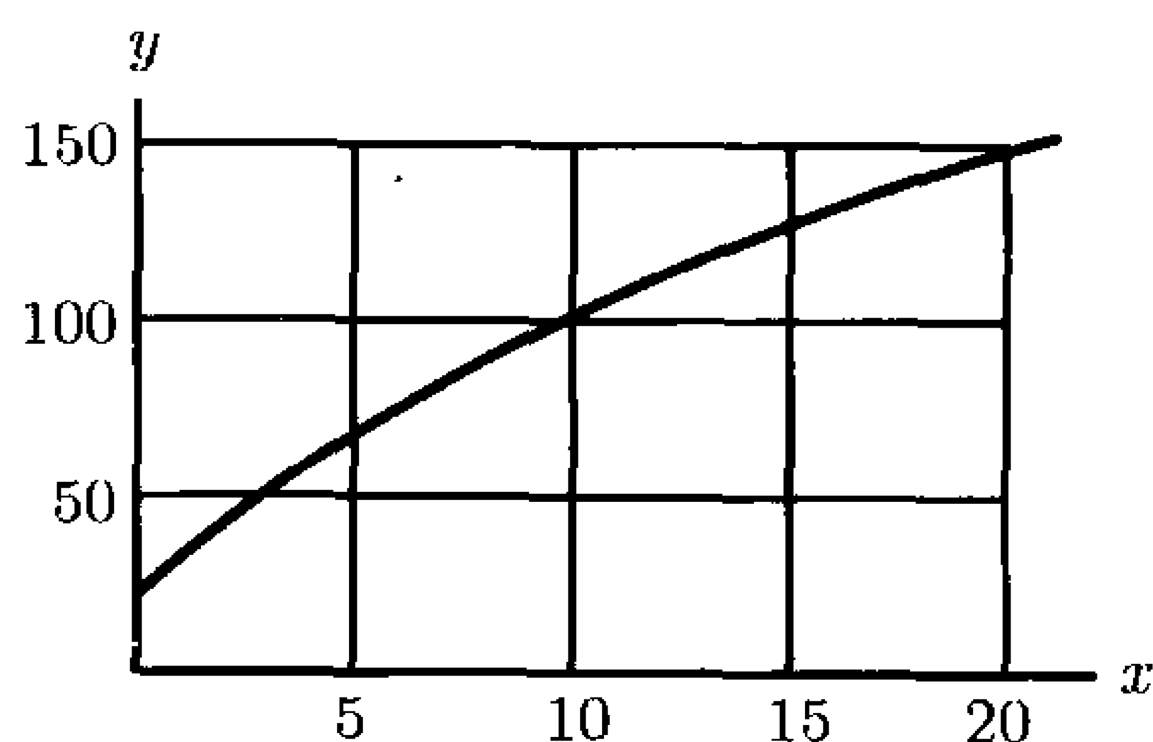


图 1-34

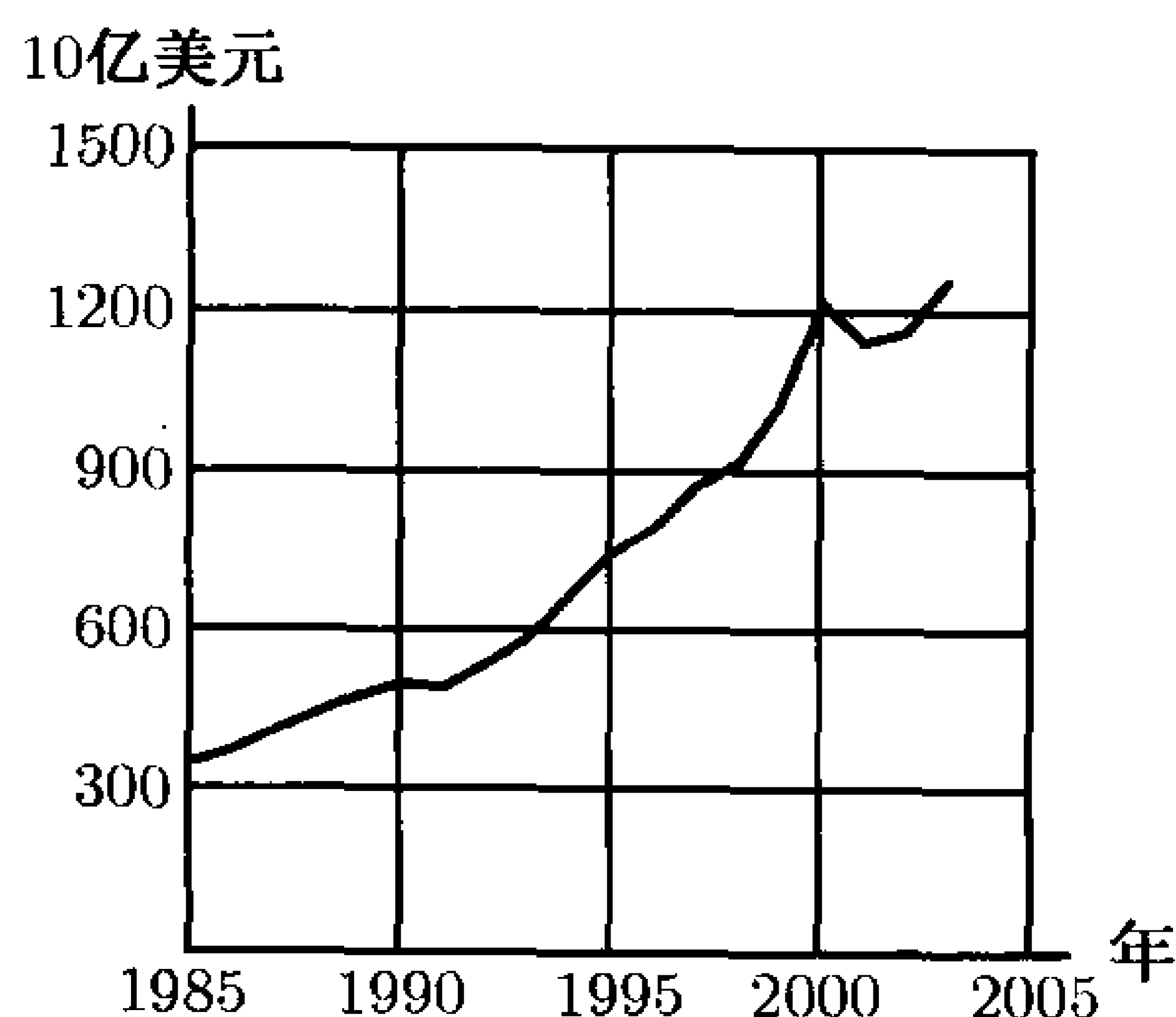


图 1-35

17. 下表给出百事公司的销售额. 百事公司经营两个主要业务: 饮料 (包括百事可乐) 和快餐食品[3].

(a) 求 1999~2004 年销售额的变化量.

(b) 求 1998~2004 年销售额的平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

年	1999	2000	2001	2002	2003	2004
销售额 (百万美元)	20 367	20 438	23 512	25 112	26 971	29 261

18. 下表给出通用汽车公司的收益 R, 通用汽车公司是世界最大的汽车制造商[4].

(a) 求 1999~2004 年的收益变化量.

(b) 求 1999~2004 年收益的平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

(c) 从 1999~2004 年, 是否有一年, 在此期间平均变化率是负的? 如果有, 是哪一年?

年	1999	2000	2001	2002	2003	2004
R(10 亿美元)	176.6	183.3	177.3	177.3	185.5	193.0

19. 1977 年拥有有线电视的美国家庭数[5]是 12 168 450, 而 2003 年是 73 365 880. 估计在

① 《2005 年世界年鉴》, 第 143 页 (纽约).

② www.ita.doc.gov/td/industry/otea/usfth/aggregate/H03t26.pdf, 访问日期2005年4月19日.

③ www.pepsico.com, 访问日期 2005 年 2 月 20 日.

④ www.gm.com /companyinvestor_information/earnings/hist_earnings/index.html, 访问日期 2005 年 2 月 20 日.

⑤ 《2005 年世界年鉴》, 第 310 页 (纽约).

这 26 年期间拥有有线电视的美国家庭数的平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

20. 图 1-9 表明在人的血液中尼古丁含量 $N = f(t)$(mg) 是最后一支烟之后的时间 t(h) 的函数.

(a) 尼古丁水平的平均变化率是正还是负? 说明理由.

(b) 求 $t = 0$ 到 $t = 3$ 之间的尼古丁水平的平均变化率. 给出单位并用尼古丁解释你的答案.

21. 下表给出狗的血液中肌酐的浓度 c①.

(a) 带着单位求出在下列情况下浓度的平均变化率.

(i) 第 6~8 min　(ii) 第 8~10 min

(b) 用肌酐说明它们的符号和结果中的相关量.

t(min)	2	4	6	8	10
c(mg/ml)	0.439	0.383	0.336	0.298	0.266

图 1-36 表明肌肉挛缩的速度是肌肉所拉负载量的函数, 习题 22~23 参考图 1-36.

22. 从肌肉方面解释

(a) 垂直截距　(b) 水平截距

23. (a) 求负载量从 1 kg 变到 3 kg 时肌肉挛缩速度的变化量. 给出单位.

(b) 求 1~3 kg 挛缩速度的平均变化率. 给出单位.

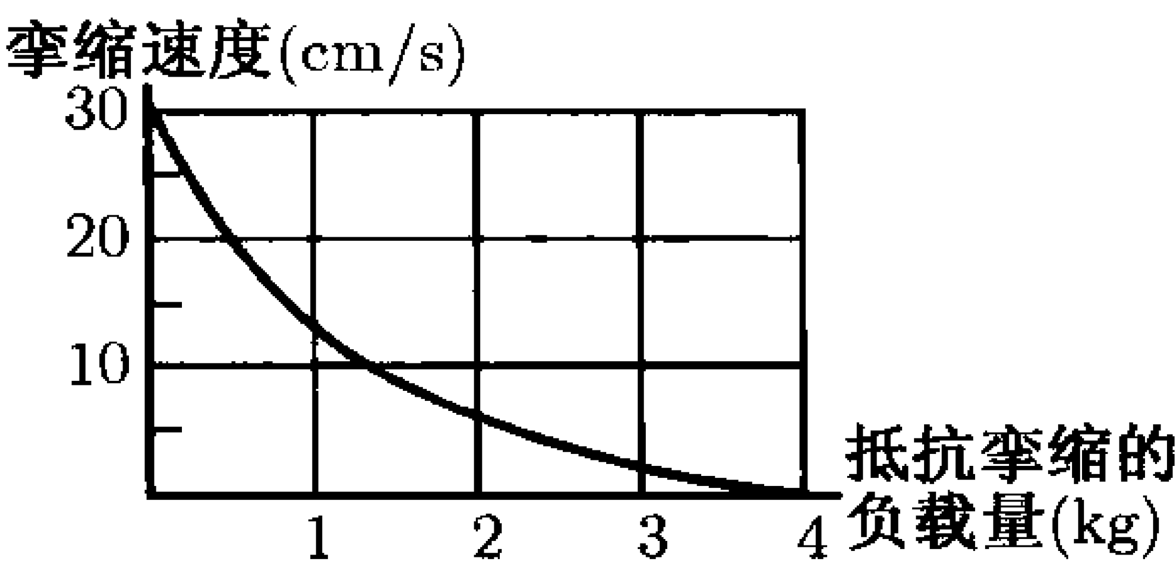


图 1-36

24. 图 1-37 显示了美国男性中不同类型癌症的年龄调整死亡率②.

(a) 探讨不同类型癌症的死亡率是如何变化的.

(b) 1930~1967 年哪种类型癌症死亡率的平均变化率已经达到最大? 估计该类型癌症死亡率的平均变化率. 解释你的答案.

(c) 1930~1967 年哪种类型癌症死亡率的平均变化率已经达到最小? 估计该类型癌症死亡率的平均变化率. 解释你的答案.

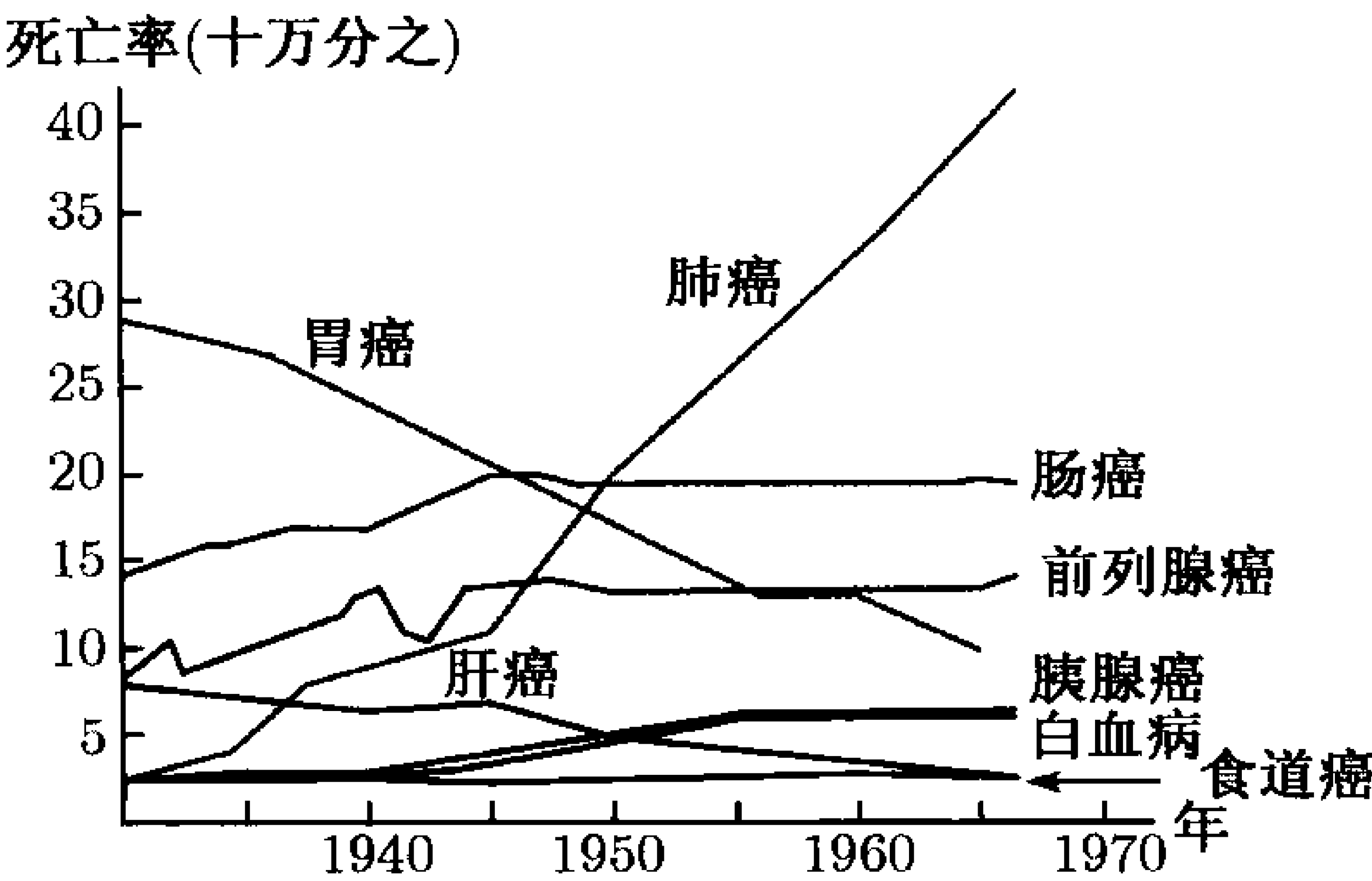


图 1-37

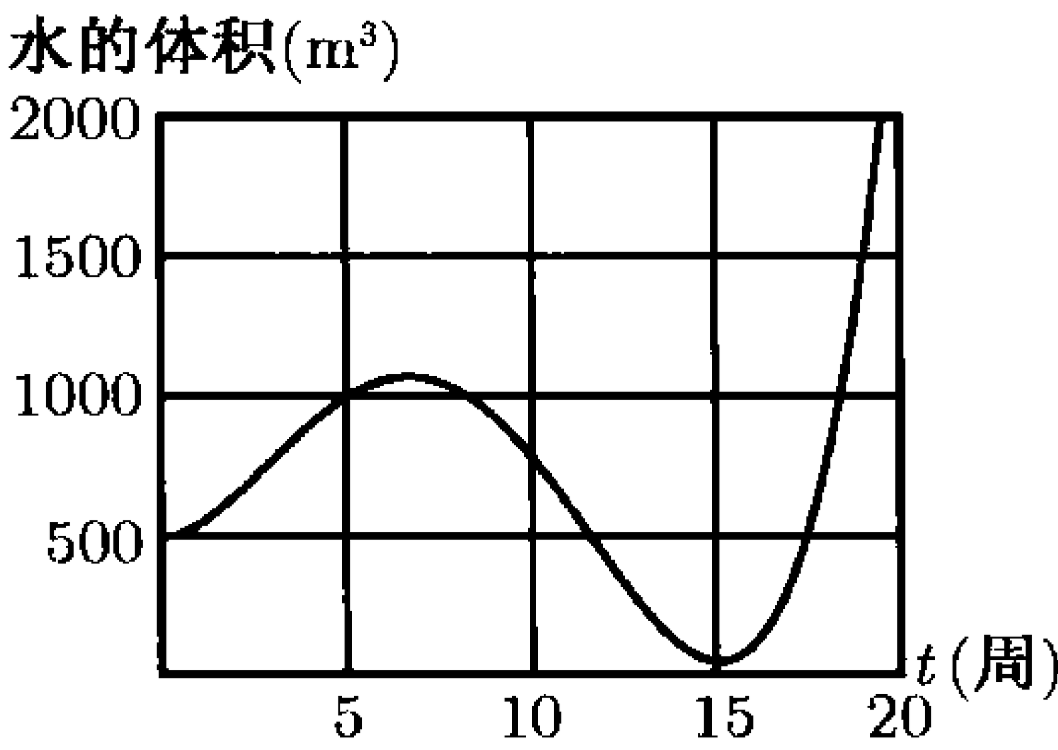


图 1-38

① 引自 Cullen, M. R.,《生物学中的线性模型》(奇切斯特: Ellis Horwood, 1985).

② Abraham M. Lilienfeld,《流行病学基础》, 第 67 页 (纽约: 牛津大学出版社, 1976).

25. 在 20 周内, 池塘中水的体积如图 1-38 所示.

(a) 在下列时间内体积的平均变化率是正还是负?

(i) $t=0$ 到 $t=5$ (ii) $t=0$ 到 $t=10$

(iii) $t=0$ 到 $t=15$ (iv) $t=0$ 到 $t=20$

(b) 在下列哪个时间区间内平均变化率较大?

(i) $0\leqslant t\leqslant 5$ 还是 $0\leqslant t\leqslant 10$

(ii) $0\leqslant t\leqslant 10$ 还是 $0\leqslant t\leqslant 20$

(c) 估计 $t=0$ 到 $t=10$ 期间的平均变化率. 用水解释你的答案.

26. 下表给出因特尔公司的销售额 S, 因特尔公司是集成电路主要生产商[①].

(a) 求 1998~2003 年的收入变化量.

(b) 求 1998~2003 年收入的平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

(c) 如果平均变化率保持 2001~2003 年的平均变化率, 哪一年销售额将首次达到 40 000 百万美元?

年	1998	1999	2000	2001	2002	2003
S(百万美元)	26 273	29 389	33 726	26 539	26 764	30 141

27. 在一次实验中, 怂恿蜥蜴尽可能地快跑. 图 1-39 表明跑出的距离 (m) 是时间 (s) 的函数[②].

(a) 如果蜥蜴跑得越来越快, 图形的凹性是什么? 这与你看到的一致吗?

(b) 估计蜥蜴在这 0.8 s 实验期间的平均速度.

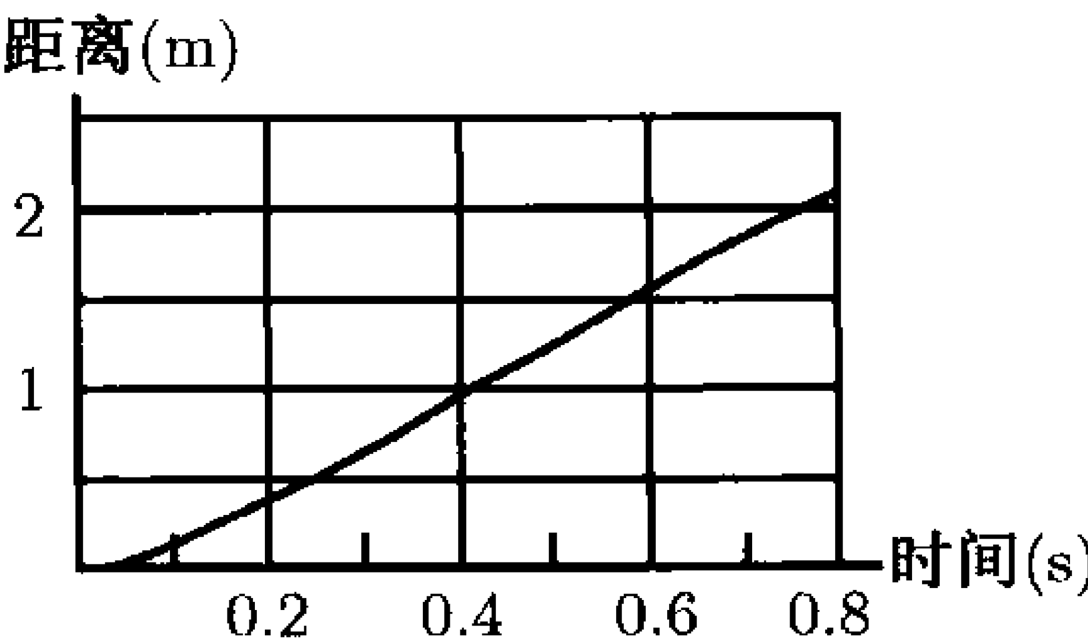


图 1-39

28. $F(t)$, $G(t)$ 和 $H(t)$ 的值在下表中给出. 哪个的图形是向上凹的哪个的图形是向下凹的? 哪个函数是线性的?

t	$F(t)$	$G(t)$	$H(t)$
10	15	15	15
20	22	18	17
30	28	21	20
40	33	24	24
50	37	27	29
60	40	30	35

29. 实验表明, 男性的最大心率 (心脏在一分钟内安全跳动的最大次数) 在其生命的最初 21 年期间每分钟要减少 9 次, 而在其生命的最初 33 年期间每分钟要减少 26 次[③]. 你如果要建立最大心率作为年龄的函数模型, 会用递增函数还是递减函数, 向上凹的函数还是向下凹的函数?

---

① www.intel.com/intel/finance/pestfin/10yrFinancials.xls, 访问时间 2005 年 4 月 19 日.

② 数据来自 Huey, R. B. 和 Hertz, P. E., "体型和坡度对蜥蜴的加速度的影响", *J.Exp.Biol.*, 第 110 卷, 1984, 第 113–123 页.

③ www.css.edu/users/tboone2/asep/May2002JEPonline.html, 访问日期 2005 年 1 月 4 日.

30. 作出具有如下性质的距离相对于时间的图形：平均速度总是正的，并且前半程的平均速度小于后半程的速度.

31. 汽车慢慢地起动然后加速，最终减速停止. 作出该汽车行驶的距离相对于时间的图形.

32. 图 1-40 表示一个物体在时刻 t 的位置.

(a) 在该图上作一条直线使得其斜率表示 $t = 2$ 到 $t = 8$ 之间的平均速度.

(b) 是 $t = 0$ 到 $t = 3$ 之间的平均速度大还是 $t = 3$ 到 $t = 6$ 之间的平均速度大?

(c) $t = 6$ 到 $t = 9$ 之间的平均速度是正的还是负的?

图　1-40

1.4　函数在经济学中的应用

本节我们考察公司或产业决策者感兴趣的一些函数.

1.4.1　成本函数

成本函数 $C(q)$ 表示生产数量为 q 的某产品的总成本.

你希望 C 是哪种函数? 生产的产品越多，总成本越高，所以 C 是一个递增函数. 生产成本可以分成两部分：**固定成本**，即使什么都不生产它们也要被算入；**可变成本**，它们由生产的产品多少决定.

一个例子：制造成本

我们考虑一个制造收音机的公司. 生产所需要的厂房和机器设备是固定成本，即使没制造收音机它们也要被算入. 劳动力和原材料的费用是可变成本，因为这些量由制造的收音机多少决定. 该公司的固定成本是 24 000 美元，而可变成本是每台收音机 7 美元. 那么,

$$\text{公司的总成本} = \text{固定成本} + \text{可变成本}$$
$$= 24\,000 + 7 \cdot \text{收音机数},$$

所以，若 q 是生产的收音机数，则

$$C(q) = 24\,000 + 7q.$$

这是斜率为 7 并且垂直截距为 24 000 的直线方程.

例 1　作出成本函数 $C(q) = 24\,000 + 7q$ 的图形. 标出固定成本和每单位的可变成本.

解　$C(q)$ 的图形是图 1-41 中的直线. 固定成本由垂直截距 24 000 表示. 每单位的可变成本由斜率 7 表示，它是对应于产量变化 1 个单位的成本变化量.

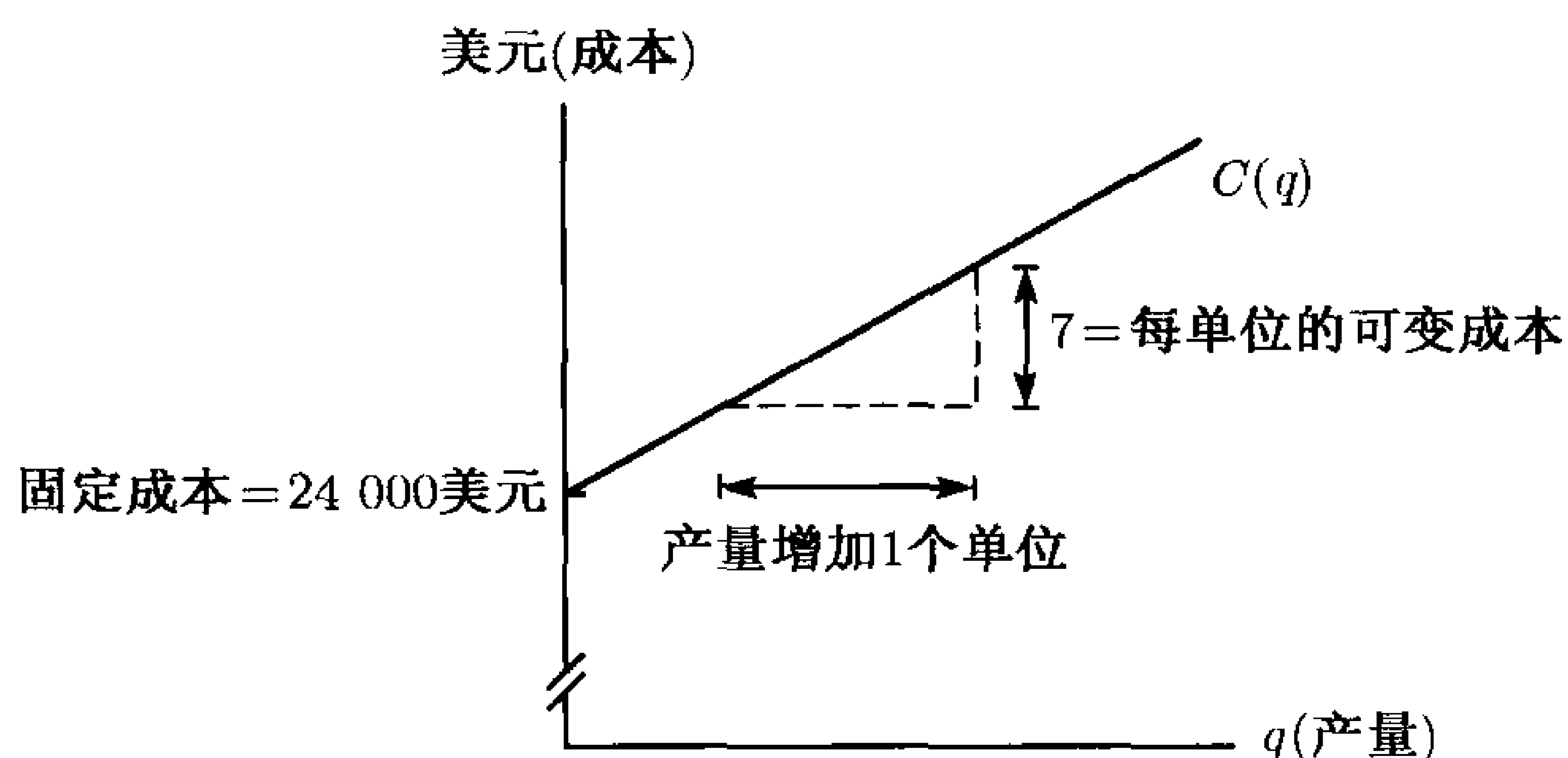


图 1-41 收音机生产商的成本函数

□

> 如果 $C(q)$ 是一个线性的成本函数, 那么
> - 固定成本由垂直截距表示;
> - 每单位的可变成本由斜率表示.

例 2 在每种情形下, 作一个满足给定条件的线性成本函数的图形:

(a) 固定成本大而每单位的可变成本小;

(b) 没有固定成本但每单位的可变成本高.

解 (a) 图形是具有大的垂直截距和小的斜率的直线. 参见图 1-42.

(b) 图形是具有零垂直截距和大的正斜率的直线 (所以该直线经过原点). 参见图 1-43. 图 1-42 和图 1-43 的标度相同.

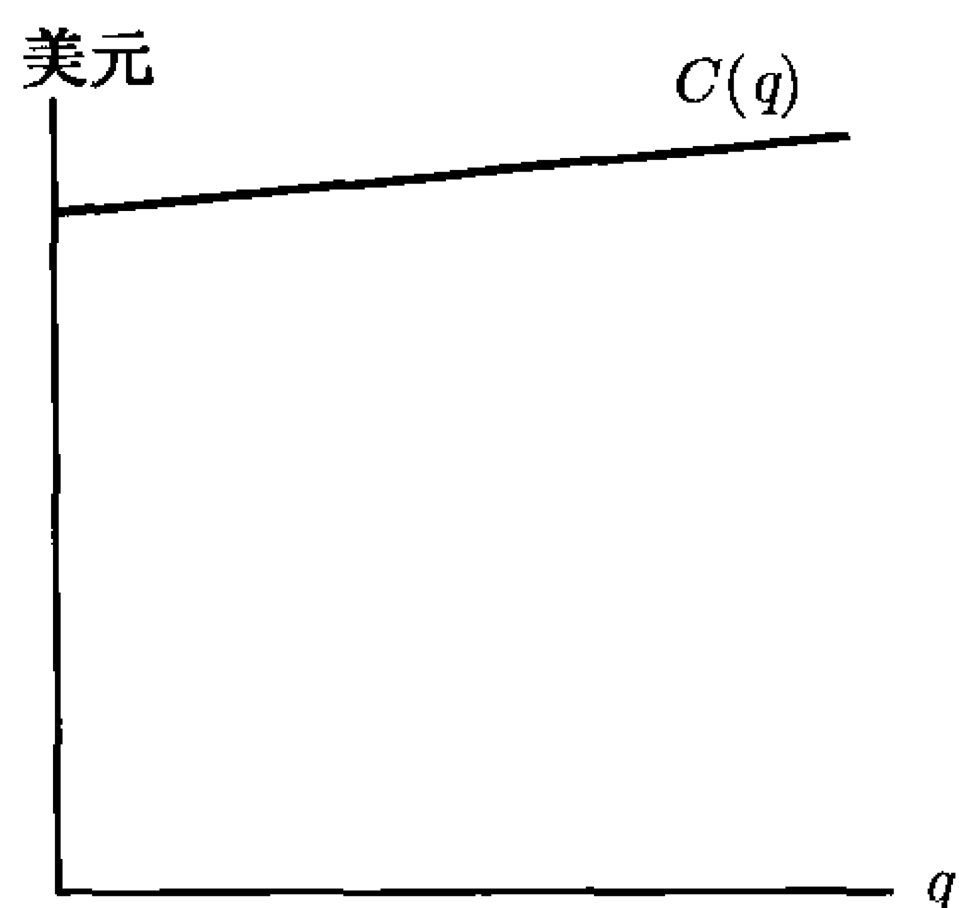


图 1-42 大的固定成本, 小的每单位可变成本

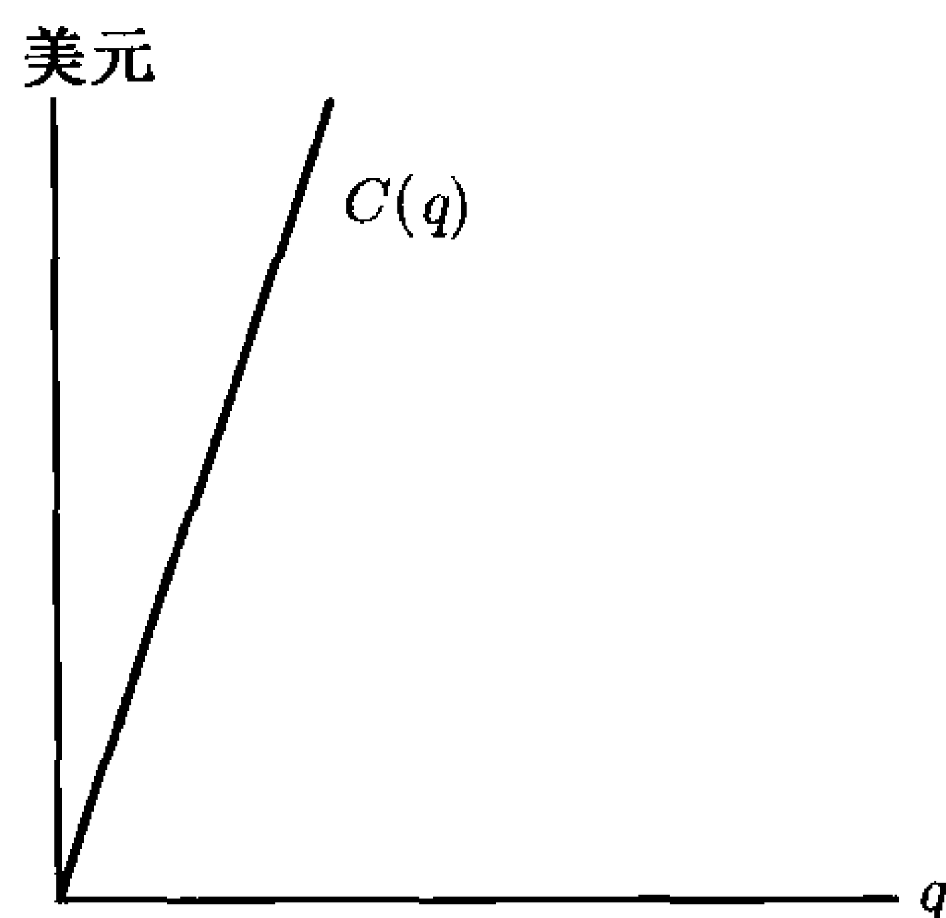


图 1-43 没有固定成本, 高的每单位可变成本

□

1.4.2 收益函数

> **收益函数** $R(q)$ 表示公司销售数量为 q 的某产品所获得的总收益.

如果产品以每单位 p 的价格销售, 并且销售量为 q, 那么

$$\text{收益} = \text{价格} \cdot \text{销售量}, \quad \text{从而 } R = pq.$$

如果价格不依赖于销售量, 从而 p 是常数, 那么作为 q 的函数, 收益的图形是经过原点的直线, 并且斜率等于价格 p.

例 3　如果收音机每台卖 15 美元, 作出制造商的收益函数略图. 在图中显示收音机的价格.

解　因为 $R = pq = 15q$, 所以收益图形是一条斜率为 15 经过原点的直线. 参见图 1-44. 价格是直线的斜率. □

例 4　在同一个坐标系中作出成本函数 $C(q) = 24\ 000 + 7q$ 和收益函数 $R = 15q$ 的图形. q 的值是多少, 公司才赚钱?

解　只有当收益大于成本时公司才赚钱, 所以我们要找出这样的 q 的值, 使得 $R(q)$ 的图形位于 $C(q)$ 的上方. 参见图 1-45.

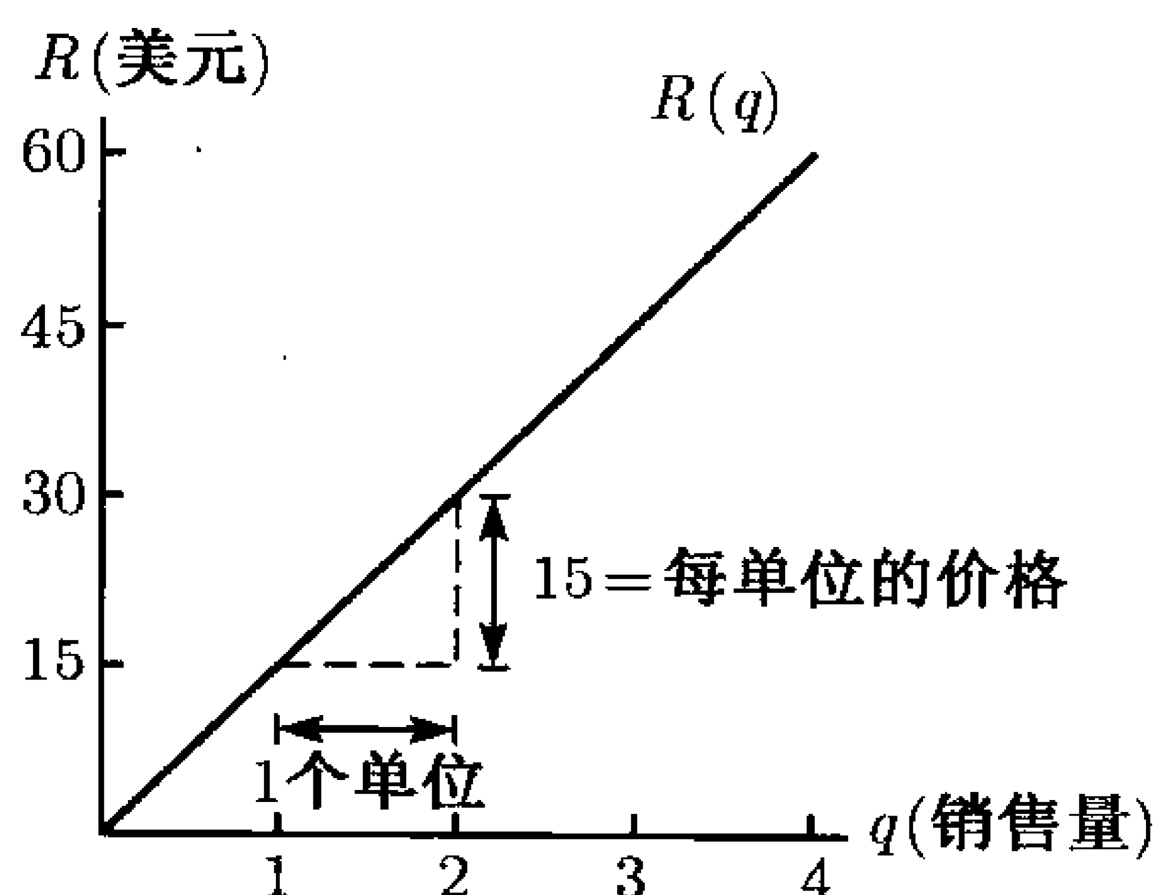


图 1-44　收音机制造商的收益函数

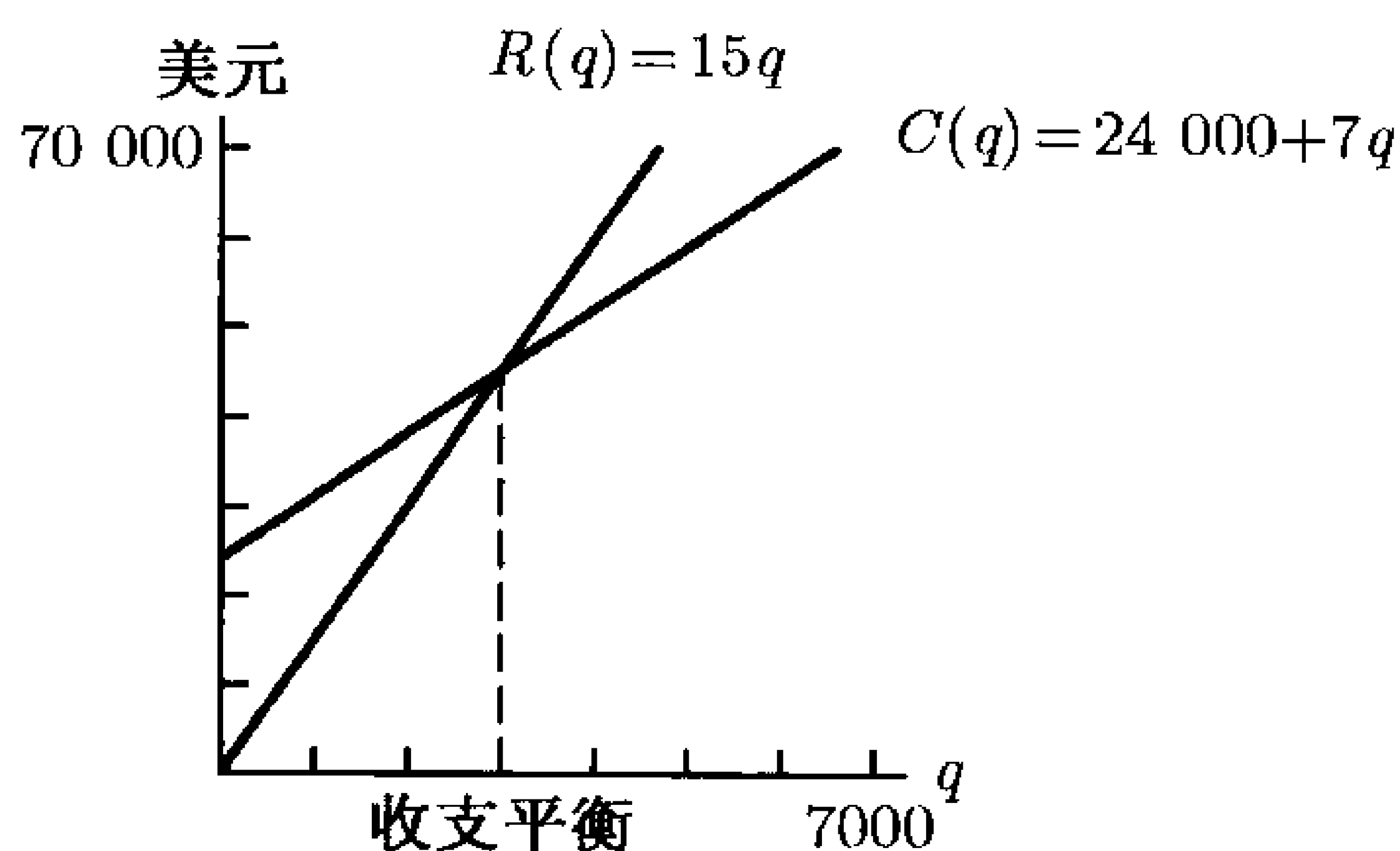


图 1-45　收音机制造商的成本和收益函数: 什么样 q 的值生利

我们求出这样的点使得在该点 $R(q)$ 的图形与 $C(q)$ 的图形相交:

$$\begin{aligned} \text{收益} &= \text{成本} \\ 15q &= 24\ 000 + 7q \\ 8q &= 24\ 000 \\ q &= 3000. \end{aligned}$$

因此, 当公司生产并销售多于 3 000 台收音机才获利. 如果公司生产并销售少于 3 000 台收音机就赔钱. □

1.4.3　利润函数

做决定常常要考虑到利润, 利润通常记作 π[①]为了与价格 p 区别开. 我们有

利润 = 收益 − 成本, 因此 $\pi = R - C$.

公司的*收支平衡点*是指, 利润是零而收益等于成本的点.

① 这个 π 与圆的面积没有任何关系, 只是与字母 p 相当的希腊字母.

例 5 求出收音机制造商的利润函数公式. 作出它的图形, 标出收支平衡点.

解 因为 $R(q)=15q$ 并且 $C(q)=24\ 000+7q$, 所以我们有

$$\pi(q)=R(q)-C(q)=15q-(24\ 000+7q)=-24\ 000+8q.$$

注意, 固定成本的相反数是垂直截距, 收支平衡点是水平截距. 参见图 1-46. □

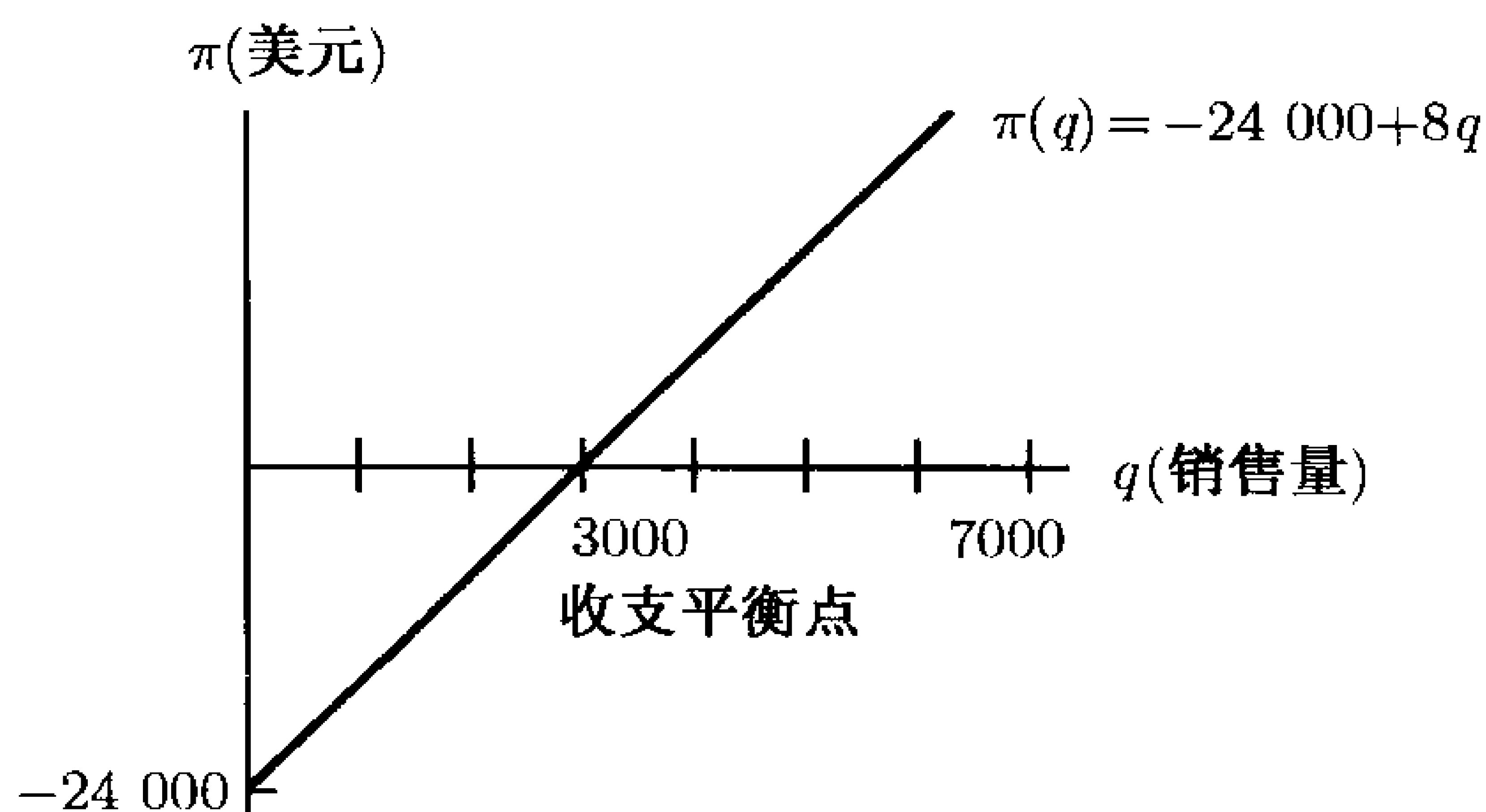


图 1-46 收音机制造商的利润

例 6 (a) 利用表 1-7 估计该公司的收支平衡点.

(b) 生产 1000 个单位的产品, 求该公司的利润.

(c) 你认为该公司对其产品收取的价格是多少?

表 1-7 公司对某产品的成本和收益概算

q	500	600	700	800	900	1000	1100
$C(q)$ (美元)	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000
$R(q)$ (美元)	4000	4800	5600	6400	7200	8000	8800

解 (a) 收支平衡点是使得收益等于成本的 q 的值. 因为 $q=800$ 时收益低于成本, 而 $q=900$ 时收益大于成本, 所以收支平衡点介于 800 和 900 之间. 表格中的值给出收支平衡点靠近 800, 因为在那里成本和收益接近. 收支平衡点的合理估计是 $q=830$.

(b) 如果公司生产 1000 个单位的产品, 那么成本是 7500 美元而收益是 8000 美元, 从而利润是 8000−7500=500 美元.

(c) 根据表格可知 $R(q)=8q$, 这表示公司每件产品卖 8 美元. □

1.4.4 边际成本、边际收益和边际利润

边际成本、边际收益和边际利润分别表示成本、收益和利润的变化率 (即斜率). 边际成本又是追加一个单位的可变成本. 用*边际*这个词是由于我们要考察 “在边界处” (即追加一个单位的产品) 成本、收益和利润是如何变化的. 例如, 对收音机制造商, 边际成本是 7 美元/件 (再多生产一件产品的追加成本是 7 美元), 边际收益是 15 美元/件 (再多卖一件产品的追加收益是 15 美元), 而边际利润是 8 美元/件(再

多卖一件产品的追加利润是 8 美元).

1.4.5 折旧函数

假设收音机生产商有一台机器价值为 20 000 美元, 十年后卖 3000 美元, 我们称该机器的价值从现在的 20 000 美元贬低到十年后转卖的 3000 美元. 折旧公式表示机器的价值 $V(t)$(美元) 是机器购置以来的年数 t 的函数. 我们假设机器是线性地贬值.

机器在新的时候 ($t=0$) 价值是 20 000 美元, 从而 $V(0)=20\,000$. 在 $t=10$ 时的最终价值是 3000 美元, 从而 $V(10)=3000$. 我们有

$$斜率 = m = \frac{3000-20\,000}{10-0} = \frac{-17\,000}{10} = -1700 美元/年.$$

这个斜率告诉, 机器的价值以每年 1700 美元的速度减少. 因为 $V(0)=20\,000$, 所以垂直截距是 20 000, 从而

$$V(t) = 20\,000 - 1700t 美元.$$

1.4.6 供给曲线和需求曲线

制造和售出的商品的数量 q 依赖于它的价格 p. 当价格上涨时, 制造商总是愿意供应更多的产品, 而消费者的需求量下降.

> 对一种给定的商品, 其**供给曲线**表示每单位时间制造商愿意提供的商品数量 q 与该商品能够卖出的价格 p 之间的关系.
> **需求曲线**表示每单位时间消费者需要的商品数量 q 与其价格 p 之间的关系.

经济学家经常认为供给量和需求量是价格的函数. 然而, 由于历史原因, 经济学家将价格 (自变量) 放在垂直轴上而商品数量 (因变量) 放在水平轴上. (这样做的原因, 是经济学家原先取价格为因变量, 并且把它放在垂直轴上. 后来, 观点改变了, 但是轴的设置没变.) 这样, 典型的供给曲线和需求曲线就如图 1-47 所示.

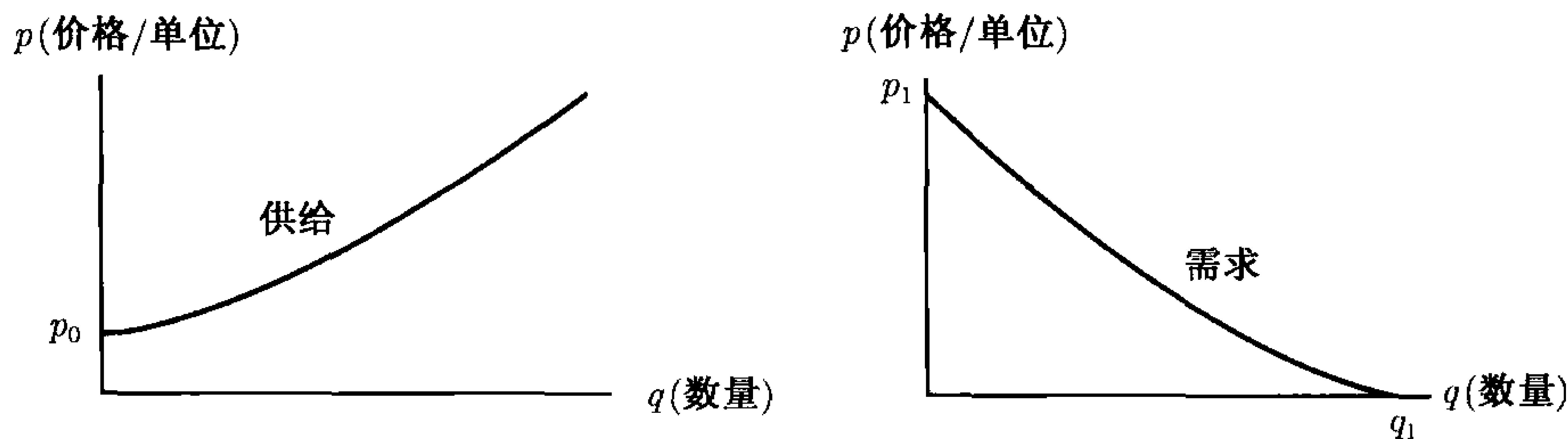


图 1-47 供给曲线和需求曲线

例 7 图 1-47 中的价格 p_0 和 p_1 以及商品数量 q_1 的经济意义是什么?

解 垂直轴对应的商品数量为零. 因为价格 p_0 是供给曲线上的垂直截距, 所以 p_0 是供给量为零时的价格. 换句话说, 价格在 p_0 以下, 供应商们什么都不会生产. 价

格 p_1 是需求曲线上的垂直截距, 所以 p_1 是需求量为零时的价格. 换句话说, 价格在 p_1 之上, 消费者们不会买这种产品.

水平轴对应的价格为零, 所以在需求曲线上的商品数量 q_1 是价格为零时的需求量——免费送掉的商品数量. □

均衡价格和均衡产量

如果我们在同一个坐标系中描绘供给曲线和需求曲线的图形, 如图 1-48 所示, 那么图形在**均衡点**相交. 在该点的值 p^* 和 q^* 分别叫做**均衡价格**和**均衡产量**. 假设市场自然调节这个均衡点. (参见习题 20.)

例 8 若

$$\text{供给量} = 3p - 50 \quad \text{并且} \quad \text{需求量} = 100 - 2p,$$

求均衡价格和均衡产量.

解 为了求出均衡价格和均衡产量, 我们求这样的点, 在该点

$$\text{供给} = \text{需求}$$

$$3p - 50 = 100 - 2p$$

$$5p = 150$$

$$p = 30.$$

均衡价格是 30 美元. 为了求均衡产量, 我们或者用需求曲线或者用供给曲线. 在价格为 30 美元处, 产量是 100−2·30=40 个单位物品. 均衡产量是 40 个单位物品. 在图 1-49 中, 需求曲线与供给曲线在 $p^* = 30, q^* = 40$ 这一点相交. □

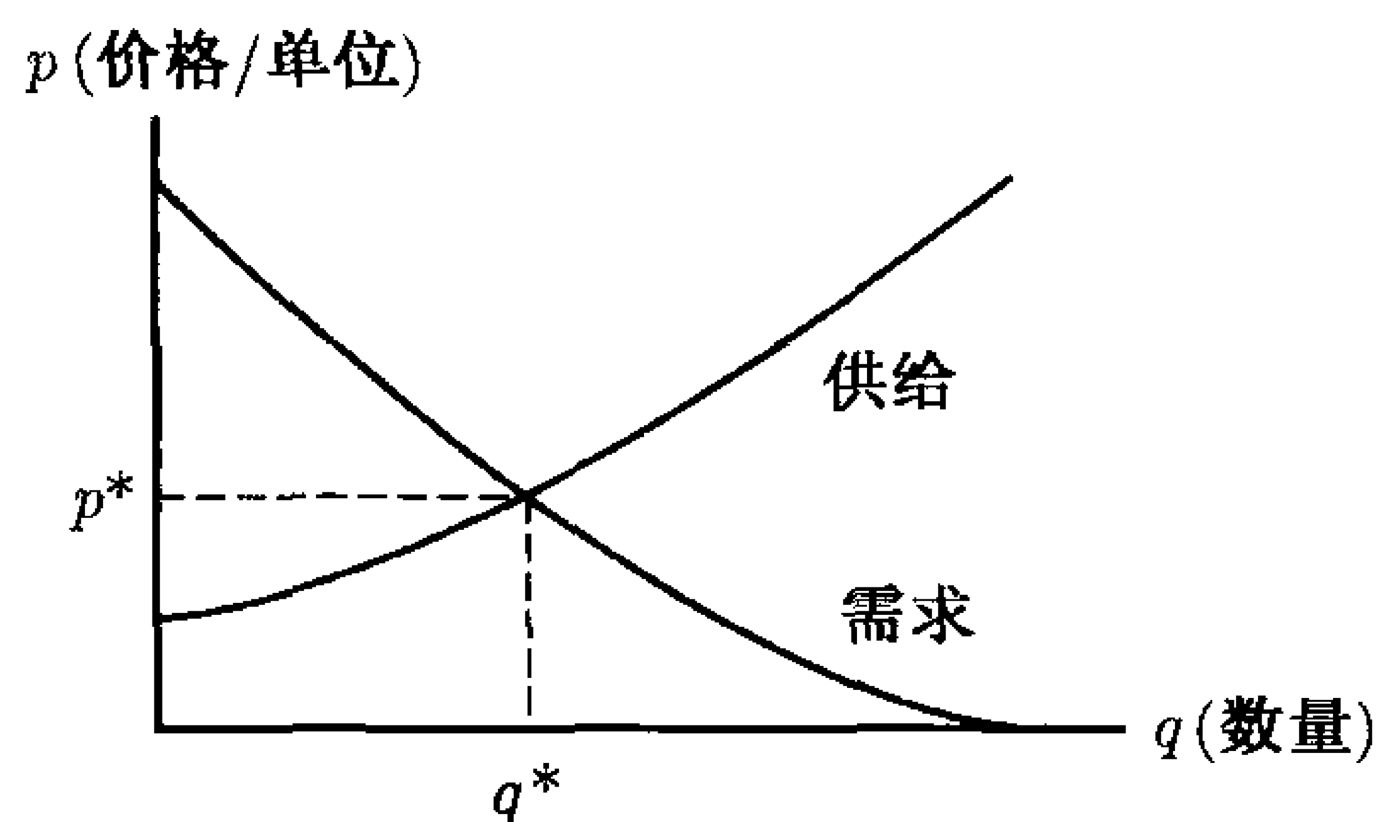


图 1-48 均衡价格和均衡产量

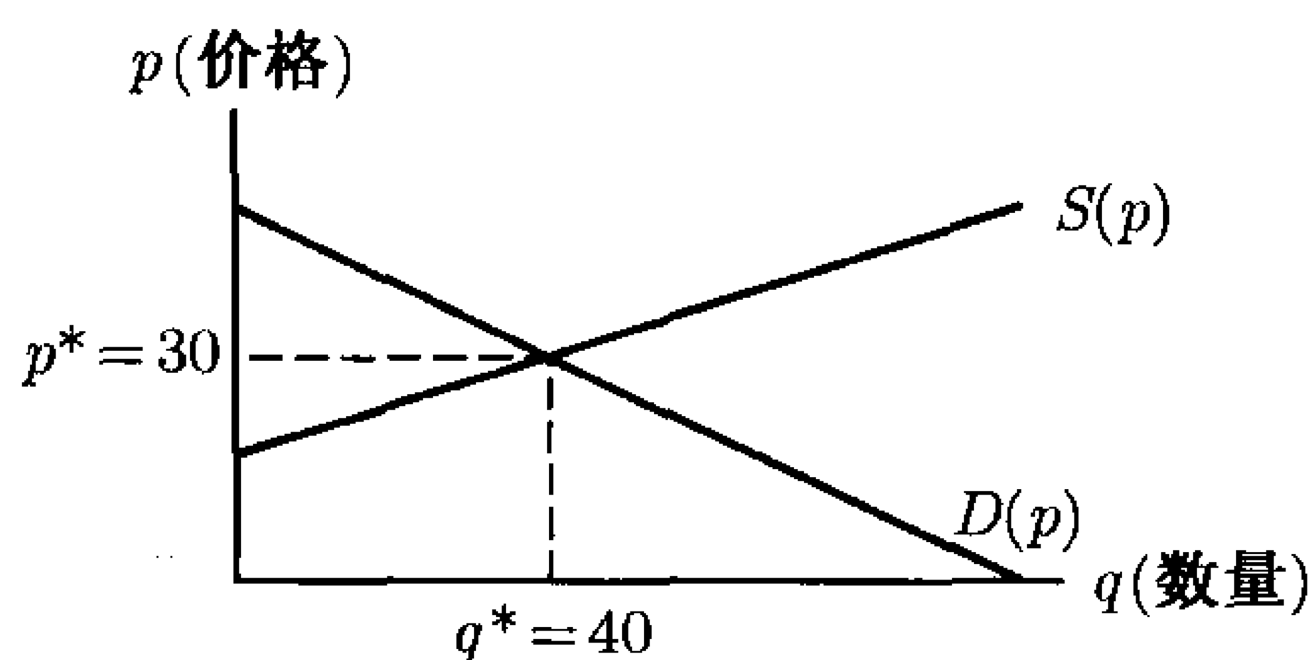


图 1-49 均衡: $p^* = 30$, $q^* = 40$

注意到供给方程表明供应商们对销售的每个单位产品所获得的钱数是如何反应的. 在例 8 中,

$$\text{供给量} = 3(\text{供应商收到的每单位产品的钱数}) - 50.$$

在这一情形中, 收到的钱数是价格 p, 所以供给曲线的方程是

$$q = 3p - 50.$$

类似地, 需求方程表明消费者们对每个单位商品所支付的钱数是如何反应的. 在例 8 中,

$$\text{需求量} = 100 - 2(\text{消费者支付的每单位商品的钱数}).$$

还有, 支付的钱数是价格 p, 所以需求曲线的方程是

$$q = 100 - 2p.$$

税对均衡的影响

税对产品的均衡价格和均衡产量有什么影响? 我们区分两种类型的税[1]. **从量税**是不管销售价格, 每销售一个单位产品的固定金额. 像汽油、酒、香烟这类商品就是如此. 从量税通常向生产者征收. **销售税**是销售价格的一个固定百分数. 美国的许多城市和州对多种商品征收销售税. 销售税通常向消费者征收. 我们现在考虑从量税; 销售税在习题 36 和习题 37 中涉及.

例 9 现在在例 8 中向供应商们征收每单位 5 美元的从量税. 新的均衡价格和均衡产量是多少?

解 消费者每单位支付 p 美元, 但是供应商每单位只收到 $p-5$ 美元, 因为 5 美元作为税款属于政府. 由于

$$\text{供给量} = 3(\text{供应商每单位收取的钱数}) - 50,$$

所以新的供给方程是

$$\text{供给量} = 3(p-5) - 50 = 3p - 65;$$

需求方程变为:

$$\text{需求量} = 100 - 2p.$$

在均衡价格处, 我们有

$$\begin{aligned} \text{需求} &= \text{供给} \\ 100 - 2p &= 3p - 65 \\ 165 &= 5p \\ p &= 33. \end{aligned}$$

均衡价格是 33 美元. 由于需求量是 $q = 100 - 2 \cdot 33 = 34$, 所以均衡产量是 34 个单位. □

在例 8 中, 均衡价格是 30 美元; 在例 9 中, 由于征收 5 美元的税, 均衡价格是 33 美元. 这样, 收税的结果是均衡价格增加 3 美元. 注意到这比税款的钱数少. 消费者最终比不收税时多支付 3 美元. 然而政府每单位商品收取 5 美元. 生产者支付另外的 2 美元税, 每单位商品的付讫价格剩下 28 美元. 虽然税是向生产者征收的, 但是从更高的价格方面来说, 部分税转嫁到了消费者头上. 这种税提高了价格减少了商品的销售数量. 参见图 1-50. 注意到由于要生产相同数量的产品供应商必须多花费 5 美元, 所以这些税的影响是将供给曲线向上移动了 5 美元.

---

① 引自 Barry Bressler,《数理经济学的统一方法》, 第 81–88 页 (纽约: Harper & Row, 1975).

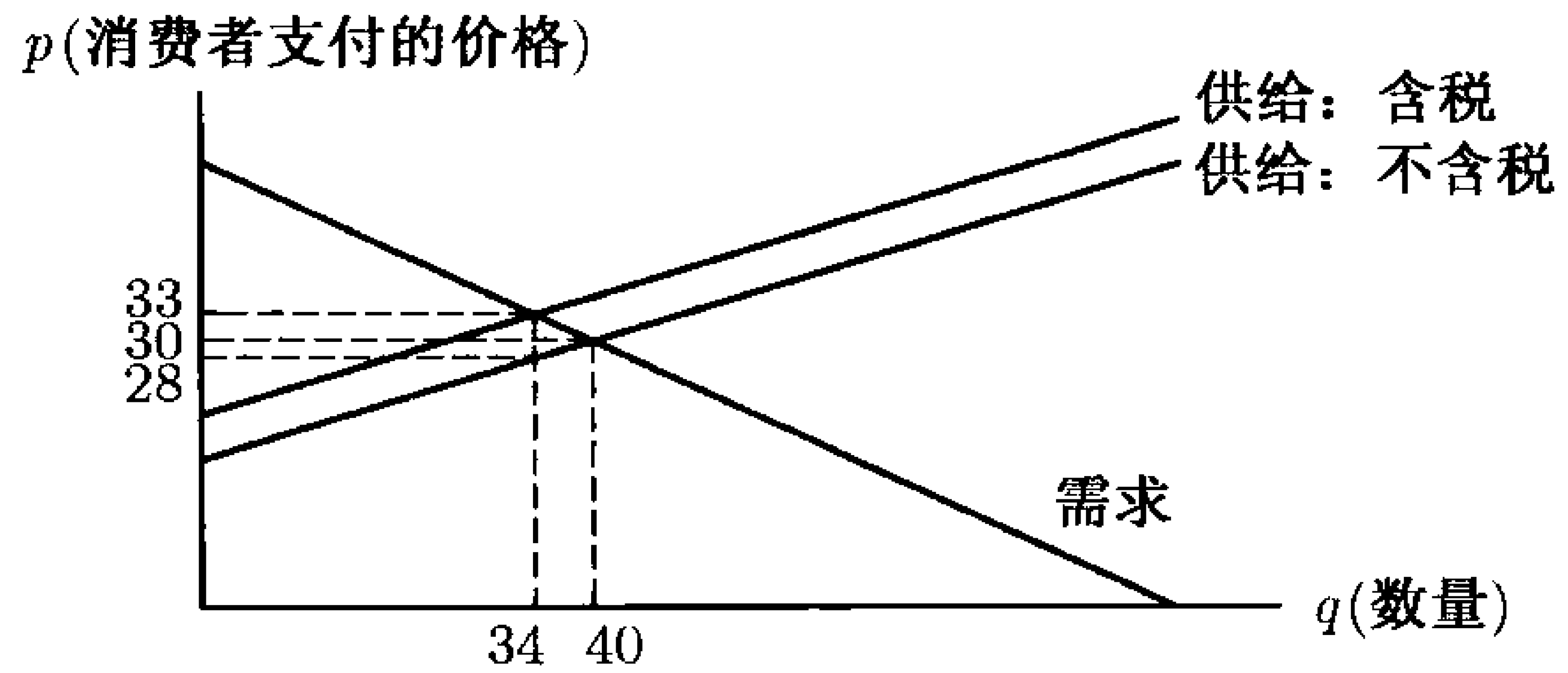


图 1-50 从量税提升了供给曲线，改变了均衡价格和均衡产量

1.4.7 预算约束

国防和社会之间的资金分配问题在美国联邦政府中争论不休. 一般来说，在国防上花费的越多，用于社会的就越少，反之也一样. 我们来简单化地考虑枪支和黄油的问题. 假设预算是保持不变的，我们说明在枪支的数量和黄油产量之间的关系是线性的. 假设可用 12 000 美元，并且在枪支和黄油之间分配，每杆枪值 400 美元而每吨黄油值 2000 美元. 假设购买的枪支数是 g，黄油的吨数是 b. 那么花费在枪支上的钱数是 $400g$ 美元，而花费在黄油上的钱数是 $2000b$ 美元. 假设所有的钱都要花完，那么

$$\text{花在枪支上的钱数} + \text{花在黄油上的钱数} = 12\,000 \text{ 美元}$$

也就是

$$400g + 2000b = 12\,000.$$

因此，两边除以 400，可得

$$g + 5b = 30.$$

这个方程就是预算约束. 因为预算约束可以写成

$$g = 30 - 5b,$$

所以预算约束的图形是一条直线. 参见图 1-51.

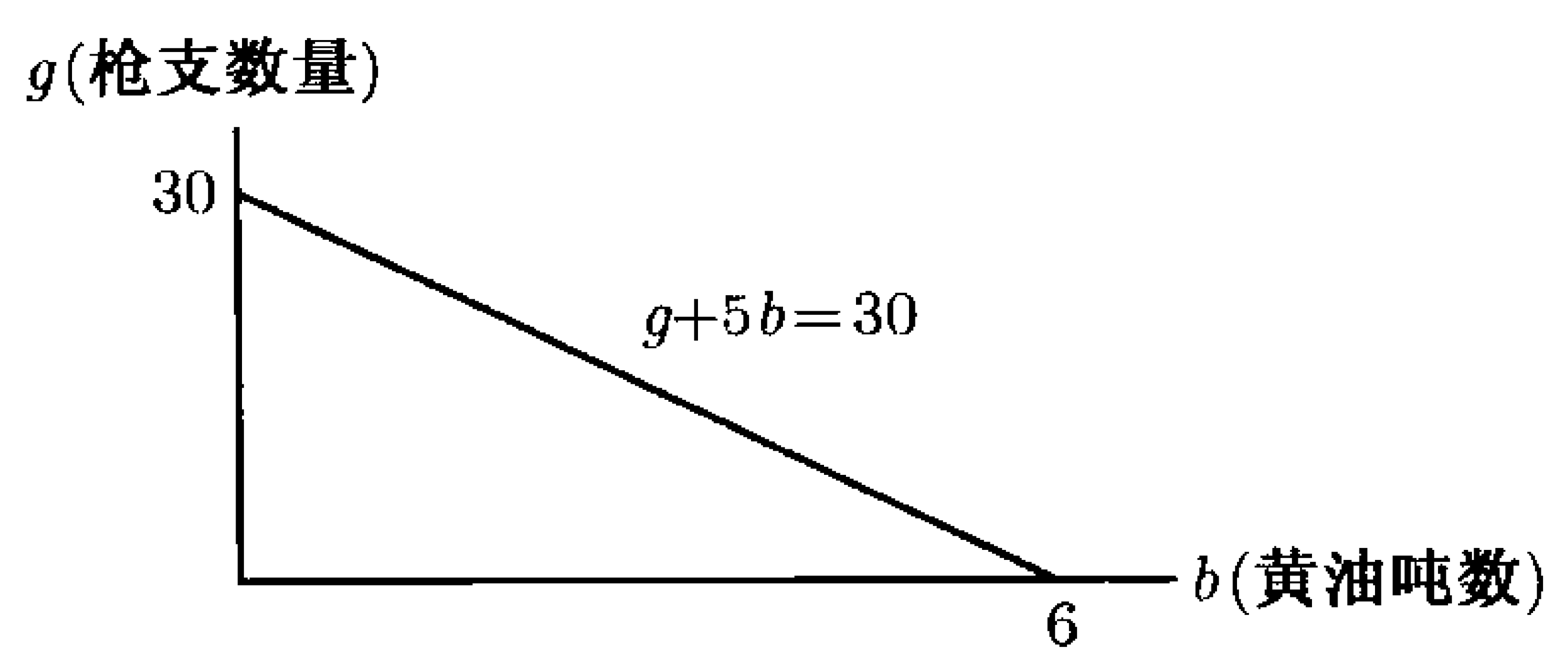


图 1-51 预算约束

习题

1. 下表给出了一种产品各种产量的生产成本和出售它们所获得的收益.

产量	0	10	20	30	40	50	60	70	80
成本 (美元)	120	400	600	780	1000	1320	1800	2500	3400
收入 (美元)	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400

(a) 生产水平的范围是多少可以获利?

(b) 计算所示的每个产量的利润和亏损. 估计最大的获利生产水平.

2. 公司的成本函数和收益函数分别由 $C(q)=6000+10q$(美元) 和 $R(q)=12q$(美元) 给出.

(a) 如果公司生产 500 个单位求其成本和收益. 公司能获利吗? 5000 个单位呢?

(b) 求收支平衡点并用图形描述.

3. 公司的成本函数和收益函数分别由 $C(q)=4000+2q$(美元) 和 $R(q)=10q$(美元) 给出.

(a) 公司的固定成本是多少?

(b) 每单位的可变成本是多少?

(c) 公司收取其产品的价格是多少?

(d) 在同一个坐标系中作出 $C(q)$ 和 $R(q)$ 的图形并标出收支平衡点 q_0. 说明你是如何知道产量大于 q_0 时公司就会获利的.

(e) 求出收支平衡点 q_0.

4. 下表是线性成本函数的值. 固定成本和每单位的可变成本 (边际成本) 是多少? 求出成本函数的公式.

q	0	5	10	15	20
$C(q)$	5000	5020	5040	5060	5080

5. (a) 估计图 1-52 中成本函数的固定成本和每单位的可变成本.

(b) 估计 $C(10)$ 并用成本解释.

6. (a) 图 1-53 中成本函数的固定成本和每单位的可变成本是多少?

(b) 说明 $C(100)=2500$ 关于成本的含义.

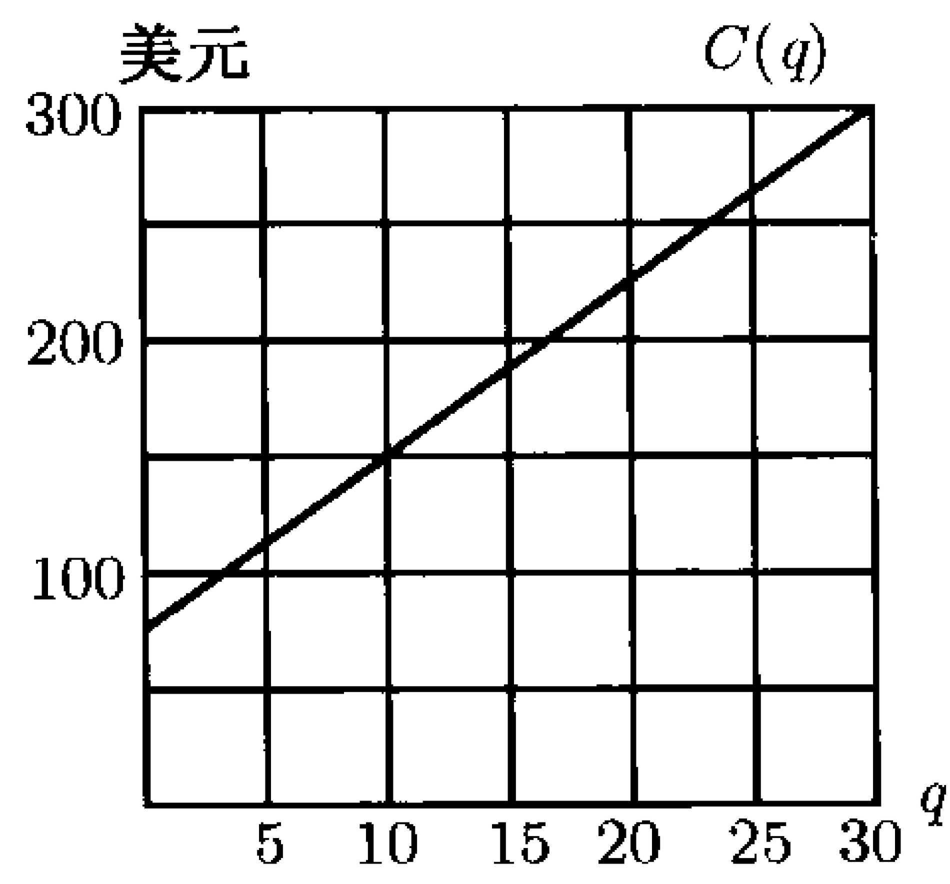


图 1-52

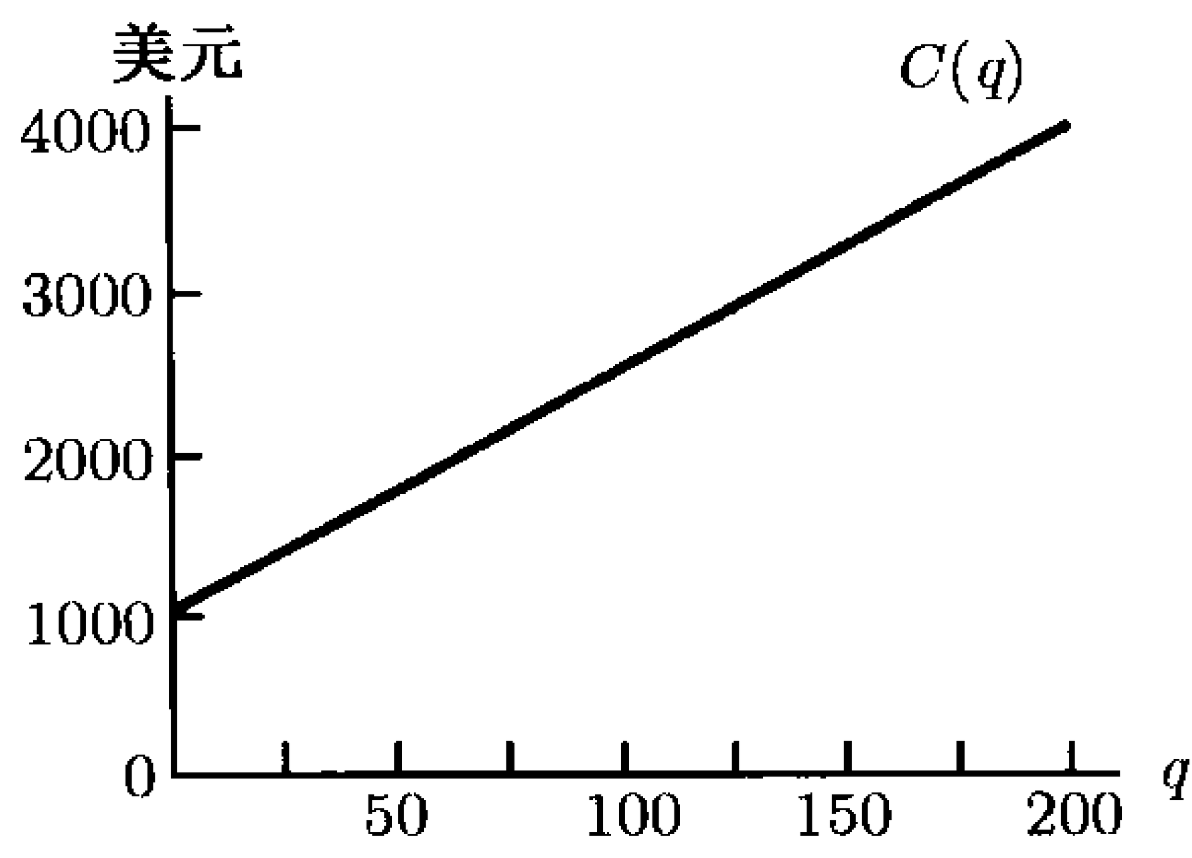


图 1-53

7. 图 1-54 表示公司的成本和收益.

(a) 该公司大概必须生产多少产品才能获利?

(b) 估计生产 600 个单位的产品所产生的利润.

8. 图 1-55 表示某产品的成本函数和收益函数, 标出下列每一项:

(a) 固定成本　(b) 收支平衡产量

(c) 公司获利的产量和亏损的产量.

9. 电影院每天的固定成本是 5000 美元, 每位顾客的可变成本平均是 2 美元. 每张电影票收 7 美元.

(a) 为了获利每天电影院需要多少顾客?

(b) 求成本函数和收益函数并在同一个坐标系中作出它们的图形. 标出收支平衡点.

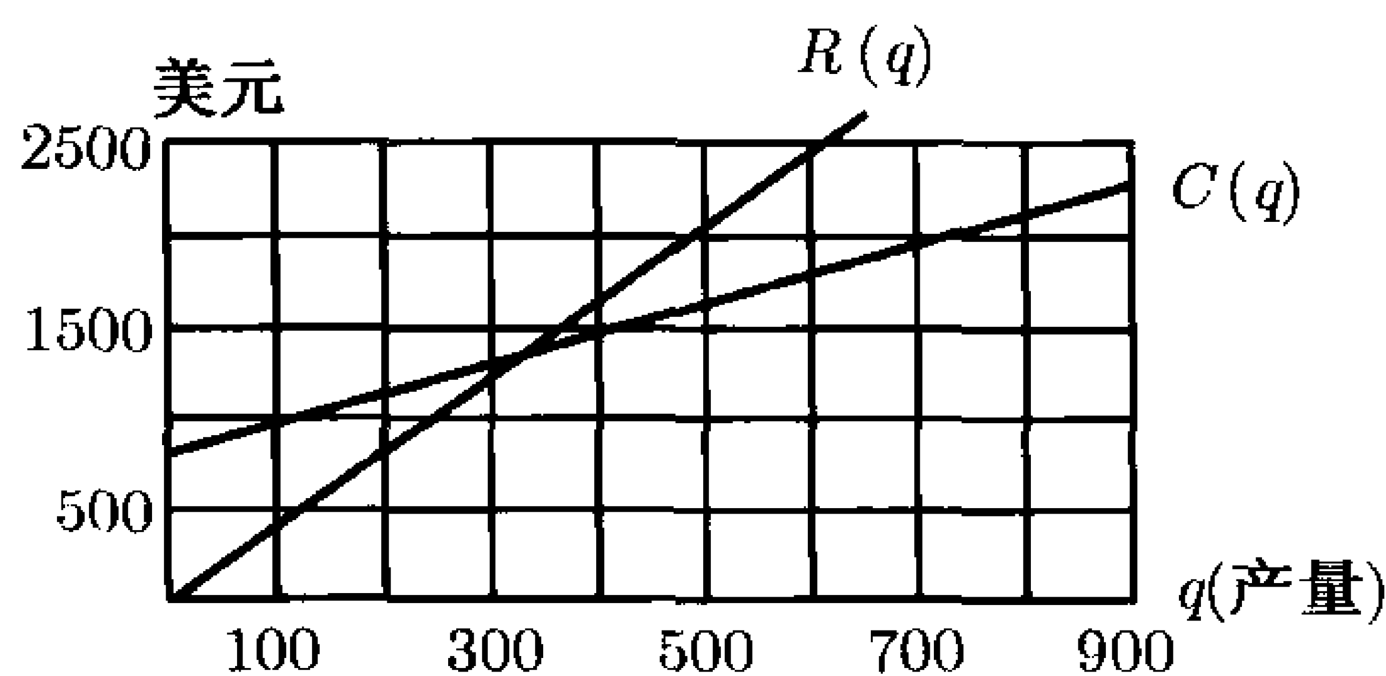


图 1-54

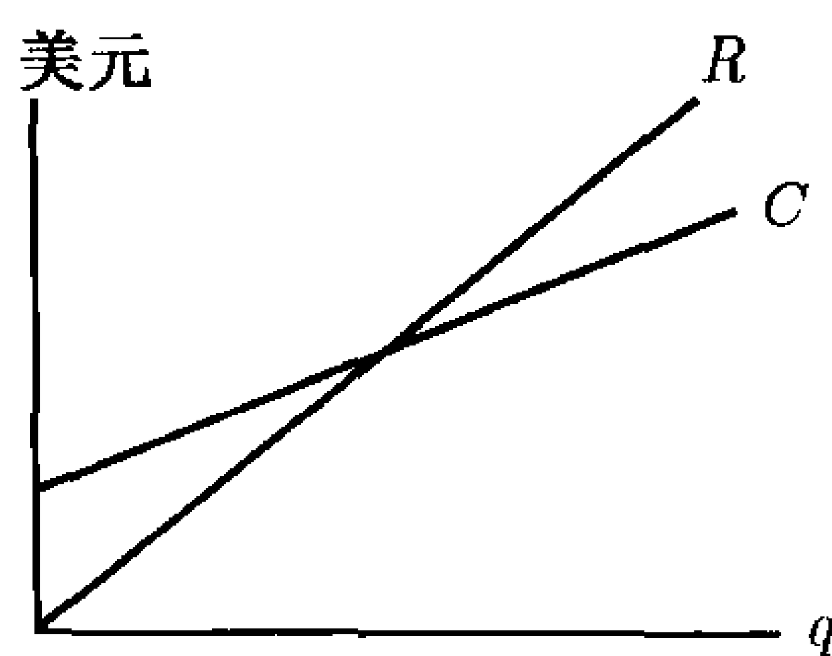


图 1-55

10. 生产拼图的公司固定成本是 6000 美元, 每张拼图的可变成本是 2 美元. 每张拼图卖 5 美元.

(a) 求成本函数、收益函数和利润函数的公式.

(b) 在同一个坐标系中作出 $R(q)$ 和 $C(q)$ 的略图. 公司的收支平衡点 q_0 是多少?

11. 快餐公司推出学院膳食服务计划. 每学期快餐公司的固定成本是 350 000 美元, 每个学生的可变成本是 400 美元. 每学期快餐公司向每个学生收取 800 美元. 公司要想获利必须有多少学生签署快餐计划.

12. 生产跑鞋的成本由 650 000 美元的固定管理费和每双鞋 20 美元的可变成本组成. 每双鞋卖价 70 美元.

(a) 求总成本函数 $C(q)$、总收益函数 $R(q)$ 和总利润函数 $\pi(q)$, 它们是所生产的鞋子双数 q 的函数.

(b) 求边际成本、边际收益和边际利润.

(c) 必须生产并卖出多少双鞋公司才获利?

13. (a) 给出一个恰当的例子, 其中公司的固定成本是零 (或者非常小).

(b) 给出一个恰当的例子, 其中公司每单位的可变成本是零 (或者非常小).

14. 为了税务的目的, 你可能必须上报你的财产价值, 例如汽车或者冰箱. 你上报的价值随时间下降. "直线贬值" 是假定价值是时间的线性函数. 如果 950 美元的冰箱七年内完全贬值, 求它的价值作为时间的函数公式.

15. 15 000 美元的机器人 10 年内线性地贬值到零.

(a) 求它的价值作为时间的函数公式.

(b) 机器人购入 3 年后还值多少钱?

16. 50 000 美元的拖拉机购买 20 年后转卖的价值是 10 000 美元. 假设拖拉机的价值随购买的时间线性地贬值.

(a) 求拖拉机的价值作为购置以来的时间的函数公式.

(b) 作出拖拉机的价值关于时间的图形.

(c) 求水平截距和垂直截距, 给出单位并解释它们.

17. 假设 $q = f(p)$ 是某产品的需求曲线, 其中 p(美元) 是销售价格 q 是以该价格销售的销售量.

(a) 关于这个产品的需求结论 $f(12) = 60$ 其含义是什么?

(b) 你希望这个函数是递增的还是递减的? 为什么?

18. 生产 q 单位商品的成本 C(百万美元) 由 $C = 5.7 + 0.002q$ 给出. 用产量解释这个 5.7

和 0.002. 给出单位.

19. 产品的数量 q 的需求曲线是 $q = 5500 - 100p$, 其中 p(美元) 是价格. 用需求解释这个 5500 和 100. 给出单位.

20. 图 1-56 表示某产品的供给和需求.

(a) 该产品的均衡价格是多少? 在这个价格上, 产量是多少?

(b) 取一个均衡价格之上的价格, 例如 $p = 12$. 在这个价格上供应商愿意生产多少产品? 消费者要买多少产品? 用你对这些问题的答案说明为什么价格在均衡价格上方时, 市场有助于将价格向下推 (推向均衡价格).

(c) 现在取一个均衡价格下方的价格, 例如 $p = 8$. 在这个价格上供应商愿意生产多少产品? 消费者要买多少产品? 用你对这些问题的答案说明为什么价格在均衡价格下方时, 市场有助于将价格向上推 (推向均衡价格).

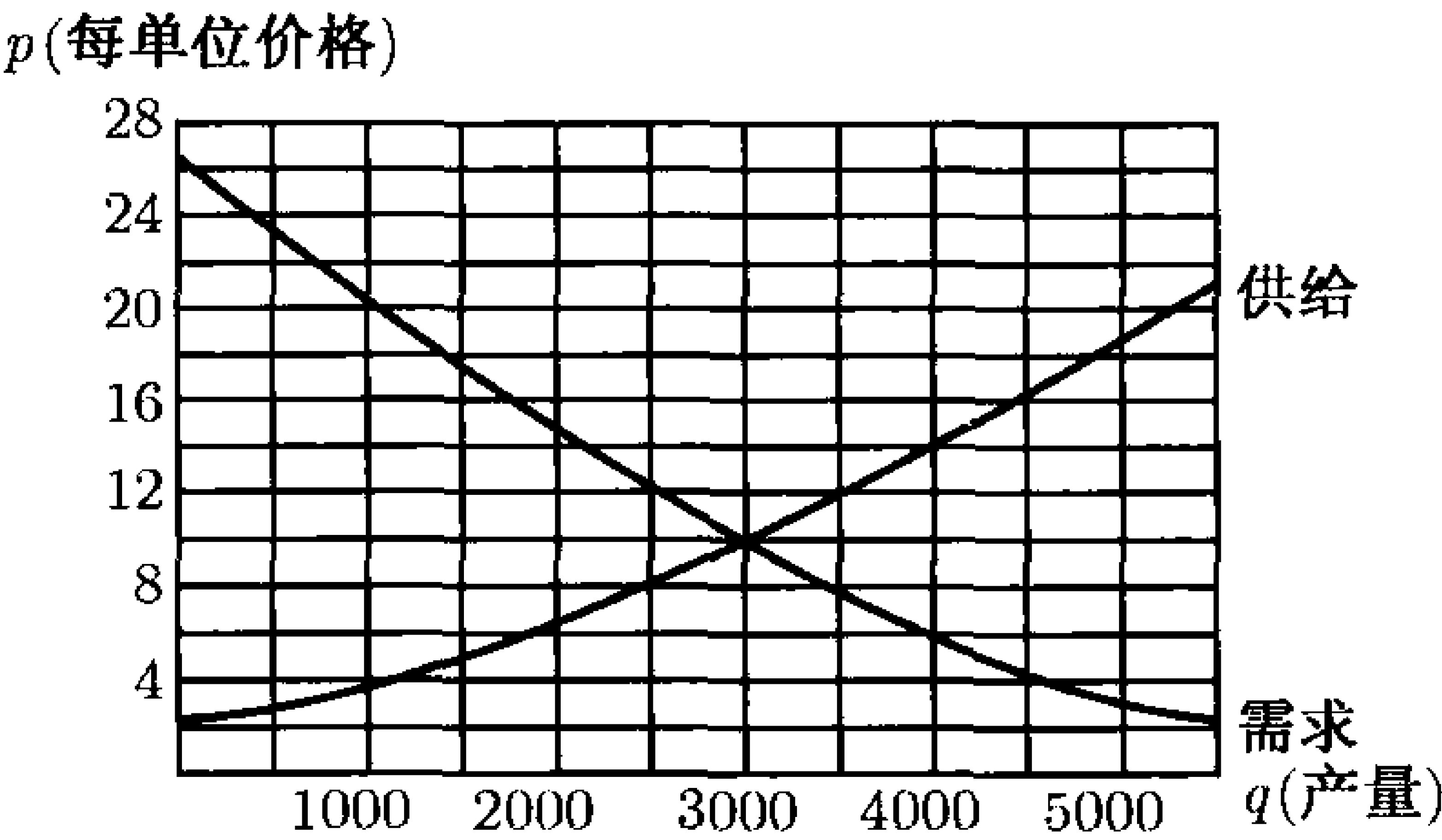


图　1-56

21. 一个公司生产并销售衬衫. 固定成本是 7000 美元, 可变成本每件衬衫是 5 美元.

(a) 衬衫每件卖 12 美元. 求成本和收益作为衬衫数量 q 的函数.

(b) 公司考虑改变衬衫销售价格. 需求是 $q = 2000 - 40p$, 其中 p(美元) 是价格而 q 是衬衫数量. 按当前价格 12 美元卖出去的衬衫是多少? 按这个价格获得的利润是多少?

(c) 利用需求方程写出成本和收益作为价格 p 的函数. 然后写出利润作为价格的函数.

(d) 作出利润关于价格的图形. 求出达到最大利润的价格. 最大利润是多少?

22. 图 1-57 一个是供给曲线, 而另一个是需求曲线. 请在图中指明. 用你所知道的价格对供给和需求的影响说明你是如何作出决定的.

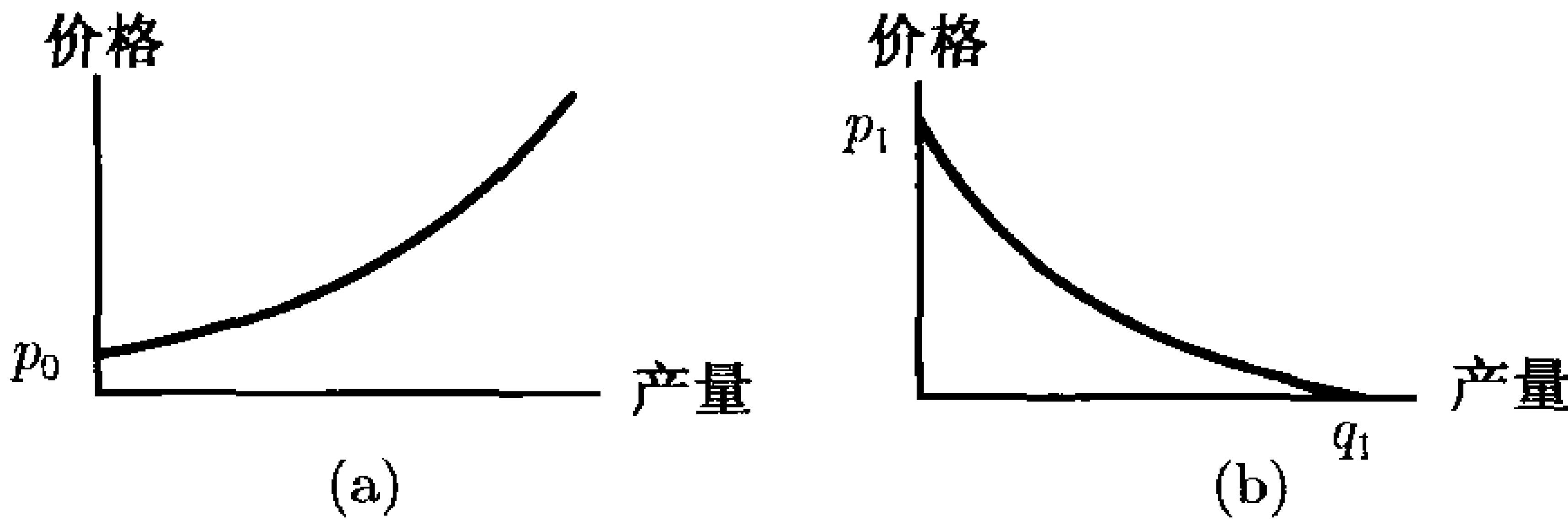


图　1-57

23. 下面两个表分别表示供给曲线和需求曲线.

(a) 哪个表格表示哪个曲线? 为什么?

(b) 在价格为 155 美元时, 消费者大概购置多少商品?

(c) 在价格为 155 美元时, 生产者大概供应多少商品?

(d) 市场会将价格推向比 155 美元高还是低?

(e) 如果你想要消费者至少买 20 个单位商品, 价格应该是多少?

(f) 如果你想要生产者至少供应 20 个单位商品, 价格应该是多少?

p(美元/单位)	182	167	153	143	133	125	118
q(产量)	5	10	15	20	25	30	35

p(美元/单位)	6	35	66	110	166	235	316
q(产量)	5	10	15	20	25	30	35

24. 需求曲线由 $75p + 50q = 300$ 给出, 其中 p(美元) 是产品的价格, q 是这个价格下的需求量. 求出 p 截距和 q 截距并用消费者的需求解释它们.

25. 下表给出了对某产品线性需求曲线的数据, 其中 p 是该产品的价格而 q 是每个月以该价格销售的销售量. 求下列函数公式. 用需求解释它们的斜率.

(a) q 作为 p 的函数. (b) p 作为 q 的函数.

p(美元)	16	18	20	22	24
q(吨)	500	460	420	380	340

26. 某产品的需求曲线由 $q = 120\,000 - 500p$ 给出, 供给曲线由 $q = 1000p$, $0 \leqslant q \leqslant 120\,000$, 其中价格单位是美元.

(a) 在价格为 100 美元时, 消费者愿意买的数量是多少而生产者愿意供应的数量是多少? 市场会将价格向上推还是向下推?

(b) 求均衡价格和均衡产量. 市场会极力将价格向均衡价格推近, 你对 (a) 的答案支持这个意见吗?

27. 美国锌的产量 Q(千吨) 和价值 P(美元/吨) 表示在下表中. 绘制价值作为产量的函数图形. 作一个恰当的供给曲线略图.

年	1998	1999	2000	2001	2002
Q	368	372	371	311	295
P	1130	1180	1230	969	852

28. 当游艇票价 p 是 25 美元时, 每周游客的平均数 N 是 500. 当价格降到 20 美元时, 每周游客的平均数增加到 650. 假设需求曲线是线性的, 求它的公式.

29. 你的学年预算是 1000 美元, 包括书本和社交活动. 书本的成本是每本 (平均)40 美元, 社交活动的成本是每次 (平均)10 美元. 设 b 表示每年购置的书本数而 s 表示一年内, 社交活动的次数.

(a) 你的预算约束方程是什么?

(b) 作出预算约束的图形. (无论你将哪个变量放在哪个轴上都没有关系.)

(c) 求垂直截距和水平截距, 并分别给出金融解释.

30. 公司的总预算是 500 000 美元并且把这些预算花在原材料和员工上. 公司使用 m 个单

位的原材料, 成本是每单位 100 美元, 并且雇用 r 个员工, 每位的成本是 25 000 美元.

(a) 公司的预算约束方程是什么?

(b) 将 m 解为 r 的函数.

(c) 将 r 解为 m 的函数.

31. 线性供给和需求曲线如图 1-58 所示, 其中价格在竖直轴上.

(a) 在坐标系中标出均衡价格 p_0 和均衡产量 q_0.

(b) 说明供给曲线的斜率增加对均衡价格和均衡产量的影响. 用图形描述你的答案.

(c) 说明需求曲线的斜率变得更小对均衡价格和均衡产量的影响. 用图形描述你的答案.

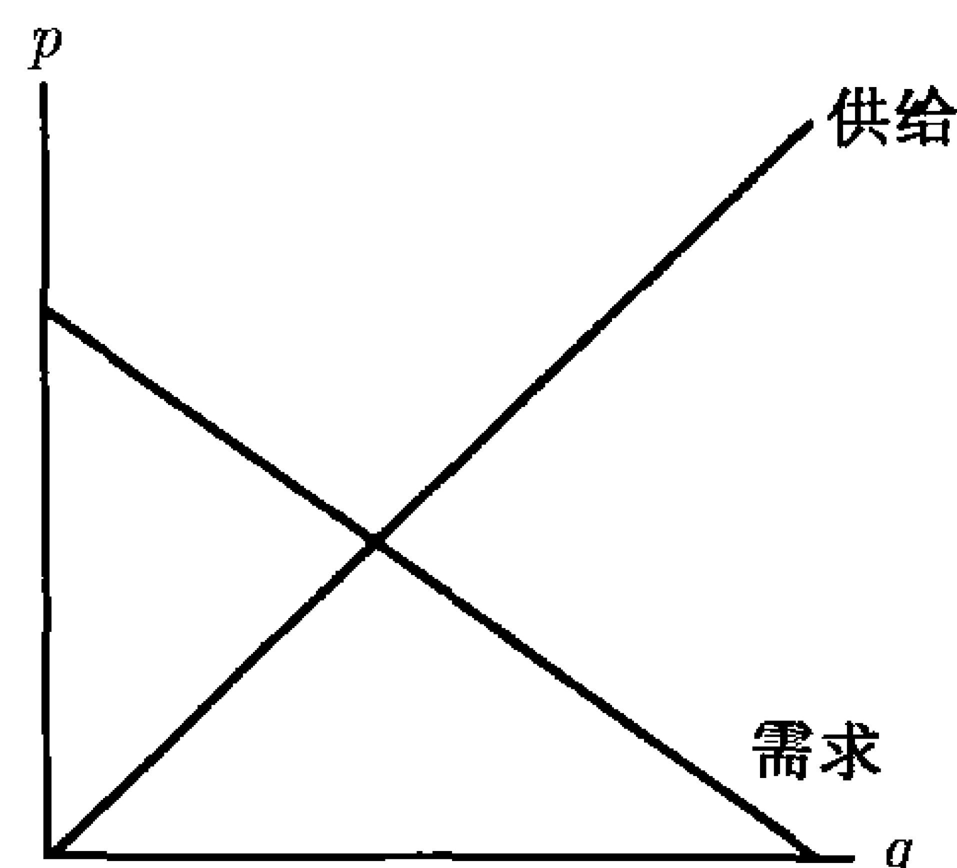


图 1-58

32. 需求曲线的方程是 $q = 100 - 5p$, 其中 p(美元) 是价格. 2 美元的税加在消费者头上. 求新的需求曲线方程. 作出两个曲线的略图.

33. 供给曲线的方程是 $q = 4p - 20$, 其中 p(美元) 是价格. 2 美元的税加在供应商头上. 求新的供给曲线方程. 作出两个曲线的略图.

34. 每单位 8 美元的税加在某产品的供应商头上. 原来的供给曲线是 $q = 0.5p - 25$ 而需求曲线是$q = 165-0.5q$, 其中p(美元) 是价格. 求征税之前和之后的均衡价格和均衡产量.

35. 某产品关于价格 p 的供给曲线和需求曲线由下式给出

$$q = 2500 - 20p \text{ 和 } q = 10p - 500.$$

(a) 求均衡价格和均衡产量. 将你的答案在图形上表示出来.

(b) 每单位 6 美元的从量税加在供应商头上. 求新的均衡价格和均衡产量. 将你的答案在图形上表示出来.

(c) 6 美元的税有多少由消费者支付又有多少由供应商支付?

(d) 政府获得的总税收收益是多少?

36. 在例 8 中, 需求曲线和供给曲线分别由 $q = 100 - 2p$ 和 $q = 3p - 50$ 给出; 均衡价格是 30 美元而均衡产量是 40 个单位. 5% 的销售税加在消费者头上.

(a) 求新的需求曲线方程和供给曲线方程.

(b) 求新的均衡价格和均衡产量. 每单位产品交多少税? 这些税有多少由消费者交又有多少由生产者交?

(c) 政府征得多少税?

37. 假设 5% 的销售税加在供应商头上而不是消费者头上, 回答习题 36 中的问题.

1.5 指数函数

函数$f(x) = 2^x$, 其中幂是变量, 是一个**指数函数**. 数字 2 叫做底. 形如$f(x) = a^x$的指数函数, 其中a是正的常数, 经常用来描述自然科学和社会科学中的许多现象.

1.5.1 人口增长

表 1-23 包含得克萨斯州麦卡伦城区近似的人口数据[①]. 1956 年 6 月 26 日, 新闻报道了麦卡伦, 当时飓风雅丽思引起了强降雨, 降雨量达到 24 小时 27 英寸, 这是有史以来美国最高日降雨量之一. 为了弄清麦卡伦的人口是如何增长的, 我们观察表 1-8 第三列中人口的年增加量. 如果人口始终是线性增长的, 那么第三列中的所有数应该是相同的. 但是人口越多增长得就越快, 所以第三列中的数增加就不足为奇了.

表 1-8　得克萨斯州麦卡伦的人口

年	人口 (千人)	增加的人口 (千人)
2000	570	
		21
2001	591	
		22
2002	613	
		23
2003	636	

假设把每年的人口用上一年的人口去除. 我们近似地得到

$$\frac{2001\text{年人口}}{2000\text{年人口}} = \frac{591\text{千人}}{570\text{千人}} \approx 1.037,$$

$$\frac{2002\text{年人口}}{2001\text{年人口}} = \frac{613\text{千人}}{591\text{千人}} \approx 1.037,$$

$$\frac{2003\text{年人口}}{2002\text{年人口}} = \frac{636\text{千人}}{613\text{千人}} \approx 1.037.$$

所有的计算结果都接近 1.037, 这说明在 2000~2001 年、2001~2002 年和 2002~2003 年, 人口都增长了大约 3.7%. 每当出现不变的增长百分比 (这里是 3.7%), 就产生指数增长. 如果 t 是自 2000 年以来的年数并且人口以千人来计, 那么

$$\text{当}t = 0\text{时, 人口} = 570 = 570(1.037)^0.$$
$$\text{当}t = 1\text{时, 人口} = 591 = 570(1.037)^1.$$
$$\text{当}t = 2\text{时, 人口} = 613 = 591(1.037) = 570(1.037)^2.$$
$$\text{当}t = 3\text{时, 人口} = 636 = 613(1.037) = 570(1.037)^3.$$

所以 2000 年后 t 年的人口 P(千人) 由

$$P = 570(1.037)^t \text{ 千人}$$

给出. 因为变量 t 在指数中, 所以这是一个指数函数. 底 1.037 表示人口每年增长这么多倍, 称之为**增长因子**. 假设这个公式在 50 年内成立, 人口图形就像图 1-59 这样. 人口在增长, 因此该函数是递增的. 由于人口随时间的推移增长更快, 所以

① 《2004~2005 年美国统计摘要》, 表格 24.

图形是向上凹的. 这种性态是典型的指数函数. 还有, 尽管指数函数开始都上升得较慢, 像这个函数一样, 但最后都上升得极快.

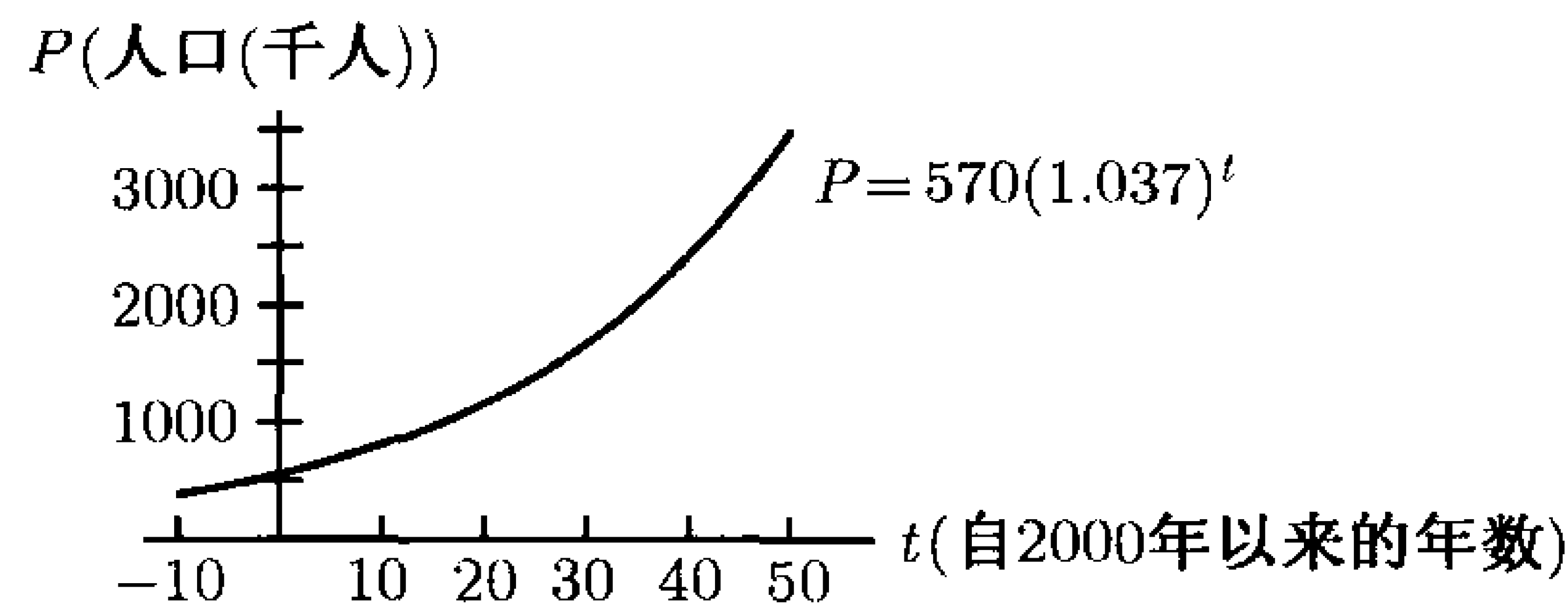


图 1-59 得克萨斯州麦卡伦市的人口 (估计的): 指数增长

1.5.2 药物从体内消失

现在我们考察递减的量而不是递增的量. 当给患者进行药物治疗时, 药进入血液中. 药物代谢和消失的速度由药物的特性决定. 抗生素氨苄西林, 每小时消失将近 40%. 氨苄西林的典型剂量是 250 mg. 假设 Q(mg) 是血液中氨苄西林的剂量, t(小时) 是用药后的时间, 并且 $Q = f(t)$. $t = 0$ 时, 我们有 $Q = 250$. 因为在每个小时结束时的剩余量是一个小时以前剩余量的 60%, 所以我们有

$$\begin{aligned}
f(0) &= 250 \\
f(1) &= 250(0.6) \\
f(2) &= 250(0.6)(0.6) = 250(0.6)^2 \\
f(3) &= 250(0.6)^2(0.6) = 250(0.6)^3.
\end{aligned}$$

所以 t 小时后,

$$Q = f(t) = 250(0.6)^t.$$

这个函数叫做**指数下降函数**. 当 t 增加时, 函数值任意接近于零. t 轴是该函数的**水平渐近线**.

表 1-9 下降函数的值

t(h)	Q(mg)
0	250
1	150
2	90
3	54
4	32.4
5	19.4

注意表 1-9 中数值递减的方式. 每增加一个小时药量比前一个小时消失得要少一些 (第一个小时是 100 mg, 第二个小时是 60 mg, 等等). 这是因为随着时间的推移, 体内可以消失的药物更少了. 因此, 图 1-60 中的图形向下弯曲. 与图 1-59 中指数增长相比较, 在那里每向前一步函数的增加要比前一步更大. 注意两个图形都是上凹的.

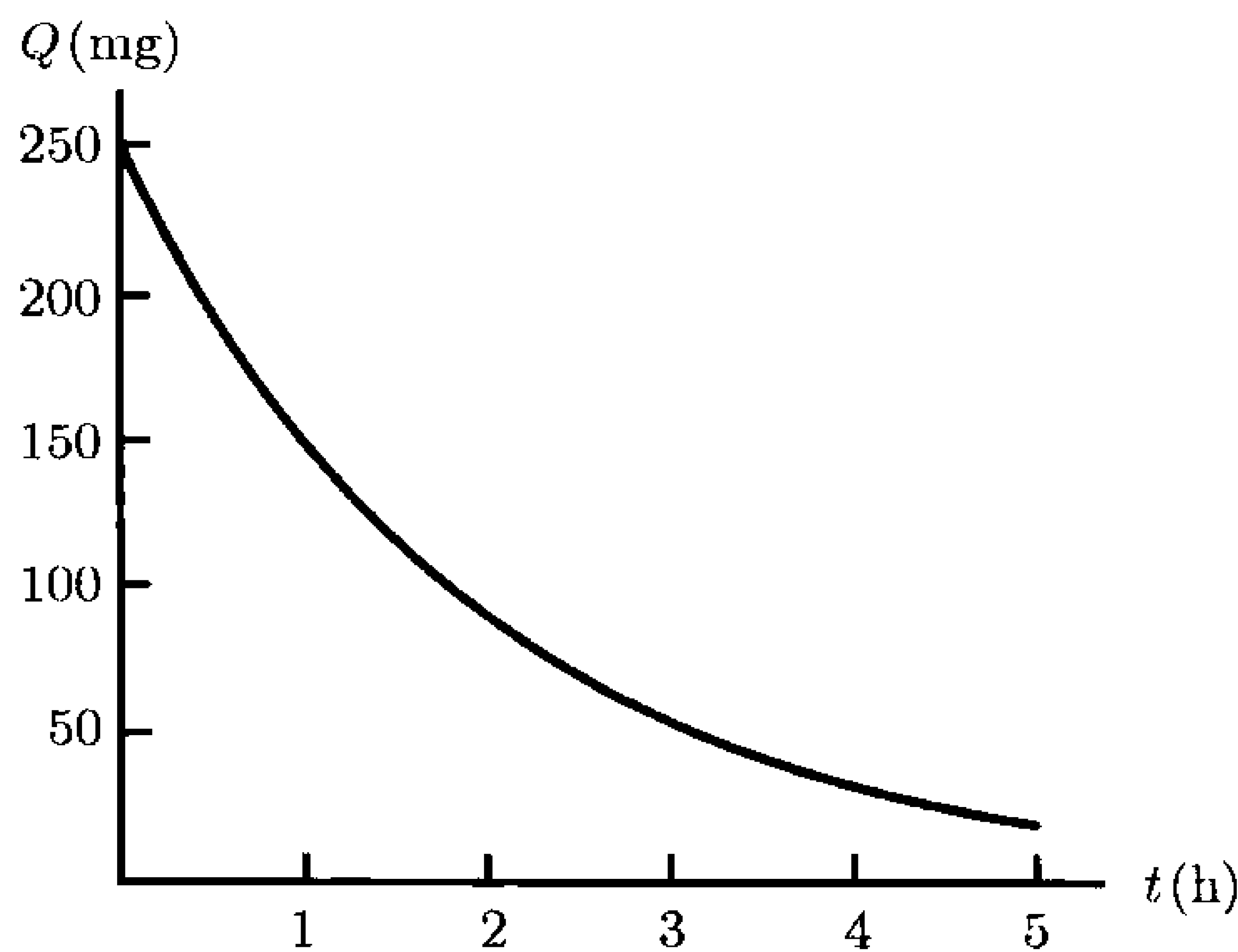


图 1-60 药物消失：指数下降

1.5.3 一般指数函数

指数增长通常用增长百分率来描述. 麦卡伦的人口每年增长 3.7%, 所以它每年的增长因子是 $a = 1 + 0.037 = 1.037$. 类似地, 每小时氨苄西林消失 40%, 因此剩余量每小时以因子 $a = 1 - 0.4 = 0.6$ 下降. 我们有如下的一般公式.

> 我们称 P 是以 a 为底的 t 的**指数函数**, 如果
> $$P = P_0 a^t,$$
> 其中 P_0 是初始量 (当 $t = 0$ 时) 而 a 是因子, 它是当 t 增加 1 时 P 的变化因子. 若 $a > 1$, 我们称为**指数增长**; 若 $0 < a < 1$, 我们称为**指数下降**. 因子 a 常表示为
> $$a = 1 + r,$$
> 其中 r 是变化百分率的小数表示; r 可以是正的 (对于增长) 也可以是负的 (对于下降).

只要 $a > 0$, 指数函数的最大恰当的定义域是全体实数①.

1.5.4 线性函数和指数函数的比较

每个指数函数以一个不变的百分率 (即相对比率) 变化. 例如, 麦卡伦的人口每年增长将近 3.7%. 每个线性函数以一个不变的 (绝对) 比率变化. 例如, 奥运会撑杆跳高记录每年增加 2 in.

> **线性**函数有不变的绝对变化率.
> **指数**函数有不变的相对变化率 (或百分率).

例 1 体内的肾上腺激素数量可以迅速变化. 假设初始数量是 15 mg. A(mg) 是 t

① 我们不需要 $a \leqslant 0$, 例如, $a < 0$ 时我们不能定义 $a^{1/2}$. 此外, 我们不常有 $a = 1$, 不然 $P = P_0 a^t = P_0 1^t = P_0$ 就是一个常数函数.

分钟后的数量, 如果 A:

(a) 每分钟增加 0.4 mg　　(b) 每分钟减少 0.4 mg

(c) 每分钟增加 3%　　(d) 每分钟减少 3%

求 t 分钟后 A 的公式.

解 (a) 这是一个线性函数, 初始量是 15 而斜率是 0.4, 所以

$$A = 15 + 0.4t.$$

(b) 这是一个线性函数, 初始量是 15 而斜率是 -0.4, 所以

$$A = 15 - 0.4t.$$

(c) 这是一个指数函数, 初始量是 15 而底是 $1 + 0.03 = 1.03$, 所以

$$A = 15(1.03)^t.$$

(d) 这是一个指数函数, 初始量是 15 而底是 $1-0.03=0.97$, 所以

$$A = 15(0.97)^t.$$

□

例 2 Borders 图书音乐商店的销售额[①]从 1997 年的 2503 百万美元增加到 2003 年的 3699 百万美元. 假设销售额是指数增长的, 求形如 $P = P_0a^t$ 的方程, 其中 P(百万美元) 是 Borders 图书音乐商店的销售额而 t 是 1997 年以来的年数. 它增长的百分率是多少?

解 我们知道 $t = 0$ 时 $P = 2503$, 所以 $P_0 = 2503$. 为了求 a, 我们利用 $t = 6$ 时 $P = 3699$. 代入可得

$$P = P_0a^t$$
$$3699 = 2503a^6.$$

两边同除以 2503, 我们得到

$$\frac{3699}{2503} = a^6$$
$$1.478 = a^6.$$

两边开六次方根可得

$$a = (1.478)^{1/6} = 1.07.$$

因为 $a = 1.07$, 所以 Borders 图书音乐商店的销售额作为 1997 年以来的年数的函数方程是

$$P = 2503(1.07)^t.$$

在这期间, 销售额每年增加 7%. □

> **由指数函数认识数据:** 如果一个表格中的数据, 对等距离的 t 所对应的 P 的商是常数, 那么表格中 t 和 P 的值可能来自指数函数 $P = P_0a^t$.

① http://phx.corporate-ir.net/phonenix.zhtml?c=65380&p=irol-annalreports, 访问日期 2005 年 4 月 14 日.

例 3 下列数值表中的哪个对应于指数函数? 哪个对应于线性函数? 或者两种函数都不是? 对于对应于指数函数和线性函数的那些函数, 求出它们的函数公式.

(a)

x	$f(x)$
0	16
1	24
2	36
3	54
4	81

(b)

x	$g(x)$
0	14
1	20
2	24
3	29
4	35

(c)

x	$h(x)$
0	5.3
1	6.5
2	7.7
3	8.9
4	10.1

解 (a) 我们发现 f 不可能是线性函数, 因为当 x 增加 1 时 $f(x)$ 增加的数量不相等 (24−16=8 而 36−24=12). f 可能是指数函数吗? 我们考虑相继 $f(x)$ 值的商:

$$\frac{24}{16}=1.5 \qquad \frac{36}{24}=1.5 \qquad \frac{54}{36}=1.5 \qquad \frac{81}{54}=1.5.$$

因为这些商都等于 1.5, 所以该表格中的数值对应于一个以 1.5 为底的指数函数. 由于 $f(0)=16$, 因此 $f(x)$ 的公式是

$$f(x)=16(1.5)^x.$$

将 $x=0,1,2,3,4$ 代入这个公式检验; 你能得到所给的 $f(x)$ 的值.

(b) 当 x 增加 1 时, $g(x)$ 增加 6(从 14 到 20), 然后增加 4(从 20 到 24), 所以 g 不是线性的. 我们检验一下看看 g 是否可能为指数函数:

$$\frac{20}{14}=1.43 \quad 和 \quad \frac{24}{20}=1.2.$$

因为这些商 (1.43 和 1.2) 不相等, 所以 g 不是指数函数.

(c) 对于 h, 注意到, 当 x 增加 1 时, $h(x)$ 每次增加 1.2. 所以 h 可能是斜率为 1.2 的线性函数. 因为 $h(0)=5.3$, 因此 $h(x)$ 的公式是

$$h(x)=5.3+1.2x.$$

□

1.5.5 指数函数族和数 e

公式 $P=P_0a^t$ 表示以 P_0(初始值) 和 a(底) 为参数的指数函数族. 底告诉我们该函数是递增的 ($a>1$) 还是递减的 ($0<a<1$). 因为 a 是 t 增加 1 时 P 变化的因子, 所以 a 的值大意味着增长得快; a 的值接近于 0 意味着下降得快. (参见图 1-61 和图 1-62.) 如果 $P_0>0$, 函数族 $P=P_0a^t$ 中的所有函数都是上凹的.

在实际中最通用的底是数 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$. 多数计算器都有一个 e^x 键, 这一事实表明了 e 是多么的重要. 因为 e 在 2 和 3 之间, 所以图 1-61 中 $y=\mathrm{e}^t$ 的图形在 $y=2^t$ 和 $y=3^t$ 的图形之间.

底 e 用得如此频繁因此称之为自然底①. 初看起来, 这有点难以理解: 用 2.71828··· 作为底怎么是自然的? 对这个问题的完整回答要等到第 3 章, 在那里你会看到当 e 用作底时许多计算公式显得更简洁.

① 以 e 为底的对数称为自然对数, 对 e 感兴趣的读者, 可阅读人民邮电出版社出版的《e 的故事: 一个常数的传奇》一书. —— 编者注

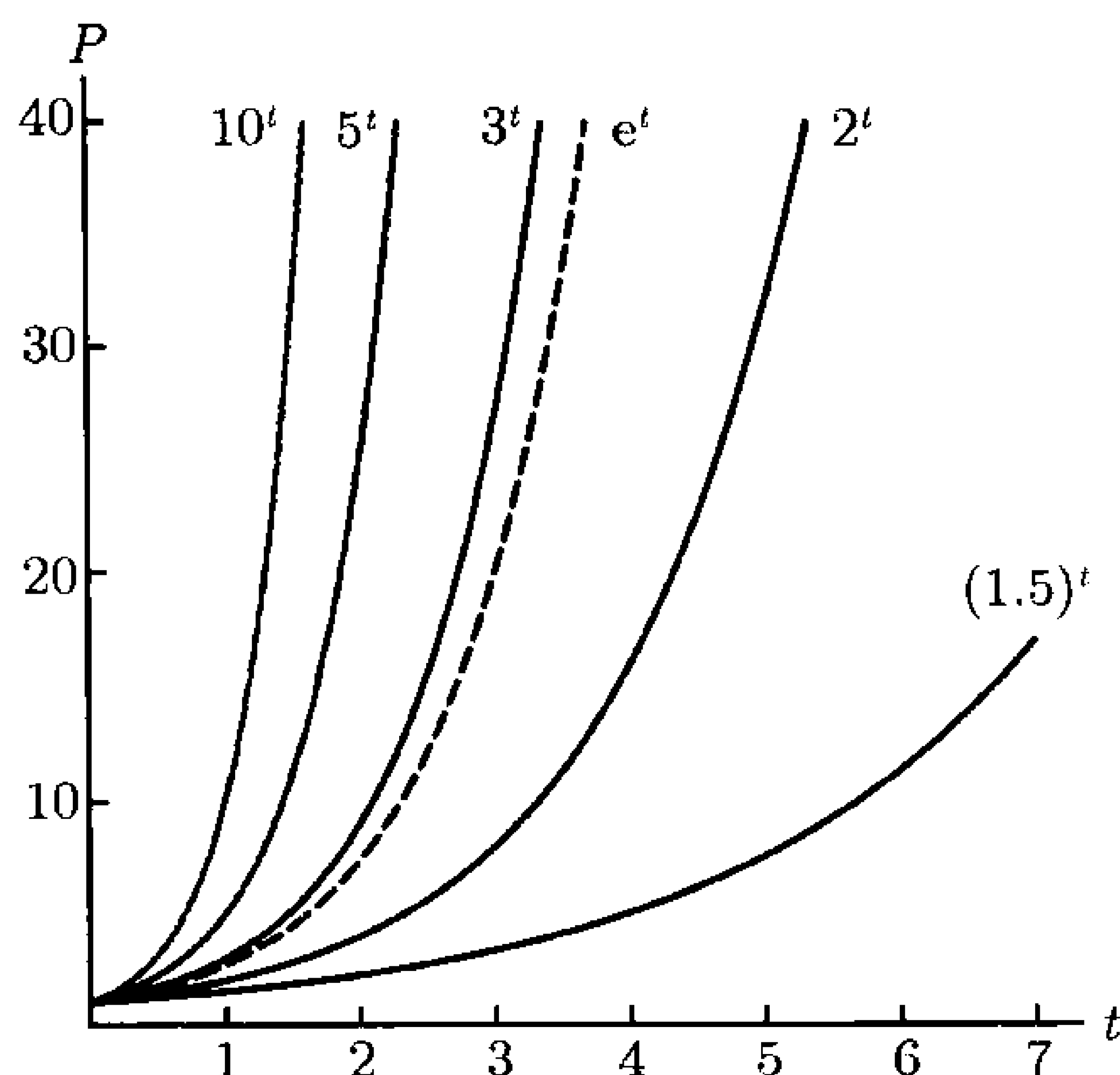


图 1-61 指数增长: $P = a^t$, $a > 1$

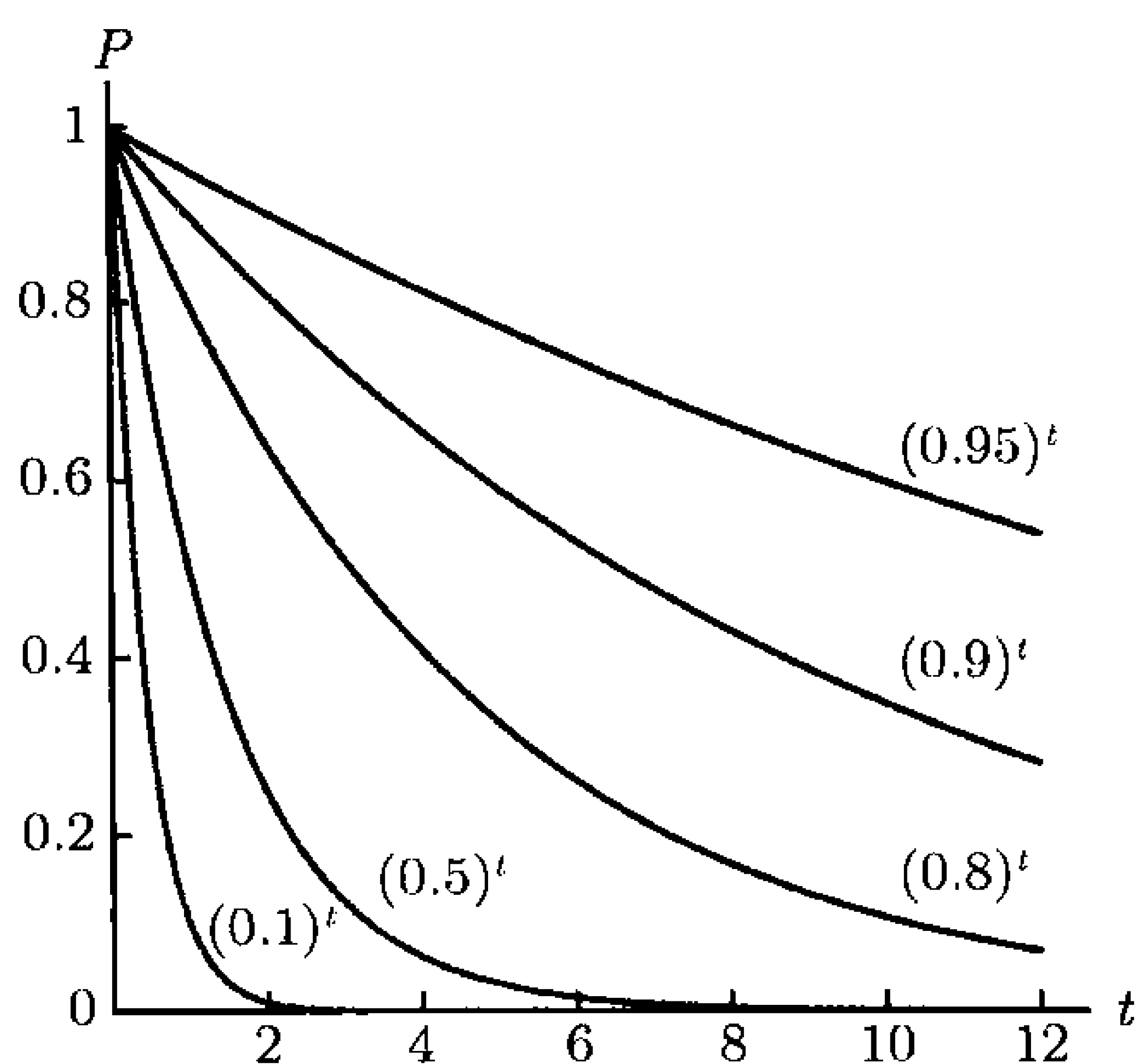


图 1-62 指数下降: $P = a^t$, $0 < a < 1$

习题

1. 如下函数给出四个小镇时间为 t(年) 时的人口.

(i) $P = 600(1.12)^t$　　(ii) $P = 1\ 000(1.03)^t$

(iii) $P = 200(1.08)^t$　　(iv) $P = 900(0.90)^t$

(a) 哪个镇人口增长的百分率最大? 该增长的百分率是多少?

(b) 哪个镇的初始人口最多? 该初始人口是多少?

(c) 这些镇中有人口规模在减少的吗? 如果有那么是哪个?

2. 下面每个函数表示 t 时刻财产现值的数量. 在每种情形下, 给出现值的初始量 ($t = 0$ 时刻), 说明该函数是指数增长还是指数下降, 并给出增长的百分率或者下降的百分率.

(a) $A = 100(1.07)^t$　　**(b)** $A = 5.3(1.054)^t$

(c) $A = 3500(0.93)^t$　　**(d)** $A = 120(0.88)^t$

3. 一个小镇在 $t = 0$ 时刻有人口 1000 人. 在下列每种情形下, 写出小镇的人口 P 作为年数 t 的函数公式.

(a) 人口每年增加 50 人.

(b) 人口每年增长 5%.

4. 2003 年瑞士国内生产总值 G 是 240 亿美元. 如果 2003 年后 t 年中 G(亿美元) 按下述方式变化, 请给出 G 的公式.

(a) 每年增加 3%　　**(b)** 每年增加 8 亿美元

5. 今天的生产成本是 80 美元. 如果价格按下述方式变换, 那么 t 天的生产成本是多少?

(a) 每天减少 4 美元　　**(b)** 每天减少 5%

6. 空气清新剂从 30 克起开始挥发. 在下列每种情形下, 写出开始 t 天后空气清新剂剩余量 Q(克) 的公式并作出该函数的略图. 每天减少:

(a) 2 克　　**(b)** 12%

7. 世界经济在发展. 2001 年世界生产总值 (产品和劳务的总产量) 是 32.4 万亿美元并且每

年增加 3.6%[1]. 假设这一增长率持续.

(a) 求世界总产值 W(万亿美元) 作为 2001 年以来的年数 t 的函数公式.

(b) 预计 2010 年的世界总产值是多少?

(c) 作出 W 作为 t 的函数图形.

(d) 用该图形估计世界总产值超过 50 万亿美元的时间.

8. 给病人服用 50 毫克的奎宁以预防疟疾. 奎宁以每小时 6% 的速度离开人体.

(a) 求服药后 t 小时体内奎宁的数量 A(mg).

(b) 24 小时后体内奎宁有多少?

(c) 作出 A 作为 t 的函数图形.

(d) 用该图形估计体内剩余 5 mg 奎宁的时间.

9. 世界人口近似为 $P = 6.4(1.026)^t$, 其中 P 的单位是亿而 t 是 2004 年以来的年数.

(a) 世界人口的年增长的百分率是多少?

(b) 2004 年的世界人口是多少? 该模型预计 2010 年的世界人口是多少?

(c) 用 (b) 求 2004 年到 2010 年期间世界人口的平均变化率.

10. 图 1-63 表示几个城市的人口关于时间的图形. 找出与下面每个描述相符的图形并描述剩余图形.

(a) 人口每年增长 5%.　　(b) 人口每年增长 8%.

(c) 人口每年增加 5000 人.　　(d) 人口是不变的.

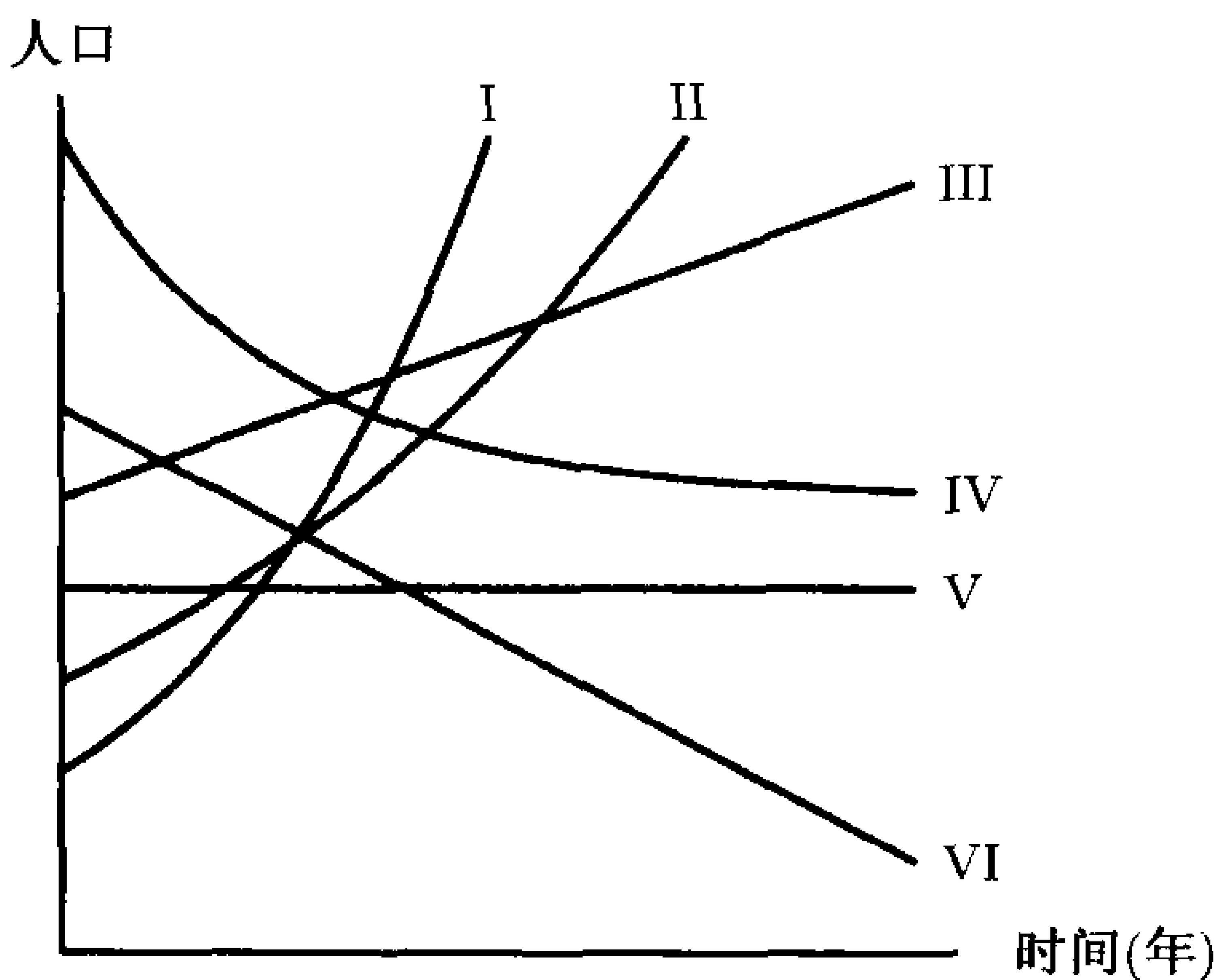


图 1-63

对习题 11~12, 求恰当的函数公式, 其中函数由数据表示.

11.

x	0	1	2	3
$f(x)$	4.30	6.02	8.43	11.80

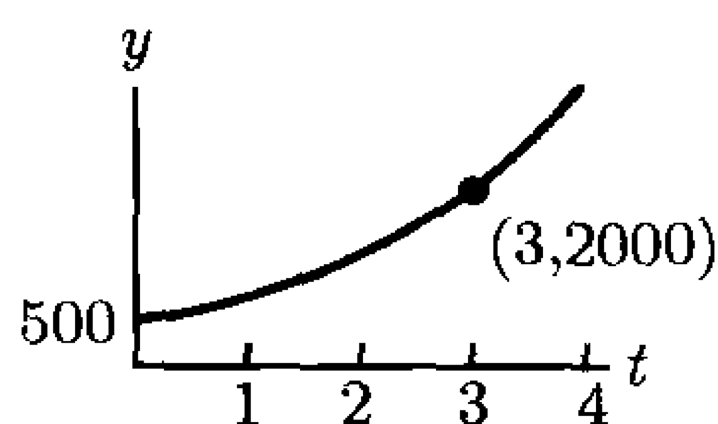
12.

t	0	1	2	3
$g(x)$	5.50	4.40	3.52	2.82

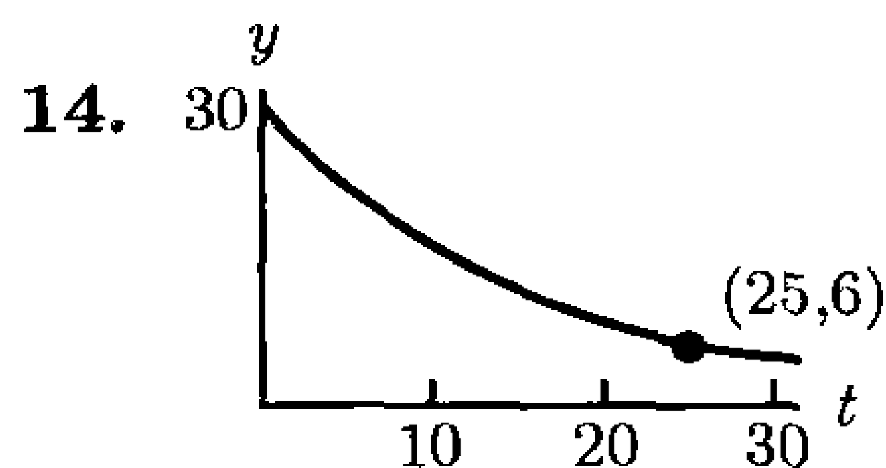
给出习题 13~14 中恰当的函数公式.

① www.eia.doe.gov/oiaf/ieo/pdf/appb1_b8.pdf, 表格 B3, 访问日期 2005 年 4 月 10 日.

13.



14.



15. 在 5 年内铁路旅客从 190 205 降到 174 989. 求这一期间减少的年百分数.

16. 生产名著导读 (经典作品节本) 的公司 1958 年以 4000 美元创办到 1998 年以 14 000 000 美元卖掉. 求该公司的价值在这 40 年期间年增长的百分率.

17. (a)下表中的函数哪些 (如果有) 是线性的? 求出这些函数的公式.

(b)下表中的函数哪些 (如果有) 是指数函数? 求出这些函数的公式.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
−2	12	16	37
−1	17	24	34
0	20	36	31
1	21	54	28
2	18	81	25

18. 确定下列每个数值表对应的函数, 是线性函数, 还是指数函数, 或二者都不是. 求出对应于线性函数和指数函数的数值表中的函数公式.

(a)

x	$f(x)$
0	10.5
1	12.7
2	18.9
3	36.7

(b)

t	$s(t)$
−1	50.2
0	30.12
1	18.072
2	10.8432

(c)

u	$g(u)$
0	27
2	24
4	21
6	18

19. 全世界来自矿物燃料燃烧的二氧化碳散发量[①] C, 1995 年是 60.3 亿吨, 而 2002 年是 66.9 亿吨. 求 1995 年之后 t 年散发量 C 的公式:

(a) 如果 C 是 t 的线性函数. 二氧化碳散发量的年绝对增长率是多少?

(b) 如果 C 是 t 的指数函数. 二氧化碳散发量的年相对增长率是多少?

20. 在 20 世纪 80 年代, 哥斯达尼加森林采伐率达到每年 2.9%, 这是世界最高的采伐率. (以此采伐率采伐, 陆地的森林覆盖面积在减少.) 假设采伐率保持不变, 哥斯达尼加 1980 年森林覆盖的陆地, 有百分之多少在 2015 年仍会被森林覆盖?

21. 位于高海拔的机场由于稀薄的空气密度, 飞机需要较长的起飞距离, 叫做起飞滑跑距离. 表格显示了某种轻型飞机的起飞滑跑距离和机场高度的关系. (起飞滑跑距离也受到空气温度的强烈影响; 显示的数据是假设温度在 0°C.) 对这种飞机, 确定一个函数公式, 表示起飞滑跑距离是机场高度的指数函数.

海拔 (ft)	海平面	1000	2000	3000	4000
起飞滑跑距离 (ft)	670	734	805	882	967

22. (a) 对 $y = e^x$ 在 $x = 0, 1, 2, 3$ 处的值制作一个数值表.

① 《2004–2005 年美国统计摘要》, 表格 1333.

(b) 描出 (a) 中的点的图形. 该图形看上去像指数增长函数还是指数下降函数?

(c) 对 $y = e^{-x}$ 在 $x = 0, 1, 2, 3$ 处的值制作一个数值表.

(d) 描出 (c) 中的点的图形. 该图形看上去像指数增长函数还是指数下降函数?

23. 作出 $y = 100e^{-0.4x}$ 的图形. 描述你所看到的.

24. (a) Niki 在股票市场投资 10 000 美元. 该投资亏损, 投资十年其价值每年下降 10%. 十年后该投资值多少钱?

(b) 十年后股票开始升值, 每年升值 10%, 多少年后该投资重新回到它的初始值 (10 000 美元)?

25. 影印机可以将复制品缩小到它原来大小的 80%. 通过复制已经缩小的复制品, 可以进一步缩小原件.

(a) 如果一页版面缩小到 80%, 需要放大百分之多少才可以恢复到它原来的大小?

(b) 估计一个版面需要接连复制多少次才可以使得最后的复制品变成不到原来大小的 15%.

26. 从下表中的函数 $f(s)$, $g(s)$, $h(s)$ 中, 找出与下面公式相符的函数

$$y = a(1.1)^s, \quad y = b(1.05)^s, \quad y = c(1.03)^s,$$

其中 a, b, c 是常数. 注意到函数值精确到第二位小数.

s	$h(s)$	s	$f(s)$	s	$g(s)$
2	1.06	1	2.20	3	3.47
3	1.09	2	2.42	4	3.65
4	1.13	3	2.66	5	3.83
5	1.16	4	2.93	6	4.02
6	1.19	5	3.22	7	4.22

27. 2004 年美国总统选举辩论的议题是最低工资是否跟得上通货膨胀的步伐. 利用下面的信息[①]解决这一问题: 1938 年, 最低工资是 25 美分; 2004 年是 5.15 美元. 在相同期间, 通货膨胀率平均为 4.3%.

28. 通过疫苗接种, 百日咳被认为是几乎灭绝了. 据了解, 目前疫苗接种取消了, 这导致患百日咳的病人的数量 w 从 1981 年的 1248 例增加到 2004 年的 18 957 例.

(a) 用 1980 年以来的年数 t 求一个指数函数适合这个数据.

(b) 在 (a) 的答案中病人数量的平均年增长的百分率是多少?

(c) 2005 年 5 月 4 日, 亚利桑那每日星报 (准确地) 报道了在 2000~2004 年病人数量已经翻了一番多. 你的模型能验证这一报道吗?

1.6 自然对数

在 1.5 节, 我们通过函数

$$P = f(t) = 570(1.037)^t,$$

规划了得克萨斯州麦卡伦的人口 (千人), 其中 t 是 2000 年以来的年数. 现在问何时人口会达到 900 000 人, 我们要求出这样的 t 使得

① http://www.dol.gov/esa/minwage/chart.htm#5.

$$900 = f(t) = 570(1.037)^t.$$

我们用对数解出指数中的变量.

1.6.1 自然对数的定义和性质

我们定义 x 的自然对数, 记为 $\ln x$.

> x 的**自然对数**, 记为 $\ln x$, 是达到 x 所需要的 e 的幂. 换句话说,
> $$\ln x = c \text{ 意味着 } e^c = x.$$
> 自然对数有时记为 $\log_e x$.

例如, 因为 3 是表示 e^3 所需要的 e 的幂所以 $\ln e^3 = 3$. 类似地, $\ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1$. 计算器给出 $\ln 5 = 1.6094$ 是由于 $e^{1.6094} = 5$. 然而如果我们想在计算器上求出 $\ln(-7)$, 那么我们就会得到错误的讯息, 因为 e 对任何幂决不会是负的或者是 0. 一般地,

> 如果 x 是负的或者是 0, 那么 $\ln x$ 没有定义.

利用对数时, 我们常需要下列性质.

> **自然对数的性质**
>
> (1) $\ln(AB) = \ln A + \ln B$
>
> (2) $\ln\left(\dfrac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
>
> (3) $\ln(A^p) = p\ln A$
>
> (4) $\ln e^x = x$
>
> (5) $e^{\ln x} = x$
>
> 另外, 因为 $e^0 = 1$, $e^1 = e$, 所以 $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

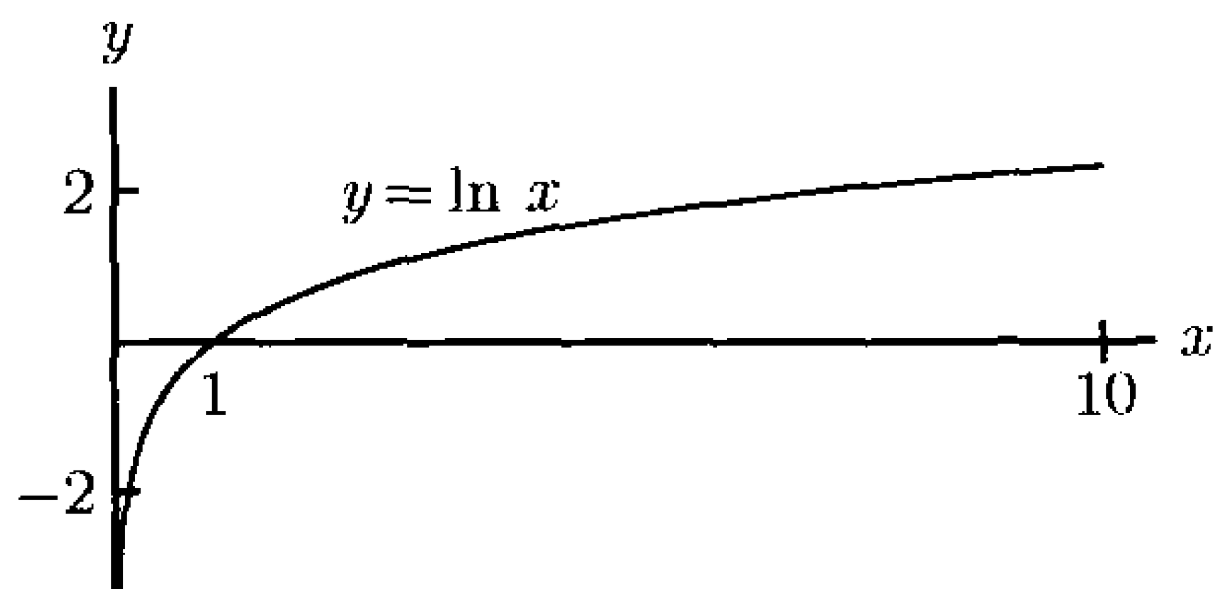


图 1-64 自然对数函数上升得非常慢

利用计算器上的 LN 键, 我们能得到图 1-64 中 $f(x) = \ln x$ 的图形. 观察到, 对大的 x, 当 x 增加时 $y = \ln x$ 上升得非常慢. 因为 $\ln 1 = 0$, 所以 x 截距是 $x = 1$. 对于 $x > 1$, $\ln x$ 的值是正的; 对于 $0 < x < 1$, $\ln x$ 的值是负的.

1.6.2 利用对数解方程

自然对数可以用来解未知的指数.

例 1 求 t 使得 $3^t = 10$.

解 首先, 注意到, $3^2 = 9$ 而且 $3^3 = 27$, 所以我们认为 t 在 2 和 3 之间. 为了精确地求出 t, 我们两边取自然对数并且求解 t:

$$\ln\left(3^t\right) = \ln 10.$$

对数的第三个性质告诉我们 $\ln(3^t) = t\ln 3$, 所以我们有

$$\begin{aligned} t\ln 3 &= \ln 10 \\ t &= \frac{\ln 10}{\ln 3}. \end{aligned}$$

用计算器求自然对数给出

$$t = 2.096.$$

□

例 2 我们回到那个问题, 什么时候麦卡伦的人口达到 900 千人. 为了得出答案, 我们利用对数从方程 $900 = 570(1.037)^t$ 中解出 t.

解 两边同除以量 570, 我们得到

$$\frac{900}{570} = (1.037)^t.$$

于是两边求自然对数:

$$\ln\left(\frac{900}{570}\right) = \ln(1.037^t).$$

利用 $\ln(1.037^t) = t\ln 1.037$, 我们得到

$$\ln\left(\frac{900}{570}\right) = t\ln(1.037).$$

用计算器求这些对数再解这个方程, 我们得到

$$t = \frac{\ln(900/570)}{\ln(1.037)} = 12.57 \text{ 年}.$$

因为在 2000 年 $t = 0$, 所以 t 的这个值对应于 2012 年. □

例 3 求 t 使得 $12 = 5e^{3t}$.

解 最容易的办法是从分离指数开始, 所以在方程的两边同除以 5:

$$2.4 = e^{3t}.$$

于是两边求自然对数:

$$\ln 2.4 = \ln(e^{3t}).$$

由 $\ln e^x = x$, 我们有

$$\ln 2.4 = 3t.$$

所以, 用计算器, 我们得到

$$t = \frac{\ln 2.4}{3} = 0.2918.$$

□

1.6.3 以e为底的指数函数

以 a 为底的指数函数具有公式

$$P = P_0 a^t.$$

对任何正数 a, 我们可以记 $a = \mathrm{e}^k$ 其中 $k = \ln a$. 这样, 指数函数可以写成

$$P = P_0 a^t = P_0(\mathrm{e}^k)^t = P_0 \mathrm{e}^{kt}.$$

如果 $a > 1$, 那么 k 是正的; 如果 $0 < a < 1$, k 是负的. 我们得出如下形式.

记 $a = \mathrm{e}^k$, 从而 $k = \ln a$, 任何指数函数可以写成两种形式

$$P = P_0 a^t \quad 或 \quad P = P_0 \mathrm{e}^{kt}.$$

- 如果 $a > 1$, 我们有指数增长; 如果 $0 < a < 1$, 我们有指数下降.
- 如果 $k > 0$, 我们有指数增长; 如果 $k < 0$, 我们有指数下降.
- k 叫做连续增长率或连续下降率.

在连续增长率中的词汇连续同样是用来描述连续复利的. 参见本章相关模型部分.

例 4 (a) 将函数 $P = 1000\mathrm{e}^{0.05t}$ 转换成 $P = P_0 a^t$ 的形式.

(b) 将函数 $P = 500(1.06)^t$ 转换成 $P = P_0 a^{kt}$ 的形式.

解 (a) 因为 $P = 1000\mathrm{e}^{0.05t}$, 所以我们有 $P_0 = 1000$. 我们求 a 使得

$$1000a^t = 1000\mathrm{e}^{0.05t} = 1000(\mathrm{e}^{0.05})^t.$$

我们取 $a = \mathrm{e}^{0.05} = 1.0513$, 因此下面两个函数给出同样的值:

$$P = 1000\mathrm{e}^{0.05t} \quad 和 \quad P = 1000(1.0513)^t.$$

所以 5% 的连续增长率等于每单位时间 5.13% 的增长率.

(b) 我们有 $P_0 = 500$ 并且要通过

$$500(1.06)^t = 500(\mathrm{e}^k)^t,$$

求 k, 所以我们取

$$1.06 = \mathrm{e}^k$$

$$k = \ln(1.06) = 0.0583.$$

下面两个函数给出同样的值:

$$P = 500(1.06)^t \quad 和 \quad P = 500\mathrm{e}^{0.0583t}.$$

因此每单位时间 6% 的增长率等于 5.83% 的连续增长率. □

例 5 作出 $P = \mathrm{e}^{0.5t}$ 和 $Q = 5\mathrm{e}^{-0.2t}$ 的略图, 其中前者的连续增长率是 50%, 后者的连续下降率是 20%.

解 $P = \mathrm{e}^{0.5t}$ 的图形如图 1-65 所示. 注意到该图形同前面的指数增长曲线形状相同: 递增并且上凹. $Q = 5\mathrm{e}^{-0.2t}$ 的图形如图 1-66 所示; 它同另一个指数下降函数的形状相同.

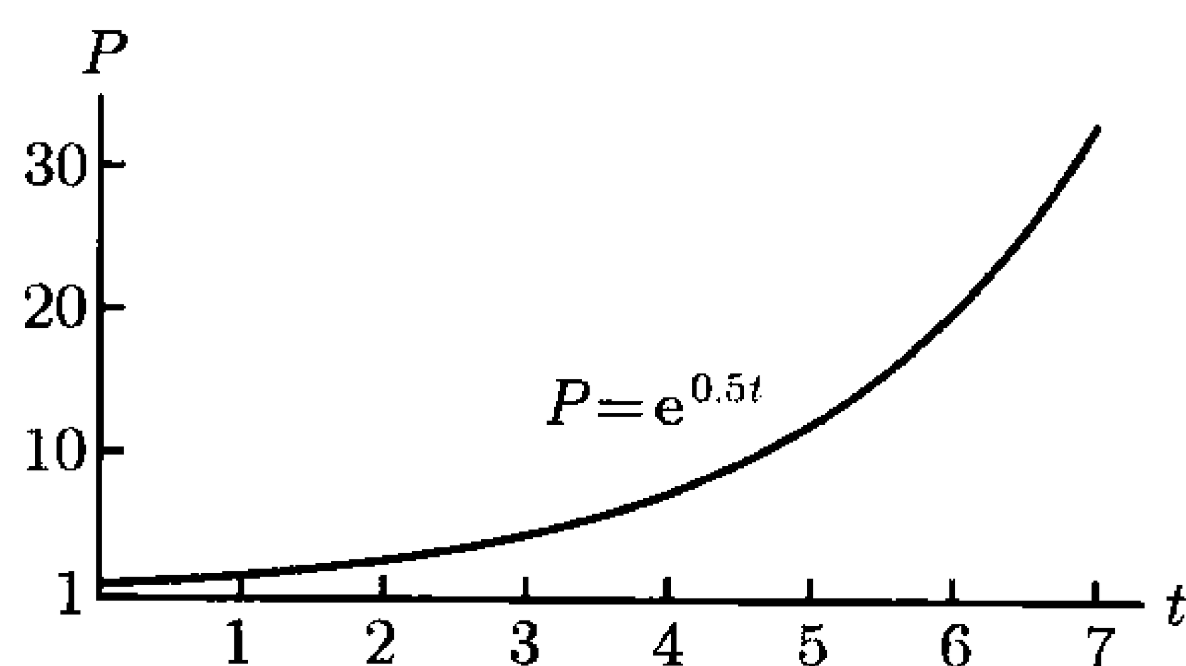


图 1-65 连续指数增长函数

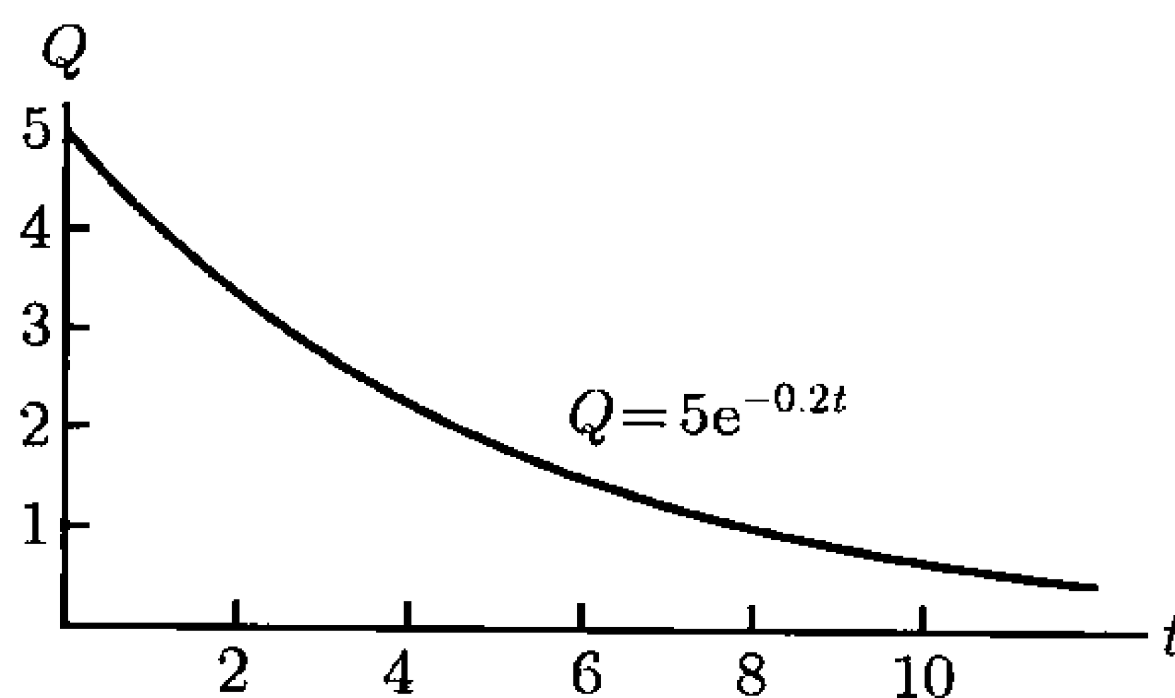


图 1-66 连续指数下降函数

□

习题

对于习题 1~16, 用自然对数求解 t.

1. $5^t = 7$ **2.** $10 = 2^t$

3. $2 = (1.02)^t$ **4.** $130 = 10^t$

5. $50 = 10 \cdot 3^t$ **6.** $100 = 25(1.5)^t$

7. $a = b^t$ **8.** $10 = e^t$

9. $5 = 2e^t$ **10.** $e^{3t} = 100$

11. $10 = 6e^{0.5t}$ **12.** $40 = 100e^{-0.03t}$

13. $B = Pe^{rt}$ **14.** $2P = Pe^{0.3t}$

15. $5e^{3t} = 8e^{2t}$ **16.** $7 \cdot 3^t = 5 \cdot 2^t$

习题 17~20 中的函数表示指数增长或者指数下降. 其初始量是多少? 其增长率是多少? 说明该增长率是否为连续的.

17. $P = 5(1.07)^t$ **18.** $P = 7.7(0.92)^t$

19. $P = 15e^{-0.06t}$ **20.** $P = 3.2e^{0.03t}$

21. 一个城市的人口是 1000 并且每年以 5% 的增长率增长. 求从现在起 t 年的人口公式.

(a) 假设每年 5%的增长率是如下一种

(i) 年增长率 (ii) 连续年增长率

(b) 对 (a) 中每种情形估计该城市 10 年的人口.

22. 下列公式表示从现在起 t 年四个不同小镇 A, B, C, D 的人口.

$$P_A = 600e^{0.08t} \qquad P_B = 1000e^{-0.02t}$$
$$P_C = 1200e^{0.03t} \qquad P_D = 900e^{0.12t}$$

(a) 哪个镇增长得最快 (也就是, 有最大的增长百分率)?

(b) 现在哪个镇最大?

(c) 有规模在减少的镇吗? 如果有, 是哪些?

将习题 23~26 中的函数写成 $P = P_0 a^t$ 的形式. 哪些表示指数增长, 哪些表示指数下降?

23. $P = 15e^{0.25t}$ **24.** $P = 2e^{-0.5t}$

25. $P = P_0 e^{0.2t}$ **26.** $P = 7e^{-\pi t}$

将习题 27~30 中的函数表示成 $P = P_0 e^{kt}$ 的形式

27. $P = 15(1.5)^t$ **28.** $P = 10(1.7)^t$

29. $P = 174(0.9)^t$ **30.** $P = 4(0.55)^t$

31. 一个渔场在一个池塘里放了 1000 尾真鳟鱼苗. t 年后真鳟的数目由 $P(t) = 1000e^{-0.5t}$ 给出.

(a) 六个月后剩下多少真鳟? 1 年后呢?

(b) 求 $P(3)$ 并用真鳟解释它.

(c) 什么时候剩下 100 尾真鳟?

(d) 作出真鳟的数目关于时间的图形, 并描述这种鱼的总数是如何变化的. 这会引起什么?

32. 在经济衰退期间, 公司的收益连续下降以至于在 t 年的收益 R(以百万美元计) 可表示为 $R = 5e^{-0.15t}$.

(a) 计算当前的收益和两年后的收益.

(b) 多少年后收益降到 2.7 百万美元?

33. (a) $P = 100e^{0.06t}$ 的连续增长百分率是多少? 其中时间 t 的单位是年.

(b) 将该函数写成 $P = P_0a^t$ 的形式. 它的年增长百分率是多少?

34. (a) $P = 25(0.88)^t$ 的年下降百分率是多少? 其中时间 t 的单位是年.

(b) 将该函数写成 $P = P_0e^{kt}$ 的形式. 它的连续下降的百分率是多少?

35. 世界生产总值是 $W = 32.4(1.036)^t$, 其中 W 的单位是万亿美元, t 是 2001 年以来的年数. 求用连续增长率表示的世界生产总值的公式.

36. 尼加拉瓜的人口 P(百万)2004 年是 5.4 百万, 并且每年以 3.4% 的年增长率增长. 设时间 t 是 2004 年以来的年数.

(a) 把 P 表示成形如 $P = P_0a^t$ 的函数.

(b) 把 P 表示成以 e 为底的指数函数.

(c) 比较它的年增长率和连续增长率.

37. 多少年增长百分率等于 8% 的连续增长百分率?

38. 多少连续增长百分率等于 10% 的年增长百分率?

39. 世界人口可以由 $P = 6.4(1.0126)^t$ 表示, 其中 P 的单位是十亿人而 t 是 2004 年以来的年数. 求用连续增长率表示的世界人口的公式.

40. 一个城市的人口 2001 年是 50 000 并且以 4.5% 的连续增长率增长.

(a) 将该城市的人口表示成 2001 年以来的年数的函数. 作出人口关于时间的略图.

(b) 2011 年该城市的人口会是多少?

(c) 计算该城市人口达到 100 000 的时间. 这叫做人口的倍增时间.

41. 在 1980 年, 美国大约有 170 百万辆机动车 (汽车和卡车) 并且大约有 227 百万人. 机动车的数量每年增长 4% 而人口每年增长 1%. 何时每人平均有一辆机动车?

1.7 指数增长和下降

在自然界中, 许多量按照形如 $P = P_0a^{kt}$ 的指数增长函数或指数下降函数变化, 其中 P_0 是初始量而 k 是连续增长或下降率.

例 1 最近环保局 (EPA) 调查了放射性碘的泄漏. 现场放射水平大约是 2.4 毫雷姆/小时 (这是最大可接受限 0.6 毫雷姆/小时的 4 倍), 因此 EPA 下达了疏散周边

地区的命令. 碘源的放射水平每小时以 $k=-0.004$ 的连续下降率下降.

(a) 24 小时后的放射水平是多少?

(b) 求放射水平达到最大可接受限的小时数, 这时居民可以返回.

解 (a) 自开始测量以来的 t 小时, 放射水平 R(毫雷姆/小时) 由

$$R=2.4\mathrm{e}^{-0.004t},$$

给出, 所以 24 小时后放射水平是

$$R=2.4\mathrm{e}^{-0.004(24)}=2.18 \text{ 毫雷姆/小时}.$$

(b) $R=2.4\mathrm{e}^{-0.004t}$ 的图形如图 1-67. R 的最大可接受值是每小时 0.6 毫雷姆, 这大约在 $t=350$ 的时候出现. 利用对数, 我们有

$$\begin{aligned}0.6&=2.4\mathrm{e}^{-0.004t}\\0.25&=\mathrm{e}^{-0.004t}\\\ln 0.25&=-0.004t\\t&=\frac{\ln 0.25}{-0.004}=346.57.\end{aligned}$$

居民 346.57 个小时后, 也就是大约 15 天后, 才能返回.

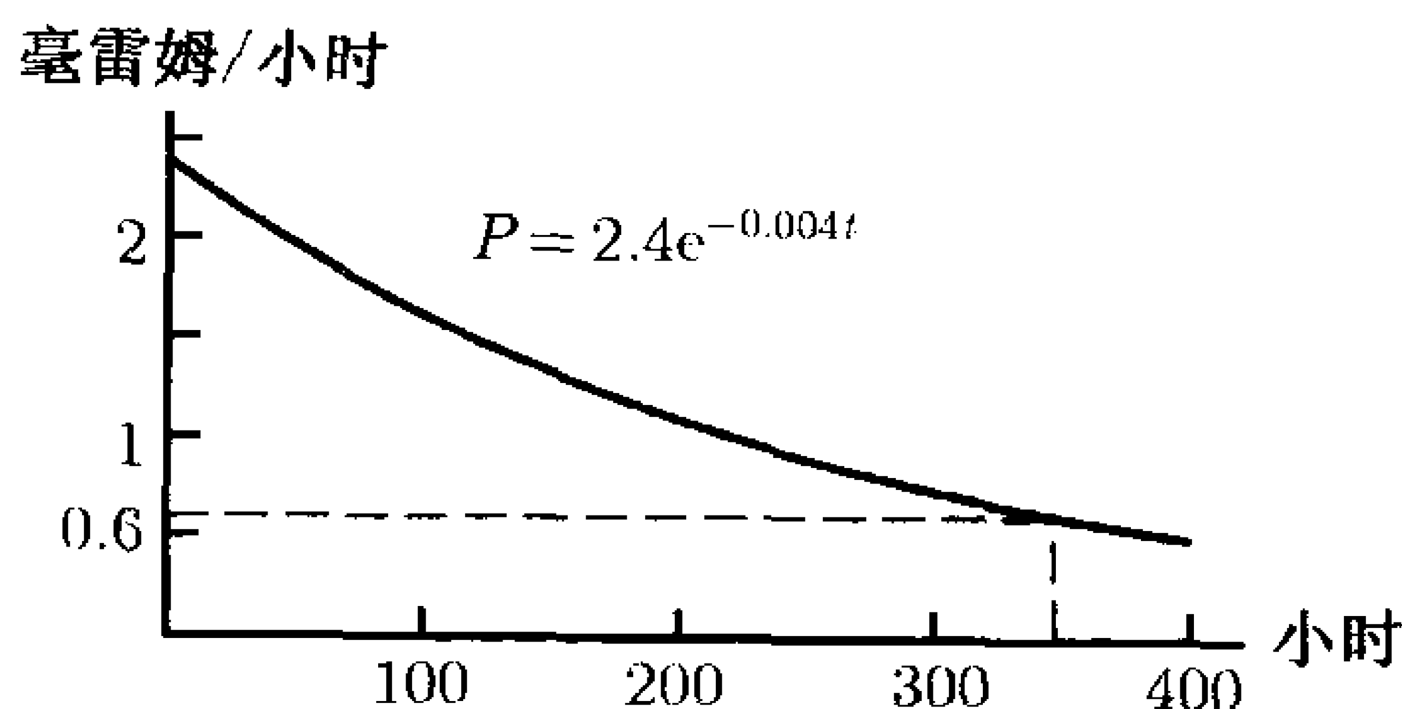


图 1-67 放射性碘的放射水平 □

例 2 肯尼亚的人口[①]1984 年是 19.5 百万, 2004 年是 32.0 百万. 假设人口是指数地增加, 求肯尼亚的人口作为时间的函数公式.

解 我们以百万计量人口 P 以 1984 年以来的年数计量时间 t. 用连续增长率 k, 我们可以将 P 表示成

$$P=P_0\mathrm{e}^{kt}=19.5\mathrm{e}^{kt},$$

其中 $P_0=19.5$ 是 P 的初始值. 利用 $t=20$ 时 $P=32.0$ 我们求 k:

$$32.0=19.5\mathrm{e}^{k\cdot 20}.$$

两边同除以 19.5, 给出

$$\frac{32.0}{19.5}=\mathrm{e}^{20k}$$

两边取自然对数:

$$\ln\left(\frac{32.0}{19.5}\right)=\ln(\mathrm{e}^{20k}).$$

因为 $\ln\left(\mathrm{e}^{20k}\right)=20k$, 这就变成

$$\ln\left(\frac{32.0}{19.5}\right)=20k.$$

① 《2005 年世界年鉴》, 第 792 页 (纽约).

利用计算器, 我们得到

$$k = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{32.0}{19.5}\right) = 0.025,$$

从而

$$P = 19.5e^{0.025t}.$$

因为 $k = 0.025 = 2.5\%$, 所以肯尼亚的人口每年以 2.5% 的连续增长率增长. □

1.7.1　倍增时间和半衰期

每个指数增长函数有一个不变的倍增时间而每个指数下降函数有一个不变的半衰期.

> 指数增长的量其**倍增时间**是该量翻倍所需要的时间.
> 指数下降的量其**半衰期**是该量减少一半所需要的时间.

例 3　用代数的方法说明每个指数增长函数有一个固定的倍增时间.

解　考虑指数函数 $P = P_0a^t$. 对任何底 $a > 1$, 存在正数 d 使得 $a^d = 2$. 我们说明 d 就是这个倍增时间. 如果 t 时刻人口是 P, 那么 $t + d$ 时刻人口是

$$P_0a^{t+d} = P_0a^ta^d = (P_0a^t)(2) = 2P.$$

因此, 无论对什么初始量而且无论对什么初始时间, d 单位时间后人口的规模翻倍. □

例 4　用在空调和家用喷雾剂 (发胶、剃须霜等) 中的氯氟烃的释放破坏大气层中的臭氧. 臭氧含量 Q 每年以 0.25% 的连续下降率指数下降. 臭氧的半衰期是多少? 换句话说, 以这种速度, 需要多长时间臭氧消失一半?

解　如果 Q_0 是臭氧的初始含量并且 t 是年数, 那么

$$Q = Q_0e^{-0.0025t}.$$

我们要求 t 的值使得 $Q = Q_0/2$, 所以

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0e^{-0.0025t}.$$

两边同除以 Q_0 并取自然对数给出

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.0025t,$$

所以

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0.0025} = 277 \text{ 年}.$$

277 年后目前大气层中的臭氧要消失一半. □

1.7.2 金融应用：复利

我们存入 100 美元到一家银行, 这家银行每年以 8% 的利率支付利息. 到年底账户中有多少钱? 这取决于利息如何复合. 如果利息*每年*支付到账户, 即在年底支付到账户, 那么一年后账户中的余额是 108 美元. 然而, 如果利息每年分两次支付, 那么前六个月末支付 4% 年底再支付 4%. 这样挣得的钱就会稍微多一点, 因为这一年前期所付的利息在当年剩余的时间内还会挣得利息. 这种结果叫做复合.

一般来说, 利息复合得越频繁, 挣得的钱就越多 (尽管增加的金额不多). 如果利息复合得更频繁, 例如每分钟或每秒钟, 情况如何? 当超过某个限度时, 增加复合的频率所得到的好处会变得微不足道. 当达到这个限度时, 我们发现余额要用到数 e 并且我们称每年的利息是*连续复合的*. 如果我们存入 100 美元到一个账户, 该账户每年支付 8% 的连续复合的利息, 那么一年后的余额是 $100e^{0.08}$=108.33 美元. 复合在本章相关模型一节中有进一步讨论. 一般情况如下.

> 金额 P_0 存入到一个账户, 该账户每年以 r 的利率支付利息. 设 P 表示 t 年后账户中的余额.
> - 如果利息是年复合的, 那么 $P = P_0(1+r)^t$.
> - 如果利息是连续复合的, 那么 $P = P_0e^{rt}$, 其中 $e = 2.71828\cdots$.

我们记 P_0 为初始存款是由于它是 P 在 $t=0$ 时的值. 注意到对于 7% 的利率, $r=0.07$. 如果利率是连续的, 那么我们会说得很精确.

例 5 一家银行为每年 8% 的利率做广告. 如果你存入 5000 美元, 当利息是如下形式, 3 年后账户中的钱是多少?

(a) 年复合的 (b) 连续复合的

解 (a) 对于年复合, $P = P_0(1+r)^t = 5000(1.08)^3$=6298.56 美元.

(b) 对于连续复合, $P = P_0e^{rt} = 500e^{0.08\cdot 3}$=6356.25 美元. 和预想的一样, 3 年后账户中的金额按连续复合的利息 (6356.25 美元) 要比按年复合的利息 (6298.56 美元) 大. □

例 6 如果 10 000 美元存入到一个账户, 该账户每年以 5% 的利率支付利息, 按连续复合的利息, 那么需要多久账户中的余额会达到 15 000 美元?

解 因为利息是连续复合的, 我们用 $P = P_0e^{rt}$, 其中 $r = 0.05$, P_0 =10 000. 我们要求 t 使得 P =15 000. 方程是

$$15\,000 = 10\,000e^{0.05t}.$$

现在两边同除以 10 000, 然后取对数并求解 t:

$$\begin{aligned} 1.5 &= e^{0.05t} \\ \ln(1.5) &= \ln(e^{0.05t}) \\ \ln(1.5) &= 0.05t \\ t &= \frac{\ln(1.5)}{0.05} = 8.1093. \end{aligned}$$

大约需要 8.1 年账户中的余额会达到 15 000 美元. □

例 7 (a) 计算年复合的利率为每年 2%, 3%, 4%, 5% 的倍增时间 D.

(b) 利用你对 (a) 的答案验证, 对较小的 i, $i\%$ 的利率的倍增时间近似地由

$$D \approx \frac{70}{i} \text{ 年}$$

表示. 这就是银行家所用的 "70 法则": 近似地计算投资的倍增时间, 用 70 除以年利率的百分数.

解 (a) 我们用公式 $P = P_0(1.02)^t$ 求每年 2% 的利率的倍增时间, 其中 t 是年数. 为了求出使得 $P = 2P_0$ 的 t 的值, 我们解

$$\begin{aligned} 2P_0 &= P_0(1.02)^t \\ 2 &= (1.02)^t \\ \ln 2 &= \ln(1.02)^t \\ \ln 2 &= t\ln(1.02) \quad (\text{利用对数的第三个性质}) \\ t &= \frac{\ln 2}{\ln 1.02} = 35.003 \text{ 年}. \end{aligned}$$

以 2% 的年利率, 投资的价值翻倍需要 35 年. 类似地, 我们求得 3%, 4%, 5% 的倍增时间放在表 1-10 中.

表 1-10 作为利率函数的倍增时间

i(% 年增长率)	2	3	4	5
D(倍增时间 (年))	35.003	23.450	17.673	14.207

(b) 对 $i = 2, 3, 4, 5$, 我们计算 $(70/i)$. 其结果如表 1-11 所示.

表 1-11 作为利率函数的近似倍增时间: 70 法则

i(% 年增长率)	2	3	4	5
$(70/i)$(近似倍增时间 (年))	35.000	23.333	17.500	14.000

比较表 1-10 和表 1-11, 我们看到, 对所考虑的较小的利率, 量 $(70/i)$ 近似地表示倍增时间 D 较合理. □

1.7.3 现值和将来值

许多交易包含将来的支付. 例如, 赊购汽车时, 是过期支付. 从许多方面来说, 将来被还 100 美元显然比现在被还 100 美元要糟糕. 如果现在给我们钱, 我们可以用它做一些其他事情. 例如, 把它们存入银行, 在什么地方将它们投资, 或者花掉它们. 因此, 即使不考虑通货膨胀, 如果我们接受将来支付, 也希望被还更多的钱以弥补失去的潜在利润[①]. 于是我们所考虑的问题是多付多少?

简单起见, 我们只考虑不挣利息损失的部分, 而不考虑通货膨胀的影响. 我们考虑一些具体的数. 假设我们在一个账户中存入 100 美元, 该账户每年挣得 7% 的年复利, 从而在一年时间内我们有 107 美元. 这样, 今天的 100 美元从现在起一年的时间就值 107 美元. 我们说这个 107 美元是 100 美元的将来值, 而这个 100 美元是 107 美元的现值. 一般地, 我们像下面这样说.

- 假如今天将 P 存入一个生息的银行账户, P 会增长到的金额 B 是支付 P 的**将来值**.
- 为了在将来的某个相应时间, 银行账户中正好产生金额 B, 今天必须存入到银行账户中的金额 P 是将来支付 B 的**现值**.

由于挣利息, 将来值要比现值大. 现值和将来值之间的关系, 按如下方式依赖于利率.

假设 B 是 P 的将来值而 P 是 B 的现值.

如果利息是利率为 r 的年复利, 那么 t 年,

$$B = P(1+r)^t, \text{ 或者等价地, } \quad P = \frac{B}{(1+r)^t}.$$

如果利息是利率为 r 的连续复利, 那么 t 年,

$$B = Pe^{rt}, \text{ 或者等价地, } \quad P = \frac{B}{e^{rt}} = Be^{-rt}.$$

利率 r 有时也叫做贴现率. 现值常用 PV 表示, 而将来值常用 FV 表示.

例 8 你的彩票中奖并且给你在以下两种支付方式中进行选择: 其一是支付 1 百万美元, 从现在开始, 四年分期付款每次 250 000 美元; 另一种方式是现在一次性支付 920 000 美元. 假设每年的利率是连续复合的利率 6%, 并且忽略税款, 你应该选择哪种方式?

解 我们假设你选择具有最大现值的支付方式. 现在支付四个 250 000 美元中的第一个, 因此

$$\text{第一次支付的现值} = 250\,000 \text{ 美元}.$$

① 这又被称为金钱的时间价值.

从现在起一年支付第二次, 所以

$$\text{第二次支付的现值} = 250\,000e^{-0.06(1)}\ \text{美元}.$$

类似地计算第三次和第四次支付的现值, 我们求得

$$\begin{aligned}\text{总现值} &= 250\,000\ \text{美元} + 250\,000e^{-0.06(1)}\ \text{美元}\\ &\quad +250\,000e^{-0.06(2)}\ \text{美元} + 250\,000e^{-0.06(3)}\ \text{美元}\\ &= 250\,000\text{美元} + 235\,441\text{美元} + 221\,730\text{美元} + 208\,818\text{美元}\\ &= 915\,989\text{美元}.\end{aligned}$$

因为四次支付的现值比 920 000 美元少, 你最好现在拿走 920 000 美元.

另一种方法, 我们可以比较两种支付方式的将来值. 我们计算从现在算起三年的两种支付方式的将来值, 就是从最后一次支付 250 000 美元的日期算起的三年. 到那时候,

$$\text{一次性支付的将来值} = 920\,000e^{0.06\times(3)}\ \text{美元} = 1\,101\,440\text{美元}.$$

第一次支付 250 000 美元的将来值是 $250\,000e^{0.06(3)}$. 类似地计算其他几次支付的将来值, 我们求得

$$\begin{aligned}\text{总将来值} &= 250\,000e^{0.06(3)}\ \text{美元} + 250\,000e^{0.06(2)}\ \text{美元}\\ &\quad +250\,000e^{0.06(1)}\ \text{美元}+250\,000\text{美元}\\ &= 299\,304\text{美元} + 281\,874\text{美元} + 265\,459\text{美元} + 250\,000\text{美元}\\ &= 1\,096\,637\text{美元}.\end{aligned}$$

和预想的一样, 920 000 美元支付的将来值较大, 你最好现在拿走 920 000 美元[①].□

习题

1. 血液中尼古丁的半衰期是 2 小时. 某人抽一支烟吸收 0.4 mg 的尼古丁. 用 t 小时后血液中剩余的尼古丁含量填入下表. 估计尼古丁的含量减少到 0.04 mg 的时间长度.

t(小时)	0	2	4	6	8	10
尼古丁 (mg)	0.4					

2. 如果你将 10 000 美元存入一个账户挣利息, 该账户连续复利的年利率是 8%, 5 年后该账户中的钱是多少?
3. 如果在 6 年内你需要你的银行账户中有 20 000 美元, 现在你必须存入多少钱? 连续复利的利率是 10%.
4. 如果银行每年支付 6% 的连续复利, 需要多长时间账户中的余额翻倍?
5. 你在一个账户中投入 5000 美元, 该账户支付连续复利.
   (a) 如果年利率是 4%, 8 年后账户中的钱是多少?
   (b) 如果你想 8 年后账户中含有 8000 美元, 年利率需要是多少?

① 如果你仔细地阅读印出的小字, 你会发现许多彩票不会马上提供它们的支付, 而是经常把它们分期摊还, 有时是很远的将来. 这就是减少所提供的支付的现值, 使得奖金的价值比它初看上去的少.

6. 假设在一个账户中投入 1000 美元, 该账户每年支付利率为 5.5% 的利息. 如果利息是下列形式, 8 年后账户中的钱是多少?

(a) 年复合的 (b) 连续复合的

7. 求每年增加 7% 的量的倍增时间.

8. 一杯咖啡含有 100mg 的咖啡因, 它以每小时 17% 的连续速度离开人体.

(a) 写出喝一杯咖啡后 t 小时体内咖啡因含量 A(mg) 的公式.

(b) 作出 (a) 中函数的图形. 用这个图形估计咖啡因的半衰期.

(c) 用对数求咖啡因的半衰期.

9. 当前数量为 200 的一个种群每年增长 5%.

(a) 写出该种群数量 P 作为将来 t 年的函数公式.

(b) 作出 P 关于 t 的函数图形.

(c) 估计从现在起 10 年该种群的数量.

(d) 用这个图形估计该种群的倍增时间.

10. 抗抑郁药氟西汀 (又叫百忧解) 有大约 3 天的半衰期. 一天后体内药物剩下百分之多少? 一个星期后呢?

11. 你想从现在算起 3 年你的账户中含有 10 000 美元并且每年的连续复利利率是 8%. 现在你应该存入多少钱?

12. 某公司决定在接下来的 5 年期间以一个不变的速度增加其产量, 从目前的生产水平 20 000 个单位增加到 30 000 个单位. 计算实现这一增长所需要的年百分增长率.

13. 一个生物体死后 t 年放射性碳 14 的剩余量 Q 可由公式

$$Q = Q_0 e^{-0.000121t},$$

表示, 其中 Q_0 是初始量.

(a) 在考古挖掘地点一个裸露的颅骨显示的碳 14 含量是原来的 15%. 估计它的年代.

(b) 计算碳 14 的半衰期.

14. (a) 图 1-68 表示指数增长. 估计人口翻倍的时间, 时间从 $t = 0$ 开始.

(b) 重复 (a), 但是这次时间从 $t = 3$ 开始.

(c) 取 t 的任何其他值作为起始时间, 并且注意到无论你从哪里开始它的倍增时间都是相同的.

15. 一种指数增长的动物, $t = 0$ 时的总数为 500, 两年后是 1500. 求 t 年总数大小的公式并求 $t = 5$ 时的总数大小.

16. 如果某物质的数量 10 小时减少 4%, 求它的半衰期.

17. 图 1-69 表示两个银行账户中的余额. 两个账户支付相同的利率, 但是一个是连续复利而另一个是年复利. 哪条曲线对应于哪种复合方法? 每种情形的初始存款是多少?

18. 孕妇代谢一些药物比其余的人速度低一些. 对大多数人来说咖啡因的半衰期大约是 4 小时. 对孕妇来说, 它是 10 小时[①]. (主要原因是同所有对神经起显著作用的药物一样, 咖啡因可以穿过胎盘传给胎儿.) 如果一个孕妇和她的丈夫在上午 8 点每人喝一杯含有 100 mg 咖啡因的咖啡, 那么在下午 10 点每人体内还剩下多少咖啡因?

---

① 引自 Robert M. Julien,《药物作用入门》, 第 7 版, 第 159 页 (纽约: W.H.Freeman, 1995).

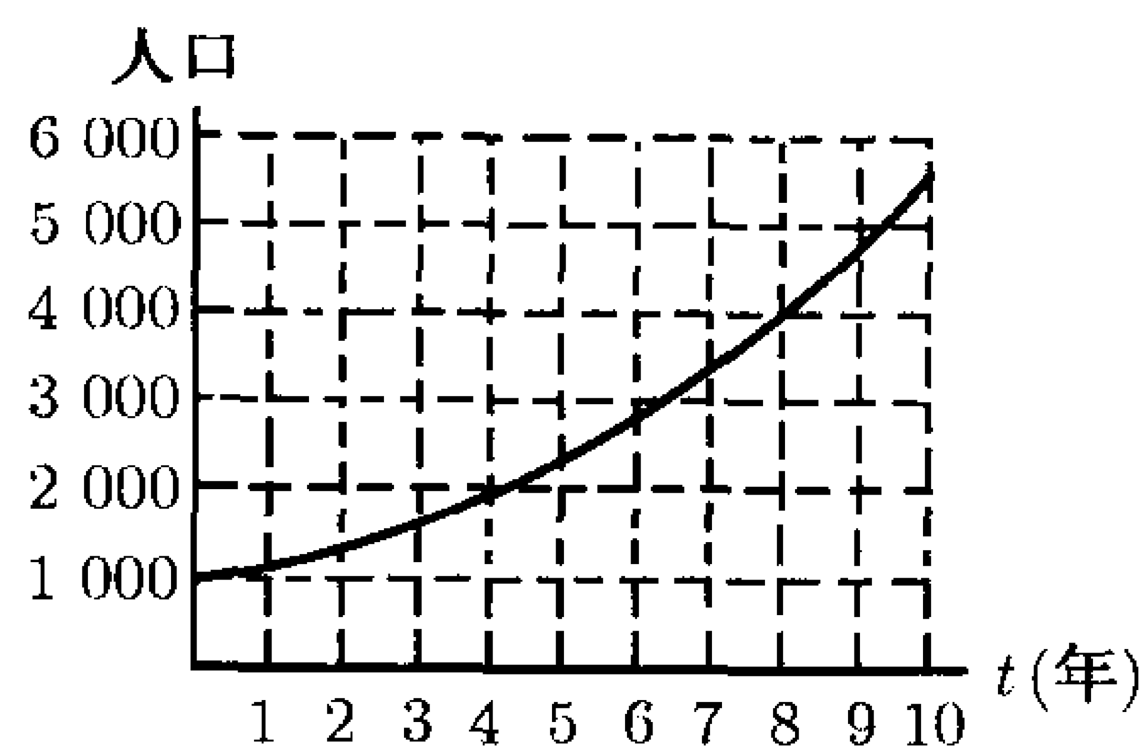


图 1-68

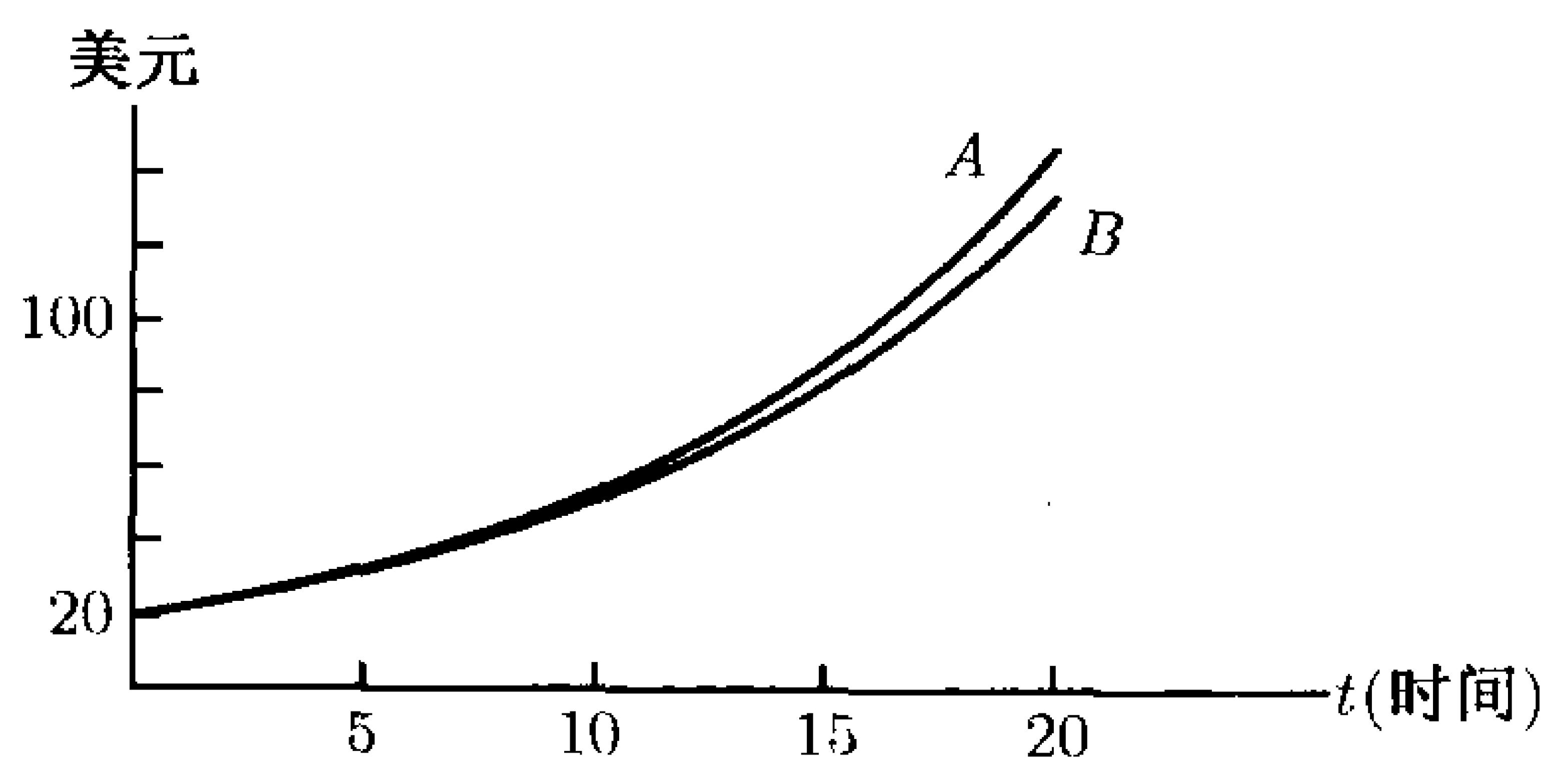


图 1-69

19. 放射性锶 90 的半衰期是 29 年. 1960 年, 在核武器试验期间放射性锶 90 释放到空气中, 并且被吸进人的骨头里. 需要多少年只剩下原来吸入量的 10%?

20. 如果将 12 000 美元存入一个账户, 该账户每年支付 8% 的连续复利, 那么需要多久余额会达到 20 000 美元?

21. 为了孩子的教育, 你需要向存款单 (CD) 中存钱. 你要它 10 年值 12 000 美元. 如果该 CD 每年支付 9% 的利息是下列形式, 你应该投入多少钱?

(a) 年复利　(b) 连续复利

22. 你租一套公寓时, 经常需要付给房东安全保证金. 如果公寓没有被损坏, 这笔保证金会退还给你. 在马萨诸塞州, 房东需要向房客每年支付一次保证金的利息, 连续复利的年利率是 5%. 然而, 房东可以按更高 (或更低) 的利率将这笔钱投资. 假设房东按下列方式存入 1000 美元. 在每种情况下, 确定第一年年底房东的净收益或净亏损. (答案精确到美分.)

(a) 每年 6% 的连续复利利率　(b) 每年 4% 的连续复利利率

23. 1923 年, 考拉被引进到澳大利亚沿海的袋鼠岛. 1996 年, 考拉总数是 5000. 到了 2005 年考拉总数增加到 27 000, 这引起了关于如何控制考拉的增长以避免它们死于饥饿的讨论①. 假设是指数增长, 求 1996~2005 年考拉总数的 (连续) 增长率. 求总数作为自 1996 年以来的年数的函数公式, 并估计 2020 年考拉的总数.

24. 全世界海洋捕获量 1950 年是 17 百万吨, 2001 年是 99 百万吨②. 如果海洋捕获量是指数增长的, 求其 (连续) 增长率. 用它来预测 2020 年全世界海洋捕获量.

25. (a) 用 70 法则预测每年挣得利息为 8%的一项投资的倍增时间.

(b) 精确地求出该倍增时间, 并将它与 (a) 作比较.

26. 曼哈顿岛 1626 年以 24 美元售出. 假设这笔钱投资到连续复利的账户.

(a) 如果年利率按下述比率计算, 2005 年该账户中的钱是多少?

(i) 5%　(ii) 7%

(b) 如果年利率是 6%, 哪年账户中的钱是一百万美元?

27. 由于实施了乡村公共卫生改革方案, 西非塞内加尔的婴儿死亡人数每年以 10% 的速度减少. 需要多长时间婴儿死亡人数会减少 50%?

28. 2004 年, 世界人口总数是 64 亿, 计划到 2030 年世界人口总数达到 85 亿. 年增长率计划是多少?

---

① news.yahoo.com/s/afp/australiaanimalskoalas, 访问日期 2005 年 6 月 1 日.

② 《2005 年世界年鉴》, 第 143 页 (纽约).

29. 一幅据推测由维米尔 (1632—1675) 创作的油画, 其碳 14(半衰期为 5730 年) 含量为 99.5%. 由这个信息确定这幅油画是否为赝品. 说明理由.

30. 一个商业伙伴欠你 3000 美元, 提出现在向你支付 2800 美元, 要不然分三年支付每年支付 1000 美元, 并且现在就支付首期付款. 如果你只从金融的角度做决定, 你会选择哪一种? 假设每年的连续复利利率是 6%, 证明你的答案.

31. 选手大树麦吉和一个职业篮球队签订他的加盟协议. 他们达成了一项三年的协议, 在三年的每一年年底付给大树一笔固定金额加上第一年年初的签约奖金. 他们在金额上仍然争论不休, 并且大树必须在以下两种方式中作出决定: 高额的签约奖金加上每年固定的薪水, 或者较低的签约奖金加上每年增加的薪水. 假设两种选项概括在下表中. 所有数值都是以百万美元为单位的支付款.

	签约奖金	第 1 年	第 2 年	第 3 年
选项 #1	6.0	2.0	2.0	2.0
选项 #2	1.0	2.0	4.0	6.0

(a) 大树决定将所有收入投到库存基金中, 希望该基金每年以 10% 的比率连续复合地增长. 他喜欢选择这样的协议, 到第三年年底最后一次付款时能够给他带来最大的将来值. 他会选择哪个选项?

(b) 计算每个协议报价的现值.

32. 一个公司正在考虑是否购买新的机器, 其成本为 97 000 美元. 新机器产生的现款流量 (由税款和贬值调节) 表示在下表中.

年	1	2	3	4
现款流量	50.000 美元	40.000 美元	25.000 美元	20.000 美元

(a) 求现款流量的总现值. 把每年的现款流量当作当年年底一次性付清来处理, 并且每年的年复利利率为 7.5%.

(b) 根据对机器成本与现款流量的现值进行比较的结果, 你会建议购置该机器吗?

33. 你买的国家彩票中得 38 000 美元奖金, 该奖分两期支付——现在支付 19 000 美元以及从现在起一年后再支付 19 000 美元. 一个朋友付给你 36 000 美元以交换你的两期彩票付款. 除了接受你朋友的报价外, 你还可以申请一笔一年期的贷款, 每年的年复利利率为 8.25%. 该贷款在当年年底一次性支付 19 000 美元 (你的彩票第二次兑现的钱) 而还清. 你朋友的报价和该贷款哪个更好?

34. 你在考虑是买还是租一台价值为 12 000 美元的机器. 加在机器上的税一年是 580 美元, 两年是 464 美元, 三年是 290 美元. 如果你买这台机器, 你希望三年后可以卖到 5 000 美元. 如果你租这台机器三年, 你就要首付 2650 美元, 然后在接下来的三年每年年底支付 2650 美元. 租赁公司会支付税款. 每年的年复利利率是 7.75%. 你应该买还是租这台机器? 说明理由.

35. 你在买提供保用一年保单的汽车, 并且在考虑是否购买 375 美元的延期保单. 延期保单涵盖一年期保单期满后紧接着的两年. 你估计延期保单包含的年消费, 在延期的第一年年底是 150 美元而第二年年底是 250 美元. 每年的年复利利率是 5%. 你应该买这个延

期保单吗? 说明理由.

36. 对三年的旧洗碟机你有更新服务合同的选择权. 新的服务合同是三年 200 美元. 每年的年复利利率是 7.25%, 并且你估计, 如果不买新的服务合同, 那么第一年年底的修理费是 50 美元, 第二年年底的修理费是 100 美元, 第三年年底的修理费是 150 美元. 你应该买这个新的服务合同吗? 说明理由.

1.8 由旧函数得到的新函数

我们已经学习了线性函数、指数函数和对数函数. 本节学习如何通过对函数复合、对函数伸缩以及已经了解的对函数移位创造新的函数.

1.8.1 复合函数

水滴落在擦手纸上. 圆形潮湿斑点的面积 A 是其半径 r 的函数, r 是时间 t 的函数. 我们知道 $A=f(r)=\pi r^2$; 假设 $r=g(t)=t+1$. 通过代换, 我们可以将 A 表示成 t 的函数:

$$A=f(g(t))=\pi(t+1)^2.$$

函数 $f(g(t))$ 是 "函数的函数", 或者复合函数, 在其中有一个内函数和一个外函数. 为了求 $f(g(2))$, 我们首先加上 $1(g(2)=2+1=3)$ 然后平方再乘以 π. 我们有

$$f(g(2))=\pi(2+1)^2=\pi 3^2=9\pi.$$

↖ 第一次计算 ↖ 第二次计算

内函数是 $t+1$ 而外函数是平方再乘以 π. 一般地, 内函数表示第一次所做的计算, 而外函数表示第二次所做的计算.

例 1 如果 $f(t)=t^2$ 并且 $g(t)=t+2$, 求

(a) $f(t+1)$ (b) $f(t)+3$ (c) $f(t+h)$ (d) $f(g(t))$ (e) $g(f(t))$

解 (a) 因为 $t+1$ 是内函数, 所以 $f(t+1)=(t+1)^2$.

(b) 这里 3 加到 $f(t)$ 上, 所以 $f(t)+3=t^2+3$.

(c) 因为 $t+h$ 是内函数, 所以 $f(t+h)=(t+h)^2$.

(d) 因为 $g(t)=t+2$, 将 $t+2$ 代入 f 给出 $f(g(t))=f(t+2)=(t+2)^2$.

(e) 因为 $f(t)=t^2$, 将 t^2 代入 g 给出 $g(f(t))=g(t^2)=t^2+2$. □

例 2 如果 $f(x)=e^x$, $g(x)=5x+1$, 求 (a)$f(g(x))$ (b)$g(f(x))$

解 (a) 将 $g(x)=5x+1$ 代入 f 给出 $f(g(x))=f(5x+1)=e^{5x+1}$.

(b) 将 $f(x)=e^x$ 代入 g 给出 $g(f(x))=g(e^x)=5e^x+1$. □

例 3 利用下列表格求 $g(f(0))$, $f(g(0))$, $f(g(1))$ 和 $g(f(1))$.

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	1	-1	-3
$g(x)$	0	2	4	6

解 为了求 $g(f(0))$, 我们首先根据表格求出 $f(0)=3$. 那么我们有 $g(f(0))=g(3)=6$. 对于 $f(g(0))$, 我们首先必须求 $g(0)$. 因为 $g(0)=0$, 所以我们有 $f(g(0))=f(0)=3$. 同理可得 $f(g(1))=f(2)=-1$ 并且 $g(f(1))=g(1)=2$. □

我们可以通过一个新的变量 u 表示内函数的值来表示复合函数. 例如

$$y=(t+1)^4 \text{ 和 } y=u^4 \text{ 其中 } u=t+1 \text{ 相同.}$$

也可以对 u 用其他的表示, 如 $u=(t+1)^2$, 这时 $y=u^2$.

例 4 对内函数用新的变量 u 表示, 将下列每个函数表示成复合函数.

(a) $y=\ln(3t)$ (b) $w=5(2r+3)^2$ (c) $P=\mathrm{e}^{-0.03t}$

解 (a) 我们取内函数为 $3t$, 所以 $y=\ln u$ 其中 $u=3t$.

(b) 我们取内函数为 $2r+3$, 所以 $w=5u^2$ 其中 $u=2r+3$.

(c) 我们取内函数为 $-0.03t$, 所以 $P=\mathrm{e}^u$ 其中 $u=-0.03t$. □

1.8.2 图形的伸缩

图 1-70 是 $y=f(x)$ 的图形. $y=3f(x)$ 的图形像什么? 在函数 $y=3f(x)$ 中, 因子 3 把每个 $f(x)$ 的值拉长了 3 倍. $y=-2f(x)$ 的图形像什么? 在函数 $y=-2f(x)$ 中, 因子 -2 把每个 $f(x)$ 的值拉长了 2 倍并且将它关于 x 轴进行反射. 参见图 1-71.

> 用一个常数 c 乘以一个函数, 能将它的图形竖直地拉长 (如果 $c>1$) 或者缩短 (如果 $0<c<1$). 负号 (如果 $c<0$) 将图形关于 x 轴进行反射, 再加上缩短或者拉长.

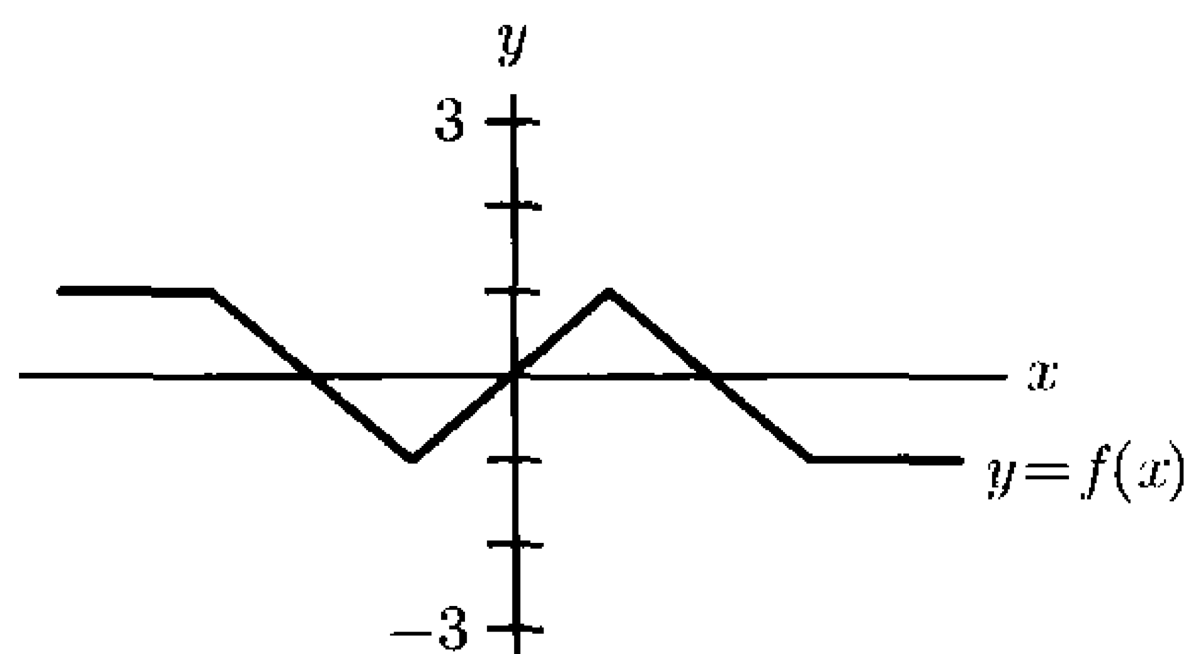


图 1-70 $f(x)$ 的图形

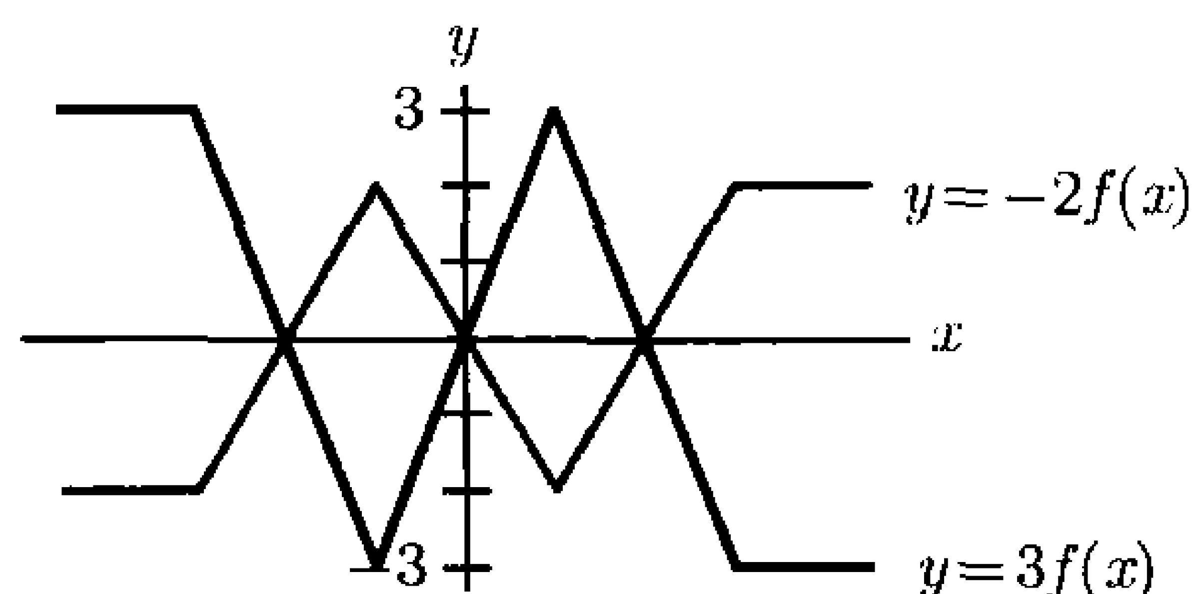


图 1-71 函数 $f(x)$ 的倍数

1.8.3 图形的移位

考虑函数 $y=x^2+4$. 该函数的 y 坐标正好比函数 $y=x^2$ 的 y 坐标大 4 个单位. 所以 $y=x^2+4$ 的图形可以通过在 $y=x^2$ 图形上每个点的 y 坐标加 4 而得到;

也就是, 将 $y=x^2$ 的图形向上移动 4 个单位. (参见图 1-72)

图形也可以向左或向右移位. 在图 1-73 中, 我们看到 $y=(x-2)^2$ 的图形是 $y=x^2$ 的图形向右移动 2 个单位所得到的图形. 一般地,

- $y=f(x)+k$ 的图形是 $y=f(x)$ 的图形向上 (如果 k 是负的就向下) 移动 k 个单位所得到的图形.
- $y=f(x-k)$ 的图形是 $y=f(x)$ 的图形向右 (如果 k 是负的就向左) 移动 k 个单位所得到的图形.

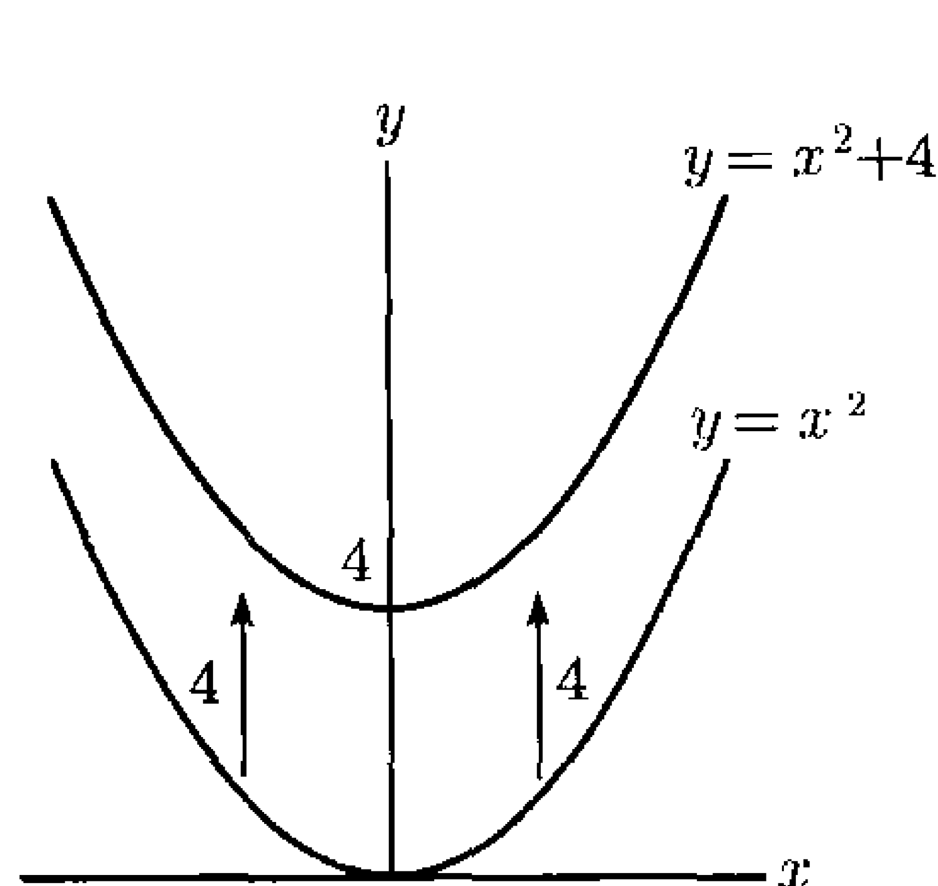


图 1-72 竖直移位: $y=x^2$ 和 $y=x^2+4$ 的图形

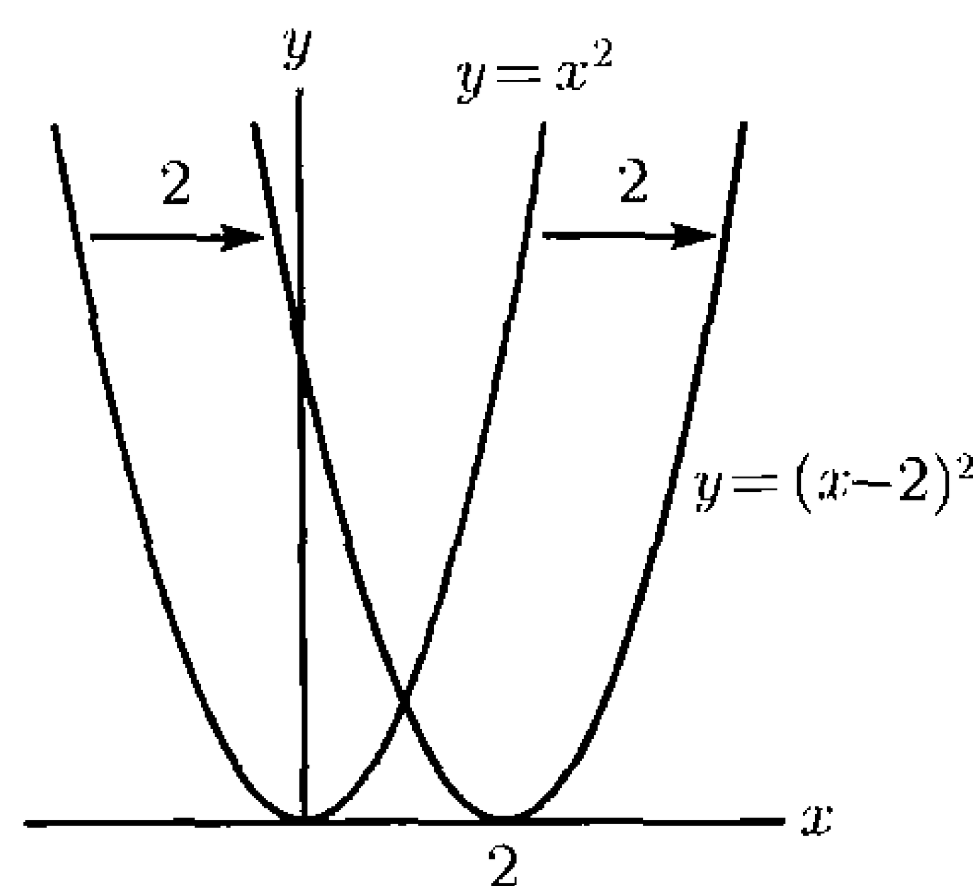


图 1-73 水平移位: $y=x^2$ 和 $y=(x-2)^2$ 的图形

例 5 (a) 某公司的成本函数 $C(q)$ 如图 1-74 所示. 固定成本增加 1000 美元. 作出新的成本函数略图.

(b) 某产品的供给曲线 S 如图 1-75 所示. 一家新工厂开业无论什么价格都生产 100 个单位的产品. 作出新的供给曲线略图.

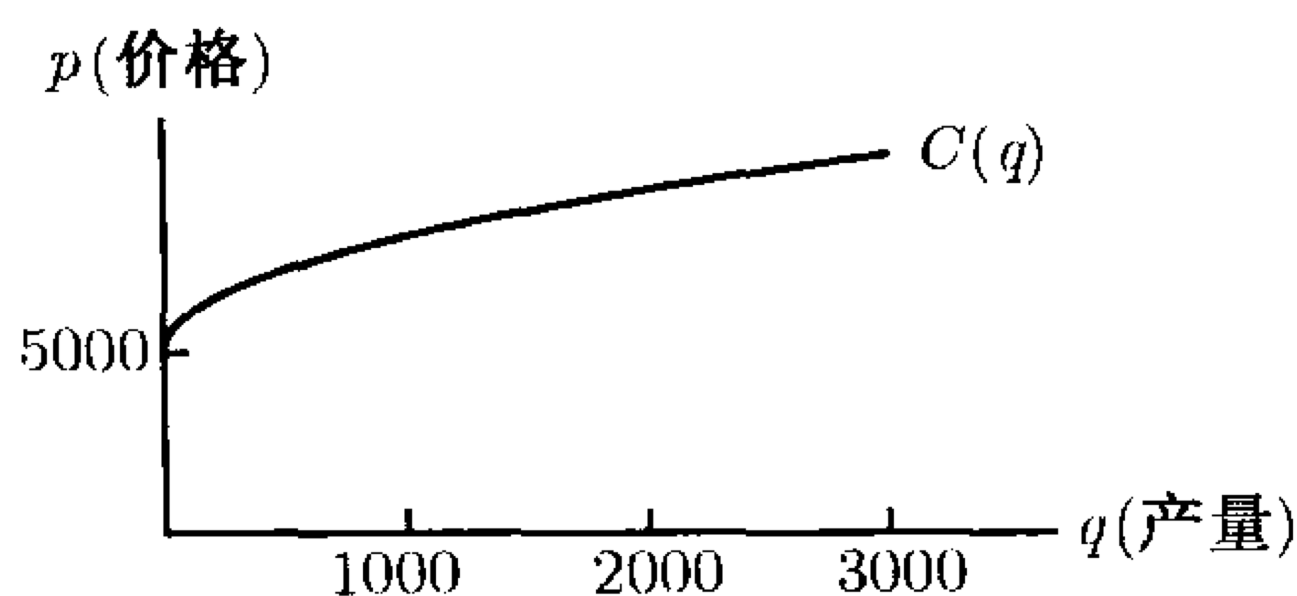


图 1-74 成本函数

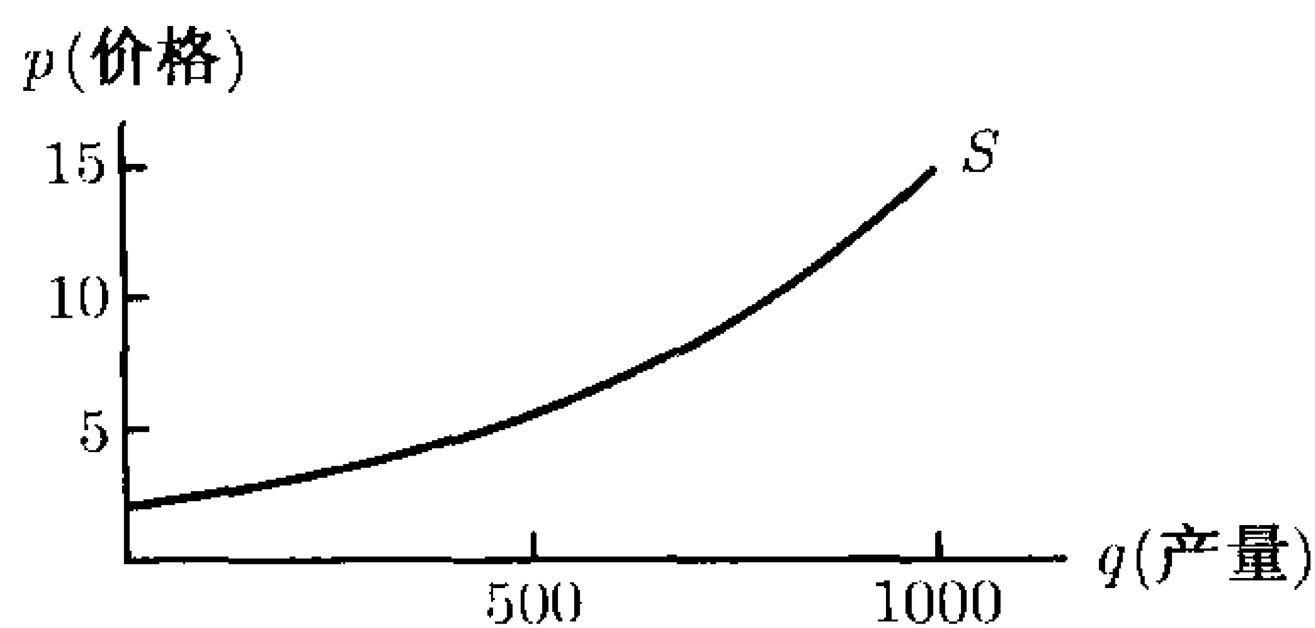


图 1-75 供应函数

解 (a) 对任何产量, 新的成本比旧的成本多 1000 美元. 新的成本函数是 $C(q)+1000$, 它的图形是 $C(q)$ 的图形向上移动 1000 个单位所得到的图形 (参见图 1-76.)

(b) 为了了解新工厂的影响, 我们来看一个例子. 按照 10 美元的价格, 目前将近生产 800 个单位. 有了新工厂, 这个数量增加 100 个单位, 所以新的产量是 900 个单位. 对每个价格, 产量都增加 100, 所以新的供给曲线是 S 向右水平移动 100 个单位所得到的曲线. (参见图 1-77.)

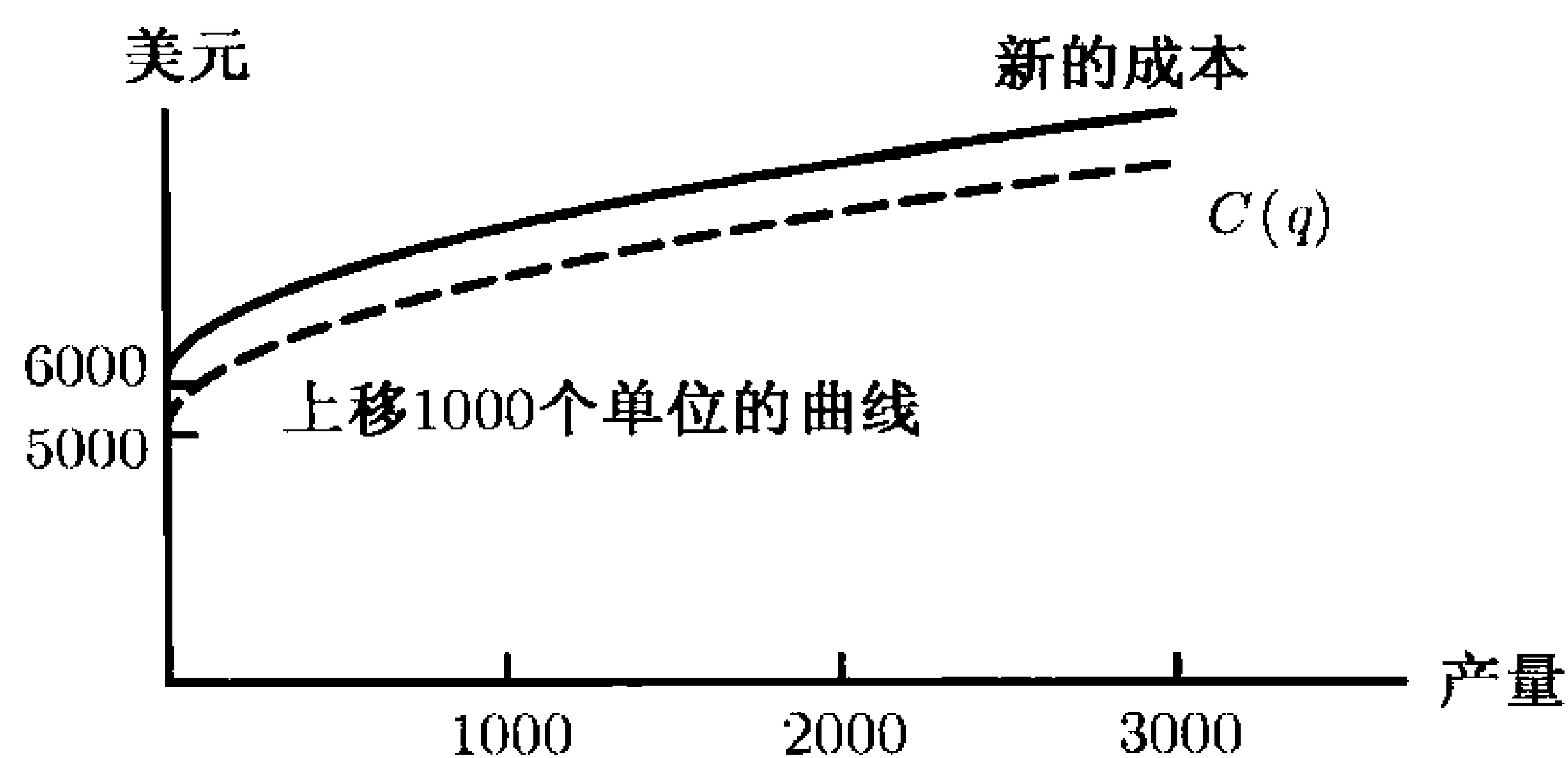


图 1-76 新的成本函数 (虚线是原曲线)

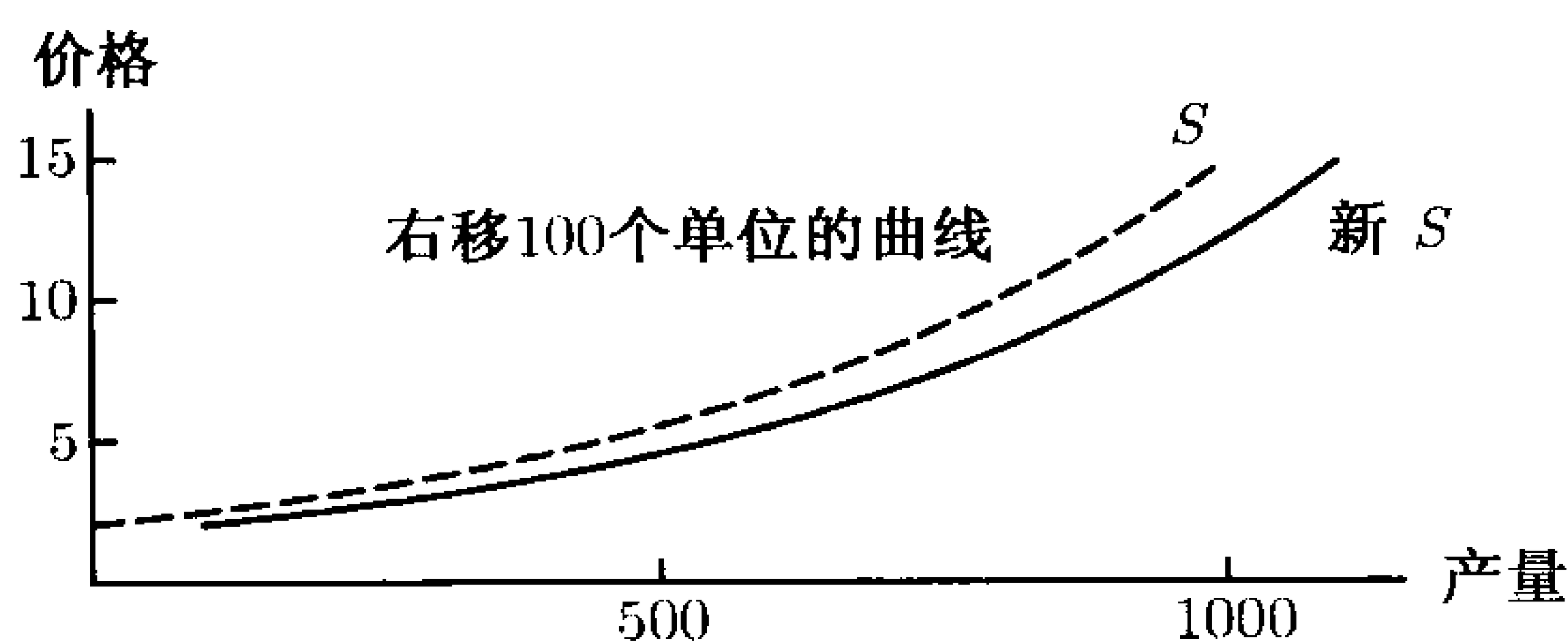


图 1-77 新的供给曲线 (虚线是原曲线)

□

习题

1. $g(x)=x^2+2x+3$, 求并化简:

 (a) $g(2+h)$ **(b)** $g(2)$ **(c)** $g(2+h)-g(2)$

2. 若 $f(x)=x^2+1$, 求并化简:

 (a) $f(t+1)$ **(b)** $f(t^2+1)$ **(c)** $f(2)$

 (d) $2f(t)$ **(e)** $[f(t)]^2+1$

对习题 3~6 中的函数 f 和 g, 求

 (a) $f(g(1))$ **(b)** $g(f(1))$ **(c)** $f(g(x))$

 (d) $g(f(x))$ **(e)** $f(t)g(t)$

3. $f(x)=x^2, g(x)=x+1$

4. $f(x)=\sqrt{x+4}, g(x)=x^2$

5. $f(x)=\mathrm{e}^x, g(x)=x^2$

6. $f(x)=1/x, g(x)=3x+4$

7. 设 $f(x)=x^2$, $g(x)=3x-1$. 求下列值:

 (a) $f(2)+g(2)$ **(b)** $f(2)\cdot g(2)$

 (c) $f(g(2))$ **(d)** $g(f(2))$

在习题 8~10 中, 求下列函数:

 (a) $f(g(x))$ **(b)** $g(f(x))$ **(c)** $f(f(x))$

8. $f(x)=2x^2$ 而 $g(x)=x+3$

9. $f(x)=2x+3$ 而 $g(x)=5x^2$

10. $f(x)=x^2+1$ 而 $g(x)=\ln x$

11. 对内函数用新的变量 u 表示, 将下列每个函数表示成复合函数.

(a) $y = 2^{3x-1}$ (b) $P = \sqrt{5t^2 + 10}$ (c) $w = 2\ln(3r + 4)$

12. 对内函数用新的变量 u 表示, 将下列每个函数表示成复合函数.

(a) $y = (5t^2 - 2)^6$ (b) $P = 12e^{-0.6t}$ (c) $C = 12\ln(q^3 + 1)$

在习题 13~16 中利用图 1-78 作函数图形.

13. $n(t) = m(t) + 2$

14. $p(t) = m(t - 1)$

15. $k(t) = m(t + 1.5)$

16. $w(t) = m(t - 0.5) - 2.5$

利用图 1-79 作出习题 17~22 中函数的图形.

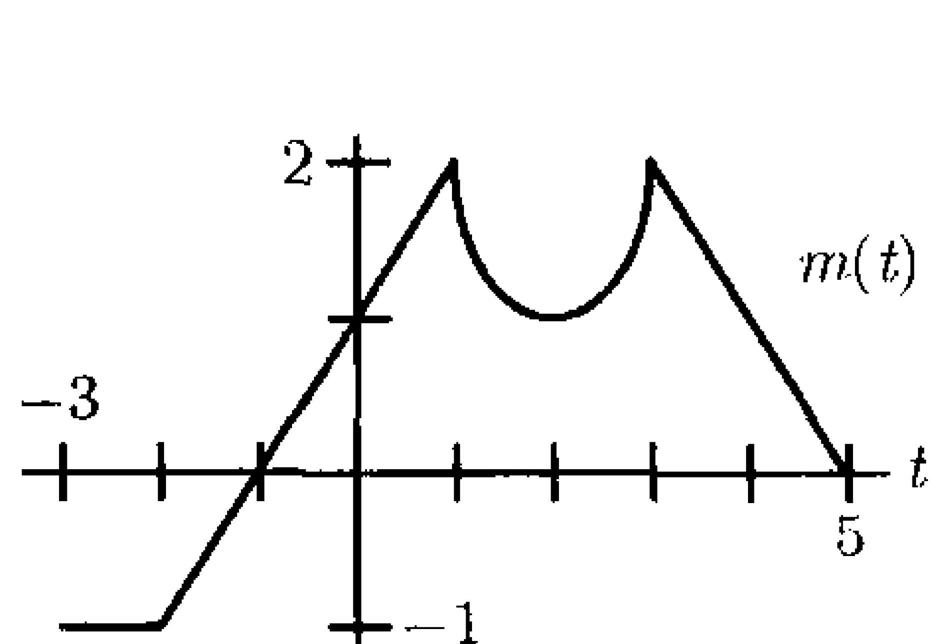


图 1-78

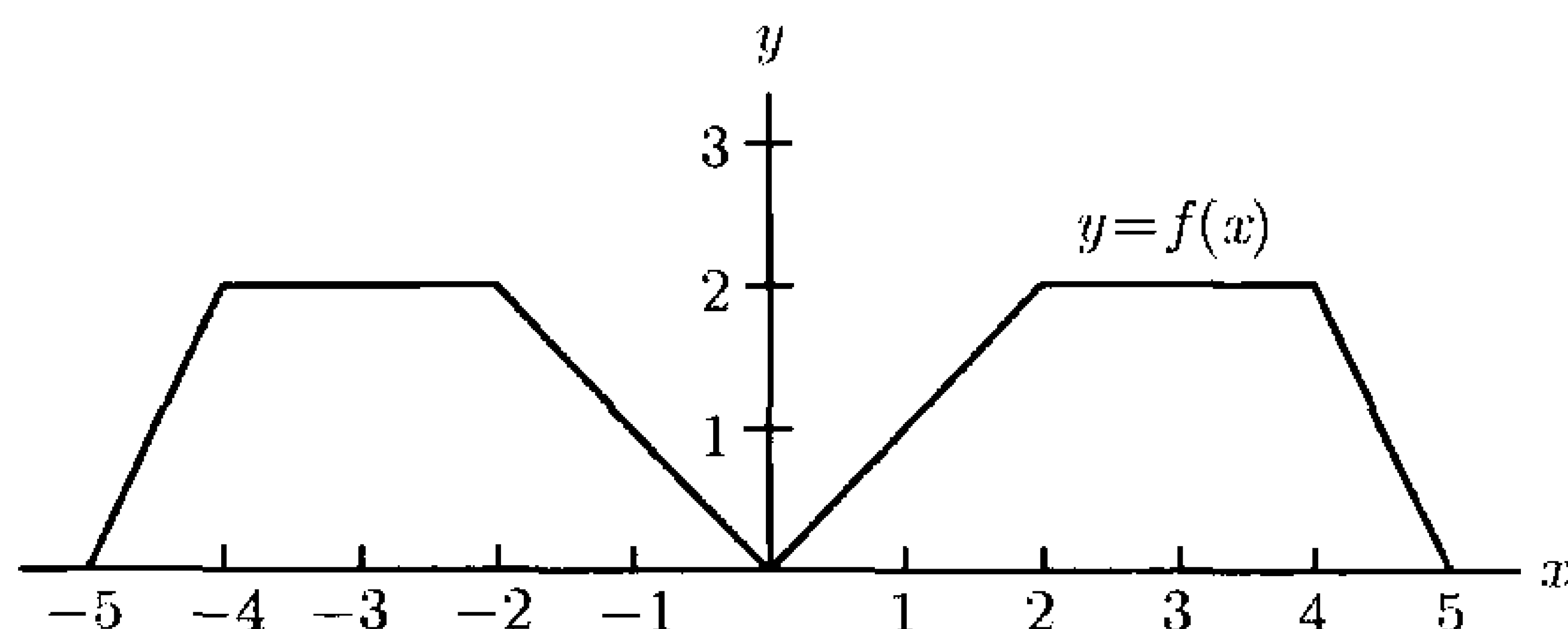


图 1-79

17. $y = f(x) + 2$ **18.** $y = 2f(x)$

19. $y = f(x - 1)$ **20.** $y = -3f(x)$

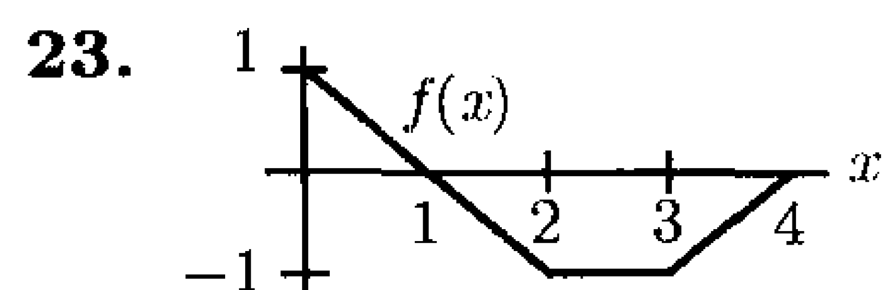
21. $y = 2f(x) - 1$ **22.** $y = 2 - f(x)$

对习题 23~26 中的函数 $f(x)$, 作出如下函数的图形:

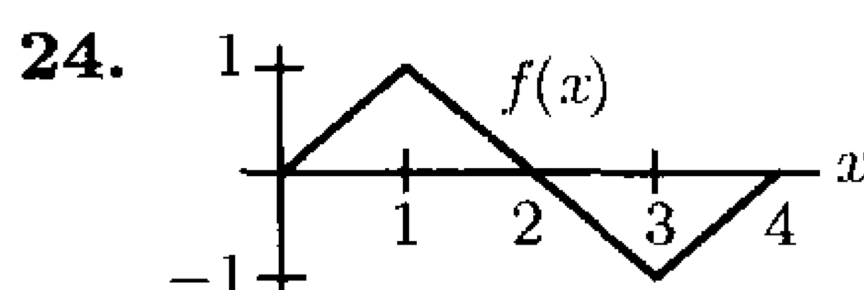
(a) $y = f(x) + 2$ (b) $y = f(x - 1)$

(c) $y = 3f(x)$ (d) $y = -f(x)$

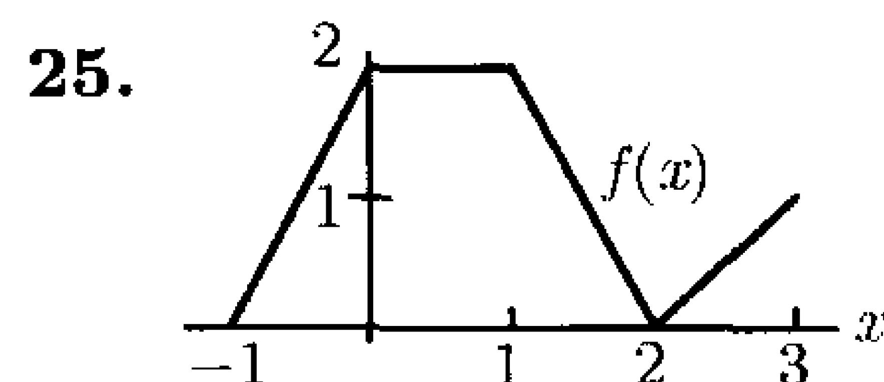
23.



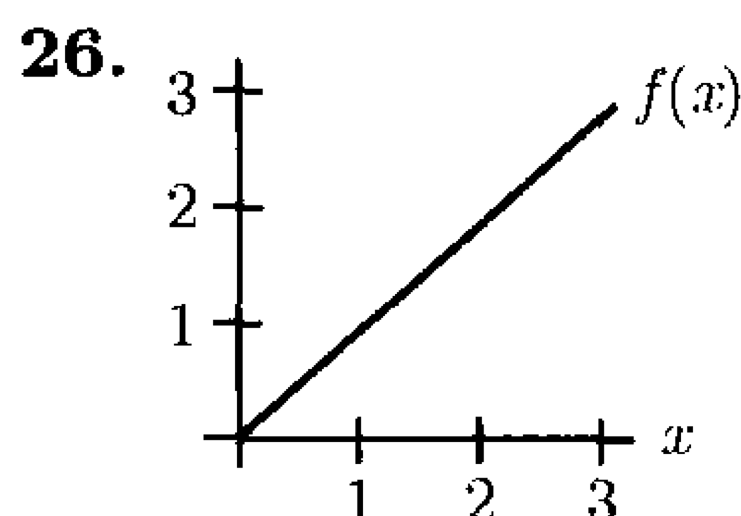
24.



25.



26.



在习题 27~29 中利用图 1-80 作函数图形.

27. $5f(x)$ **28.** $f(x + 5)$ **29.** $f(x) + 5$

30. 利用下表求:

(a) $f(g(0))$ (b) $f(g(1))$ (c) $f(g(2))$

(d) $g(f(2))$ (e) $g(f(3))$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	10	6	3	4	7	11
$g(x)$	2	3	5	8	12	15

31. 利用表 1-28 制作下列每个函数的数值表.

(a) $f(x)+3$ (b) $f(x-2)$ (c) $5g(x)$

(d) $-f(x)+2$ (e) $g(x-3)$ (f) $f(x)+g(x)$

对习题 32~34, 利用图 1-81 中的图形估计:

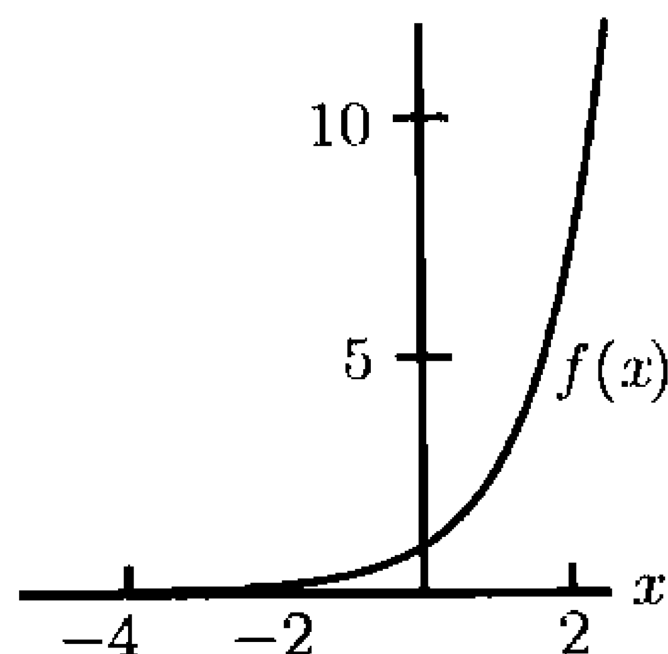
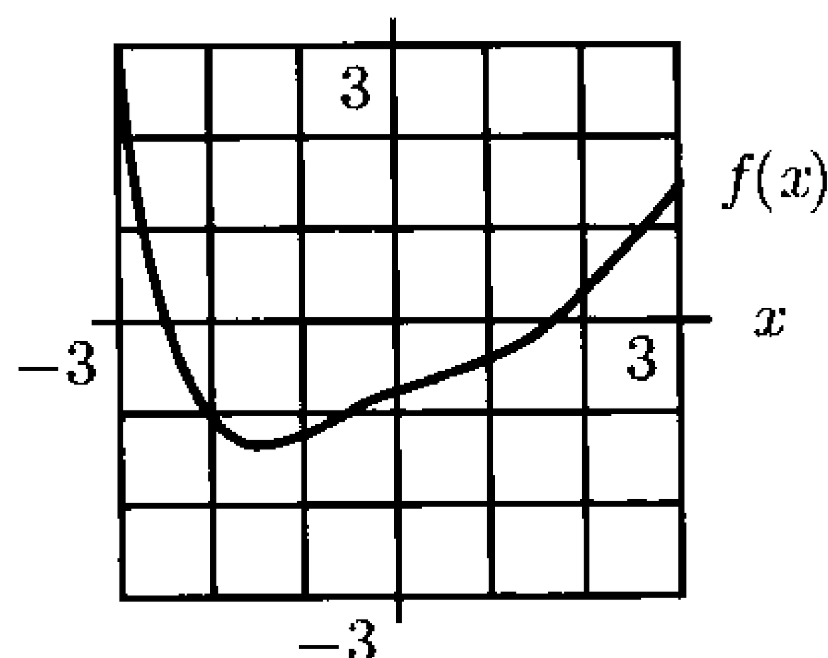


图 1-80



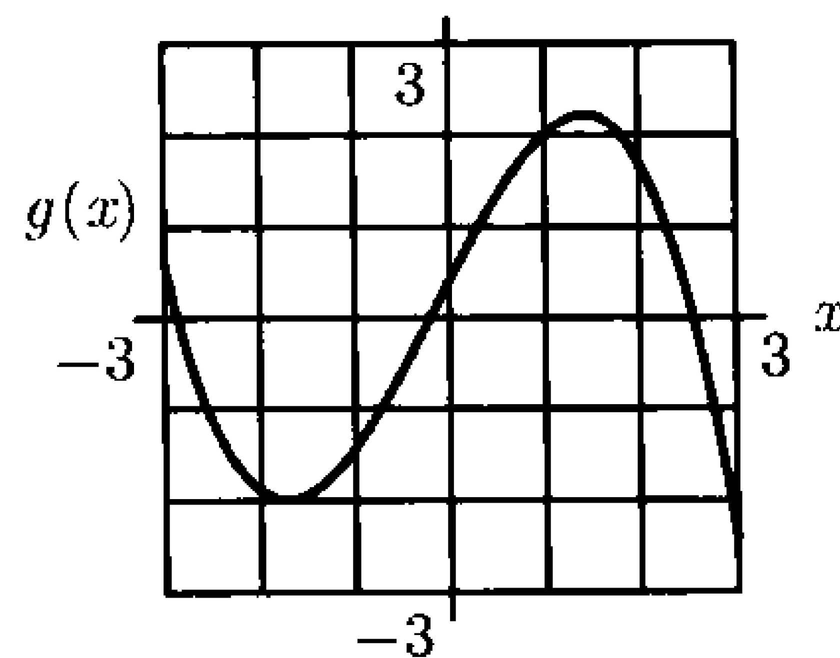


图 1-81

32. $f(g(1))$ **33.** $g(f(2))$ **34.** $f(f(1))$

35. (a) 写出一个图形的方程, 该图形是由 $y=x^2$ 的图形在竖直方向拉长 2 倍再竖直向上移动 1 个单位所得到的图形. 作出它的略图.

(b) 如果 (a) 中的变换 (拉长和移动) 次序互换那么方程是什么?

(c) 两个图形相同吗? 说明颠倒变换次序的影响.

36. 利用下表制作 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 的数值表.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	2	3	2	1	0
$g(x)$	3	2	2	0	−2	−2	−3

37. 一个将湖泊中的污染减少到法定限度的计划被采纳. 清理后 t 周湖泊中污染物含量 Q 以函数 $Q=f(t)$ 作为模型, 其中 $f(t)=A+Be^{Ct}$.

(a) A, B, C 的符号是什么?

(b) 湖泊中初始污染物含量是多少?

(c) 湖泊中污染物含量的法定限度是多少?

1.9 比例、幂函数和多项式

1.9.1 比例

当一个量与另一个量**成比例**时就出现了一个普通的函数关系. 例如, 一磅苹果 1.40 美元, 我们说你支付的价钱 p 美元与你所买的重量 w 磅是成比例的, 因为

$$p=f(w)=1.40w.$$

另一个例子, 圆的面积 A 与半径 r 的平方成比例:

$$A = f(r) = \pi r^2.$$

如果存在一个非零的常数 k 使得

$$y = kx.$$

那么我们说 y 与 x (直接)**成比例**. 这个 k 叫做比例常数.

如果一个量与另一个量的倒数成比例, 我们也称这个量与另一个量成*反比例*. 例如, 你走 50mile 路程所用的速度 v 与所需要的时间 t 成反比例, 因为 v 与 $1/v$ 成比例:

$$v = 50\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{50}{t}.$$

注意, 如果 y 与 x 成正比例, 那么当一个变量的量值增加 (减少) 时另一个变量的量值也增加 (减少). 然而, 如果 y 与 x 成反比例, 那么当一个变量的量值减少时另一个变量的量值增加.

例 1 哺乳动物心脏的质量与它的身体质量成比例[1].

(a) 写出心脏质量 H 作为身体质量 B 的函数公式.

(b) 身体质量为 70kg 的人其心脏质量为 0.42kg. 用这个信息求比例常数.

(c) 估计身体质量为 650kg 的马的心脏质量.

解 (a) 因为 H 与 B 成比例, 所以对某个常数 k, 我们有

$$H = kB.$$

(b) 我们利用已知事实, 当 $B = 70$ 时 $H = 0.42$, 求解 k:

$$H = kB$$
$$0.42 = k(70)$$
$$k = \frac{0.42}{70} = 0.006.$$

(c) 因为 $k = 0.006$, 所以我们有 $H = 0.006B$, 从而马的心脏质量为

$$H = 0.006(650) = 3.9 \text{ kg}.$$

□

例 2 钟摆的周期 T 是钟摆完整地完成一次摆动所需要的时间数量. 对于较小的摆动, 其周期 T 近似地与钟摆长度 l 的平方根成比例. 所以

$$T = k\sqrt{l}, \text{ 其中 } k \text{ 是常数}.$$

注意到 T 与 l 不是直接成比例, 而是与 $\sqrt{l}$ 成比例. □

例 3 物体的重量 w 与它到地球中心的距离 r 成反比. 所以, 对某个常数 k,

$$w = \frac{k}{r^2}.$$

这里 w 与 r 不成反比, 而与 r^2 成反比. □

---

[1] K. Schmidt-Nielson, 《尺度——动物的大小为什么如此重要》(剑桥: 剑桥大学出版社, 1984).

1.9.2 幂函数

在前面的每个例子中，一个量与另一个量的幂成比例. 我们给出如下定义.

> 如果 $Q(x)$ 与 x 的常数幂成比例，那么我们说 $Q(x)$ 是 x 的一个**幂函数**. 假如 k 是比例常数，而且 p 是那个幂，那么
> $$Q(x) = k \cdot x^p.$$

例如，$H = 0.006B$ 是 $p = 1$ 的幂函数. 函数 $T = k\sqrt{l} = kl^{1/2}$ 是 $p = 1/2$ 的幂函数，而函数 $w = k/r^2 = kr^{-2}$ 是 $p = -2$ 的幂函数.

例 4 下面函数哪些是幂函数？对这些幂函数，将它们写成 $y = kx^p$ 的形式，并指出它们的系数 k 和幂指数 p.

(a) $y = \dfrac{5}{x^3}$　　(b) $y = \dfrac{2}{3x}$　　(c) $y = \dfrac{5x^2}{2}$

(d) $y = 5 \cdot 2^x$　　(e) $y = 3\sqrt{x}$　　(f) $y = (3x^2)^3$

解 (a) 因为 $y = 5x^{-3}$，所以这是一个 $k = 5$ 并且 $p = -3$ 的幂函数.

(b) 因为 $y = (2/3)x^{-1}$，所以这是一个 $k = 2/3$ 并且 $p = -1$ 的幂函数.

(c) 因为 $y = (5/2)x^2$，所以这是一个 $k = 5/2$ 并且 $p = 2$ 的幂函数.

(d) 这不是幂函数. 它是指数函数.

(e) 因为 $y = 3x^{1/2}$，所以这是一个 $k = 3$ 并且 $p = 1/2$ 的幂函数.

(f) 因为 $y = 3^3 \cdot (x^2)^3 = 27x^6$，所以这是一个 $k = 27$ 并且 $p = 6$ 的幂函数. □

幂函数的图形

$y = x^2$ 的图形如图 1-82 所示. 对于负的 x 它是递减的，而对于正的 x 它是递增的. 注意，对所有的 x，它是向上弯曲的，也就是上凹的. $y = x^3$ 的图形如图 1-83 所示. 对于负的 x 它是向下弯曲的，也就是下凹的；而对于正的 x，它是向上弯曲的，也就是上凹的. $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ 的图形如图 1-84 所示. 注意到，它的图形是递增而且下凹的.

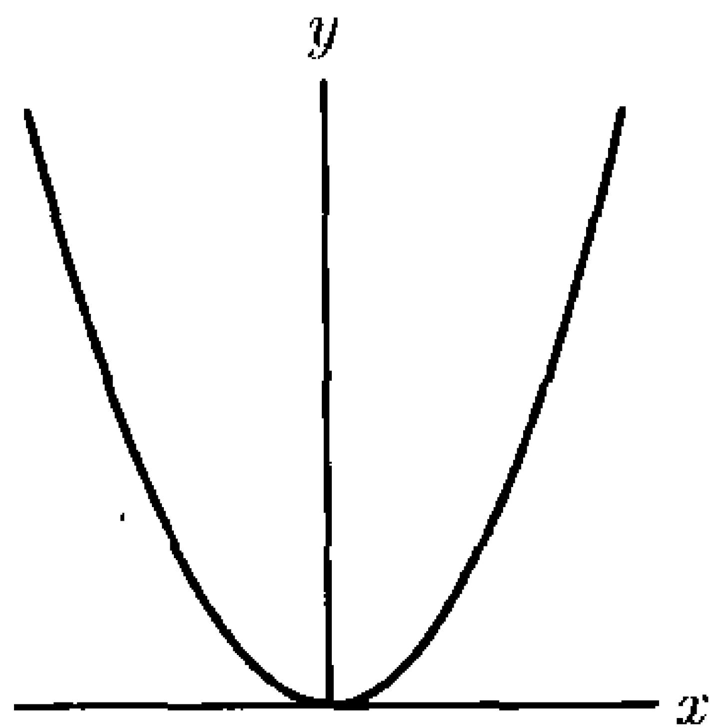


图 1-82　$y = x^2$ 的图形

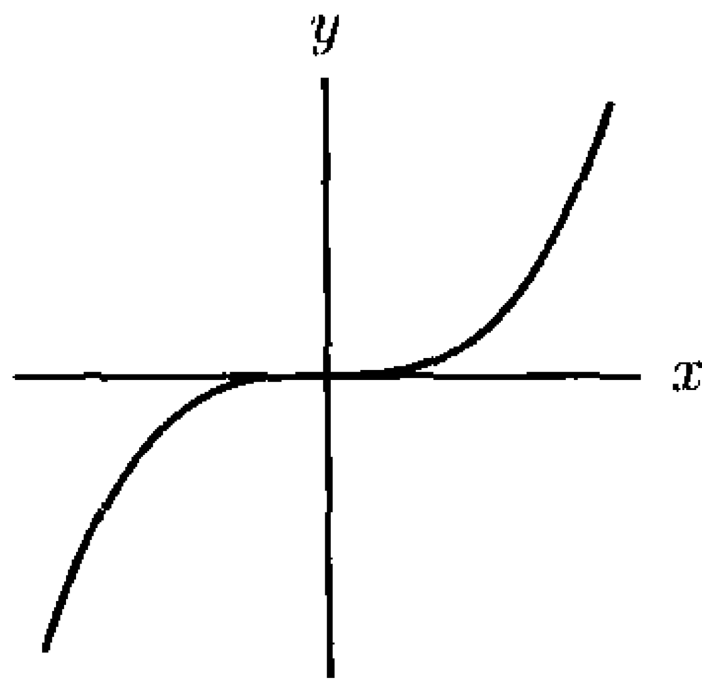


图 1-83　$y = x^3$ 的图形



图 1-84　$y = x^{1/2}$ 的图形

例 5 如果 N 是在一个岛屿上发现的物种平均数而 A 是该岛屿的面积, 那么观察显示[①]N 近似地与 A 的立方根成比例. 写出 N 作为 A 的函数公式并描述该函数图形的形状.

解 对某个正的常数 k, 我们有

$$N = k\sqrt[3]{A} = kA^{1/3}.$$

它说明 k 依赖于所发现的岛屿在世界上的区域. N 关于 A(对于 $A > 0$) 的图形类似于图 1-84 中的图形. 它是递增而且下凹的. 因此, 岛屿越大岛上的物种越多 (和我们期望的一样), 但是当岛屿再大时增加得就慢了. □

函数 $y = x^0 = 1$ 的图形是一条水平直线. 对于负数幂, 改写成

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ 和 } y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

就可以更清楚地看出, 当 $x > 0$ 递增时分母递增而函数值递减. $y = x^{-1}$ 和 $y = x^{-2}$ 的图形都是以 x 轴和 y 轴为渐近线. (参见图 1-85)

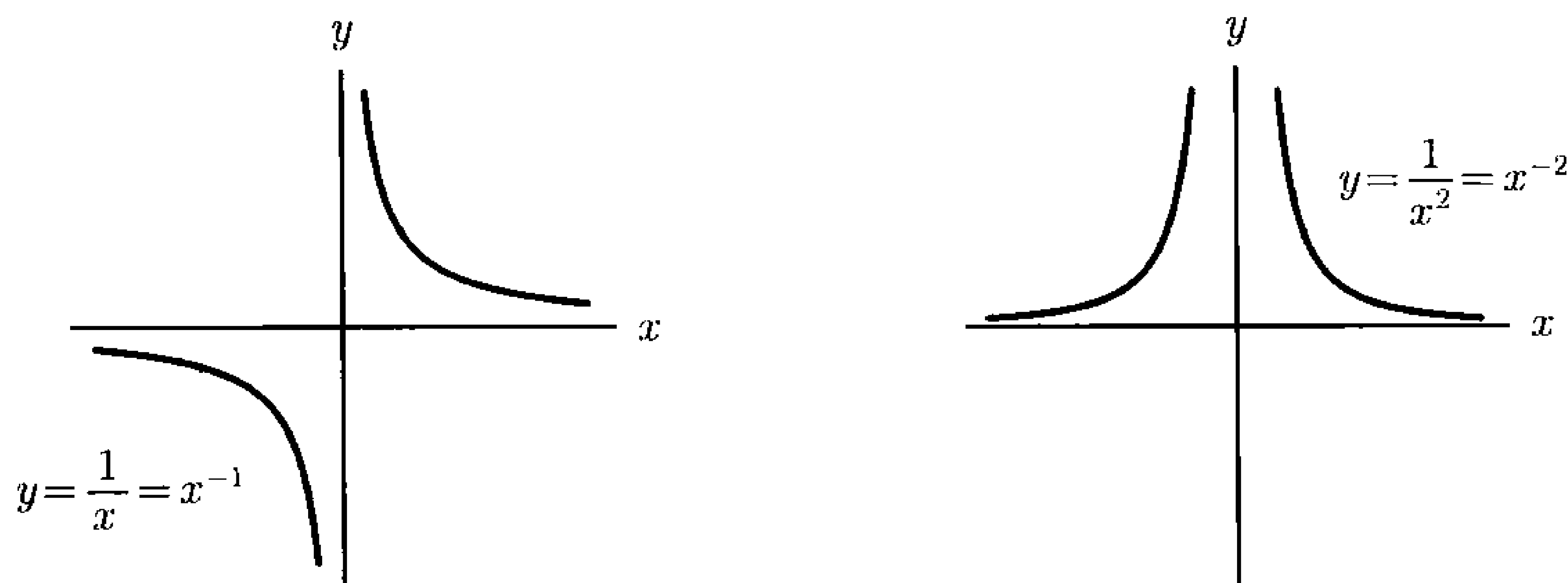


图 1-85 x 的负幂的图形

1.9.3 多项式

具有非负整数幂的幂函数之和叫做*多项式*, 它们是形如

$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的函数. 这里 n 是非负整数, 叫做多项式的次数, 而 a_n 是非零数叫做*首项系数*. 我们称 $a_n x^n$ 为*首项*. 如果 $n = 2$, 那么相应的多项式叫做二次的; 如果 $n = 3$, 相应的多项式就叫做三次的.

多项式的图形形状由它的次数决定. 参见图 1-86. 二次多项式的图形是一条抛物线. 如果它的首项系数为正那么它开口向上 (如图 1-86), 如果它的首项系数为负那么它开口向下. 三次多项式可以有 $y = x^3$ 的图形形状, 或者有如图 1-86 所示的形状, 或者是这些图形关于 x 轴的反射.

---

① 《科学美国人》, 第 112 页 (1989 年 9 月).

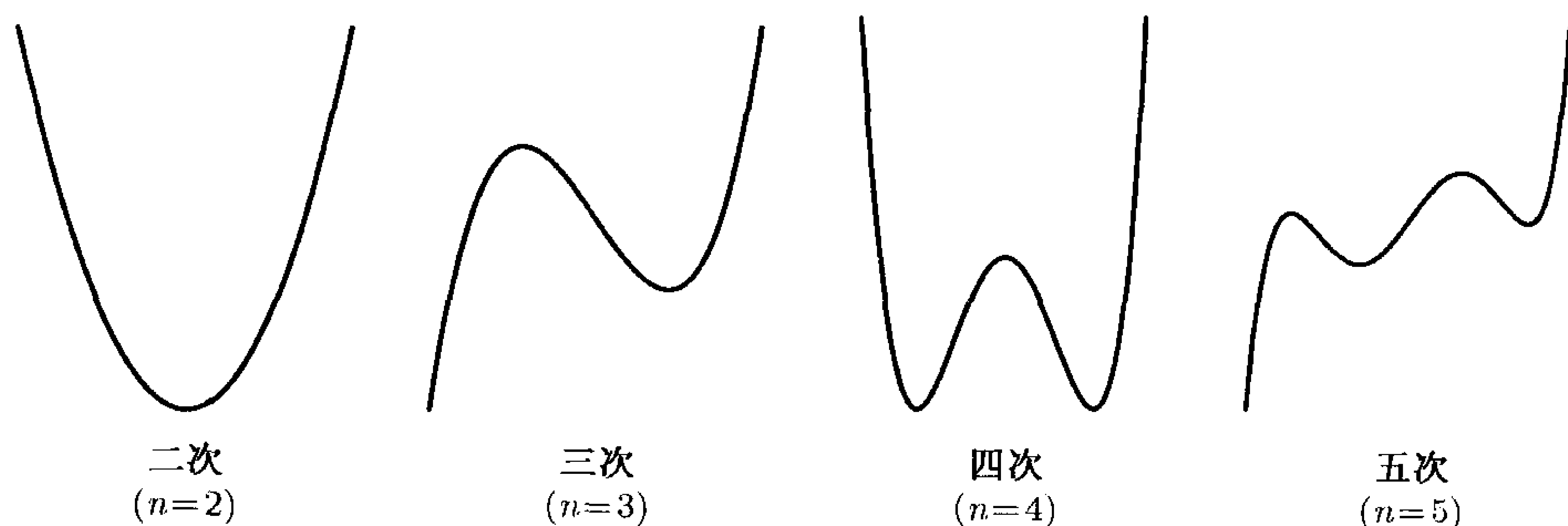


图 1-86 n 次多项式的典型图形

在图 1-86 中注意到二次的图形 "翻转" 一次, 三次 "翻转" 两次, 而四次 "翻转" 三次. 一个 n 次多项式至多 "翻转" $n-1$ 次 (其中 n 是正整数), 但是也许转的少一些.

例 6 公司发现如果门票价格是每人 50 美元, 那么出席音乐会的平均人数为 75. 价格为每人 35 美元, 那么出席的平均人数为 120.

(a) 假设需求曲线是直线. 写出需求量 q 作为价格 p 的函数公式.

(b) 用 (a) 的答案写出收益 R 作为价格 p 的函数公式.

(c) 用收益函数的图形确定收取的价格应该是多少才能获得最大收益.

解 (a) 两个点 $(p,q)=(50,75)$ 和 $(p,q)=(35,120)$ 在直线上. 直线的斜率为

$$m=\frac{120-75}{35-50}=\frac{45}{-15}=-3 \text{ 人/美元}.$$

为了求出直线的垂直截距, 我们利用斜率和其中的一个点:

$$75=b+(-3)(50)$$
$$225=b.$$

需求函数是 $q=225-3p$.

(b) 因为 $R=pq$ 并且 $q=225-3p$, 我们看到 $R=p(225-3p)=225p-3p^2$.

(c) 收益函数是如图 1-87 的二次多项式. 最大收益在 $p=37.5$ 的位置出现. 因此, 公司每人收取 37.50 美元才能使收益最大.

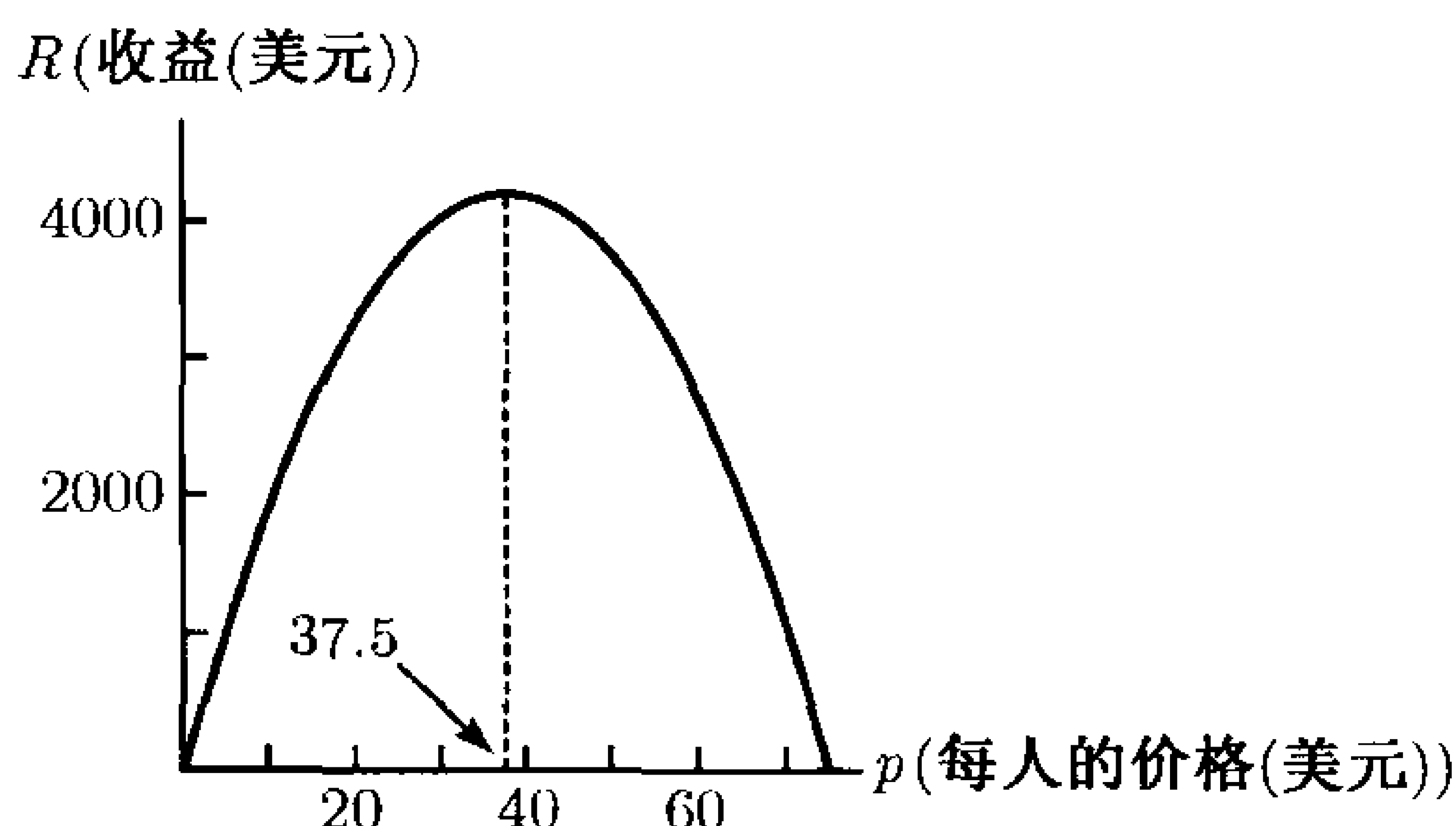


图 1-87 音乐会票销售的收益函数 □

例 7 利用计算器或者电脑, 作出 $y=x^4$ 和 $y=x^4-15x^2-15x$ 在 $-20\leqslant x\leqslant 20$ 和 $0\leqslant y\leqslant 200\,000$ 范围内的略图. 你观察到了什么?

解　从图 1-88 中我们看到两个图形似乎很难区分. 原因是每个多项式的首项 (x 最高次幂的项) 是一样的, 都是 x^4, 并且在这个视窗中, 对于大的 x 值, 首项比其他项更占优势.

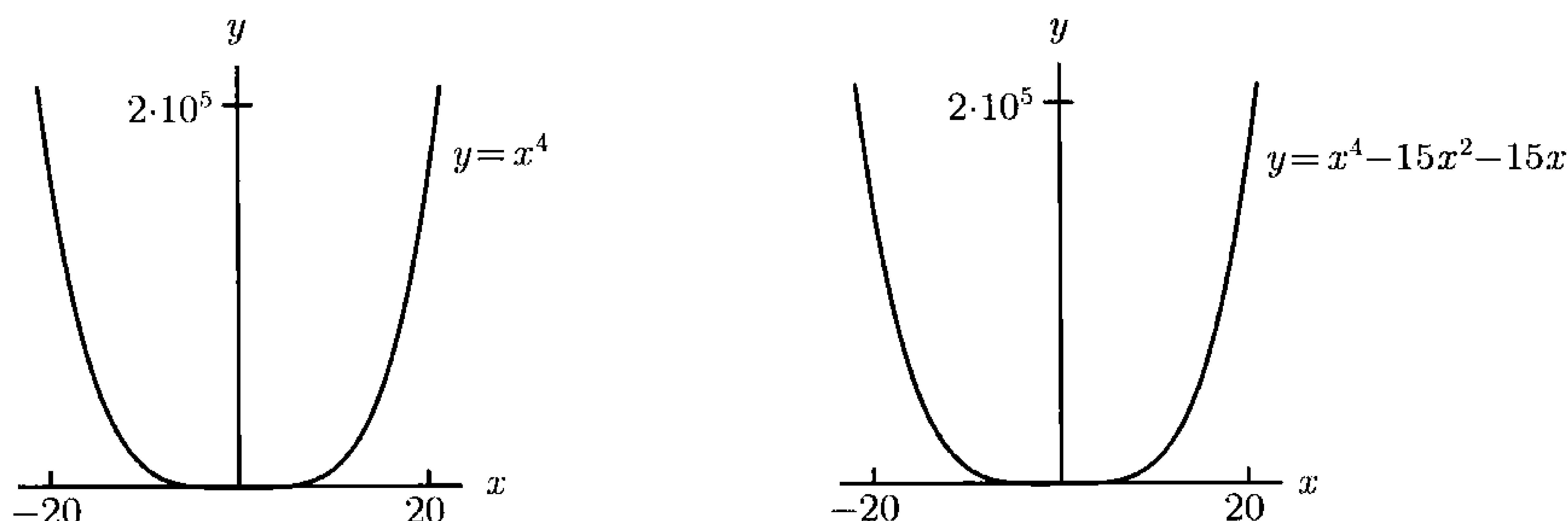


图 1-88　在大的视窗中 $y=x^4$ 和 $y=x^4-15x^2-15x$ 的图形看上去几乎难以区分

习题 41 将比较图 1-88 和这两个函数在较小的视窗中的图形. □

在例 7 中我们看到, 从一定的距离来看, 多项式 $y=x^4-15x^2-15x$ 和幂函数 $y=x^4$ 一样. 一般地, 如果在一个足够大的视窗中观看 n 次多项式

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的图形, 它与其首项表示的幂函数:

$$y=a_nx^n$$

的图形形状几乎相同.

习题

在习题 1~12 中, 确定所给函数是否为幂函数. 如果是幂函数, 将它写成 $y=kx^p$ 的形式并且给出 k 和 p 的值.

1. $y=5\sqrt{x}$　　**2.** $y=\dfrac{3}{x^2}$　　**3.** $y=2^x$

4. $y=\dfrac{3}{8x}$　　**5.** $y=(3x^5)^2$　　**6.** $y=\dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

7. $y=3\cdot 5^x$　　**8.** $y=\dfrac{2x^2}{10}$　　**9.** $y=\dfrac{8}{x}$

10. $y=(5x)^3$　　**11.** $y=3x^2+4$　　**12.** $y=\dfrac{x}{5}$

在习题 13~16 中, 写出表示函数的公式.

13. 横梁的强度 S 与它的厚度 h 的平方成比例.

14. 游动的海豚所消耗的能量 E 与海豚的速度 v 的立方成比例.

15. 在固定距离 d 的范围内旅行的速度 v 与旅行的时间 t 成反比.

16. 两个物体之间的引力 F 与它们之间距离 d 的平方成反比.

17. 一个元素的比热 s 是一克该元素其温度升高一摄氏度所需热量的卡路里数. 用下表确定 s 与元素的原子量 w 是成比例还是成反比例求出它的比例常数.

元素	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6.9	24.3	27.0	55.8	107.9	207.2	200.6
s	0.92	0.25	0.21	0.11	0.056	0.031	0.033

18. 下表表示函数 $p = f(t)$ 的值. p 与 t 可能成比例吗?

t	0	10	20	30	40	50
p	0	25	60	100	140	200

19. 哺乳动物的血液质量与它的身体质量成比例. 身体质量为 3000 kg 的犀牛血液质量是 150 kg. 求哺乳动物的血液质量作为它的身体质量的函数公式并估计身体质量为 70 kg 的人其血液质量.

20. 在加利福尼亚半岛沿海的一个岛屿上发现的蜥蜴种数 N 与岛屿面积 A 的四次方根成比例[①]. 写出 N 作为 A 的函数公式. 作出这个函数的图形. 它是递增的还是递减的? 这个图形是上凹的还是下凹的? 关于蜥蜴和岛屿面积这个函数的含义是什么?

21. 哺乳动物的表面积 S 满足方程 $S = kM^{2/3}$, 其中 M 是身体质量, 而比例常数 k 由哺乳动物的身体形状决定. 身体质量为 70kg 的人其表面积为 18 600 cm^2. 求人类的比例常数. 求身体质量为 60 kg 的人的表面积.

22. 生物学家估计某种体长的动物种数与体长的平方成反比[②]. 写出某种体长的动物种数 N 作为该长度 L 的函数公式. 体长长的种数多呢还是体长短的种数多呢? 说明理由.

23. 哺乳动物的循环时间 (即体内所有血液循环一次再回到心脏所需要的平均时间) 与哺乳动物身体质量的四次方根成比例.

(a) 写出用身体质量 B 表示的循环时间 T 的公式.

(b) 如果身体质量为 5230 kg 的大象其循环时间是 148 s, 求出比例常数.

(c) 身体质量为 70 kg 的人其循环时间是多少?

24. 异速生长学是研究身体不同部位在成长过程中的相对大小. 一种异速生长方程为: 鱼的重量与它的长度的立方成比例[③]. 在本题中, 你要验证这种异速生长的准确性. 下表显示出鲽鱼 (鱼的一种类型) 的重量 y(g) 与它的长度 x(cm) 之间的关系. 这个数据支持假设 (近似的)$y = kx^3$ 吗? 如果支持, 估计比例常数 k.

x	y	x	y	x	y
33.5	332	37.5	455	41.5	623
34.5	363	38.5	500	42.5	674
35.5	391	39.5	538	43.5	724
36.5	419	40.5	574		

25. DuBois 公式显示人的表面积 s(m^2) 与体重 w(kg) 和高度 h(cm) 之间的关系为

$$s = 0.01w^{0.25}h^{0.75}.$$

① Rosenzweig, M. L.,《物种在空间和时间中的多样性》, 第143页(剑桥: 剑桥大学出版社, 1995).

② 《美国新闻和世界报道》, 1997 年 8 月 18 日, 第 79 页.

③ 引自 R. J. H. Beverton 和 S. J. Holt 的文章 "关于捕鱼量的动态学",《渔业调查》, 第 II 辑, 19, 1957.

(a) 一个人体重为 65 kg、身高是 160 cm, 那么他的表面积是多少?

(b) 一个人的身高是 180 cm、表面积为 1.5 m^2, 那么他的体重是多少?

(c) 对体重固定为 70 kg 的人, 解出 h 作为 s 的函数. 化简你的答案.

26. 从全国房地产经纪人协会了解到①, 为了获得年利率为 9% 的三十年房屋贷款 A(千美元) 所必须的最小年总收入 m(千美元) 表示在下表中. 注意, 贷款额越大, 所必须的收入也越高.

A	50	75	100	150	200
m	17.242	25.863	34.484	51.726	68.968

当然, 不是每种按揭都以 9% 的利率提供资金的. 事实上, 除了微小的变动外, 按揭利率一般不是由各个银行确定的而是由整个经济确定的. 各种利率 r 下 100 000 美元房屋贷款所必须的最小年总收入 m(千美元) 表示在下表中. 注意, 在利率高的时候获得贷款要求有更高的收入.

(a) 贷款规模 A 与最小年总收入 m 成比例吗?

(b) 利率的百分数 r 与最小年总收入 m 成比例吗?

r	8	9	10	11	12
m	31.447	34.484	37.611	40.814	44.084

27. 指定标准音调 20 000 达因/平方厘米 (约等于摇滚乐队的音量) 的值是 10. 一个受验者听其他声音, 诸如轻声细语、正常谈话、雷声、准备起飞的喷气式飞机, 等等. 在每种情况下, 要求受验者鉴别音量并给它指定一个与 10 有关的数, 10 是标准音调的值. 这就是 "音量鉴别" 试验. 为了很好地模仿这种情况, 我们建立了幂定律 $J = al^{0.3}$, 其中 l 是实际音量 (以达因/平方厘米为单位) 而 J 是鉴别的音量.

(a) a 的值是多少?

(b) 如果实际音量是 0.2 达因/平方厘米 (正常谈话) 那么它的鉴别音量是多少?

(c) 如果鉴别音量是 20 那么它的实际音量是多少?

对习题 28~35 中的函数:

(a) 多项式的次数是多少? 首项系数是正的还是负的?

(b) 对大的 x 近似于 $f(x)$ 的幂函数是什么? 不用计算器和电脑, 在一个大的视窗下作出该函数的略图.

(c) 用计算器或电脑, 在一个大的视窗下作出该函数的略图. 该函数有多少个转向点? 如何将转向点个数与多项式次数进行比较?

28. $f(x) = 5x^3 - 17x^2 + 9x + 50$

29. $f(x) = x^2 + 10x - 5$

30. $f(x) = 8x - 3x^2$

31. $f(x) = 17 + 8x - 2x^3$

32. $f(x) = -9x^5 + 82x^3 + 12x^2$

33. $f(x) = 100 + 5x - 12x^2 + 3x^3 - x^4$

---

① "获得按揭所必须的收入",《1992 年世界年鉴》, 第 720 页.

34. $f(x) = 0.01x^4 + 2.3x^2 - 7$

35. $f(x) = 0.2x^7 + 1.5x^4 - 3x^3 + 9x - 15$

36. 图 1-89 中的每个图形是一个多项式的图形. 其视窗足够大可以显示整个性态.

(a) 多项式的最小可能的次数是多少?

(b) 多项式的首项系数是正的还是负的?

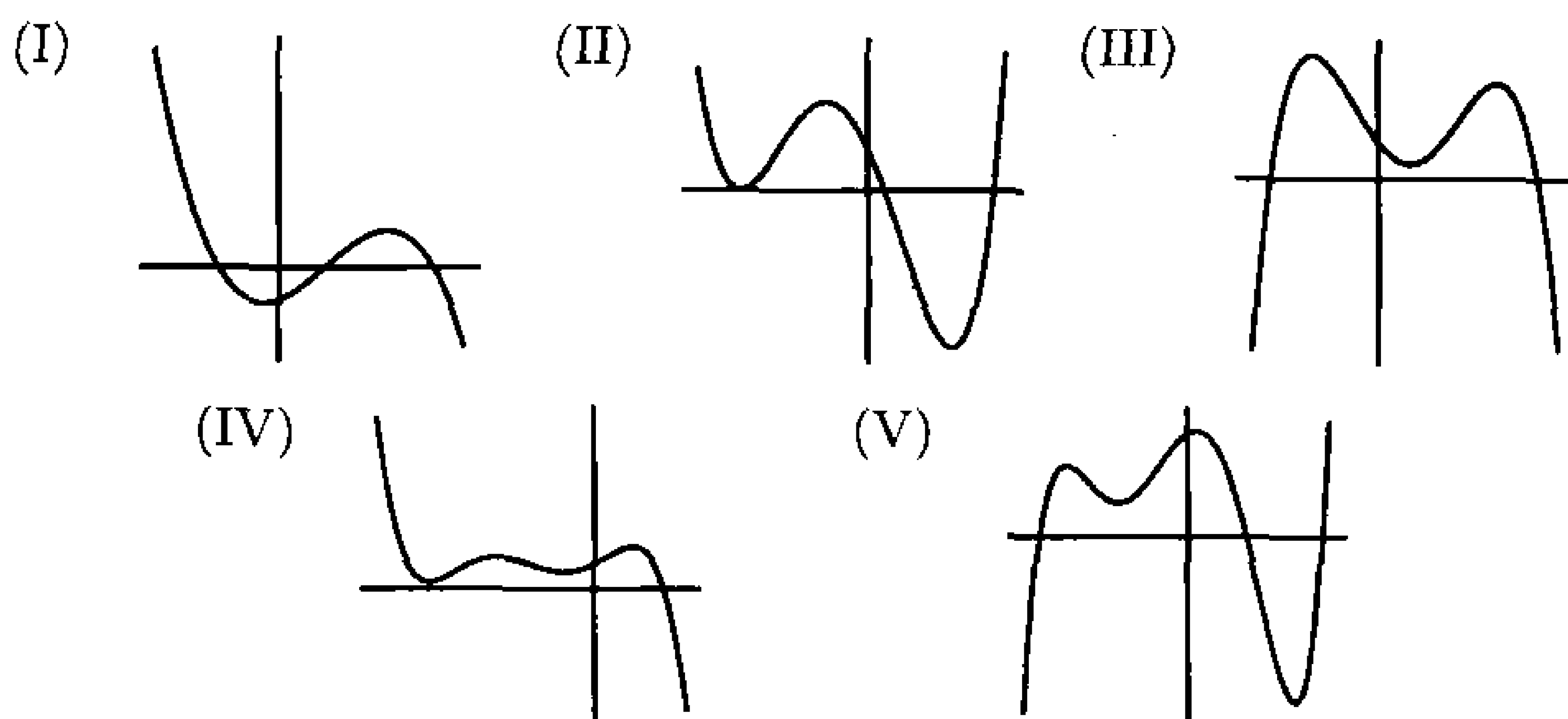


图 1-89

37. 运动产品批发商发现, 当产品价格是 25 美元时, 公司每周可以卖出 500 个单位产品. 当价格是 30 美元时, 每周销售的数量减少到 460 个单位.

(a) 求需求量 q 作为价格 p 的函数, 假设需求曲线是直线.

(b) 用 (a) 的答案写出收益作为价格的函数公式.

(c) 作出(b)中收益函数的图形. 求收益达到最大的价格. 在这个价格下的收益是多少?

38. 一个健身俱乐部的成本和收益函数表示为 $C = 10\,000 + 35q$ 和 $R = pq$, 其中 q 是每年俱乐部成员的数目而 p 是会员的一年价格. 俱乐部的需求函数是 $q = 3000 - 20p$.

(a) 利用需求函数写出成本和收益作为 p 的函数公式.

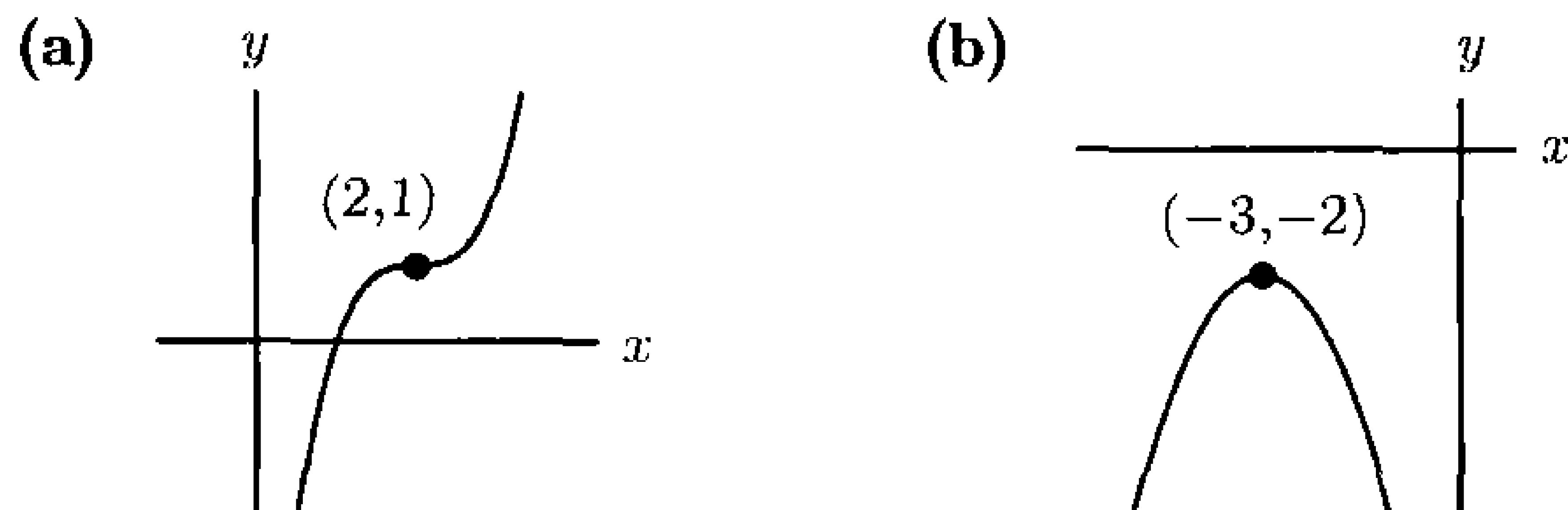
(b) 在同一个坐标系内, 作出成本和收益作为 p 的函数图形. (注意到价格不会超过 170 美元并且经营该俱乐部的成本可以达到 120 000 美元.)

(c) 说明为什么收益函数的图形是这样的形状.

(d) 价格为多少时俱乐部可以获利?

(e) 估计获得最大利润的年会员费. 在图形上标出这个点.

39. 利用幂函数的移位求每个图形恰当的公式:



40. 找一个计算器视窗使得在此视窗中 $f(x) = x^3 + 1000x^2 + 1000$ 与 $g(x) = x^3 - 1000x^2 - 1000$ 的图形看起来难以区分.

41. 函数 $y = x^4$ 和 $y = x^4 - 15x^2 - 15x$ 在视窗 $-4 \leqslant x \leqslant 4$ 和 $-100 \leqslant y \leqslant 100$ 中的图形看起来相似吗? 评论你对这个问题的答案与图 1-88 中所看到的区别.

1.10 周期函数

1.10.1 什么是周期函数

许多函数的图形振荡像一个波浪. 图 1-90 显示了美国 2002~2004 年新的住房建设启动数目 (以家庭为单位), 其中 t 是时间 (以季度为单位)①. 注意到在第一个季度 (一月、二月和三月) 开始建设的新房屋很少, 而第二季度 (四月、五月和六月) 许多新房都开工了. 我们预计这种振荡模式会延续到将来.

我们观察另一个例子. 图 1-91 是 2005 年 2 月 17 日午夜后的各个小时亚利桑那州菲尼克斯的温度 (°F) 图形. 注意到最大值在下午而最小值在清晨②. 另外, 该图形看上去像一个波浪.

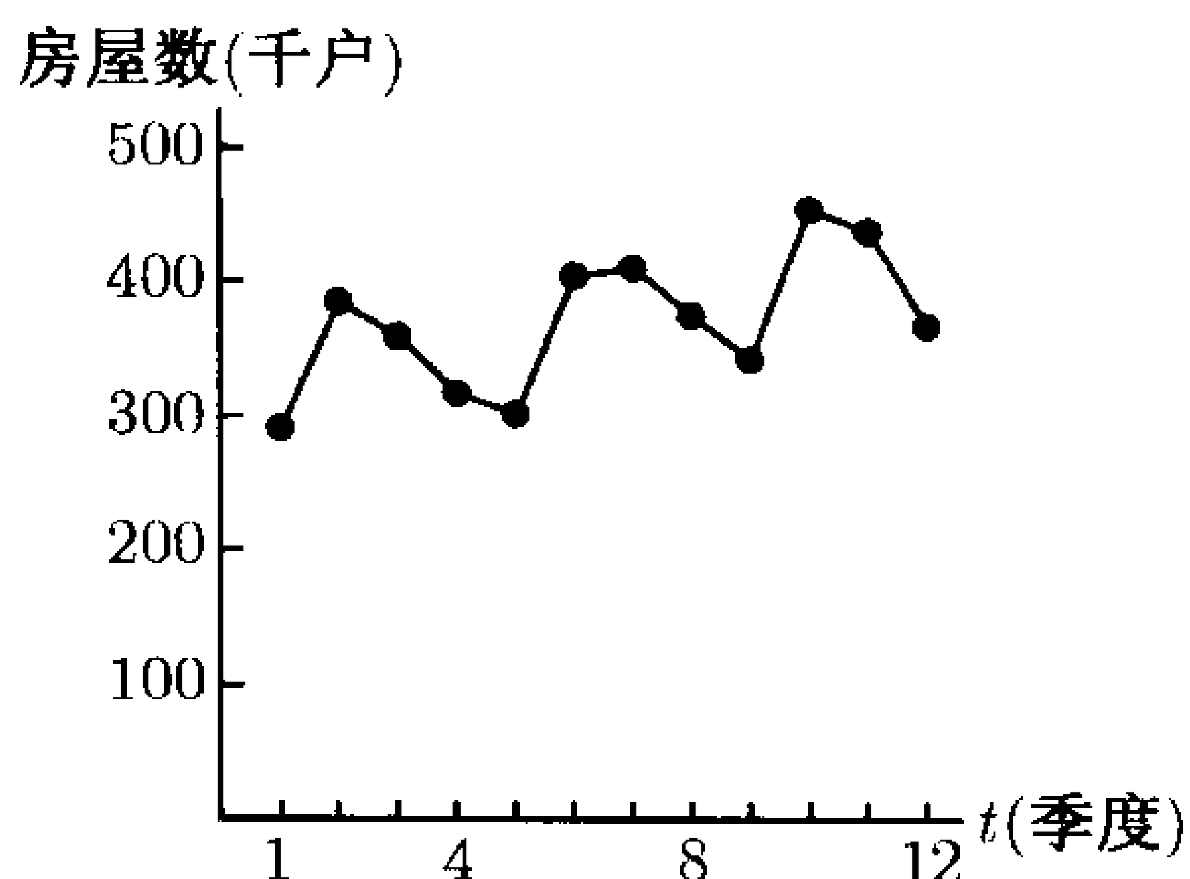


图 1-90 2002–2004 年新的住房建设启动

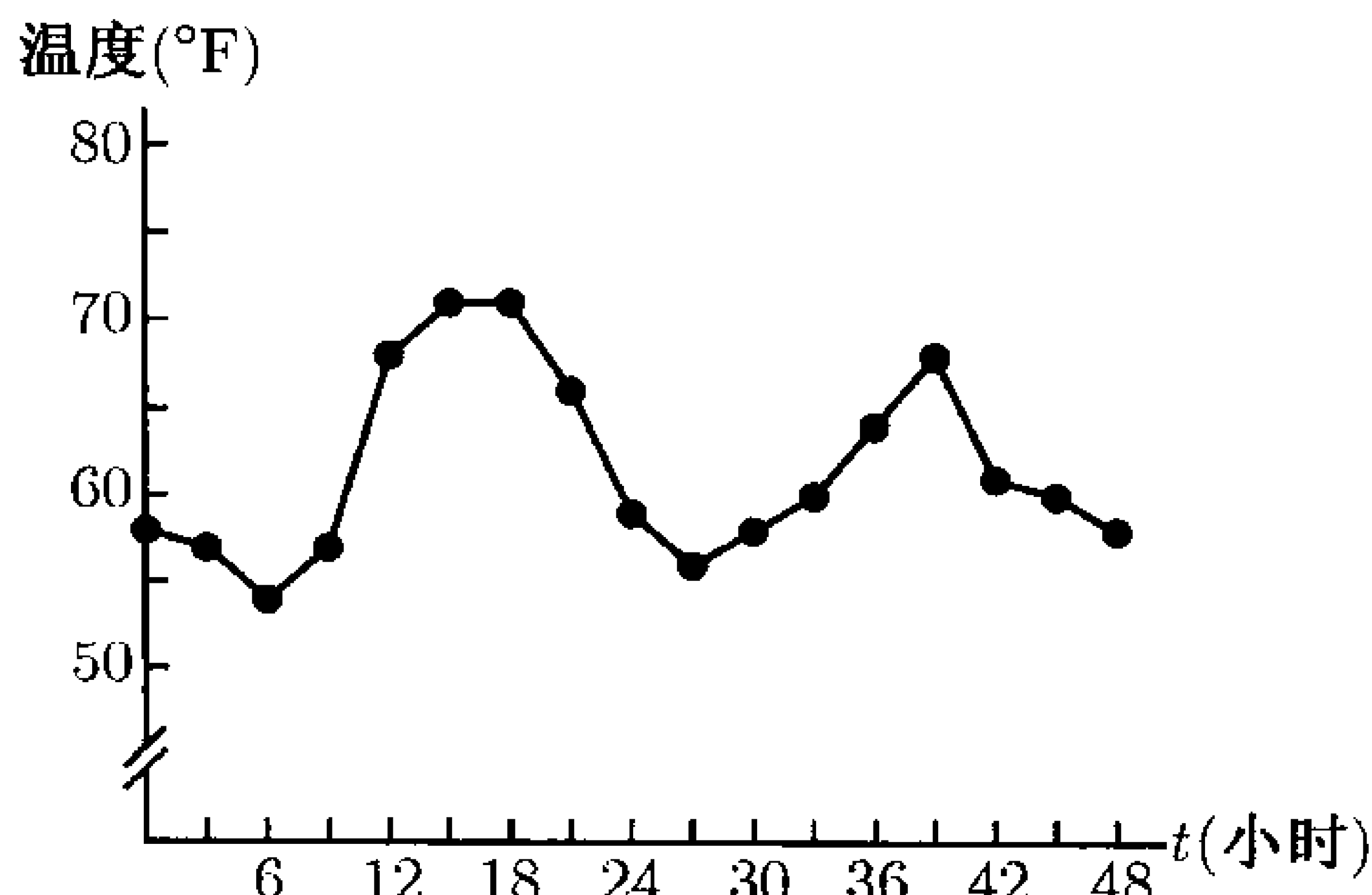


图 1-91 2005 年 2 月 17 日午夜后菲尼克斯的温度

其值在规则的区间上重复的函数就叫做*周期的*. 许多变化过程, 例如住房启动的数目或者温度, 都近似地是周期的. 受潮汐影响的内湾的水位, 心脏中的血压, 美国零售商品的销售额, 以及传播音乐音调的空气分子的位置也都是时间的周期函数.

振幅和周期

周期函数就是重复永远相同的循环. 如果我们知道其图形的一个循环, 那么我们就知道它的整个图形.

> 对时间的任何周期函数:
> - 它的**振幅**就是最大值与最小值之差的一半.
> - 它的**周期**就是函数完成一个完整的循环所需的时间.

例 1 估计如图 1-90 所示的新住房启动函数的振幅和周期.

---

① http://www.census.gov/const/www/quarterly_starts_completions.pdf, 访问日期 2005 年 4 月 15 日.

② http://www.weather.com, 访问日期 2005 年 2 月 20 日.

解 准确地说图 1-90 不是周期的, 因为对每个循环它们的最大值和最小值都不相同. 不过, 它们的最小值大约是 300, 而最大值大约是 450. 它们的差是 150, 所以它的振幅大约是 $\frac{1}{2}(150) = 75$ 千户.

它的波在 $t = 1$ 和 $t = 5$ 之间完成了一个循环, 所以它的周期是 $t = 4$ 季度, 也就是一年. 新住房建设的商业循环是一年. □

例 2 图 1-92 表示密封的冷藏箱内的温度. 估计 12:30 和 2:45 冷藏箱内的温度.

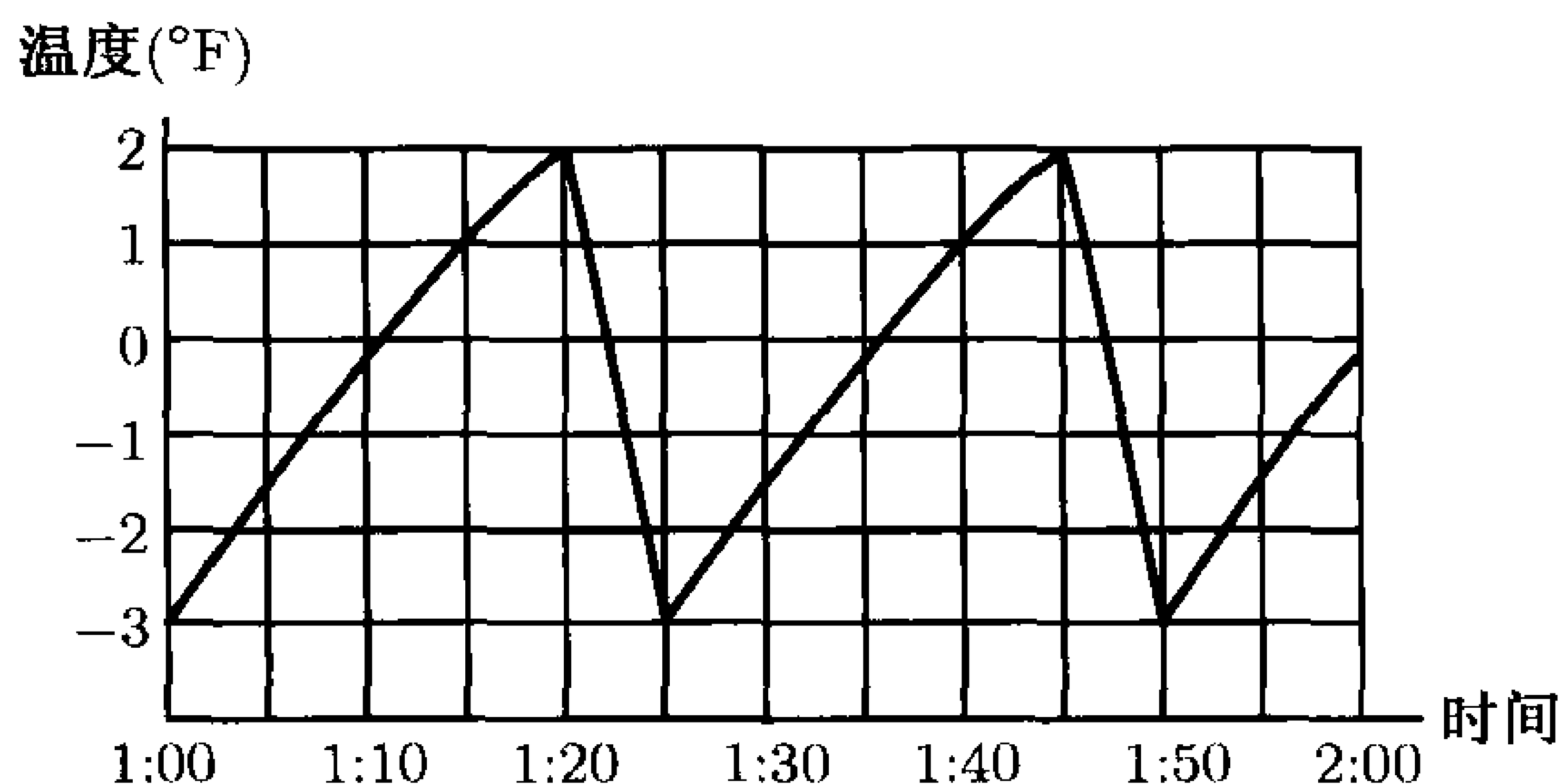


图 1-92 振荡的冷藏箱温度. 估计 12:30 和 2:45 冷藏箱内的温度

解 每隔 25 分钟出现一次最大值和最小值, 所以周期是 25 分钟. 12:30 的温度应该和 12:55 以及 1:20 的温度相同, 也就是 2°F. 类似地, 2:45 的温度应该同 2:20 以及 1:55 的温度相同, 也就是大约 −1.5°F. □

1.10.2 正弦和余弦

许多函数可以用所谓的正弦和余弦函数表示. 计算器上正弦和余弦键通常标成[sin]和[cos].

注意: 你的计算器可能是 "度" 制式或者是 "弧度" 制式. 本书总是用弧度制.

正弦和余弦的图形

正弦函数和余弦函数的图形是周期的; 参见图 1-93 和图 1-94. 注意到余弦函数的图形是由正弦函数的图形向左移动 $\pi/2$ 的图形.

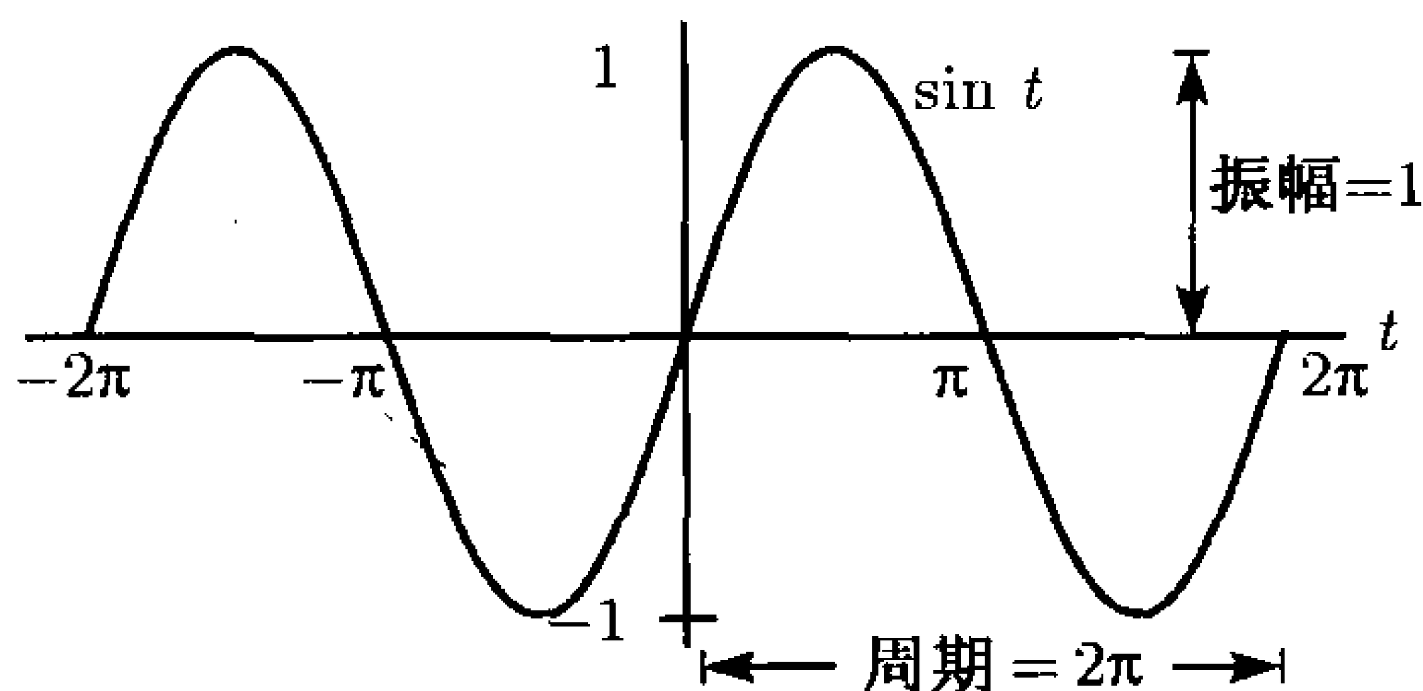


图 1-93 $\sin t$ 的图形

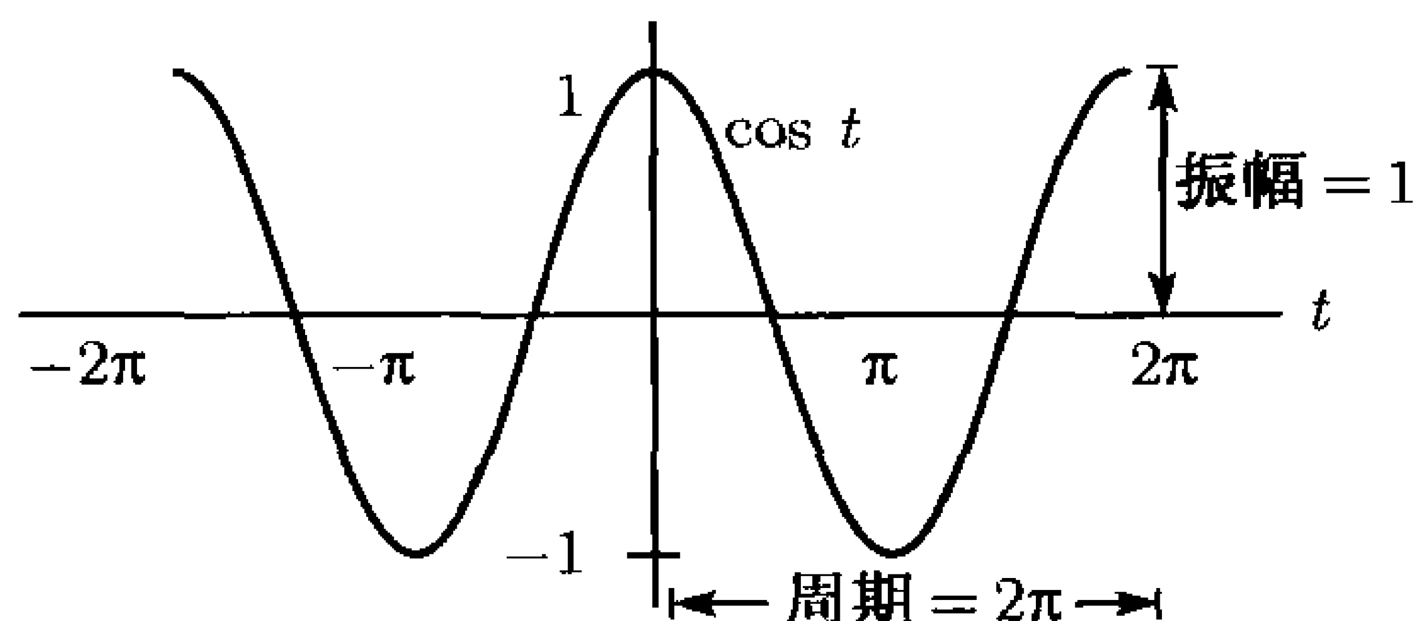


图 1-94 $\cos t$ 的图形

$\sin t$ 的最大值和最小值是 $+1$ 和 -1, 所以正弦函数的振幅是 1. $y=\sin t$ 的图形在 $t=0$ 和 $t=2\pi$ 之间完成一个循环; 其余图形就重复这一部分. 正弦函数的周期是 2π.

例 3 利用 $y=3\sin 2t$ 的图形估计该函数的振幅和周期.

解 图 1-95 中, 波浪的最大值是 $+3$ 最小值是 -3, 所以振幅是 3. 图形在 $t=0$ 和 $t=\pi$ 之间完成一个完整的循环, 所以周期是 π. □

例 4 说明下列每个图形与 $y=\sin t$ 的图形如何不同.

(a) $y=6\sin t$ (b) $y=5+\sin t$ (c) $y=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$

解 (a) $y=6\sin t$ 的图形如图 1-96. 最大值和最小值是 $+6$ 和 -6, 所以振幅是 6. 这是 $y=\sin t$ 的图形在竖直方向拉伸了 6 倍所得到的图形.

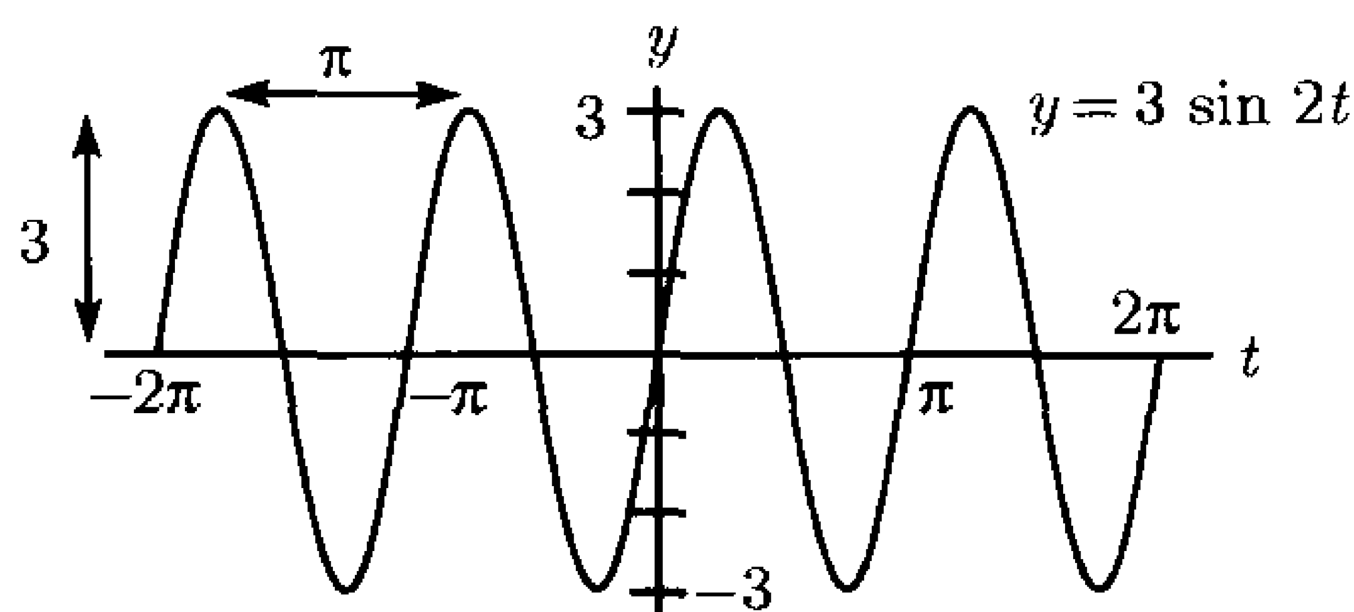


图 1-95 振幅是 3 而周期是 π

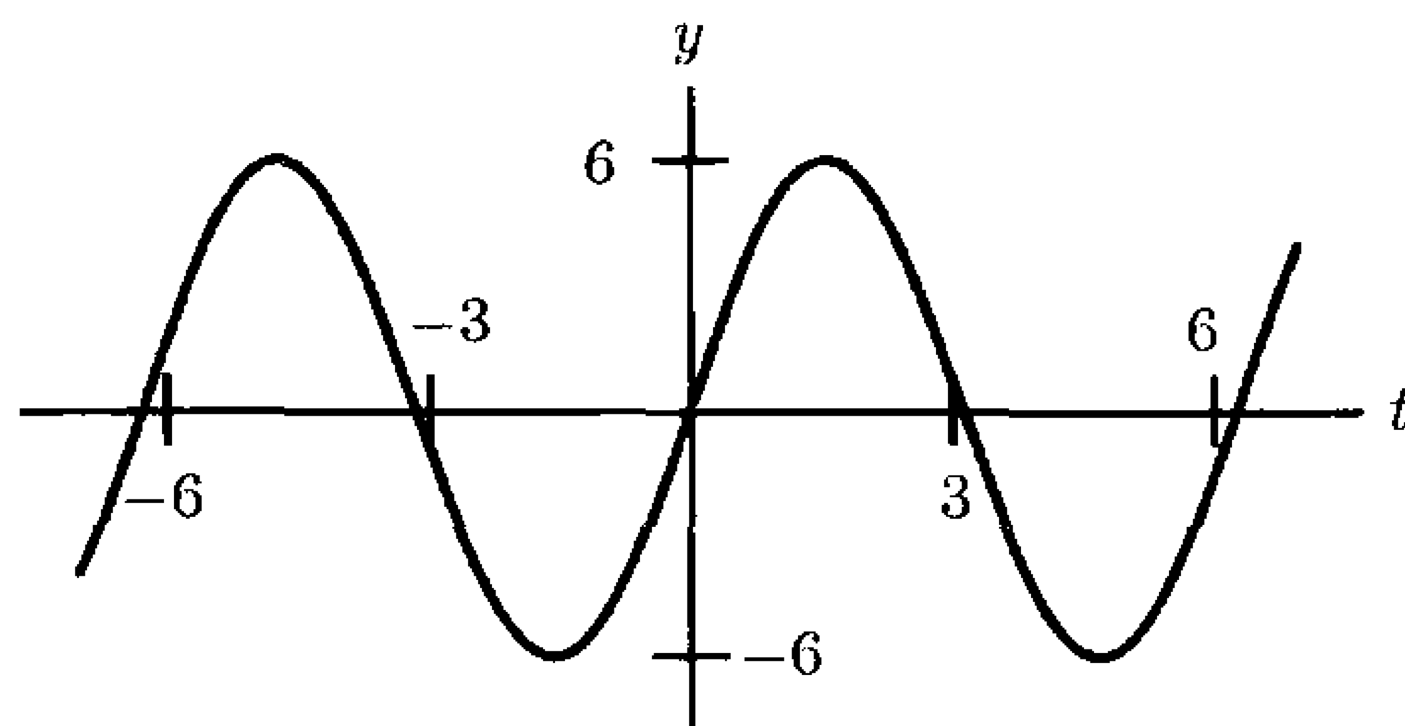


图 1-96 $y=6\sin t$ 的图形

(b) $y=5+\sin t$ 的图形如图 1-97. 该函数的最大值和最小值是 6 和 4, 所以振幅是 $(6-4)/2=1$. 这个振幅 (或波浪的大小) 与 $y=\sin t$ 的一样, 因为这是 $y=\sin t$ 的图形向上移动了 5 个单位所得到的图形.

(c) $y=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图形如图 1-98. 它与 $y=\sin t$ 的图形有相同的振幅, 即 1 和相同的周期, 即 2π. 它是由 $y=\sin t$ 的图形向左移动 $\pi/2$ 单位所得到的图形. (实际上, 这是 $y=\cos t$ 的图形.) □

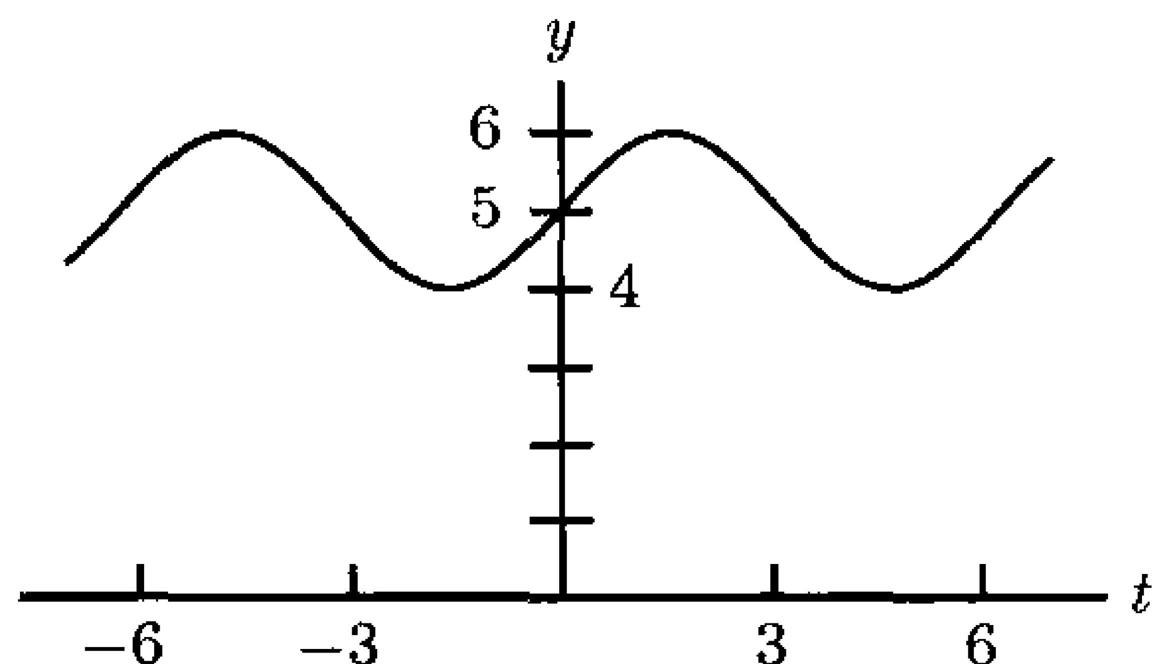


图 1-97 $y=5+\sin t$ 的图形

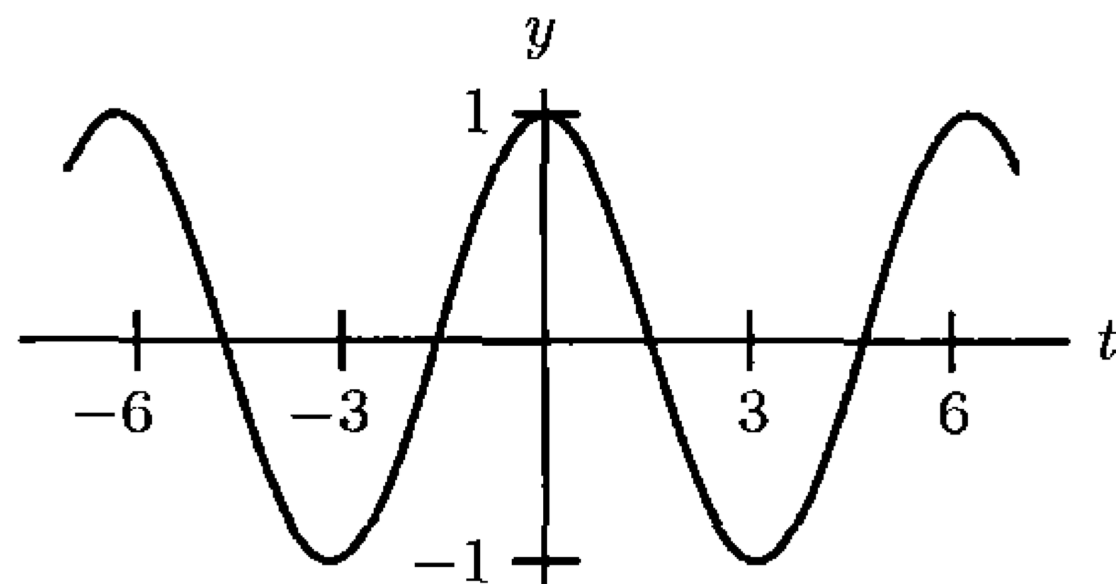


图 1-98 $y=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图形

曲线族: $y=A\sin(Bt)$ 的图形

在表达式 $y=A\sin(Bt)$ 中的常数 A 和 B 叫做**参数**. 我们可以通过一次变化一个参数并研究其结果来讨论曲线族.

例 5 (a) 对一些正的 A 作出 $y = A\sin t$ 的图形. 描述 A 对图形的影响.

(b) 对一些正的 B 作出 $y = \sin(Bt)$ 的图形. 描述 B 对图形的影响.

解 (a) 从图 1-99 中 $A = 1, 2, 3$ 时 $y = A\sin t$ 的图形, 我们看到 A 是振幅.

(b) $B = \frac{1}{2}$, $B = 1$ 和 $B = 2$ 时 $y = \sin(Bt)$ 的图形如图 1-100 所示. 当 $B = 1$ 时, 周期是 2π; 当 $B = 2$ 时, 周期是 π; 而当 $B = \frac{1}{2}$ 时, 周期是 4π. 参数 B 影响函数的周期. 这些图形指出 B 越大, 周期越短. 实际上, 周期是 $2\pi/B$.

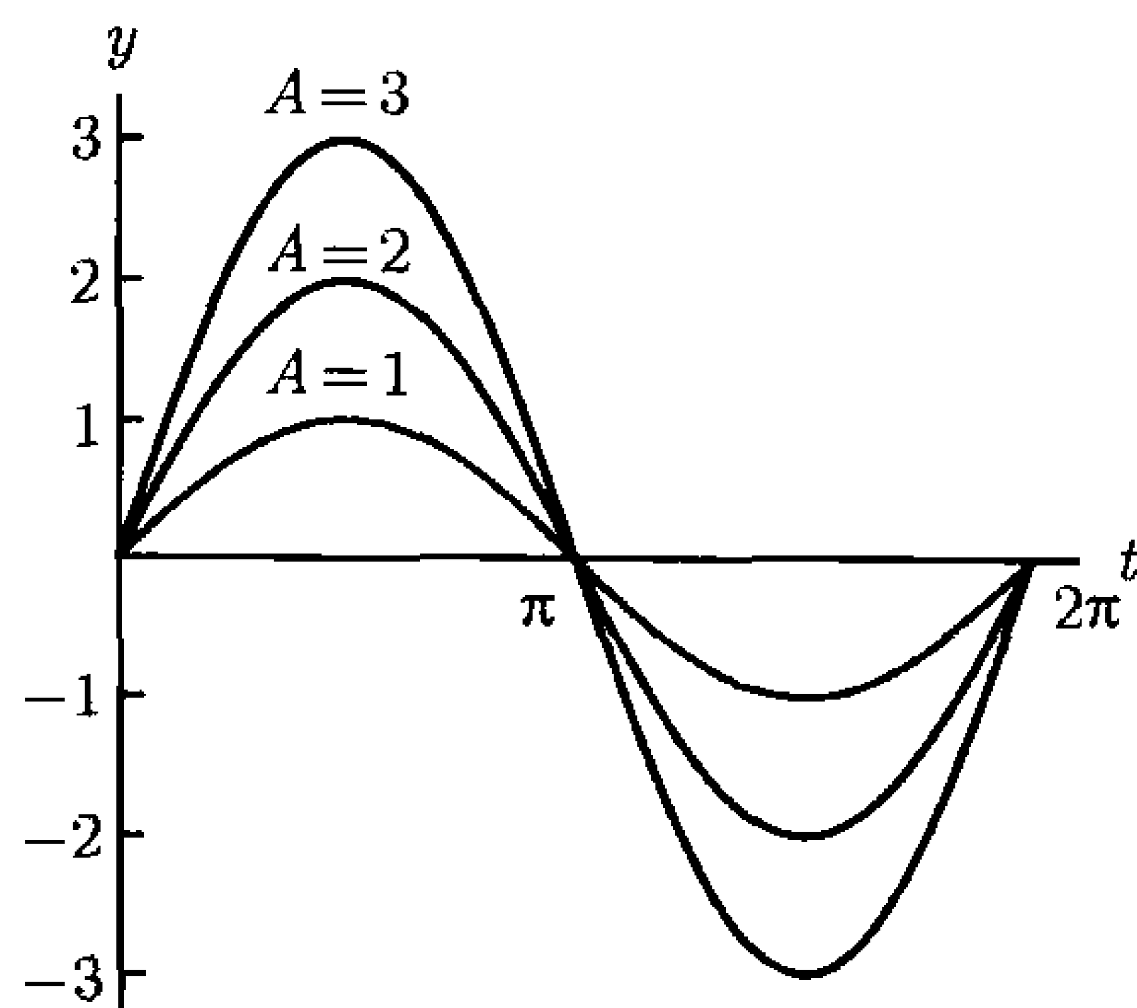


图 1-99 $A = 1, 2, 3$ 时 $y = A\sin t$ 的图形

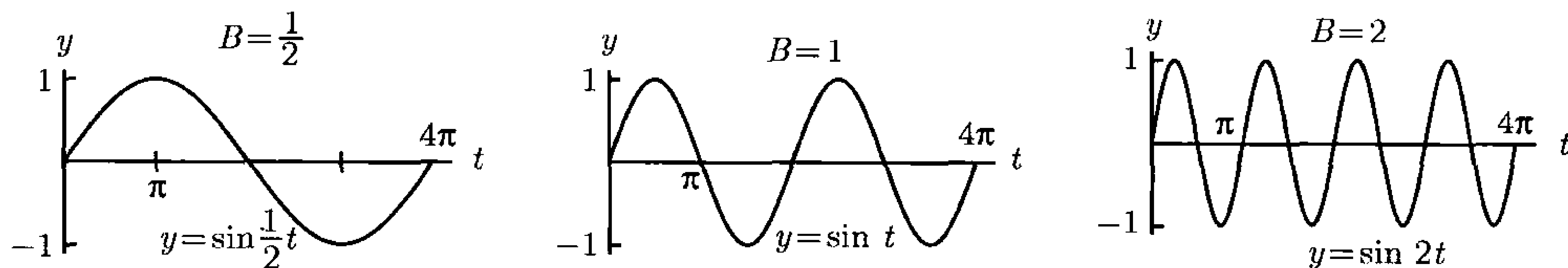
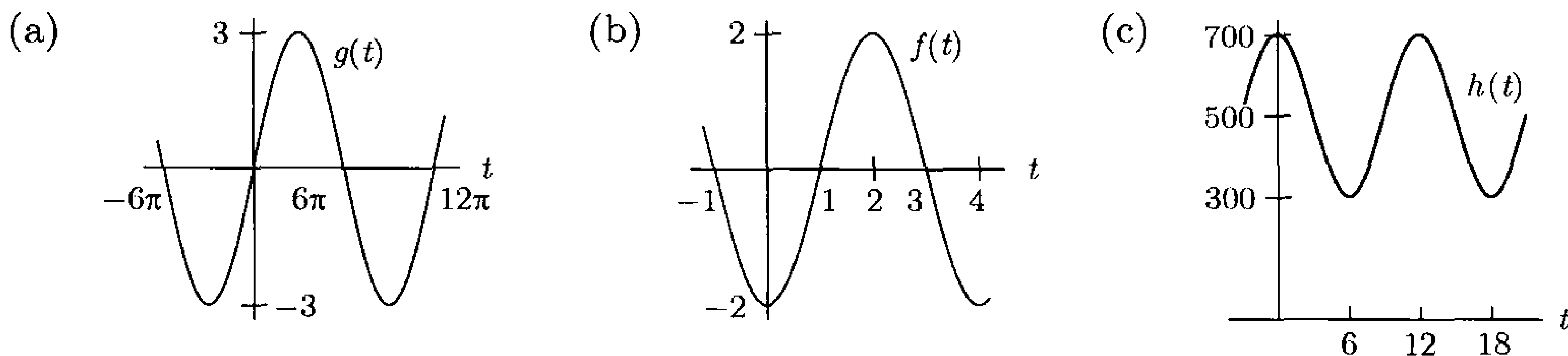


图 1-100 $B = 1/2, 1, 2$ 时 $y = \sin(Bt)$ 的图形 □

在例 5 中, $y = A\sin(Bt)$ 的振幅由参数 A 确定, 而周期由参数 B 确定. 一般情形如下.

> 函数 $y = A\sin(Bt) + C$ 和 $y = A\cos(Bt) + C$ 是周期的, 并且
> $$\text{振幅} = |A|, \quad \text{周期} = \frac{2\pi}{B}, \quad \text{竖直移位} = C.$$

例 6 对下列周期函数求出恰当的公式.



解 (a) 这个函数看起来像振幅为 3 的正弦函数, 所以 $g(t) = 3\sin(Bt)$. 因为函数在 $t = 0$ 和 $t = 12\pi$ 之间完成一个完整的振荡, 所以当 t 变化 12π 时量 Bt 变化 2π. 这意味着 $B \cdot 12\pi = 2\pi$, 所以 $B = 1/6$. 从而, $g(t) = 3\sin(t/6)$ 有所示的图形.

(b) 这个函数看起来像一个向下颠倒的振幅为 2 的余弦函数, 所以 $f(t) = -2\cos(Bt)$. 函数在 $t=0$ 和 $t=4$ 之间完成一个振荡. 这样, 当 t 变化 4 时量 Bt 变化 2π, 所以 $B\cdot 4=2\pi$, 即 $B=\pi/2$. 从而, $f(t)=-2\cos(\pi t/2)$ 有所示的图形.

(c) 这个函数看起来像一个余弦函数. 最大值是 700 而最小值是 300, 所以振幅是 (700−300)/2=200. 在最大值和最小值之间的中间高度是 500, 所以该余弦曲线向上移动了 500 个单位, $h(t)=500+200\cos(Bt)$. 周期是 12, 所以 $B\cdot 12=2\pi$. 因此, $B=\pi/6$. 函数 $h(t)=500+200\cos(\pi t/6)$ 有所示的图形. □

例 7 2005 年 4 月 25 日, 缅因州波特兰午夜出现了高潮①. 港口水的高度是一个周期函数, 因为它在高潮和低潮之间振荡. 如果 t 是午夜后的小时, 那么高度 (单位是 ft) 可以由公式

$$y = 4.9 + 4.4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

近似地表示.

(a) 作出该函数从 $t=0$ 到 $t=24$ 的图形.

(b) 在高潮时水位是多少?

(c) 什么时候是低潮, 此时的水位是多少?

(d) 该函数的周期是多少, 而且从潮汐的角度它表示什么?

(e) 该函数的振幅是多少, 而且从潮汐的角度它表示什么?

解 (a) 参见图 1-101.

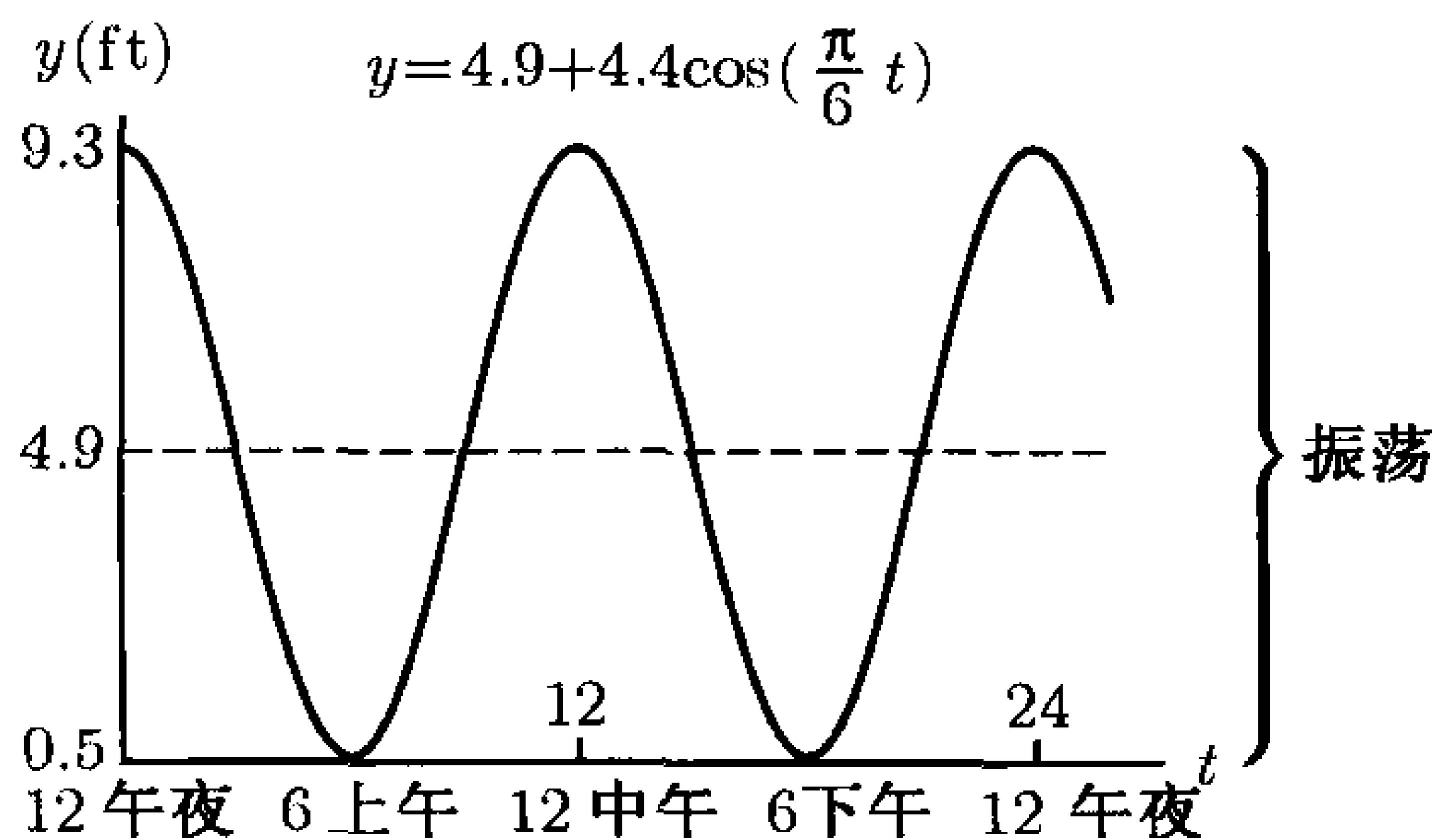


图 1-101 2005 年 4 月 25 日缅因州波特兰水深的近似函数图形

(b) 高潮时水位是 9.3 ft(由图形上的 y 截距给出).

(c) 低潮出现在 $t=6$(上午 6 时) 和 $t=18$(下午 6 时). 此时的水位是 0.5 ft.

(d) 周期是 12 小时并且表示相继两个高潮或两个低潮之间的时间间隔. 当然, 根据模型中的假设周期为 12 小时有些错误. 如果是这样, 那么高潮始终在中午或午夜, 而不像实际情况那样, 白天的时候缓慢进行. 实际上, 相继两个高潮之间的时间间隔平均大约是 12 小时 39 分钟, 这可以在更精确的数学模型中考虑.

① www.maineharbors.com/aprpt05.htm, 访问日期 2005 年 4 月 15 日.

(e) 最大值是 9.3, 而最小值是 0.5, 所以振幅是 $(9.3-0.5)/2$, 也就是 4.4 ft. 它表示高潮和低潮之间深度差的一半. □

习题

1. 环境科学专业的一名研究生研究了一个河流的温度波. 图 1-102 表示每个小时河流的温度 (°C), 第 0 小时表示第一天的午夜.

(a) 说明为什么可以用周期函数模拟这些数据.

(b) 大约什么时候出现最大值? 最小值呢? 这是什么道理?

(c) 这些数据的周期是多少? 振幅是多少?

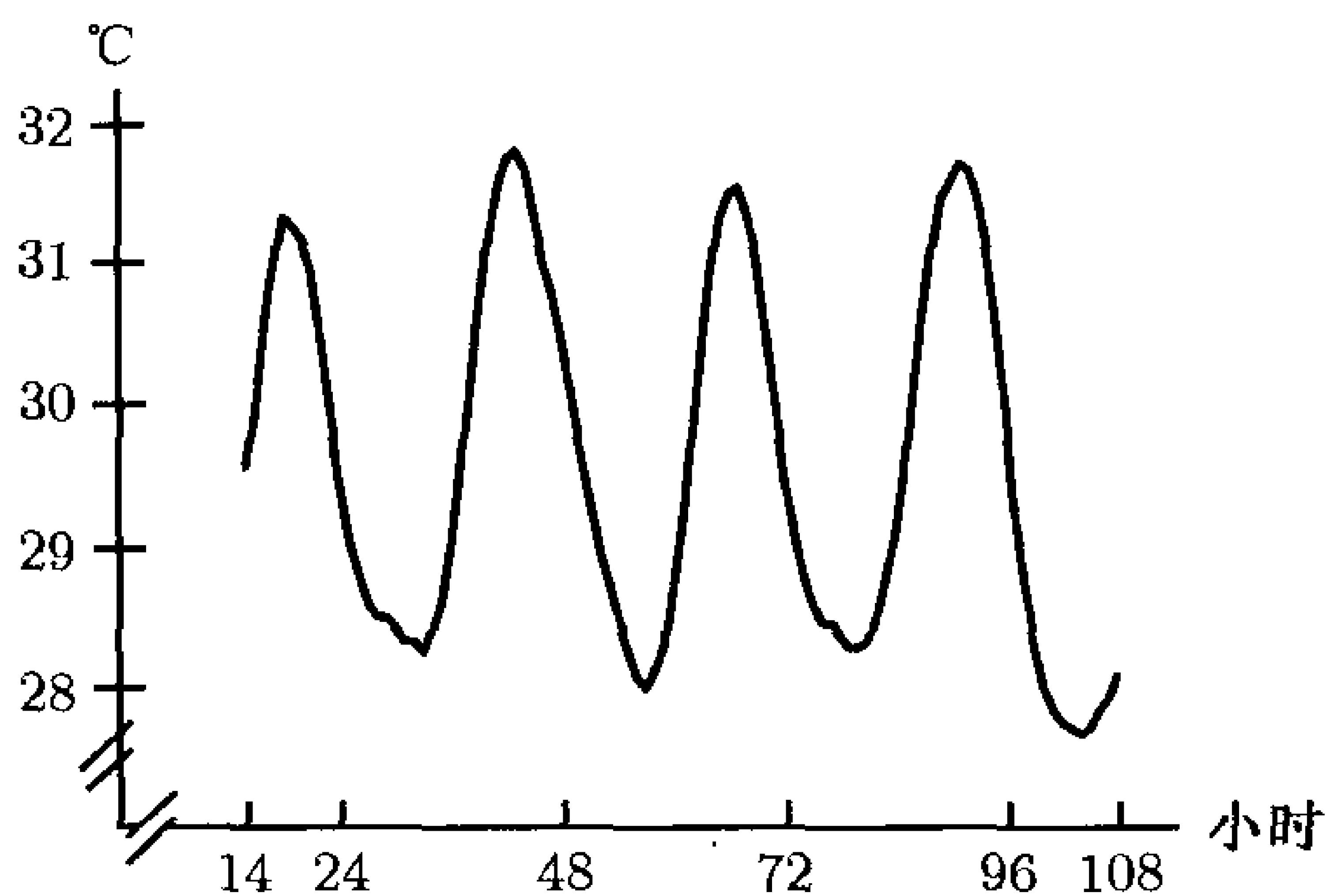


图 1-102

在习题 2~4 中求周期和振幅.

2. $y=7\sin(3t)$

3. $z=3\cos(u/4)+5$

4. $r=0.1\sin(\pi t)+2$

5. 一个人每三秒钟呼吸一次. 在这个人肺里的空气体积在最小值 2 升和最大值 4 升之间变化. 下面哪个公式最适合这个人肺里的空气体积作为时间的函数?

(a) $y=2+2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$　　(b) $y=3+\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$

(c) $y=2+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$　　(d) $y=3+\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

6. 作出三年期间在美国西北防晒霜销售额的略图, 销售额是自第一年 1 月 1 日以来月数的函数. 说明你的图形为什么会是周期的. 周期是多少?

作出习题 7~12 中函数的略图. 它们的振幅和周期是多少?

7. $y=3\sin x$　　**8.** $y=3\sin 2x$

9. $y=-3\sin 2\theta$　　**10.** $y=4\cos 2x$

11. $y=4\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$　　**12.** $y=5-\sin 2t$

13. 仙王座 δ 星是夜空中最亮的星星之一. 它的亮度周期是 5.4 天, 平均亮度是 4.0 并且亮度变化 ±0.35. 求一个时间 t 的函数公式模拟仙王座 δ 星的亮度, 其中 $t=0$ 表示最亮的时刻.

14. 下表表示一个函数的函数值. 说明这个函数为什么看起来像是周期的. 这个函数的周期和振幅大约是多少? 假设这个函数是周期的, 估计它在$t=15$, $t=75$和$t=135$时的值.

t	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(t)$	1.8	1.4	1.7	2.3	2.0	1.8	1.4	1.7	2.3

15. 下表表示一个周期函数 $f(x)$ 的值. 该函数取得的最大值是 5.

(a) 这个函数的振幅是多少?

(b) 这个函数的周期是多少?

(c) 求一个表示这个周期函数的公式.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	5	0	−5	0	5	0	−5

16. 图 1-103 显示女性每月卵巢周期期间雌性激素和孕激素水平[①]. 两种激素水平都是周期的吗? 每种情形的周期是多少? 每月卵巢周期的什么时候雌性激素达到最高? 每月卵巢周期的什么时候孕激素达到最高?

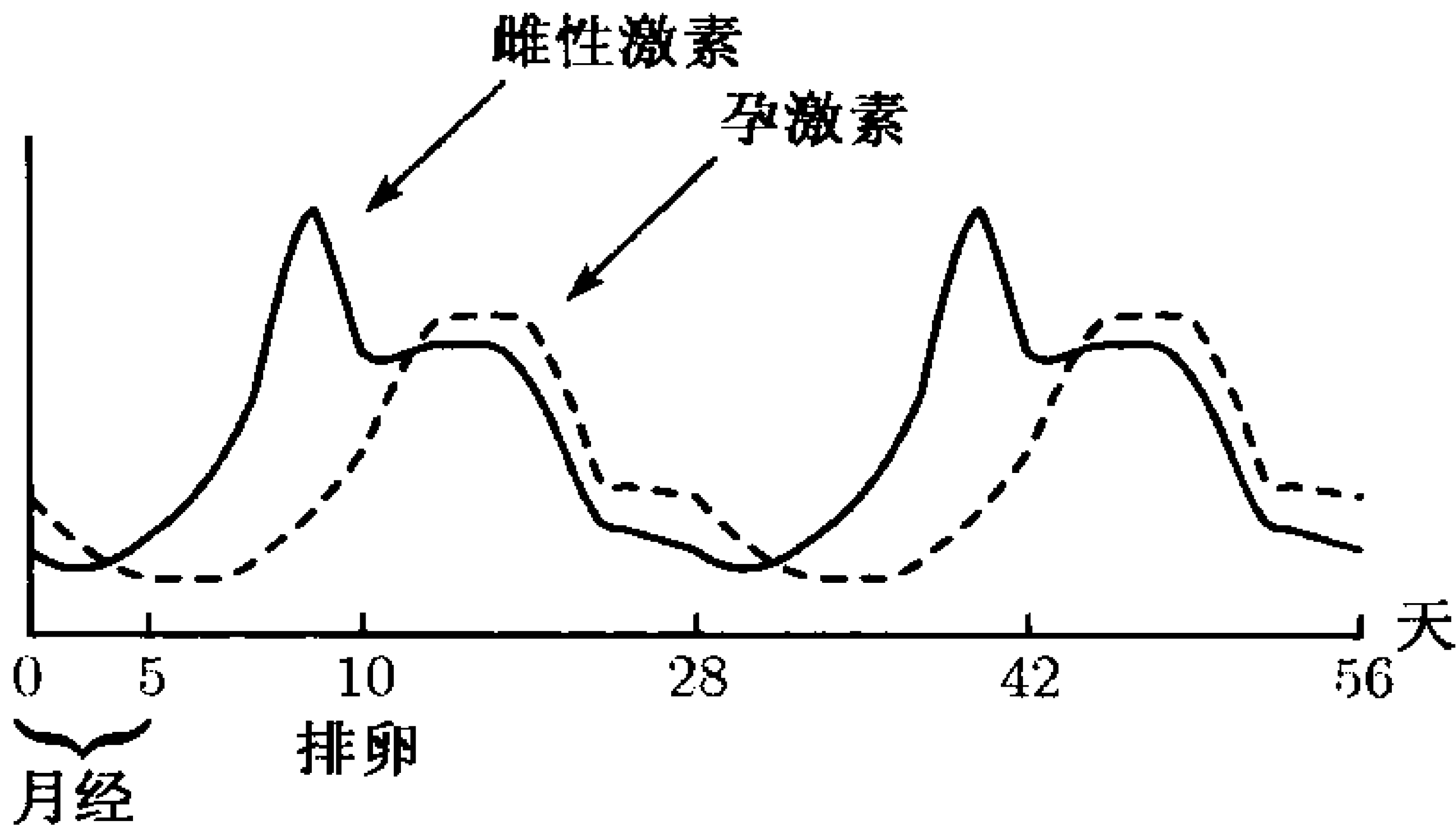


图 1-103

17. 图 1-104 表示 1972~1973 年每个月美国上报的[②]腮腺炎患者数.

(a) 求这个函数的周期和振幅, 并用腮腺炎进行解释.

(b) 预测 1972 年 1 月 1 日以后的 30 个月和 45 个月腮腺炎患者数.

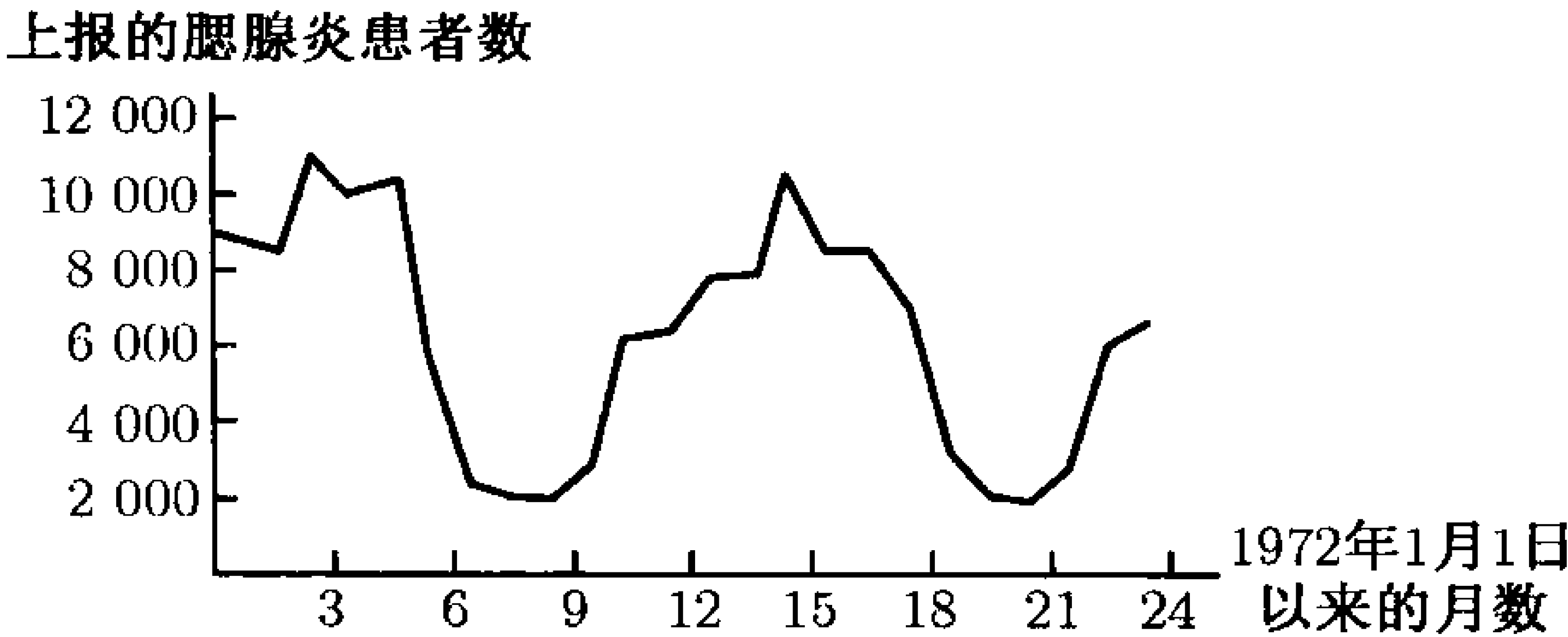


图 1-104

① Robert M. Julien,《药物作用入门》, 第 7 版, 第 360 页 (W. H. Freeman 和 Co., 纽约: 1995).

② 疾病控制中心, 1974,《美国 1973 年上报的发病率和死亡率》, 第 22 卷, 第 53 期. 在允许接种疫苗的 1967 年以前, 每年上报的腮腺炎患者是 100 000~200 000. 1995 年以来, 每年上报的患者少于 1000. 来源: 疾病控制中心 (CDC).

18. 冬季美国东北大多数繁殖的鸟类向别处迁徙. 在俄亥俄州的一个森林保护区鸟类的种数在 6 月份的最高值 28 种和 12 月份的最低值 10 种之间振荡[①].

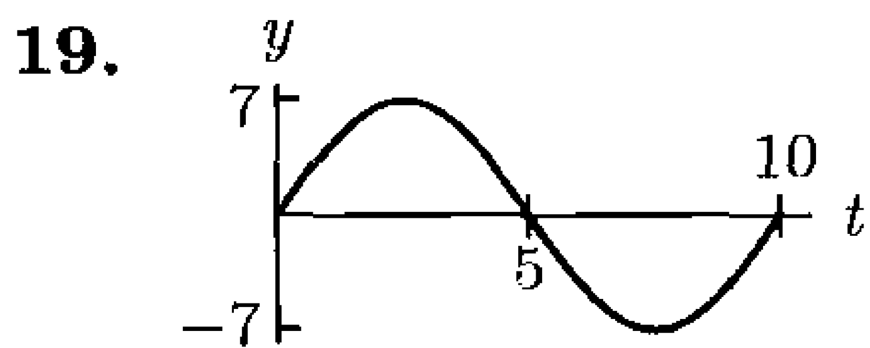
(a) 作出这个保护区内鸟类种数作为时间 t 的函数图形, 其中 t 表示自 6 月以来的月数. 在你的图形中至少包括 3 年.

(b) 这个函数的振幅和周期是多少?

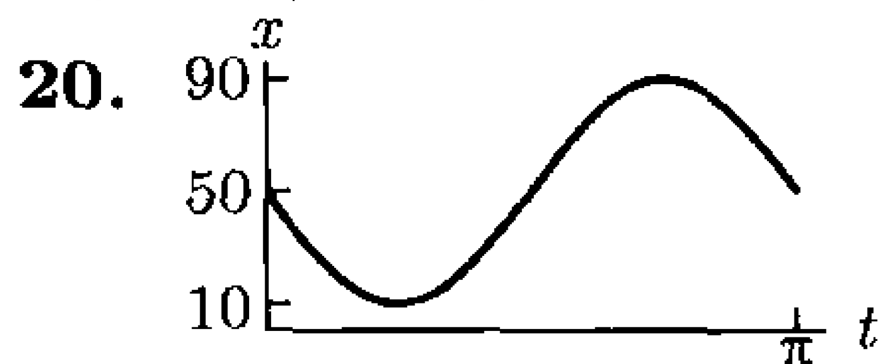
(c) 求一个公式表示鸟类种数 B 作为自 6 月以来的月数 t 的函数.

在习题 19~30 中, 对每个图形求一个恰当的函数公式.

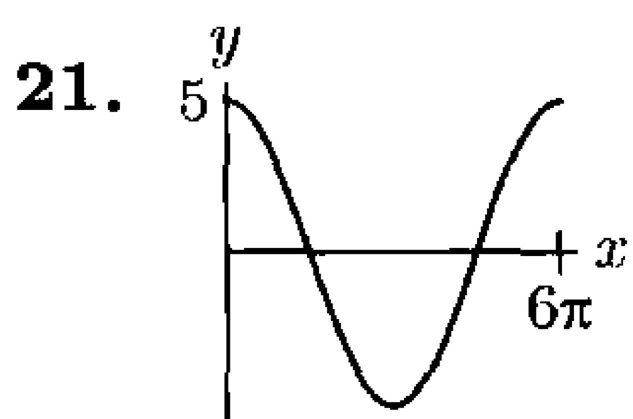
19.



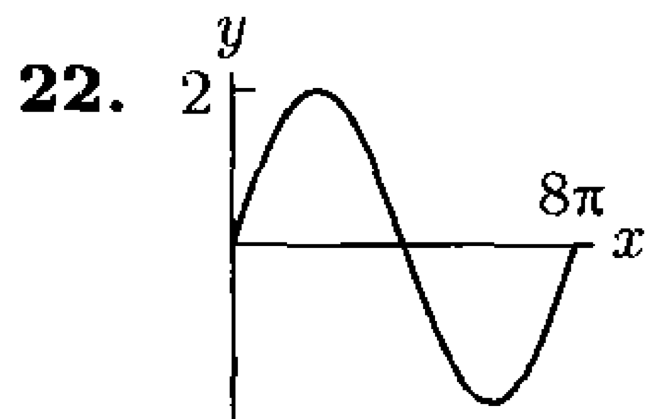
20.



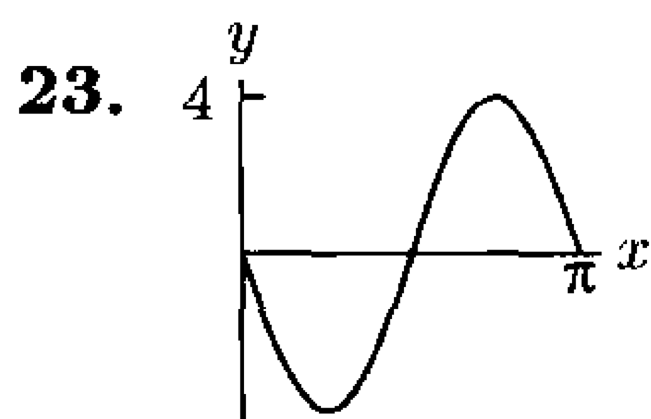
21.



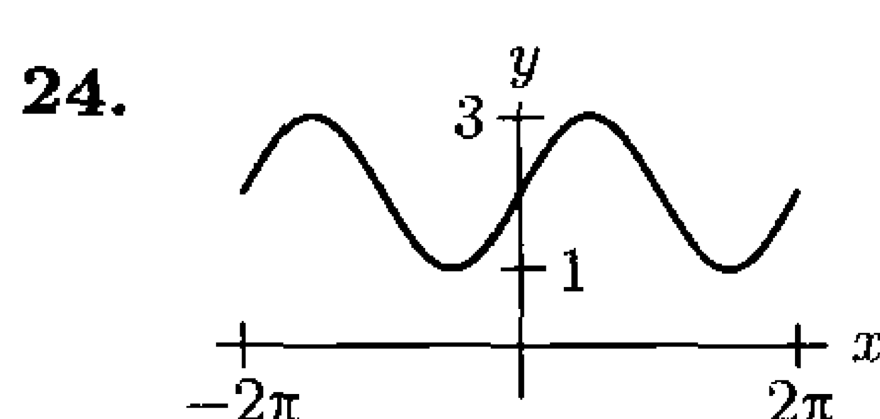
22.



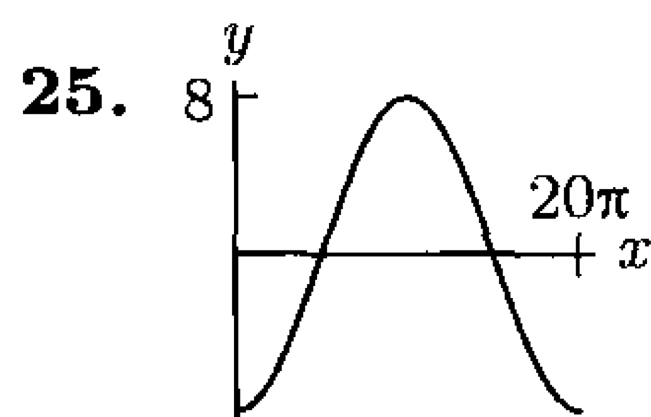
23.



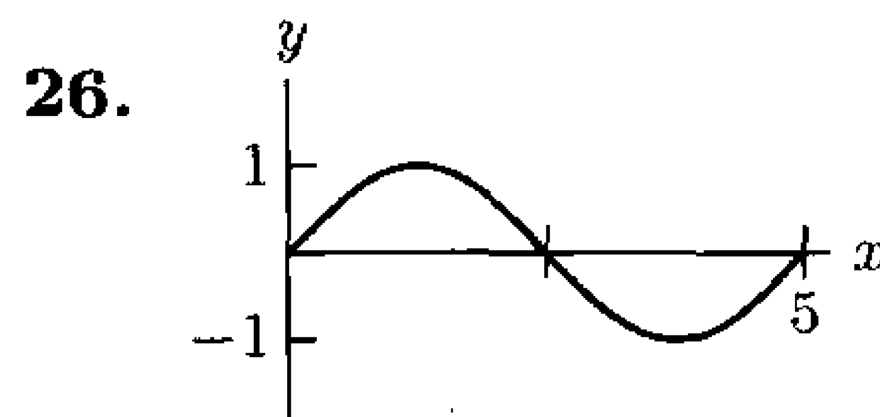
24.



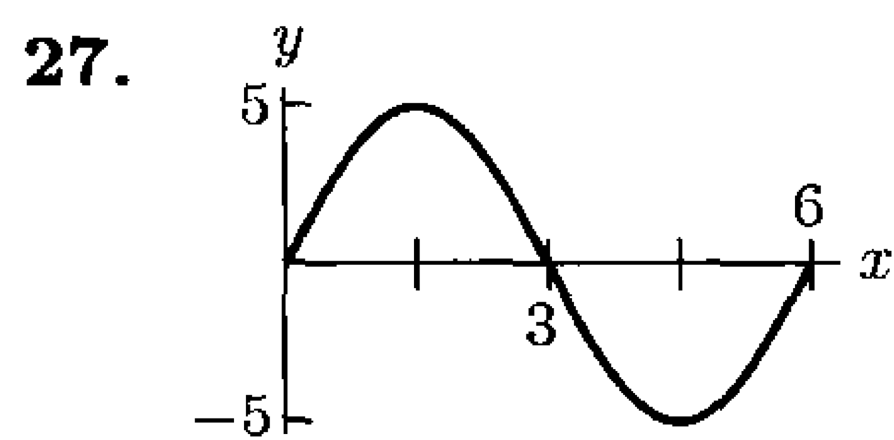
25.



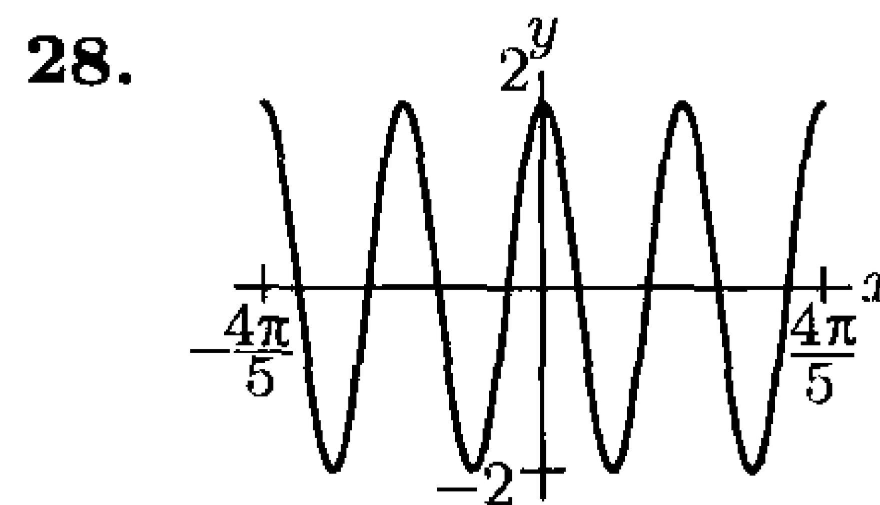
26.



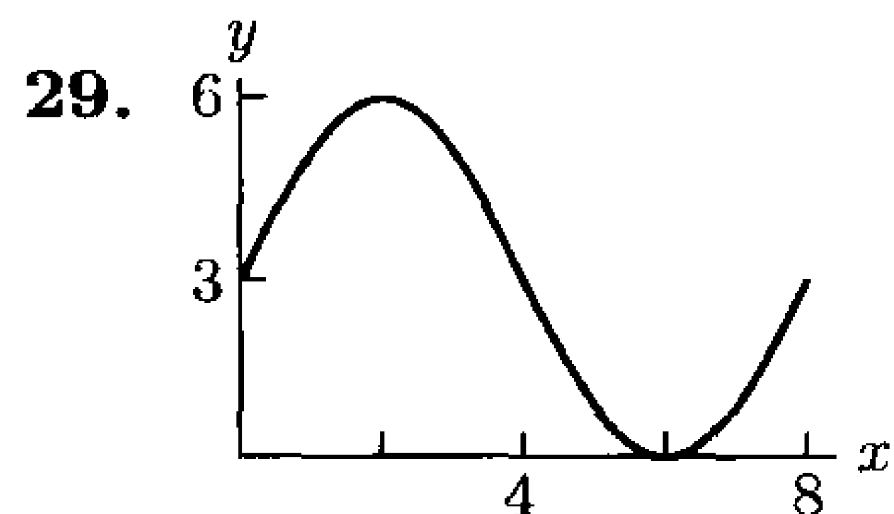
27.



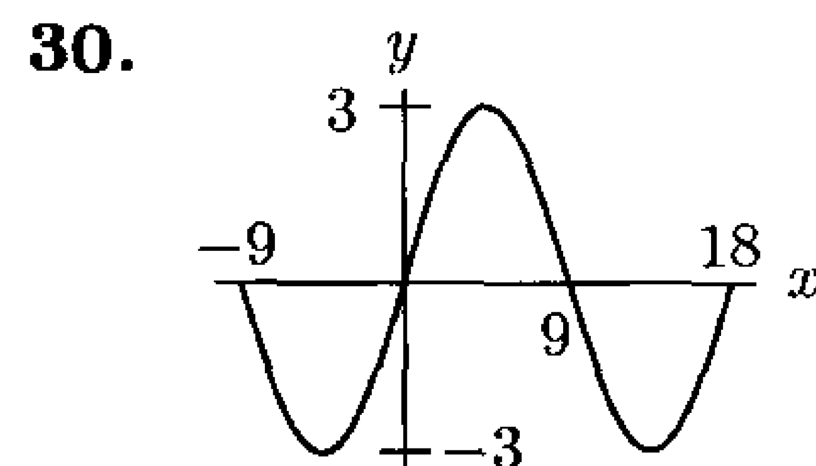
28.



29.



30.



31. 储水池中水的深度每 6 个小时振荡一次. 如果最小深度是 55 ft 而最大深度是 85 ft, 求一个用时间 (小时) 表示深度的恰当公式.

32. 沙漠的温度 H 每天在上午 5 点钟的 40°F 和下午 5 点钟的 80°F 之间振荡. 写一个

① Rosenzweig, M. L.,《物种在空间和时间中的多样性》, 第 71 页 (剑桥: 剑桥大学出版社, 1995).

用 t 表示 H 的恰当公式, 其中 t 是从上午 5 点钟以后的小时数.

33. 下表表示周期函数 $g(t)$ 的值.

(a) 估计该函数的周期和振幅.

(b) 估计 $g(34)$ 和 $g(60)$.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$g(t)$	14	19	17	15	13	11	14	19	17	15	13	11	14	19	17

34. 世界上最大的潮汐在加拿大的芬迪湾. 最低水位和最高水位的差是15 m(将近50 ft). 在某个特殊的点水深 y(m) 作为时间 t(h) 的函数可以由

$$y = D + A\cos(B(t - C))$$

表示, 其中 t 是午夜以后的小时数.

(a) D 的物理意义是什么?

(b) A 的值是多少?

(c) B 的值是多少? 假设在相继两个高潮之间的时间是 12.4 h.

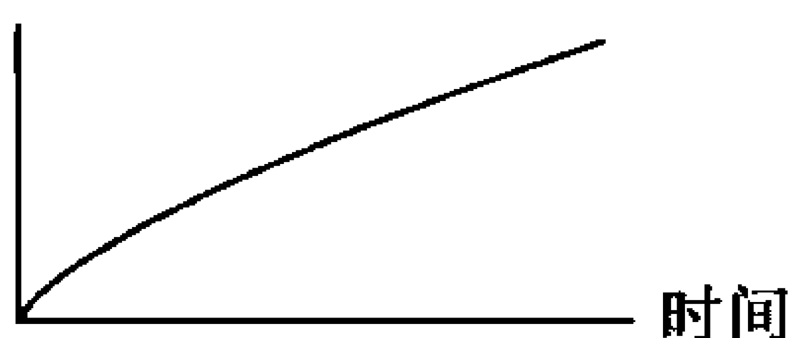
(d) C 的物理意义是什么?

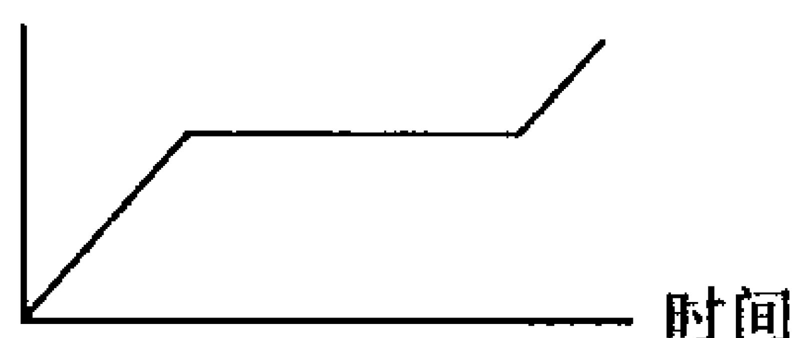
本章概要

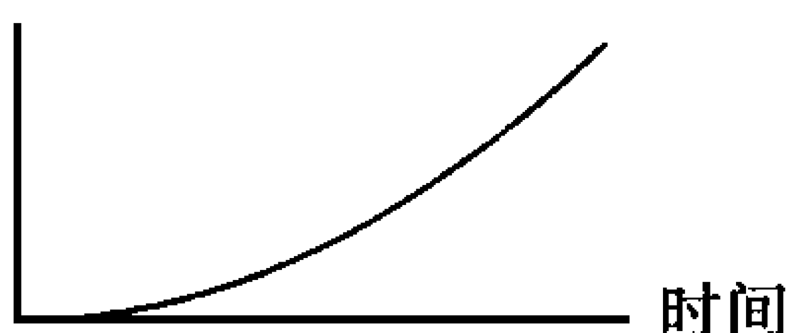
- **函数概念**
  定义域/值域, 递增/递减, 凹性, 截距.
- **线性函数**
  斜率, y 截距, 相等的时间内增长相等的数量.
- **经济学中的应用**
  成本函数, 收益函数, 利润函数, 收支平衡点, 供给和需求曲线, 平衡点, 折旧函数, 预算约束, 现值和将来值.
- **变化, 平均变化率, 相对变化率**
- **指数函数**
  指数增长与下降, 增长率, 数 e, 连续增长率, 倍增时间, 半衰期, 复利, 在相等的时间内增长相等的百分数.
- **自然对数函数**
- **由旧函数得到的新函数**
  复合, 移位, 伸缩.
- **幂函数和比例**
- **多项式**
- **周期函数**
  正弦, 余弦, 振幅, 周期.

复 习 题

1. 指出图 1-105 中的图形分别与下面哪个故事最匹配[1]? 对剩余的图形写出与之匹配的故事.
   (a) 我刚离开家的时候就意识到忘记带书, 于是就回去取书了.
   (b) 轮胎没瘪之前情况一直很好.
   (c) 我刚出发的时候还很平静, 但当意识到要迟到的时候就加速了.







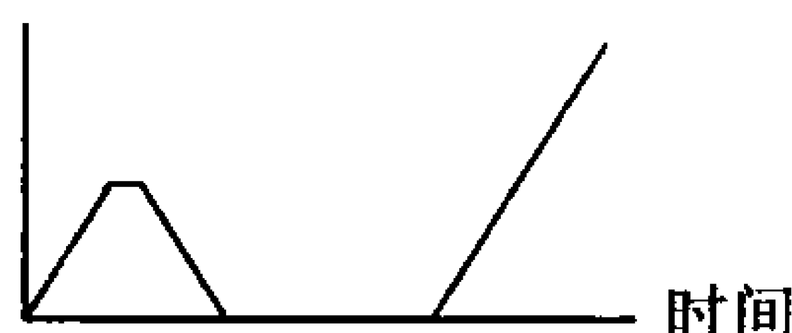


图 1-105

2. 美国首都华盛顿的人口从 1900 年到 1950 年是增长的, 在 20 世纪 50 年代几乎保持不变, 从 1960 年左右到 2000 年减少. 人口是 1900 年以来年数的函数, 作出其图形.
3. 整个上午天气很温暖, 在中午前后突然冷得很, 还下起了暴雨. 暴雨过后, 日落之前天气也很温暖. 作出温度作为时间的函数略图.
4. 地下 6m 深的储油罐出现一个小漏缝. 汽油渗出并且污染了周围的土壤. 作出污染量作为地下深度 (m) 的函数图形.
5. (a) $r = f(p)$ 的图形如图 1-106 所示. 当 p 为 0 时 r 的值是多少? 当 p 为 3 的时候呢?
   (b) $f(2)$ 是多少?
6. 苹果园的产量 Y(单位是蒲式耳[2]) 是果园中施用的化肥数量 a(lb) 的函数, 其图形如图 1-107 所示.



图 1-106

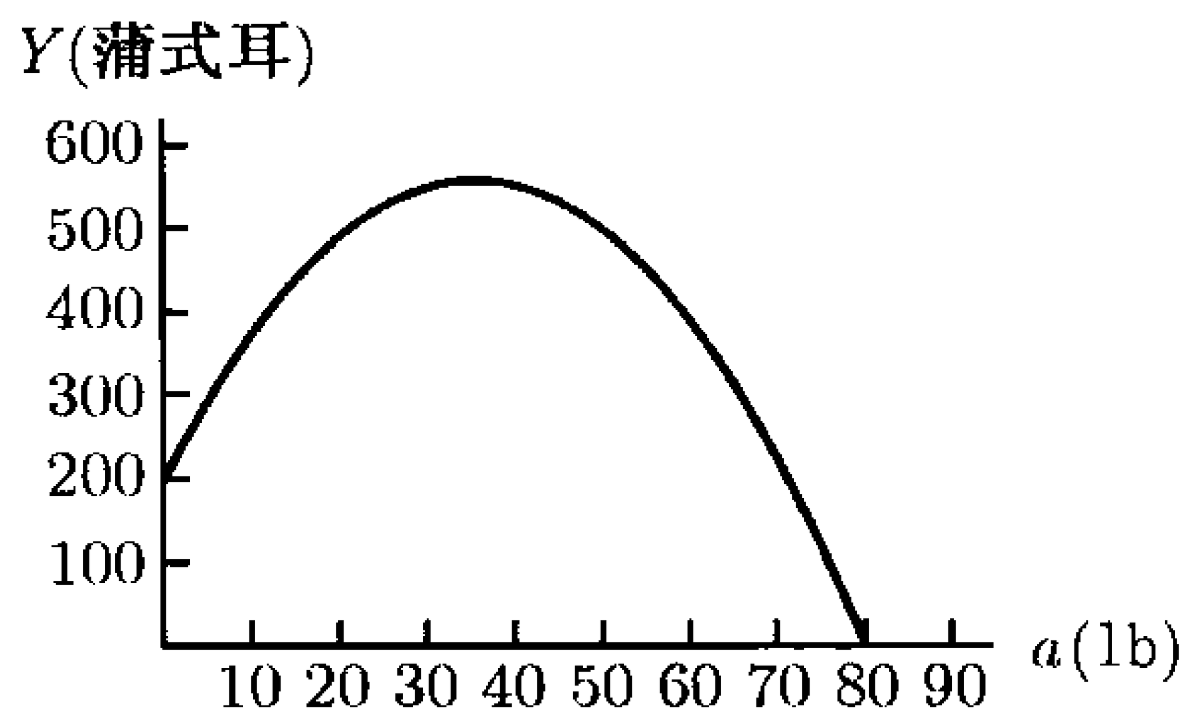


图 1-107

① 引自 Jan Terwel, "中等教育合作小组中的现实数学". 数学中的合作学习, Neal Davidson 编写, 第 234 页 (Reading: Addison Wesley , 1990). (Reading City 是英国的一座城市. —— 译者注)
② 蒲式耳 (bushel) 是美国的谷物测量单位, 1 蒲式耳 =35.24 公升. —— 编者注

(a) 描述化肥的数量对果园产量的影响.

(b) 垂直截距是多少? 从苹果和化肥角度说明它的含义.

(c) 水平截距是多少? 从苹果和化肥角度说明它的含义.

(d) 该函数在区间 $0 \leqslant a \leqslant 80$ 上的值域是什么?

(e) 在 $a=60$ 时函数是递增的还是递减的?

(f) 接近 $a=40$ 时该图形是上凹的还是下凹的?

7. 设 $y=f(x)=3x-5$.

(a) $f(1)$ 是多少?

(b) 求 x 为 5 时 y 的值.

(c) 求 y 为 4 时 x 的值.

(d) 求 f 在 $x=2$ 和 $x=4$ 之间的平均变化率.

在习题 8~11 中求过定点的直线方程.

8. (0, −1) 和 (2, 3)

9. (−1, 3) 和 (2, 2)

10. (0, 2) 和 (2, 2)

11. (−1, 3) 和 (−1, 4)

12. 求符合下表中值的线性方程.

x	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
y	27.8	29.2	30.6	32.0	33.4

13. 美国贫困线以下人口的百分数[①] P 如下表所示. 求一个线性函数公式表示这个百分数作为 2000 年以来的时间函数.

年 (2000 年以来)	0	1	2	3
P(百分数)	11.3	11.7	12.1	12.5

14. 靠市政供水的枫树林镇的居民每年所需的支付包括固定数额的费用加上每立方英尺所用的水的费用. 一个住户用 1000 立方英尺的水需支付 90 美元, 而另一个用户用 1600 立方英尺的水需支付 105 美元.

(a) 每立方英尺水的收费是多少?

(b) 写出居民用水的总费用作为所用水的立方英尺的函数方程.

(c) 多少立方英尺的用水需要支付 130 美元.

15. 华氏温度 (°F) 作为摄氏温度 (°C) 的函数图形是一条直线. 你知道 212°F 和 100°C 两个都表示水沸腾的温度. 类似地, 32°F 和 0°C 两者都表示所谓的冰点.

(a) 图形的斜率是多少?

(b) 直线方程是什么?

(c) 用这个方程求出多少华氏温度对应于 20°C.

(d) 什么温度在摄氏温度和华氏温度中的度数是相同的?

16. 图 1-108 中的图形表示在 $t=0$ 时放入烤箱中的四块面包的温度 H, 每块面包放入一

① 《2005 年世界年鉴》, 第 128 页 (纽约).

个烤箱.

(a) 哪条曲线对应于放入最热的烤箱中的面包?

(b) 哪条曲线对应于面包放入时烤箱温度最低的那块面包?

(c) 哪两条曲线对应于面包放入时烤箱温度相同的那两块面包?

(d) 用一句话描述 (II) 和 (III) 所示的曲线之间的差异. 从面包的角度分析, 什么原因可能引起这种差异?

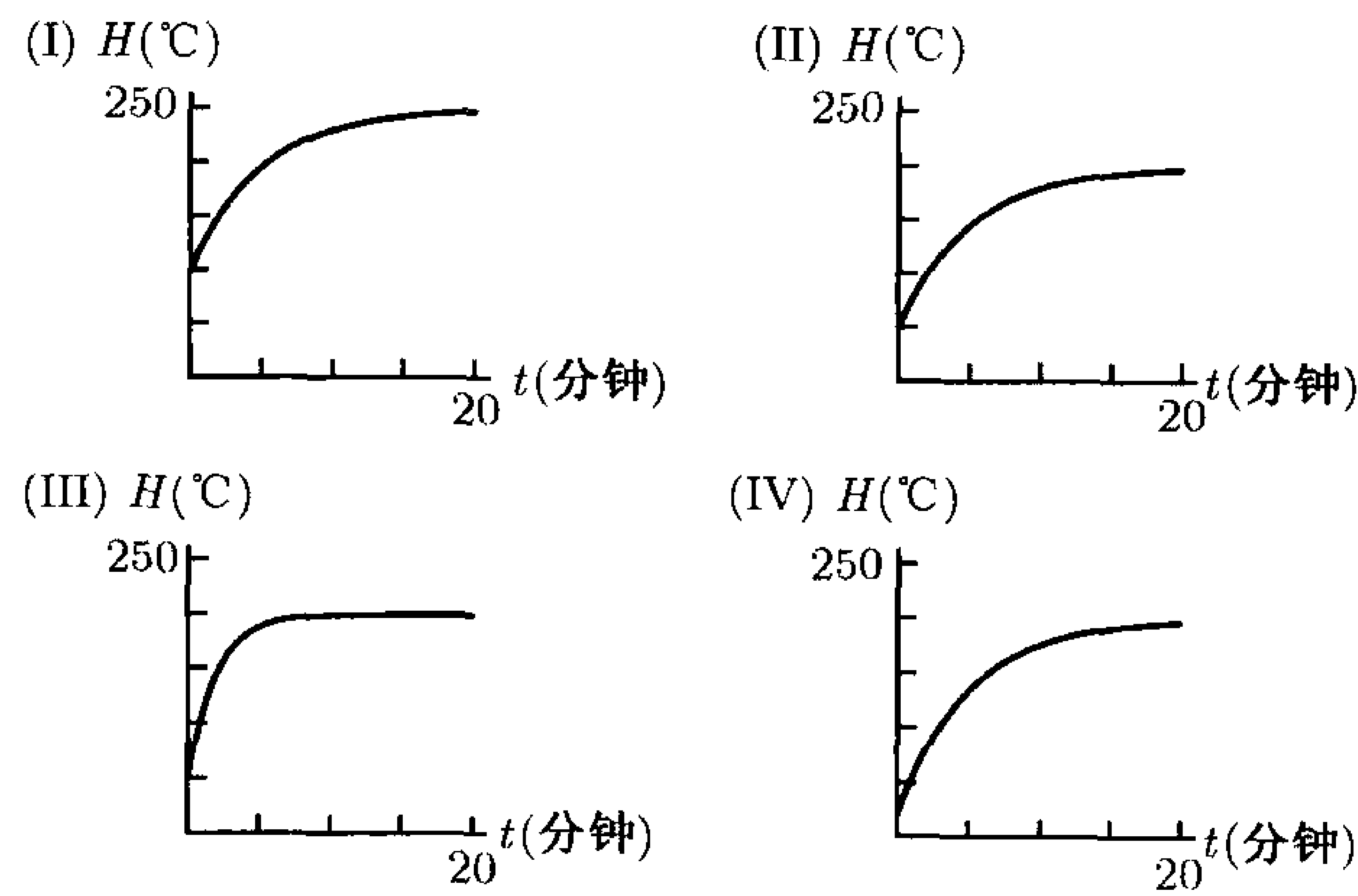


图 1-108

17. 你以不变的速度驾车从芝加哥驶往底特律, 二者之间的距离是 275 mile. 大约离芝加哥 120 mile 时, 你经过了密歇根的卡拉马祖. 你离卡拉马祖的距离是时间的函数, 作出其略图.

18. 下表表示世界自行车产量[①].

(a) 求 1950~2000 年自行车产量的变化量. 给出单位.

(b) 求 1950~2000 年自行车产量的平均变化率. 给出单位并用自行车产量解释你的答案.

年	1950	1960	1970	1980	1990	2000
自行车 (百万辆)	11	20	36	62	92	101

19. 下表表示 Gap 公司的净销售额, 其开办了近 3000 家服装商店[②].

(a) 求 2000~2003 年净销售额的变化量.

(b) 求 2000~2000 年净销售额的平均变化率. 给出单位并解释你的答案.

(c) 从 1998~2003 年, 是否有平均变化率为负的一年? 如果有, 是什么时候?

年	1998	1999	2000	2001	2002	2003
销售额 (百万美元)	9054	11 635	13 673	13 848	14 455	15 854

20. 求函数 $f(x) = 3x^2 + 4$ 在 $x = -2$ 和 $x = 1$ 之间的平均变化率. 用图形说明你的答案.

① www.earth-policy.org/Indicators/indicator11_data1.htm, 访问日期 2005 年 4 月 19 日.

② www.gapinc.com/financmedia/AR_proxy.htm, 访问日期 2005 年 2 月 2 日.

21. 下表表示出席 NFL 美式足球比赛的人数 (百万人)[①].

(a) 求 1999~2003 年出席比赛人数的平均变化率. 给出单位.

(b) 求 1999~2003 年出席比赛人数的每年年增长量. (你的答案应该是四个数.)

(c) 说明 (a) 中所求的平均变化率是 (b) 中所求的四年变化量的平均数.

年	1999	2000	2001	2002	2003
出席人数 (百万人)	20.76	20.95	20.59	21.51	21.64

22. 作出下列函数的合理的图形. 要特别注意图形的凹性.

(a) 汽车租赁业务产生的总收益关于花费在广告上的金额.

(b) 室内的一杯热咖啡的温度作为时间的函数.

23. 下表中的函数 g, h, k 每个都是递增的, 但是各自的递增方式都不同. 图 1-109 中最适合每个函数的图形是哪个?

t	$g(t)$	$h(t)$	$k(t)$
1	23	10	2.2
2	24	20	2.5
3	26	29	2.8
4	29	37	3.1
5	33	44	3.4
6	38	50	3.7

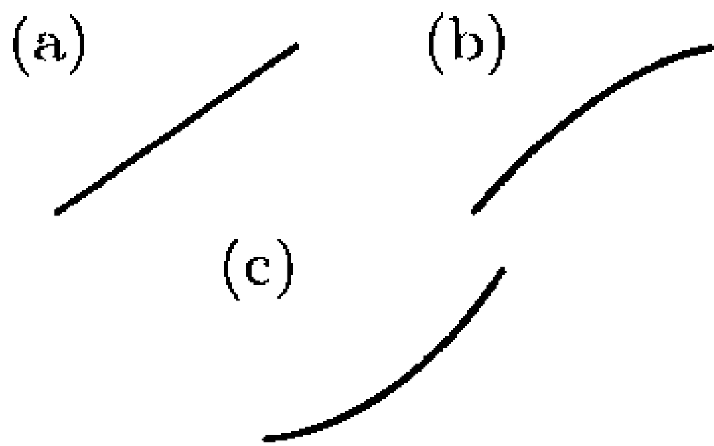
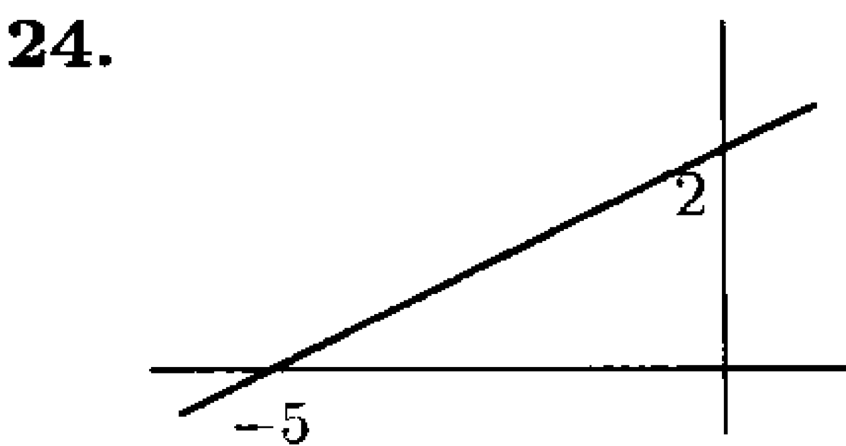


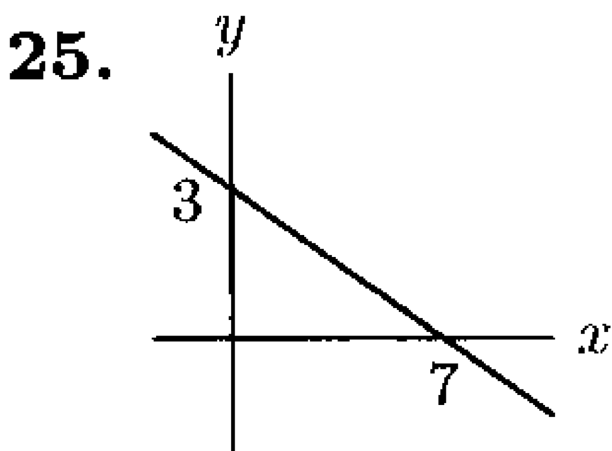
图 1-109

在习题 24~29 中求图形的恰当公式.

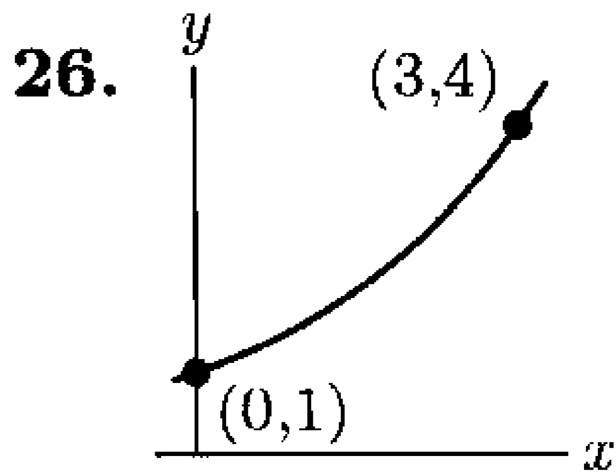
24.



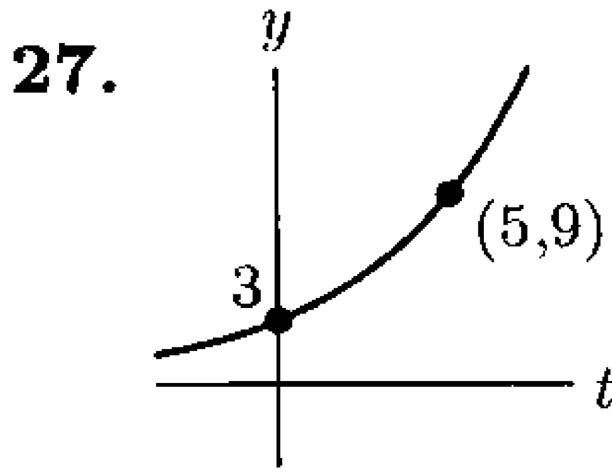
25.



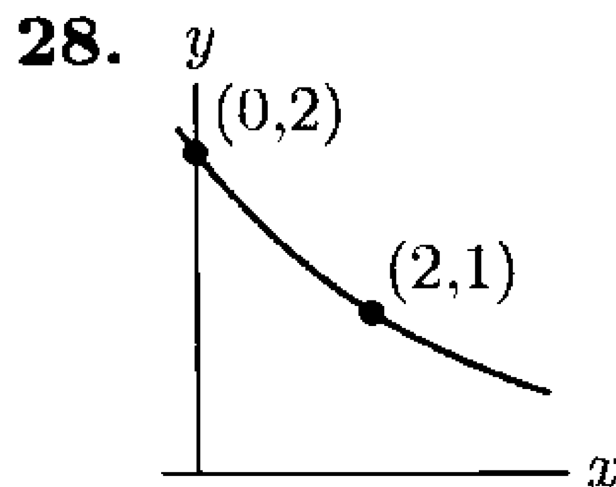
26.



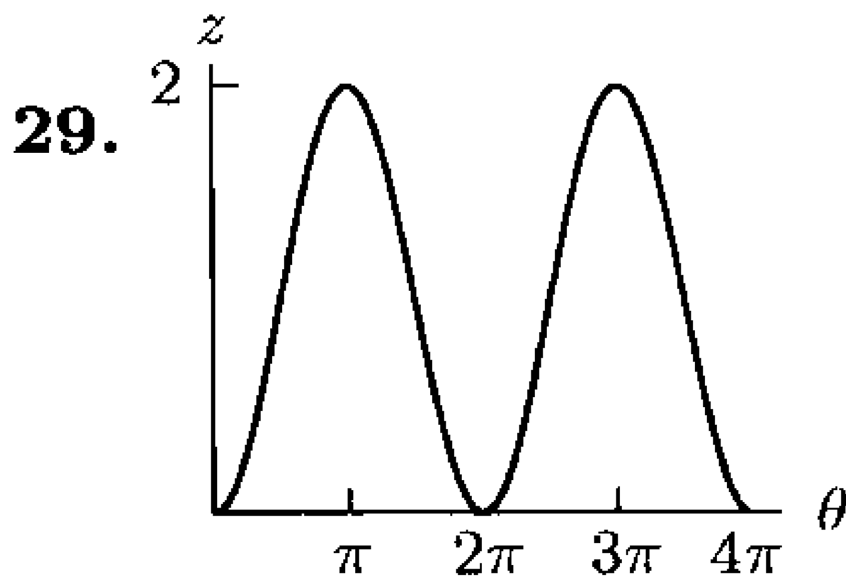
27.



28.



29.



30. 求下列每个函数在 $x = 0$ 和 $x = 10$ 之间的平均变化率: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$. 哪个的平均变化率最大? 作出四个函数的图形, 并画出斜率表示这些平均变化率的直线.

① 《2004–2005 年美国统计摘要》, 表格 1239.

31. 在有限空间内动物总数的增长率 R 与目前总数 P 和下面两个量之差的乘积成比例，这两个量是承受能力 L 和目前的总数. (承受能力是环境能够供养的最大的动物总数.)

(a) 写出 R 作为 P 的函数.

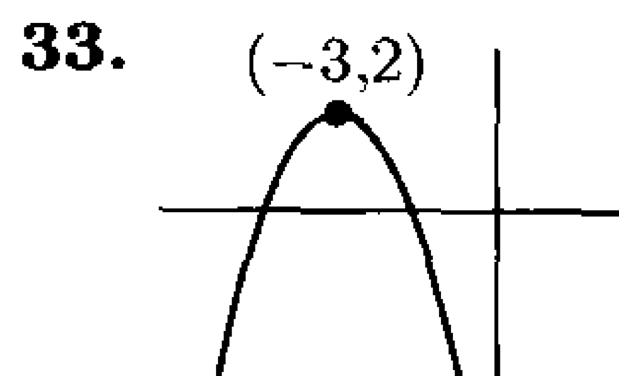
(b) 作出 R 作为 P 的函数略图.

32. 下表给出三个函数的值. 哪个函数可能是线性的? 哪个可能是指数函数? 哪个可能都不是? 对可能是线性的和指数的函数给出其恰当的函数公式.

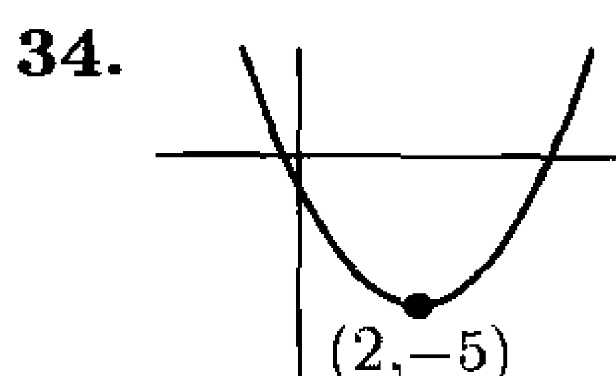
x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
0	25	30.8	15 000
1	20	27.6	9 000
2	14	24.4	5 400
3	7	21.2	3 240

在习题 33~34 中, 利用幂函数的移位求出与图形对应的函数公式.

33.



34.



在习题 35~38 中, 利用对数求解 x.

35. $3^x = 11$ **36.** $20 = 50x(1.04)^x$

37. $e^{5x} = 100$ **38.** $25e^{3x} = 10$

39. 将指数函数 $P = e^{0.08t}$ 和 $Q = e^{-0.3t}$ 改写成 $P = a^t$ 和 $Q = b^t$ 的形式.

40. 如果 $h(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, 求

(a) $g(h(x))$ (b) $h(g(x))$

(c) $h(h(x))$ (d) $g(x) + 1$

(e) $g(x + 1)$

41. 设 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \ln x$. 求下列每个函数的公式.

(a) $g(f(x))$ (b) $f(g(x))$ (c) $f(f(x))$

42. 对于 $f(n) = 3n^2 - 2$ 和 $g(n) = n + 1$, 求出并且化简:

(a) $f(n) + g(n)$

(b) $f(n)g(n)$

(c) $f(n)/g(n)$ 的定义域

(d) $f(g(n))$

(e) $g(f(n))$

利用 $m(z) = z^2$ 化简习题 43~46 中的量.

43. $m(z + 1) - m(z)$ **44.** $m(z + h) - m(z)$

45. $m(z) - m(z - h)$ **46.** $m(z + h) - m(z - h)$

对习题 47~48, 确定函数 f 和 g 使得 $h(x) = f(g(x))$. [注意: 正确答案不止一个. 不允许取 $f(x) = x$ 或者 $g(x) = x$.]

47. $h(x) = (x + 1)^3$ **48.** $h(x) = x^3 + 1$

49. 公共游乐场每人收取 7 美元的入场费, 每件玩具还要收取 1.50 美元的附加费.

(a) 对一个参观者求游乐场的总收益 $R(n)$ 作为使用的玩具数 n 的函数公式.

(b) 求 $R(2)$ 和 $R(8)$ 并从公共游乐场的收费角度解释你的答案.

50. 制造阿迪朗达克 (Adirondack) 座椅公司的固定成本是 5000 美元, 而且每把椅子的可变成本是 30 美元. 公司每把椅子卖 50 美元.

(a) 求成本函数和收益函数公式.

(b) 求边际成本和边际收益.

(c) 在同一个坐标系中作出成本函数和收益函数的图形.

(d) 求收支平衡点.

51. 影印公司有两种不同的收费标准. 第一个收费标准是 100 美元加上每个复印件 3 美分; 第二个收费标准是 200 美元加上每个复印件 3 美分.

(a) 对每个收费标准求成本作为需要复印的件数的函数公式.

(b) 对于 5000 个复印件确定哪个收费标准更便宜.

(c) 多少数量的复印件两个收费标准收取的金额是一样的?

52. 你在苏打水和防晒油上的消费预算是 k 美元, 它们的价格分别是每升 p_1 美元和 p_2 美元.

(a) 写一个方程表示当你将预算全部用完时, 你所能购买的苏打水数量和防晒油数量之间的关系. 这就是你的预算约束.

(b) 假设你可以购买分数升, 作出预算约束的图形. 标出截距.

(c) 假设你的预算翻倍, 在同一个坐标系中作出新的预算约束图形.

(d) 对于 k 美元的预算, 防晒油的价格翻倍. 在同一个坐标系中作出新的预算约束图形.

53. 企业办公室提供了如图 1-110 所示的需求曲线, 这是他们的冰淇淋专卖店的需求曲线. 以每勺 1.00 美元的价格, 每天可以卖出 240 勺.

(a) 每勺的价格为 50 美分, 估计每天可以卖出多少勺. 说明理由.

(b) 每勺的价格为 1.50 美元, 估计每天可以卖出多少勺. 说明理由.

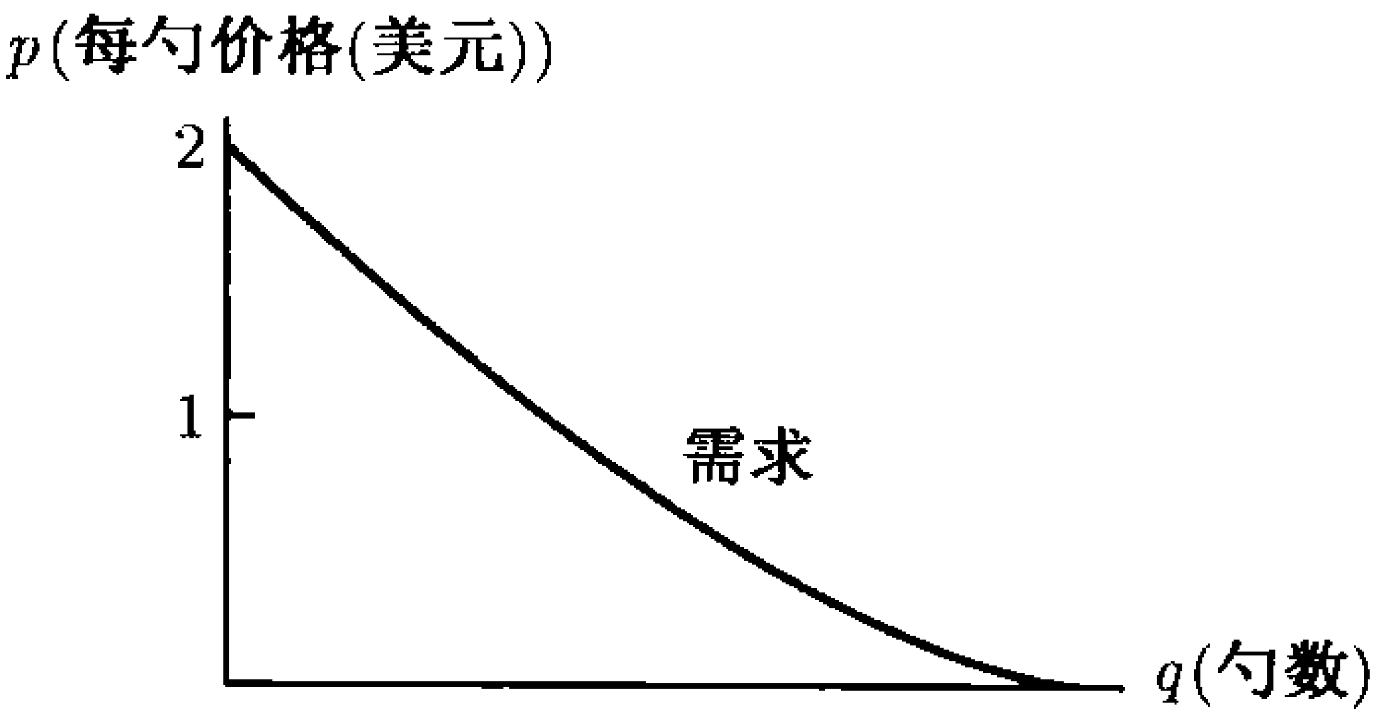


图 1-110

54. 图 1-111 表示供给和需求曲线.

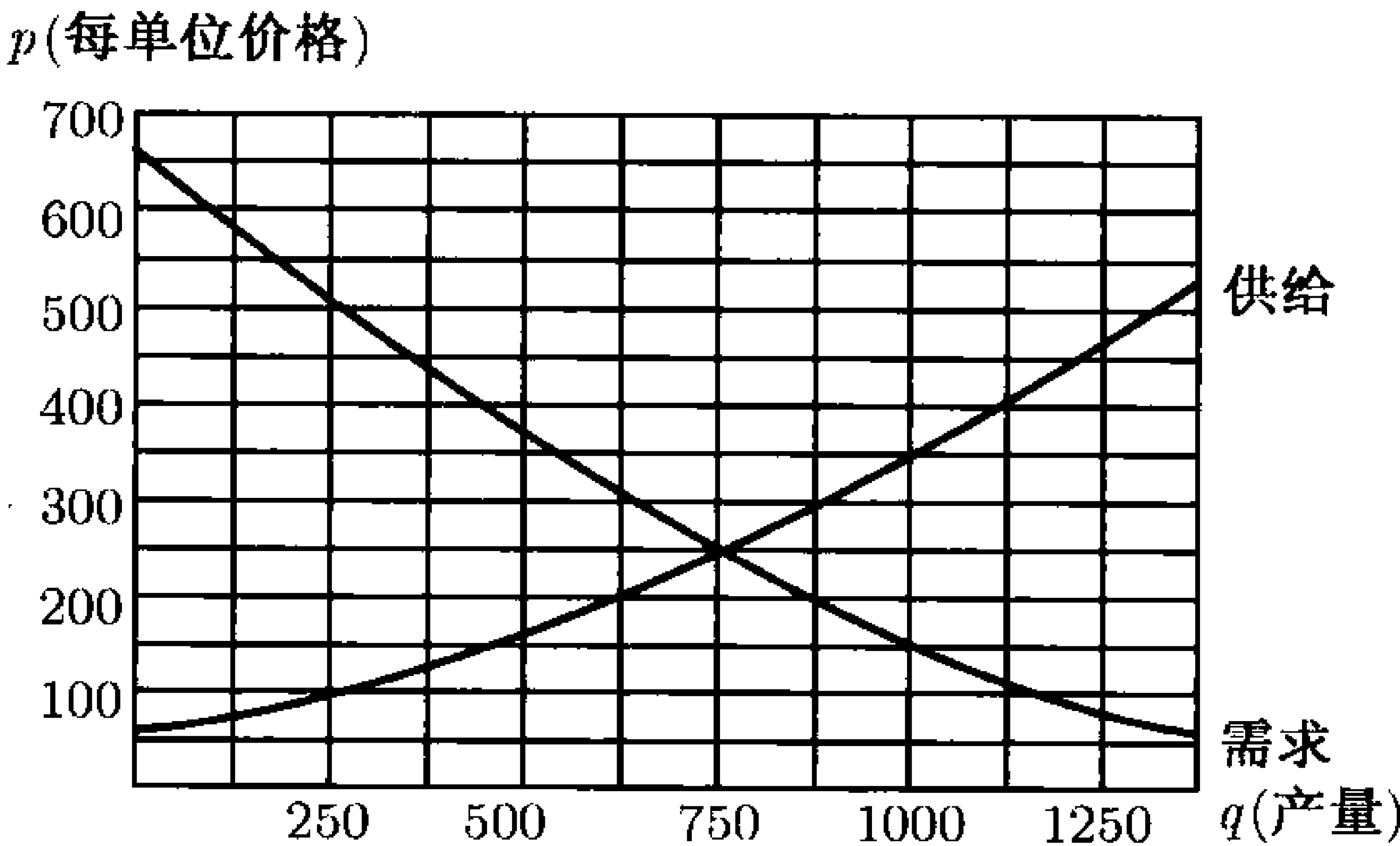


图 1-111

(a) 这个产品的均衡价格是多少? 在这个价格下的产量是多少?

(b) 选择一个价格在均衡价格之上, 例如, $p = 300$. 在这个价格, 供应商乐意生产的商品是多少? 消费者需要买的商品是多少? 用你对这个问题的答案说明, 为什么当价格在均衡价格之上时市场有助于将价格向下推 (推向均衡价格).

(c) 选择一个价格在均衡价格之下, 例如, $p = 200$. 在这个价格, 供应商乐意生产的商品是多少? 消费者需要买的商品是多少? 用你对这个问题的答案说明, 为什么当价格在均衡价格之下时市场有助于将价格向上推 (推向均衡价格).

55. 已知在 2003 年初有 2700 只斑纹贻贝, 在 2004 年初有 3186 只斑纹贻贝, 求海湾中斑纹贻贝总数作为 2003 年以来的年数的函数公式.

(a) 假设斑纹贻贝数是线性增长的. 给出该直线的斜率单位并用斑纹贻贝解释它.

(b) 假设斑纹贻贝数是指数增长的. 斑纹贻贝总数的增长百分率是多少?

56. 世界各地风能①发电容量 W, 1998 年是 13 559 兆瓦而 2003 年是 39 151 兆瓦.

(a) 用所给的值写出 W(兆瓦) 作为 1998 年以来的年数 t 的线性函数公式.

(b) 用所给的值写出 W 作为 t 的指数函数公式.

(c) 在同一个坐标系中作出 (a) 和 (b) 所求的函数图形. 标出所给的值.

57. 如果世界人口按指数从 1980 年的 44.78 亿增长到 1991 年的 54.23 亿, 而且在 1991~2004 年以相同的百分率连续增长, 计算 2004 年世界人口会是多少. 这与实际人口 63.78 亿如何比较, 你能得出什么结论?

58. 当 1968 年奥运会运动会在墨西哥城外举行的时候, 人们对它如此高的海拔高度 (7340 ft) 可能会对运动员产生影响议论纷纷. 假设大气压每上升 100 ft 指数地下降 0.4%, 如果从海平面走到墨西哥城, 大气压减少的百分比是多少?

59. 住房的中间价格 P 从 1980 年的 60 000 美元上升到 2000 年的 180 000 美元. 设 t 表示 1980 年以来的年数.

(a) 假设房屋价格一直是线性增长的. 给出用 t 表示价格 P 的直线方程. 用这个方程完成下表中的 (a) 列. 以千美元为单位.

(b) 如果房屋价格一直是指数增长的, 求一个形如 $P = P_0 a^t$ 的公式表示房屋价格. 完成下表中的 (b) 列.

(c) 在同一个坐标系中作出表示在下表中 (a) 列和 (b) 列的函数图形.

(d) 你认为价格增长的哪个模型更符合实际?

t	(a) 线性增长, 价格以千美元为单位	(b) 指数增长, 价格以千美元为单位
0	60	60
10		
20	180	180
30		
40		

60. (a) 人口 P 以 2% 的连续年增长率增长, 并且以 1 百万为起点. 将 P 写成 $P = P_0 e^{kt}$ 的形式, 其中 P_0 和 k 是常数.

① www.wwindea.org/wind_energy.htm, 访问日期 2005 年 4 月 24 日.

(b) 描绘 (a) 中人口关于时间的图形.

61. (a) $P = 10e^{0.15t}$ 的连续增长百分率是多少?

(b) 将这个函数写成 $P = P_0a^t$ 的形式.

(c) 这个函数的年 (不是连续) 增长百分率是多少?

(d) 在同一个坐标系中作出 $P = 10e^{0.15t}$ 和 (b) 中答案的图形. 说明你所看到的.

62. 一种放射性物质的半衰期是 12 天. 最初有 10.32 g.

(a) 写一个表示该物质的数量 A 作为时间的函数方程.

(b) 何时该物质减少到 1 g?

63. 大气压 P 随着海拔高度 h(m) 指数地递减:

$$P = P_0e^{-0.00012h}$$

其中 P_0 是海平面上的大气压.

(a) 在麦金利峰 (Mount McKinley) 顶, 高度 6194m(约为 20 320 ft), 它的大气压是海平面的百分之多少?

(b) 普通商业喷气式飞机的最大巡航高度是 12 000m(约为 39 000 ft). 在这个高度的大气压是海平面的百分之多少?

64. 一种放射性物质的半衰期是 8 年. 如果最初提供的是 200 g, 那么到 12 年年底还剩下多少? 多久还剩下原来数量的 10%?

65. 核事故 (例如在切尔诺贝利) 主要污染物之一是锶 90, 它每年以将近 2.5% 的速度指数地减少.

(a) 将锶 90 残留物的百分数 P 表示成核事故以来的年数 t 的函数. [提示: $t = 0$ 时的污染物残留是 100%.]

(b) 作出 P 关于 t 的图形.

(c) 估计锶 90 的半衰期.

(d) 切尔诺贝利灾难后, 据预测, 该区域至少 100 年内人类居住会不安全. 估计这个时候原来的锶 90 残留物的百分数.

66. 全世界感染 HIV 且还活着的人数近似地从 1985 年的 2.5 百万指数地增长到 2003 年的 37.8 百万①. (HIV 是引起艾滋病的病毒.)

(a) 给出感染 HIV 的人数 H(百万) 作为 1985 年以来的年数 t 的函数公式. 用 $H = H_0e^{kt}$ 的形式. 作出这个函数的图形.

(b) 1985~2003 年感染 HIV 人数的年连续变化量的百分数是多少?

67. 指数增长的细菌菌落的规模 5 个小时就翻倍. 细菌数增至 3 倍需要多长时间?

68. 利息是年复合的. 考虑如下对你支付的选项:

选项 1: 现在是 1500 美元而从现在起的一年后是 3000 美元

选项 2: 现在是 1900 美元而从现在起的一年后是 2500 美元

(a) 如果每年的存款利率是 5%, 你会更喜欢哪一种?

(b) 是否有一种利率会导致你作出不同的选择? 说明理由.

69. 某人工作一年获得 2000 美元. 考虑 3 种支付选项. 选项 1 是现在付清 2000 美元. 选项 2 是现在付给 1000 美元, 一年内再付给 1000 美元. 选项 3 是一年内付清 2000 美元.

---

①《2005 年世界年鉴》, 第 89 页 (纽约).

假设每年连续复利的年利率是 5%.

(a) 不要做任何计算, 对这个工人来说最佳的金融选择是哪个选项? 说明理由.

(b) 求一年时间所有 3 个选项的将来值.

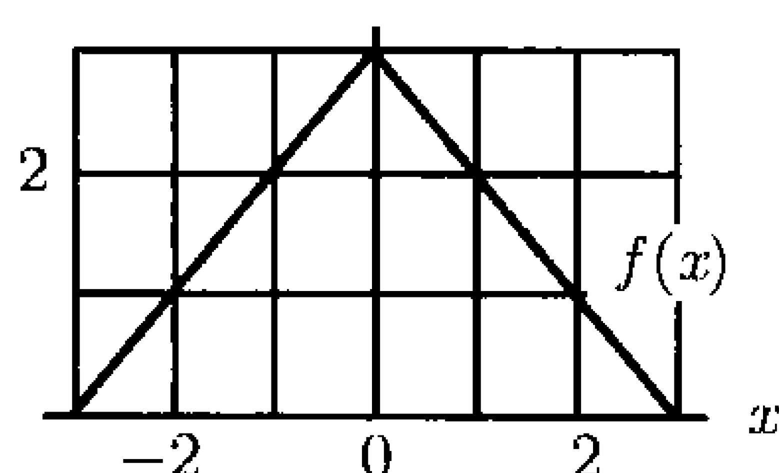
(c) 求所有 3 个选项的现值.

70. 利用图 1-112 求 $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$ 时, $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 的值. 然后作出 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$ 的图形.

71. Heaviside 阶梯函数 H 如图 1-113 所示. 作出如下函数的图形.

(a) $2H(x)$ (b) $H(x)+1$ (c) $H(x+1)$

(d) $-H(x)$ (e) $H(-x)$



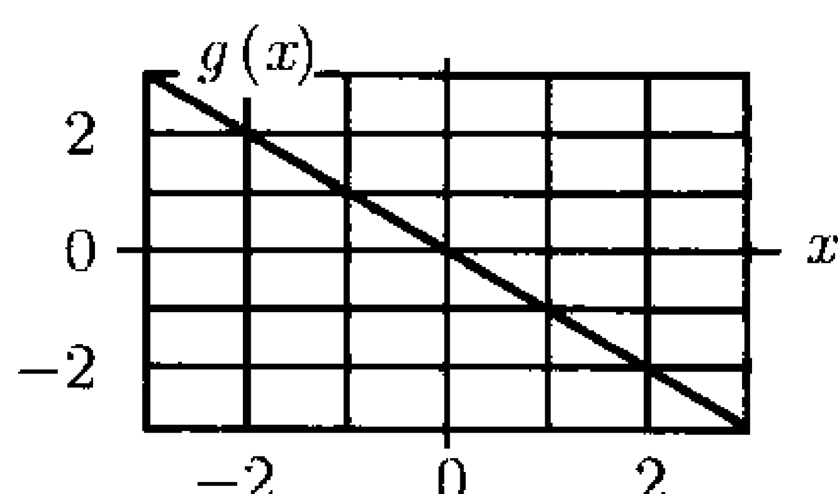


图 1-112

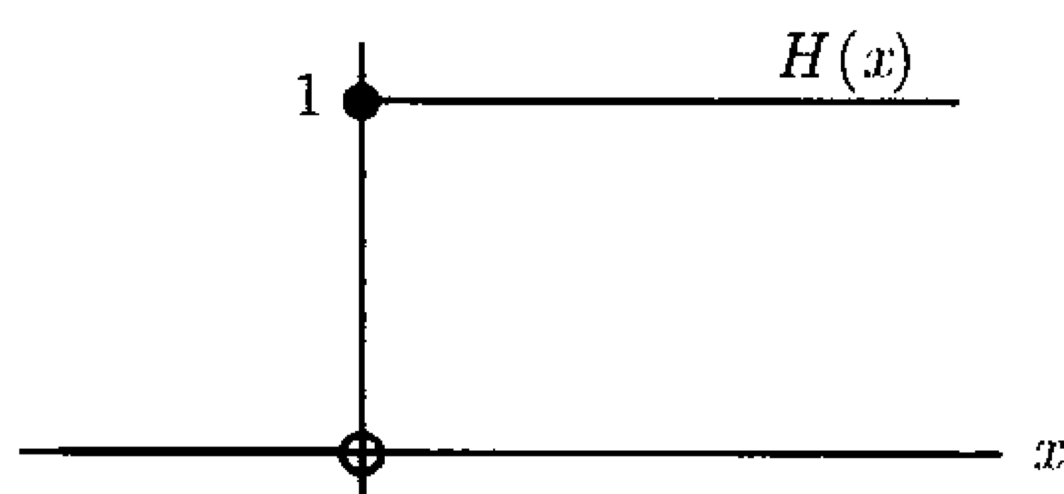


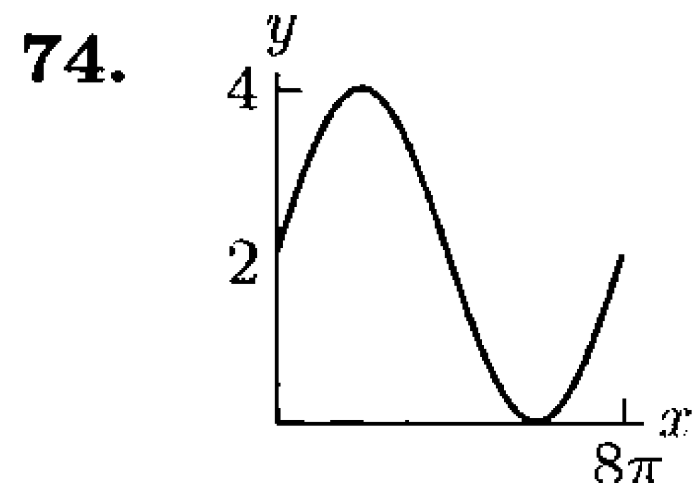
图 1-113

72. 某动物的总数周期地变化, 其最低值是 1 月 1 日的 700 而最高值是 7 月 1 日的 900. 作出该总数关于时间的图形.

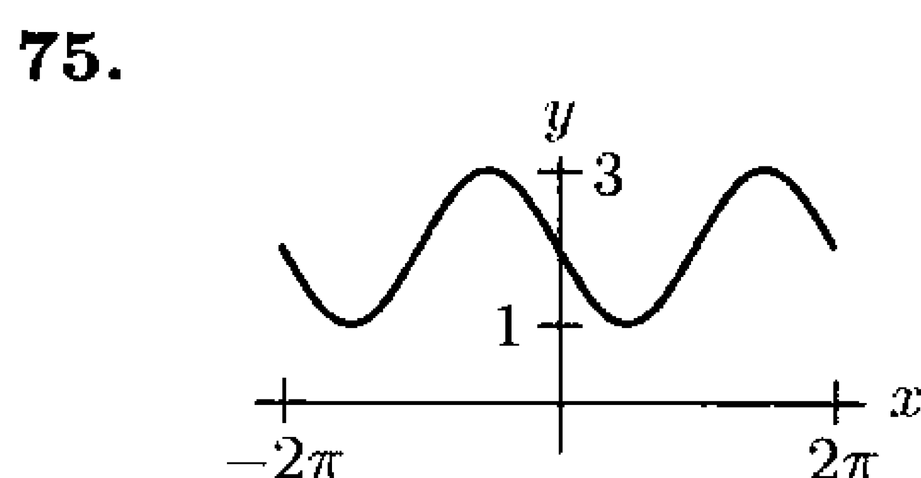
73. 当汽车发动机的引擎每分钟旋转少于 200 圈时它就停止了. 汽车将要停止时引擎旋转一圈的周期是多少?

求习题 74~75 中每个图形的恰当公式.

74.



75.



76. 图 1-114 表示在 1997~1999 年啤酒的季度产量. 1 季度反映当年前三个月的产量, 等等.[①]

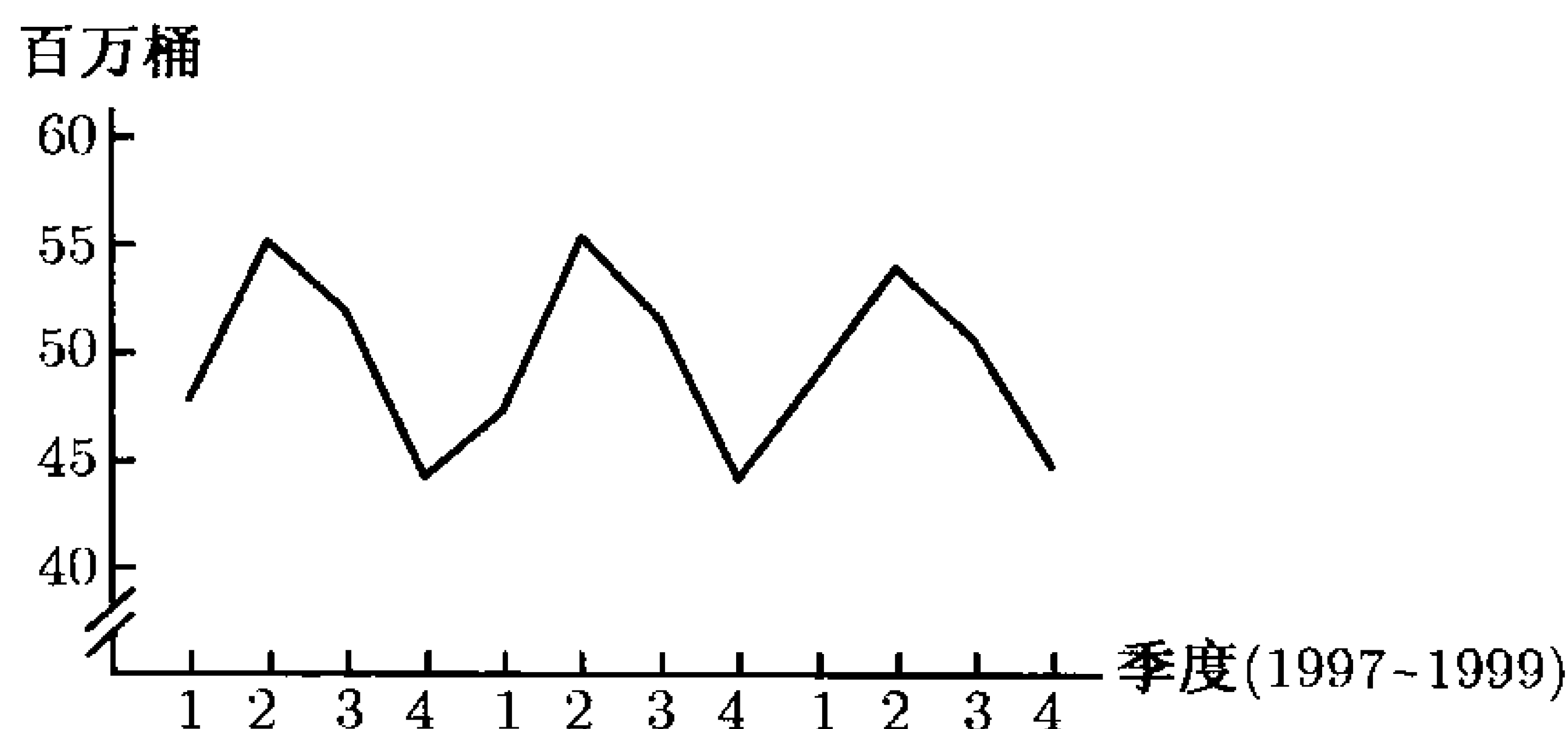


图 1-114

① www.beerinstitute.org/pds/PRODUCTION_AND_WITHDRAWALS_OF_MALT_BEVERAGES_1997_1999.pdf, 访问日期 2005 年 5 月 7 日.

(a) 说明为什么可以用一个周期函数来模拟这些数据.

(b) 大约在什么时候会出现最大值? 最小值呢? 这是什么道理?

(c) 这些数据的周期和振幅是什么?

77. 在一户美国家庭, 一个电源插座中的电压 (V) 由

$$V = 156\sin(120\pi t)$$

给出, 其中 t 的单位是秒. 然而在一户欧洲家庭, 电压 (单位相同) 由

$$V = 339\sin(100\pi t)$$

给出. 比较两个地区的电压, 考虑最大电压和每秒的循环 (振荡) 次数.

课外自修项目

1. 复利

下面报纸上的文章引自 1990 年 5 月 27 日的《纽约时报》. 填三个空. (对于第一个空, 假设日复合基本上与连续复合一样. 对于最后一个空, 假设利息一直是年复合的, 并且用美元给出答案. 忽略闰年.)

贷款 213 年后, 要催 Sam 叔叔还债了

LISA BELKIN

纽约时报特约记者

圣安东尼奥, 5 月 26 日——早在 200 年以前, 一位名叫 Jacob DeHaven 的宾夕法尼亚富商贷给大陆议会 450 000 美元, 营救困在福奇谷 (Valley Forge) 的部队. 那笔贷款显然从未归还.

因此 DeHaven 先生的后代准备向法院起诉美国政府, 讨回他们认为政府欠他们的债务.

如果利息是每天 6% 的复利, 这是当时的现行率, 那么总金额为: ________. 如果是年复利, 那么账单只有________.

家族是可变通的

后代们说关于结算金额他们乐意变通甚至可以只接受一句衷心的感谢或者一尊 DeHaven 的塑像. 但是他们也注意到利息是以每秒________累积的.

2. 美国人口中心

自从西部大开发, 美国人口开始向西部迁移. 为了看出这一点, 我们观察美国的 “人口中心”, 它是这样的一个点, 如果它是一个没有重量的平板而且每个人重量是相等的, 那么国家在这一点上会保持平衡. 1790 年人口中心在马里兰州巴尔的摩的东部. 此后其一直向西移动, 并且在 2000 年位于密苏里州的埃德加温泉内. 在 20 世纪后半叶, 人口中心每 10 年大约向西移动 50 mile.

(a) 让我们估计人口中心沿着经过巴尔的摩的直线向西离埃德加温泉的位置. 对于 2000 年以来的这些年, 将人口中心的近似位置表示成时间的函数.

(b) 从巴尔的摩到埃德加温泉的距离是 1000 mile 多一点. 粗略地说, 人口中心能够以与最近两个世纪相同的速度一直移动吗?

(c) (a)中的函数能够对接下来的四个世纪连续应用吗? 为什么能或者不能? [提示: 你也许需要查看地图. 注意, 这个距离是空中距离而不是驾驶距离.]

相 关 模 型

由数据拟合公式

本节我们考察在数学模型所用的公式是如何产生的. 我们所使用的一些公式是精确的. 然而我们所使用的许多公式是近似的, 它们经常是由数据来构造的.

由数据拟合一个线性函数

一个公司需要了解花在广告上的费用 a 和总销售额 S 之间的关系. 他们收集的数据如同表 1-12 所示.

表 1-12　广告费和销售额: 线性关系

a (广告费 (千美元))	3	4	5	6
S(销售额 (千美元))	100	120	140	160

表 1-12 中的数据是线性的, 所以公式能精确地拟合它. 直线的斜率是 20, 并且我们可以确定垂直截距是 40, 所以直线是

$$S = 40 + 20a.$$

现在假设该公司收集到表 1-13 中的数据. 这一次数据不是线性的. 一般来说, 找一个能够精确地拟合数据的公式是很困难的. 我们必须对能够很好地近似于数据的公式感到满意.

表 1-13　广告费和销售额: 非线性关系

a (广告费 (千美元))	3	4	5	6
S(销售额 (千美元))	105	117	141	152

图 1-115 显示了表 1-13 中的数据. 因为相互关系接近线性的, 尽管不是精确的, 它还是可以由一条直线很好地近似. 图 1-116 显示了直线 $S = 40 + 20a$ 和这些数据.

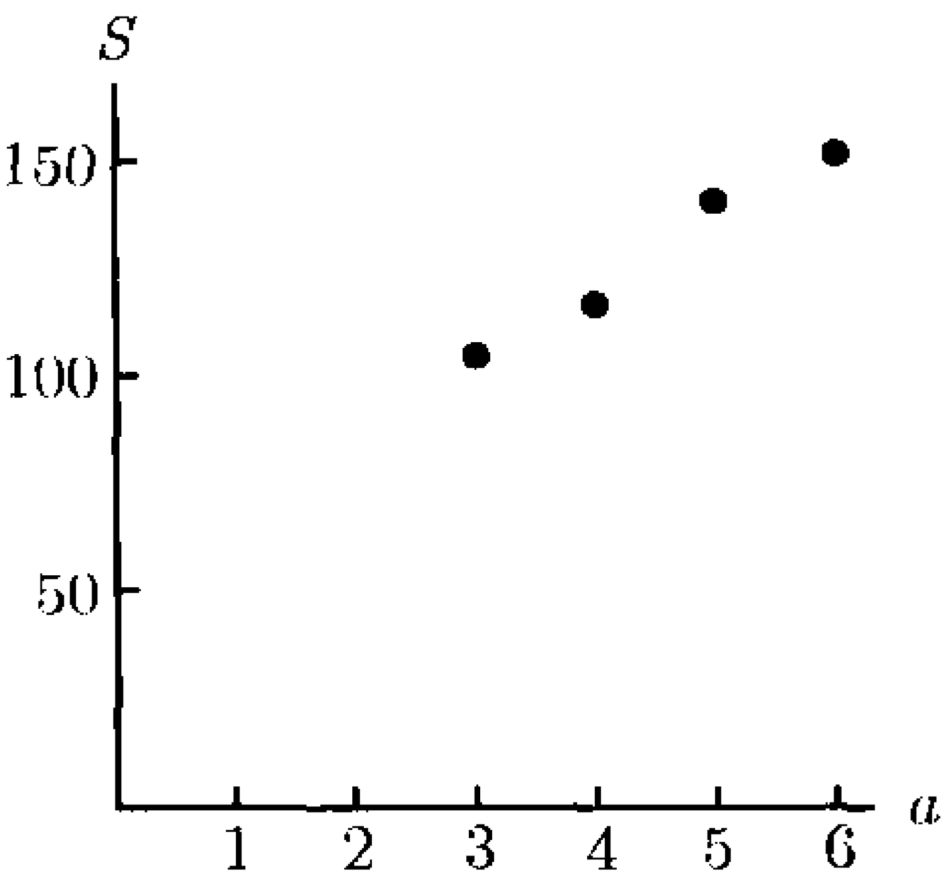


图 1-115　表 1-43 中的销售额数据

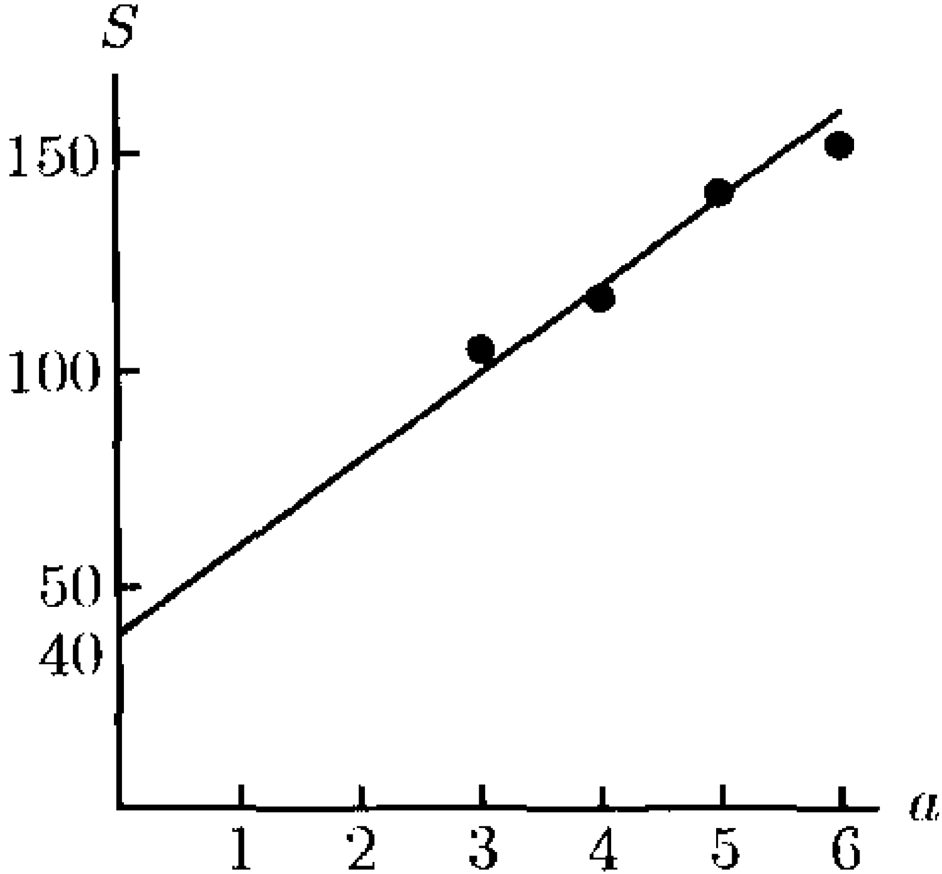


图 1-116　直线 $S = 40 + 20a$ 和表 1-43 中的数据

回归直线

是否存在一条直线拟合这些数据要比图 1-116 中的那条直线好呢? 如果有, 我们怎么找到它呢? 由一个数据集拟合一条直线的过程叫做线性回归, 并且最佳拟合直线叫做**回归直线**. (参见后面对 “最佳拟合” 含义的讨论.) 许多计算器和电脑程序都可以根据数据点计算回归直线. 另一种方法, 可以近似地得到回归直线, 就是在纸上描点作图 “用眼睛” 找出适合的直线. 在第 9 章, 我们能导出回归直线的公式. 对于表 1-13 中的数据, 其回归直线是

$$S = 54.5 + 16.5a.$$

该直线连同这些数据的图形如图 1-117 所示.

用回归直线作预测

我们可以用销售额作为广告费的函数公式作预测. 例如, 为了预测广告费为 3500 美元时的销售总额, 将 $a = 3.5$ 代入回归直线:

$$S = 54.5 + 16.5(3.5) = 112.25.$$

该回归直线预测销售总额为 112 250 美元. 为了看出这是合理的, 把它与表 1-43 中的账目进行比较. 当 $a = 3$ 时, 我们有 $S = 105$; 当 $a = 4$ 时, 我们有 $S=117$. 当 $a = 3.5$ 时预测销售额 $S = 112.25$ 是有道理的, 因为它落在 105 和 117 之间. 参见图 1-118. 当然, 如果我们在广告上花费 3500 美元, 销售额也许不是精确地为 112 250 美元. 回归方程允许我们作预测, 但不提供精确的结果.

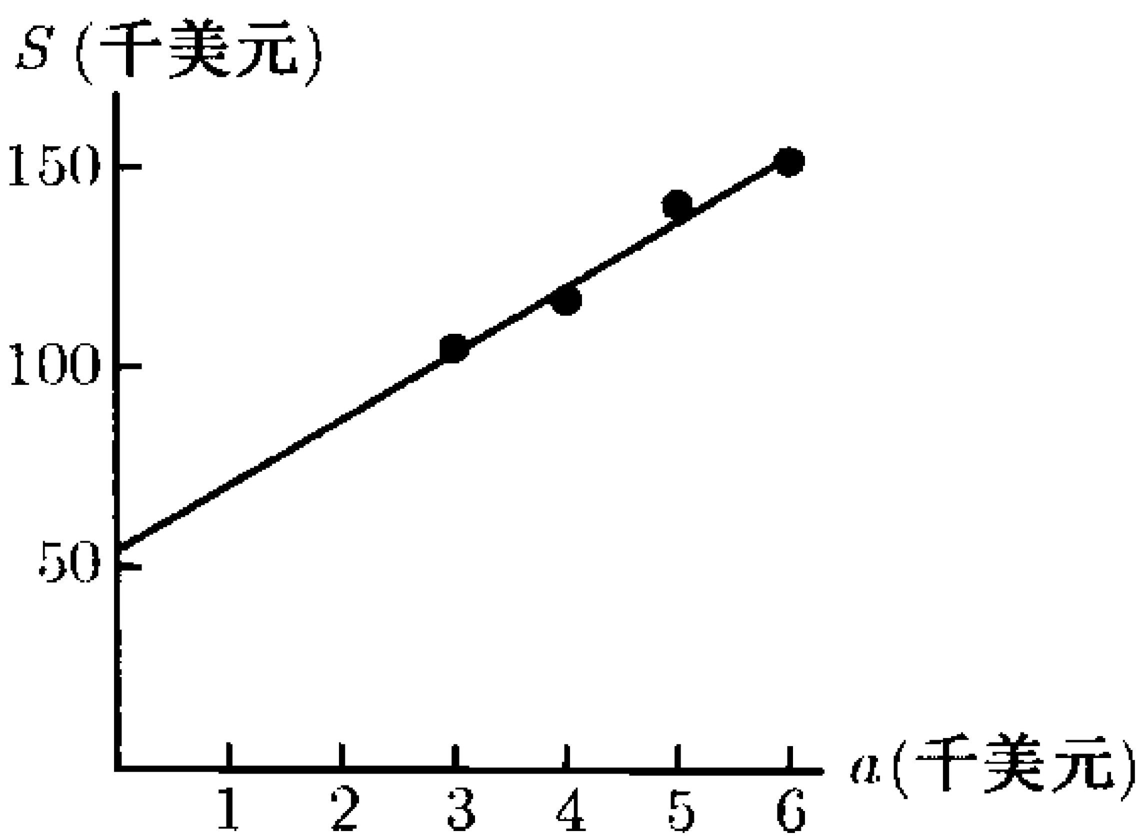


图 1-117 回归直线 $S = 54.5 + 16.5a$ 和表 1-43 中的数据

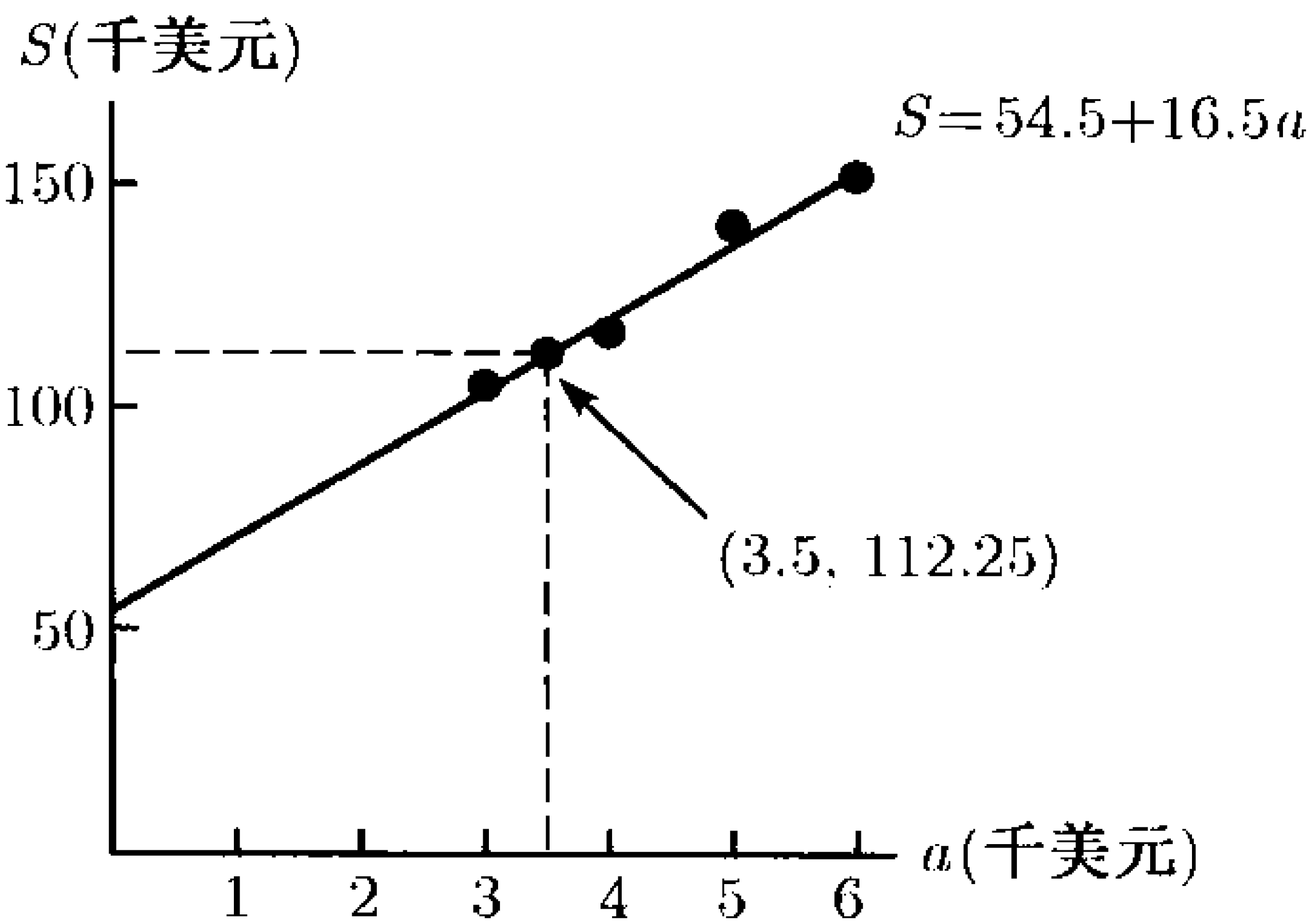


图 1-118 预测广告费为 3500 美元时的销售额

例 1 预测给定广告费为 4800 美元和 10 000 美元时的销售总额.

解 当 4800 美元花在广告上时, $a = 4.8$, 因此

$$S = 54.5 + 16.5(4.8) = 133.7.$$

预测的销售额为 133 700 美元. 当 10 000 美元花在广告上时, $a = 10$, 因此

$$S = 54.5 + 16.5(10) = 219.5.$$

预测的销售额为 219 500 美元. □

考虑例 1 中所作的 $a = 4.8$ 和 $a = 10$ 时的两个预测. 我们更相信 $a = 4.8$ 时预测的准确度, 因为我们是在一个区间内进行内插, 而这个区间内的一些事情我们已经知道. 对 $a = 10$ 的预测就不太可靠, 因为我们是在由表 1-43 中数据确定的区间外进行外推. 一般地, 内插比外推更可靠.

解释回归直线的斜率

线性函数的斜率是因变量的变化量除以自变量的变化量. 对于销售额和广告费的回归直线, 其斜率是 16.5. 这告诉我们, 每当 a 增加 1 时 S 就增加 16.5 左右. 如果广告费增加 1000 美元, 销售额就增加 16 500 美元左右. 一般地, 斜率告诉我们的是, 自变量一个单位变化量所产生的因变量的预测变化量.

如何回归: "最佳拟合" 的含义

图 1-119 描述了如何使得一条直线拟合一个数据集. 我们假设 y 的值按照某种方式与 x 的值有关, 尽管其他因素也可能影响 y. 因此, 我们假设可以精确地取 x 的值, 而 y 的值也许只是部分地由这个 x 值确定.

计算器或者电脑求得的直线是这样的直线, 它使得数据点与这条直线之间竖直距离的平方和达到最小. 参见图 1-119. 回归直线也叫做**最小二乘直线**或**最佳拟合直线**.

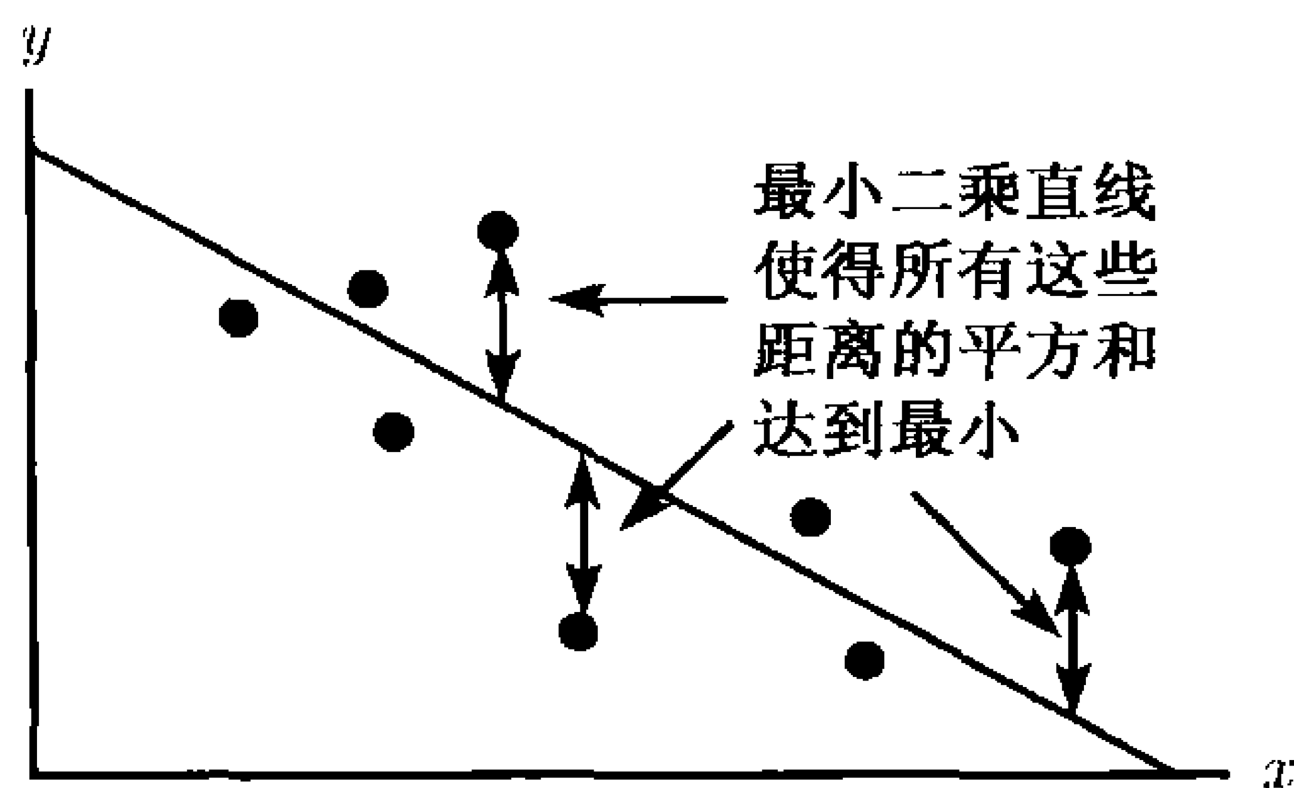


图 1-119 数据和相应的最小二乘回归直线

相关关系

当电脑或者计算器计算一条回归直线时, 它也给出了**相关系数** r. 这个数位于 -1 和 $+1$ 之间, 并且测量回归直线拟合数据的好坏. 如果 $r = 1$, 数据恰好位于一

条正斜率的直线上; 如果 $r=-1$, 数据恰好位于一条负斜率的直线上; 如果 r 靠近 0, 那么数据也许是完全分散的, 或者在变量之间存在一个非线性关系. (参见图 1-120.)

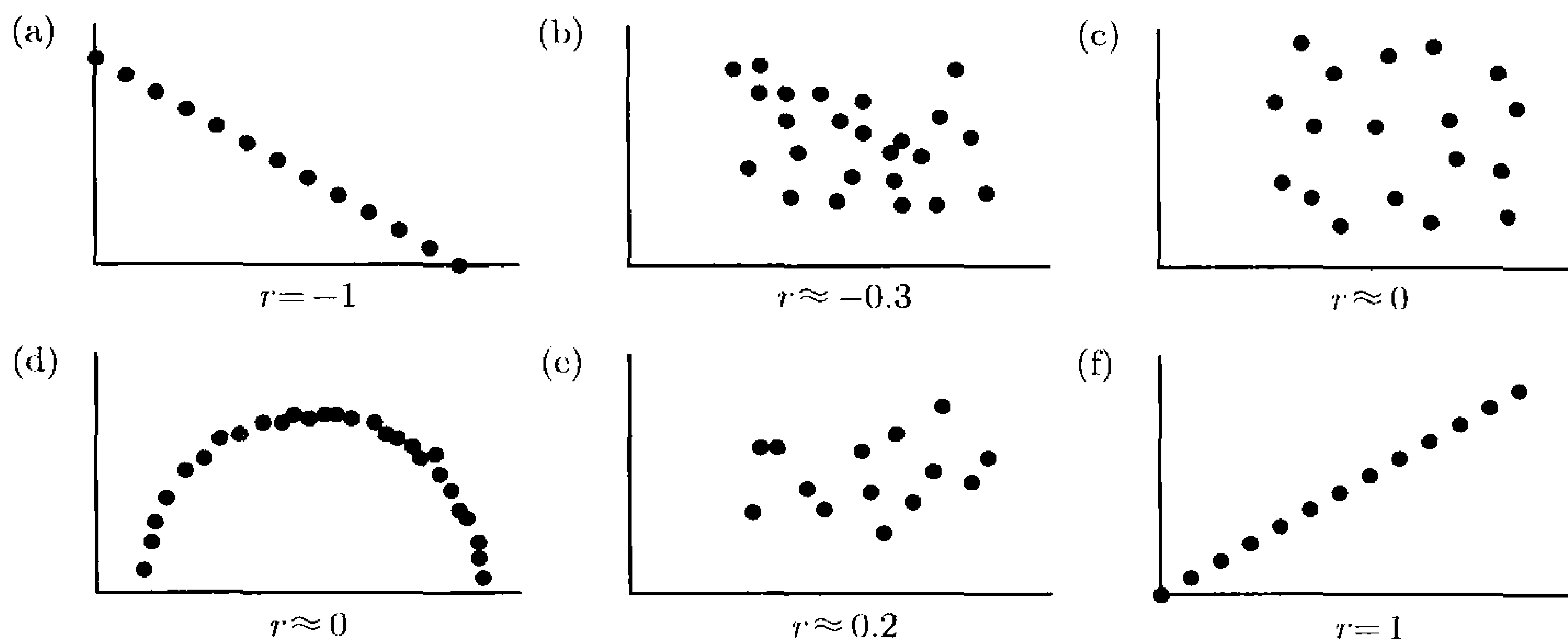


图 1-120 各种数据集和相关数据

例 2 表 1-43 中的销售额数据的相关系数是 $r\approx0.99$. r 为正的事实, 告诉我们回归直线的斜率是正的. r 靠近 1 的事实, 告诉我们回归直线很好地拟合数据. □

关系、相关关系和因果关系之间的区别

理解两个量之间高度相关 (要么正相关要么负相关) 并不蕴含着因果关系, 这一点很重要. 例如, 小孩的阅读水平和鞋子的大小高度相关[①]. 然而, 大脚并不导致小孩阅读得好 (反之一样). 变大的脚和提高的阅读能力都是长大的结果.

还要注意到, 0 相关关系并不蕴含着 x 和 y 之间没有任何关系. 例如, 在图 1-120d 中 x 和 y 值之间是有关系的, 而图 1-120c 没显出明显的关系. 两个数据集都有相关系数 $r\approx0$. 因此, $r=0$ 的相关关系通常蕴含着 x 和 y 之间没有线性关系, 但这并不意味着没有任何关系.

非线性关系的回归

表 1-14 表示 1790~1860 年美国的人口 (百万). 这些点画在图 1-121 中. 这些数据看上去像线性的吗? 确实不是. 将这些数据拟合成指数函数比拟合成线性函数好像更有道理. 求最佳拟合的指数函数叫做指数回归. 计算器或电脑用一种算法可以给出拟合这个数据的指数函数

$$P=3.9(1.03)^t,$$

① 引自《统计学》, 第 2 版, 由 David Freedman. Robert Pisani, Roger Purves, Ani Adhikari 著, 第 142 页 (纽约: W. W. Norton, 1991).

其中 P 是美国人口 (百万), t 是 1790 年以来的年数. 其他算法可能给出不同的答案. 参见图 1-122.

表 1-14 1790~1860 年美国人口 (百万)

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
人口	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.1	31.4

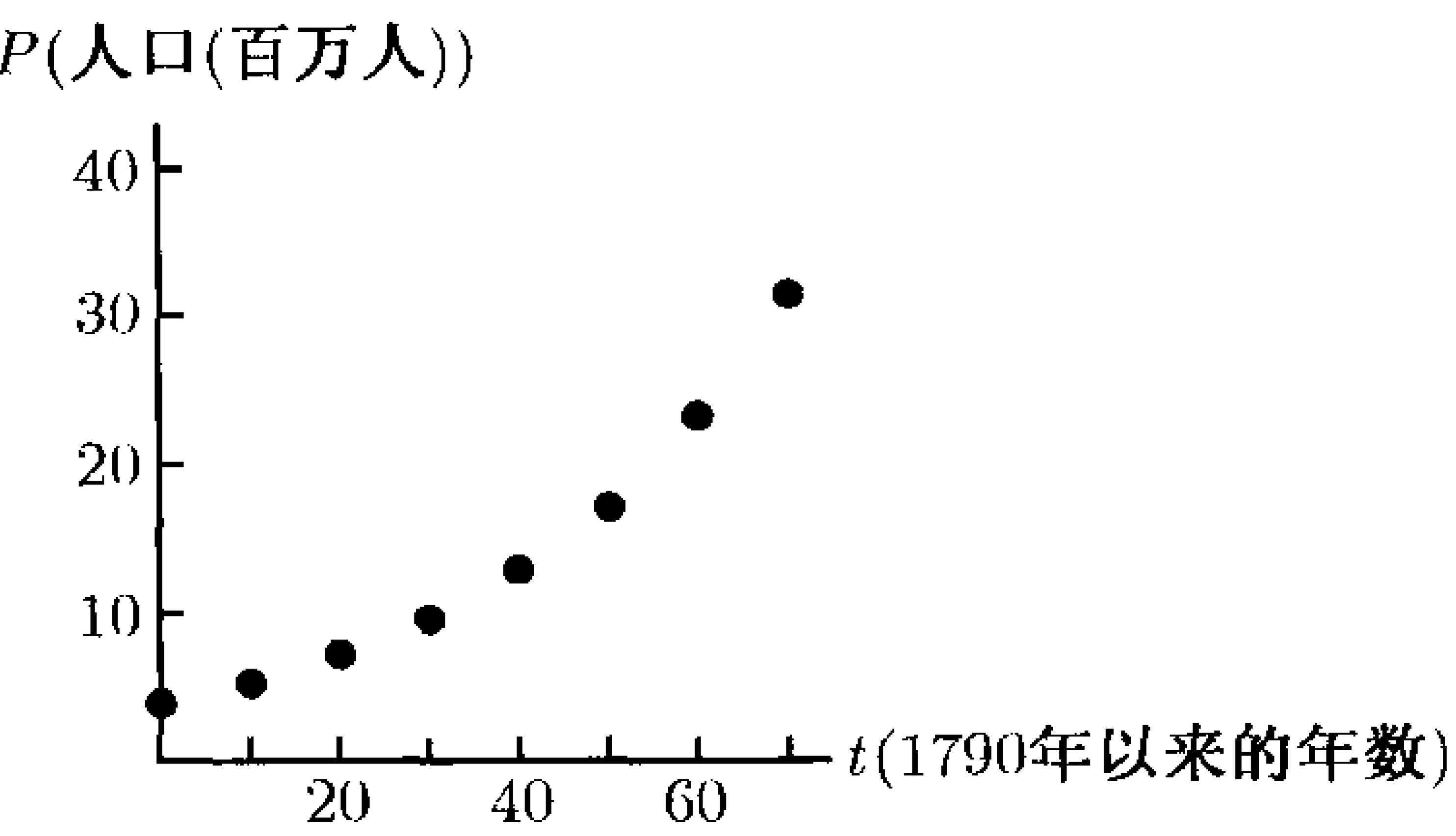


图 1-121 1790~1860 年美国人口

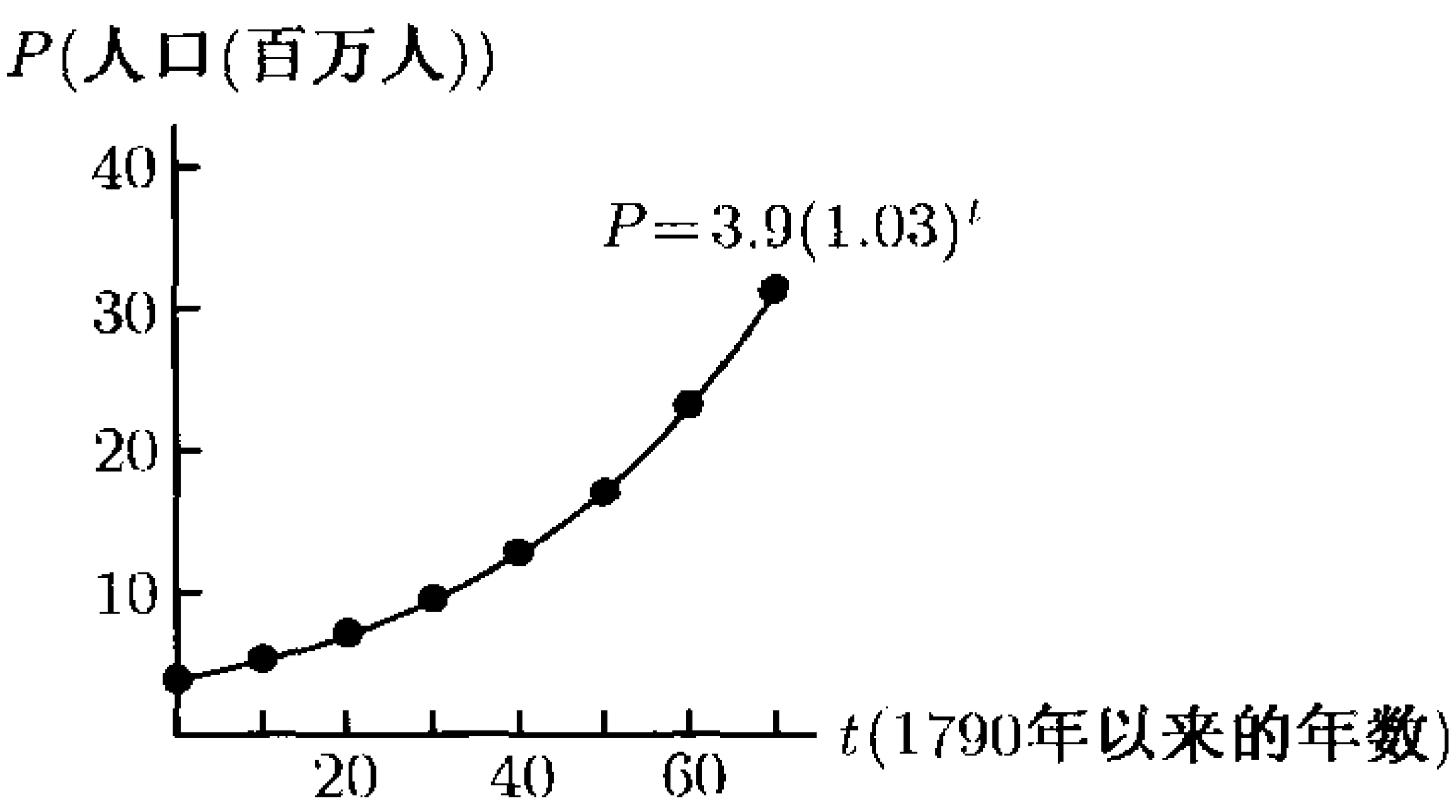


图 1-122 美国人口和指数回归函数

因为这个指数函数的底是 1.03, 所以 1790~1860 年美国人口每年以大约 3% 的速度增长. 希望人口以这个速度连续增长, 合理吗? 结果, 1860 年以后这个指数模型就不太符合美国的人口增长情况. 在 4.7 节, 我们会看到模拟美国人口的另一个函数.

计算器和电脑可以作线性回归、指数回归、对数回归、二次回归, 等等. 由一个数据集拟合一个公式, 第一步是作出数据的图形并且确定出适当的函数族.

例 3 美国机动车的平均燃料效率 (每加仑汽油的英里数) 直到 20 世纪 60 年代都是下降的, 而且当制造商提高了汽车的燃料效率时又开始上升了[①]. 参见表 1-15.

(a) 描出数据. 什么函数族可以用来作这个数据的模型: 线性函数, 指数函数, 对数函数, 幂函数, 还是多项式? 如果是多项式, 指出它的次数以及它的首项系数是正的还是负的?

(b) 利用二次回归使得一个二次多项式拟合这个数据, 作出它和这个数据的图形.

表 1-15 什么函数拟合这些数据

年	1940	1950	1960	1970	1980	1986
每加仑的平均英里	14.8	13.9	13.4	13.5	15.5	18.3

解 (a) 数据如图 1-123 所示, 其中时间 t 是 1940 年以来的年数. 每加仑的英里数

① C. Schaufele 和 N. Zumoff, 《地球代数・初级版》, 第 91 页 (纽约: Harper Collins, 1993).

递减然后递增, 所以作为这个数据模型的比较好的函数是二次多项式. 因为这个抛物线开口向上, 所以它的首项系数是正的.

(b) 如果 $f(t)$ 是每加仑的英里数, 二次回归的一种算法告诉我们, 拟合这个数据的二次多项式是

$$f(t) = 0.006\,17t^2 - 0.225t + 15.10.$$

在图 1-124 中, 我们看到这个二次多项式拟合这个数据非常合理.

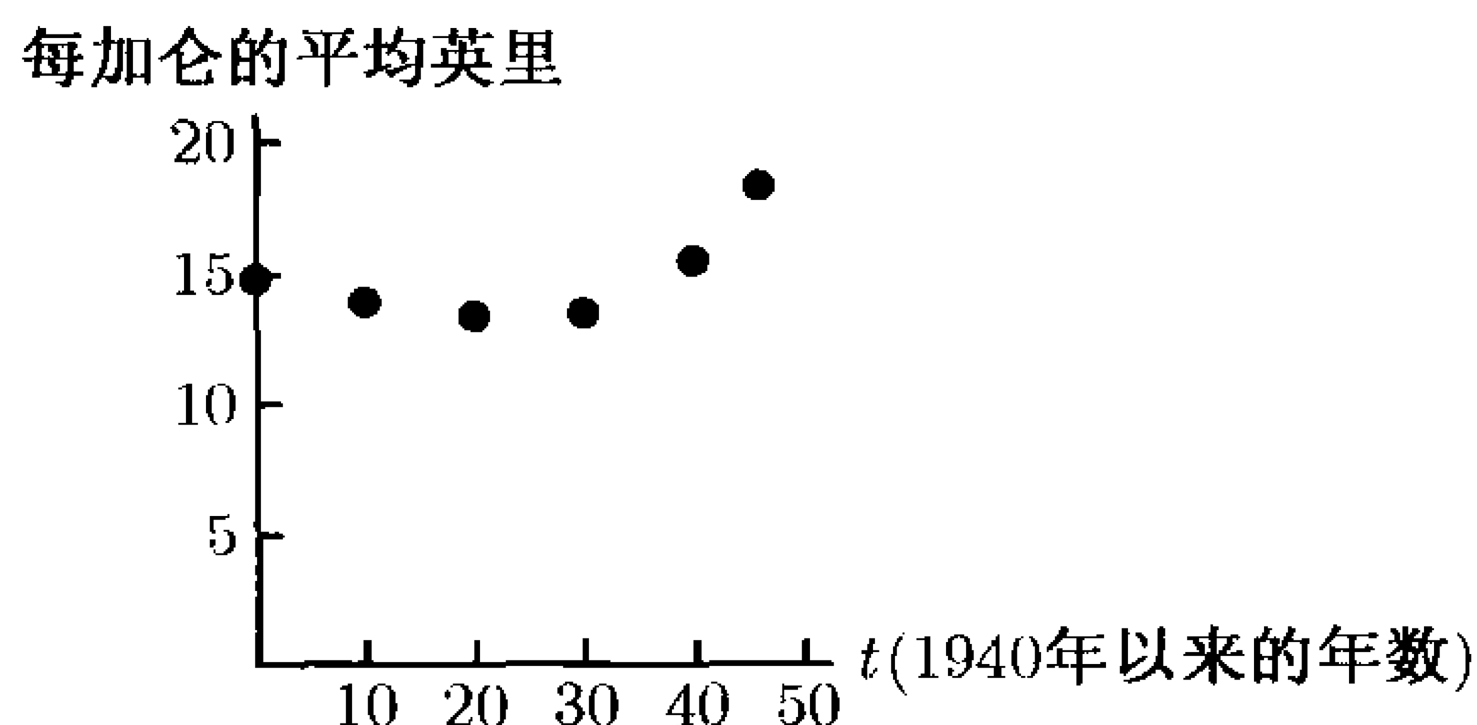


图 1-123 表示美国机动车燃料效率关于时间的数据

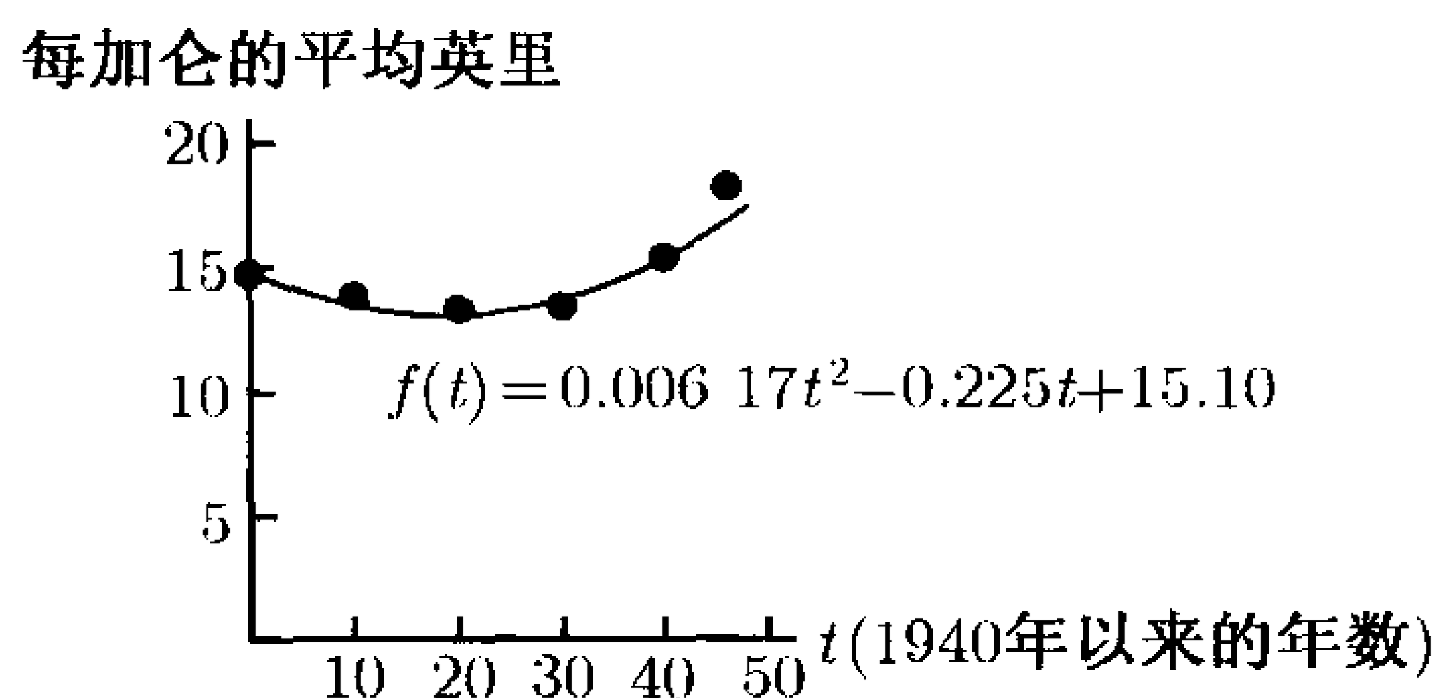


图 1-124 数据和利用回归求得的最佳二次多项式 □

习题

1. 下表给出世界生产总值 G(万亿 1999 年的美元), 它测量全球产品和劳务的产量[①]. 如果 t 是 1950 年以来的年数, 那么这些数据的回归直线为

$$G = 3.543 + 0.734t.$$

(a) 在同一个坐标系中绘制数据和这个回归直线的图形. 这条直线很好拟合这个数据吗?

(b) 用世界生产总值解释直线的斜率.

(c) 用这个回归直线估计 2005 年和 2020 年的世界生产总值. 评价你对这两个预测的相信程度.

年	1950	1960	1970	1980	1990	2000
G	6.4	10.0	16.3	23.6	31.9	43.2

2. 下表表明全世界香烟产量 P(十亿) 是 1950 年以来的年数 t 的函数[②].

(a) 求这个数据的回归直线.

(b) 用这个回归直线估计 2010 年世界香烟产量.

(c) 用香烟产量解释这条直线的斜率.

(d) 在同一个坐标系中绘制数据和这个回归直线的图形. 这条直线很好拟合这个数据吗?

① 世界观察研究所, 《生命体征 2001》, 第 57 页 (纽约: W. W. Norton, 2001).

② 世界观察研究所, 《生命体征 2001》, 第 77 页 (纽约: W. W. Norton, 2001).

t	0	10	20	30	40	50
P	1686	2150	3112	4388	5419	5564

3. 下表表示美国国民生产总值 (GNP, 2003 年的美元)①.

(a) 描绘 GNP 关于 1970 年以来年数的数据图形. 直线能很好地拟合这个数据吗?

(b) 求回归直线并作出带有这个数据的回归直线图形.

(c) 用这个回归直线估计 1985 年和 2020 年的 GNP. 你更相信哪个估计? 为什么?

年	1970	1980	1990	2000
GNP(十亿)	1045	2824	5838	9856

4. 一种溶液的酸性由它的 pH 值来测定, pH 值越低表示越偏酸性. 1975~1978 年在科罗拉多进行了酸雨的研究, 其中雨水的酸性连续测定了 150 周. 数据符合一般的线性模式而且确定的回归直线为

$$P = 5.43 - 0.0053t,$$

其中 P 是雨水的 pH 值, t 是研究期间的周数②.

(a) 在研究期间pH水平是递增的还是递减的? 就雨水的酸性水平来说它的含义是什么?

(b) 根据这条直线, 在研究刚开始时 pH 值时多少? 在研究结束时 ($t = 150$) 呢?

(c) 回归直线的斜率是多少? 从pH值的角度说明这个斜率的含义.

5. 在一份 1977 年的研究报告中③, 研究者测量了 21 位美国最优秀的女子赛跑者在不同速度 v(ft/s) 下的平均跨步率 S(步/s). 数据表示在下表中.

(a) 用跨步率作为因变量求这些数据的回归直线.

(b) 在同一个坐标系中绘制回归直线和这些数据的图形. 这条直线很好拟合这些数据吗?

(c) 用这个回归直线预测速度为 18ft/s 和 10ft/s 时的跨步率. 你更相信哪个预测? 为什么?

v	15.86	16.88	17.50	18.62	19.97	21.06	22.11
S	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

6. 下表表示夏威夷莫纳罗亚火山观察站二氧化碳 CO_2 的大气浓度 (百万分之一, ppm)④.

(a) 求1980~2000年二氧化碳浓度的平均变化率. 给出单位并用二氧化碳解释你的答案.

(b) 描出数据, 并求二氧化碳浓度关于 1980 年以来年数的回归直线. 利用这个回归直线预测 2020 年大气中二氧化碳的浓度.

年	1980	1985	1990	1995	2000
CO_2	349.6	346.7	354.4	360.8	368.9

① 《2005 年世界年鉴》, 第 111 页 (纽约).

② William M. Lewis 和 Michael C. Grant, "美国西部的酸雨量", 《科学》207(1980) 第 176–177 页.

③ R. C. Nelson, C.M.Brooks, 和 N. L. Pike, "男女长跑运动员的生物力学比较". 《马拉松: 生理学, 医学, 流行病学和心理学研究》, P. Milvy 著, 第 793–807 页 (纽约: 纽约科学院, 1977).

④ www.cmdl.noaa.gov/ccgg/iadv, 访问日期 2005 年 2 月 20 日.

7. 在习题 6 中，二氧化碳浓度被建成时间的线性函数模型. 然而，如果我们将远至 1900 年的二氧化碳浓度的数据包括在内，那么这个数据更像是指数函数. (在习题 6 中它们看起来像线性的是由于我们只考察图形的一小部分.) 如果 C 是 CO_2 的浓度 (ppm) 而 t 是 1900 年以来的年数，那么拟合这个数据的指数回归函数为

$$C = 272.27(1.0026)^t.$$

(a) 在这期间的年增长百分率是多少? 用 CO_2 的浓度解释这个比率.

(b) 该模型给出的 1900 年 CO_2 的浓度是多少? 1980 年呢? 将估计的 1980 年浓度与表 1-50 中的实际值进行比较.

8. 下表表示美国各个年份每个消费者单位医疗保健的年平均支出[①]. 看起来最好拟合这些数据的是线性函数模型还是指数函数模型? 求你所确定的最好拟合的回归函数公式. 作出该函数和这些数据的图形并评价对这些数据拟合得如何.

1998 年以来的年数, t	0	1	2	3	4
支出, C(美元)	1903	1959	2066	2182	2350

9. (a) 由下表中的人口数据拟合一个指数函数. 在同一个坐标系中绘制这个数据和指数函数的图形.

(b) 1960~2000 年人口增长的百分率近似地是多少?

(c) 如果人口以这个百分率连续增长，那么 2020 年的人口计划是多少?

t, 1960 年以来的年数	0	10	20	30	40
1960~2000 年美国人口 (百万)	179.3	203.3	226.5	248.7	281.4

10. 下表表示 1998 年后 t 年美国的公共债务 D(十亿美元)[②].

(a) 描绘公共债务关于 1998 年以来的年数的数据图形.

(b) 这个数据看起来更像是线性的还是指数的?

(c) 由这个数据拟合一个指数函数并作出它和这些数据的图形.

(d) 这个指数模型显示的年增长百分率是多少?

(e) 你认为这个模型能够精确地预测 2004 年以后的公共债务吗? 说明理由.

t	0	1	2	3	4	5	6
D	5526	5656	5674	5808	6228	6783	7379

11. 一个公司收集了下表中的数据. 求回归直线并解释它的斜率. 作出数据和直线的略图. 它的相关系数是多少? 你得到的这个值为什么合理?

q (产量 (单位))	25	50	75	100	125
C(成本 (美元))	500	625	689	742	893

12. 在图 1-125 中找出适合这些 r 值的散点图.

---

① 《2004–2005 年美国统计摘要》, 表格 125.

② 《2005 年世界年鉴》, 第 119 页 (纽约).

$$r=-0.98,\quad r=-0.5,\quad r=-0.25,$$

$$r=0,\quad r=0.7,\quad r=1.$$

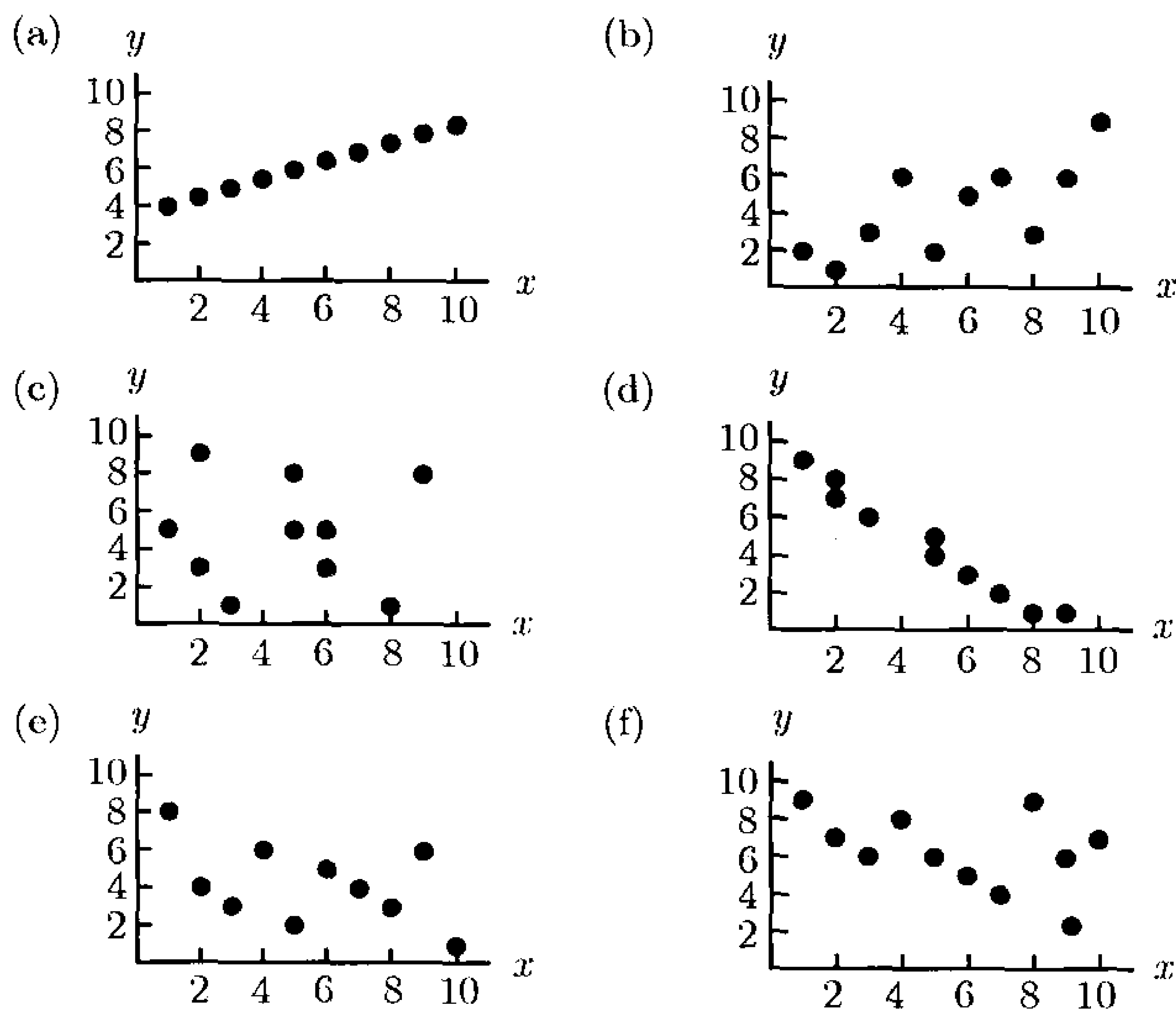


图 1-125

13. 下表表示美国轿车的数量[①].

(a) 绘制数据图, 以轿车数为因变量.

(b) 看上去更好拟合这个数据的是线性模型还是指数模型?

(c) 先用线性模型: 求这些数据的回归直线. 作出它和这些数据的图形. 用回归直线预测 2010($t=70$) 年轿车数量.

(d) 用轿车解释 (c) 中求得的回归直线的斜率.

(e) 现在用指数模型: 求这些数据的指数回归函数. 作出它和这些数据的图形. 用这个指数函数预测 2010($t=70$) 年轿车数量. 将这个预测与线性模型所得到的预测进行比较.

(f) 指数模型显示的美国轿车数量的年增长百分率是多少?

t(1940 年以来的年数)	0	10	20	30	40	50	60
N(百万辆)	27.5	40.3	61.7	89.2	121.6	133.7	133.6

14. 下表表示世界人口 (十亿).

(a) 描绘这些数据. 看上去最好拟合这个数据的是线性模型还是指数模型?

(b) 求指数回归函数.

(c) 指数函数显示的年增长百分率是多少?

(d) 预测 2010 年和 2050 年的世界人口. 评价你对这两个预测的相对信任度.

① 《2005 年世界年鉴》, 第 237 页 (纽约).

1950 年以来的年数	0	10	20	30	40	50	54
世界人口 (十亿)	2.6	3.1	3.7	4.5	5.4	6.1	6.4

15. 1969 年, 国际足联和美国足联分析了所有射门区域. 参见下表. (数据已经被概括了: 离球门位置 10 到 19 码的所有射门都算作 14.5 码外, 等等.)

(a) 以成功率为因变量, 作出数据的图形. 探讨最好拟合这个数据的是线性模型还是指数模型.

(b) 求线性回归函数; 作出它和这些数据的图形. 用足球解释回归直线的斜率.

(c) 求指数回归函数; 作出它和这些数据的图形. 这个函数预测离 50 码距离的成功率是多少?

(d) 用 (b) 和 (c) 中的图形决定哪个模型似乎最好拟合这个数据.

离球门的距离, x 码	14.5	24.5	34.5	44.5	52.0
成功的分数, Y	0.90	0.75	0.54	0.29	0.15

16. 下表表示出口到美国的日本汽车数①.

(a) 描出出口到美国的日本汽车数量关于 1964 年以来的年数的数据图.

(b) 这个数据看起来更像是线性的还是指数的?

(c) 由这个数据拟合一个指数函数并作出它和这个数据的图形.

(d) 这个指数模型显示的年增长百分率是多少?

(e) 你认为这个模型能够精确地预测 1971 年以后的汽车数量吗? 说明理由.

1964 年以来的年数	0	1	2	3	4	5	6	7
汽车数量 (千辆)	16	24	56	70	170	260	381	704

17. 图 1-126 表示中东的石油产量②. 如果你用多项式建立这个函数的模型, 你会选多少次? 它的首项系数是正的还是负的?

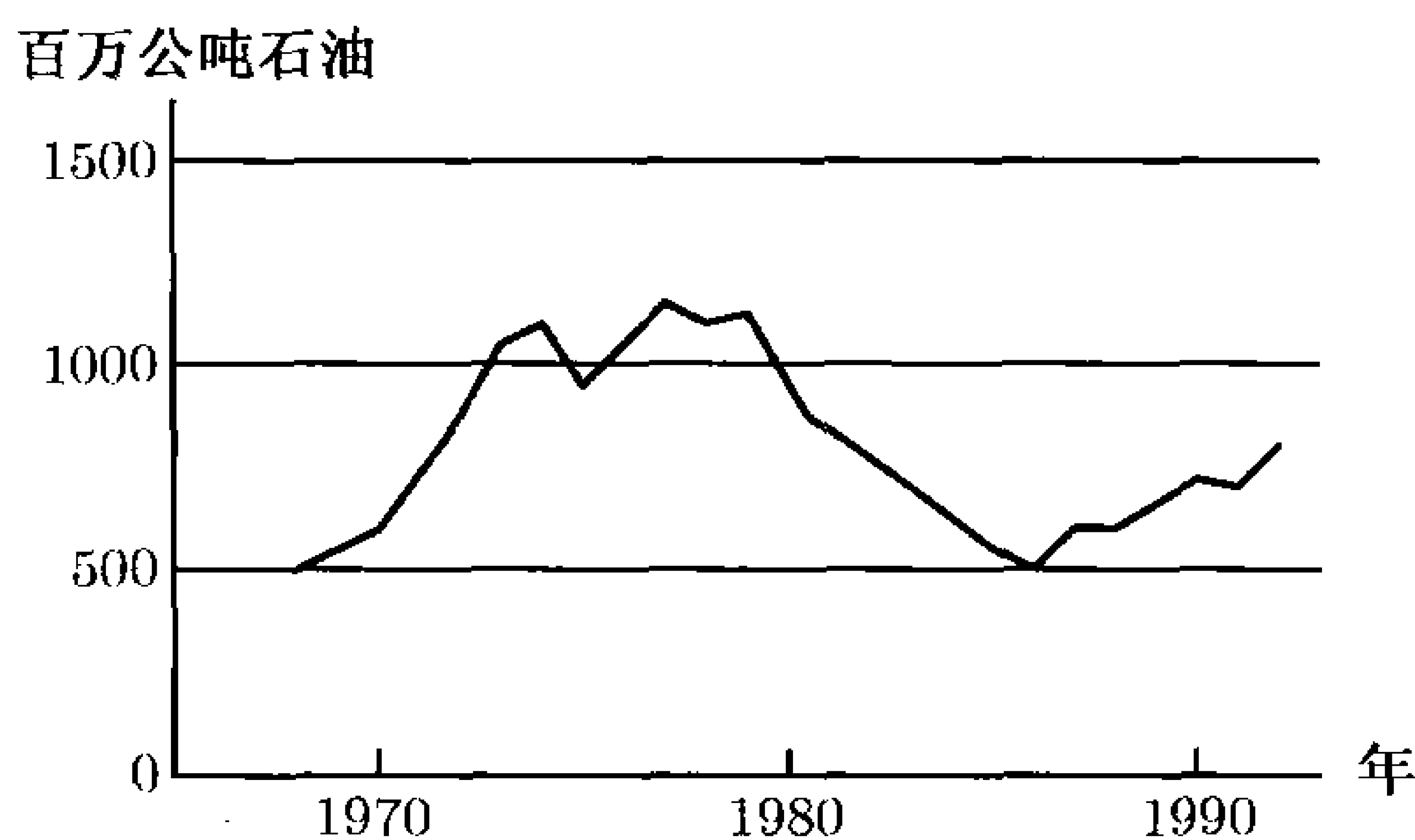


图 1-126

① 《1995 年世界年鉴》.

② Lester R. Brown 等, 《生命体征》, 第 49 页 (纽约: W. W. Norton 和 Co., 1994).

18. 1973 年的石油危机之后, 汽车的平均燃料效率 E 一直增长到 20 世纪 90 年代, 这时它又开始下降了.

(a) 用 t 表示 1975 年以来的年数, 描绘下表中的数据[1]. 如果你想由这个数据拟合一个二次多项式, 它的首项系数的符号会是什么?

(b) 拟合一个二次多项式并描绘它和这个数据的图形.

年	1975	1980	1985	1990	1995	2000
E(mile/gal)	13.1	19.2	21.3	21.5	21.1	20.7

19. 下表给出毁于农业和开发的雨林面积[2].

(a) 描绘这些数据.

(b) 这个数据是递增的还是递减的? 上凹的还是下凹的? 在每种情形下, 用雨林解释你的答案.

(c) 利用计算器或者电脑由这个数据拟合一个对数函数. 在 (a) 中的坐标系中描绘这个函数的图形.

(d) 利用 (c) 中求得的曲线预测 2010 年毁掉的雨林面积.

x(年)	1960	1970	1980	1988
y(百万公顷)	2.21	3.79	4.92	5.77

在习题 20~22 中, 给出了数据表[3].

(a) 用数据的标绘图决定最好拟合这个数据的是线性模型, 指数模型, 对数模型还是二次模型.

(b) 用计算器或者电脑求 (a) 中所选模型的回归方程. 如果方程是线性的或者是指数的, 解释它的绝对变化率或者相对变化率.

(c) 用回归方程预测 2005 年的函数值.

(d) 在同一个坐标系中描绘回归方程和数据图, 并对拟合进行评价.

20.

世界太阳能发电 S(兆瓦); t(年), 1990 年以来的年数

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	46	55	58	60	69	79	89	126	153	201	288

21.

核弹头 N(千枚); t(年), 1960 年以来的年数

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
N	20	39	40	52	61	69	60	43	32

---

① 《世界年鉴》(纽约, 2005).

② C. Schaufele 和 N. Zumoff, 《地球代数 · 初级版》, 第 131 页 (纽约: Harper Collins, 1993).

③ 世界观察研究所, 《生命体征 2001》(纽约: W.W. Norton & Company, 2001), 第 47 页.

22.

二氧化碳 C(百万分之一); t(年), 1970 年以来的年数

t	0	5	10	15	20	25	30
C	325.5	331.0	338.5	345.7	354.0	360.9	369.40

23. 对图 1-127 中的每个图形, 确定这些数据的最佳拟合看起来像是线性函数, 指数函数还是多项式.

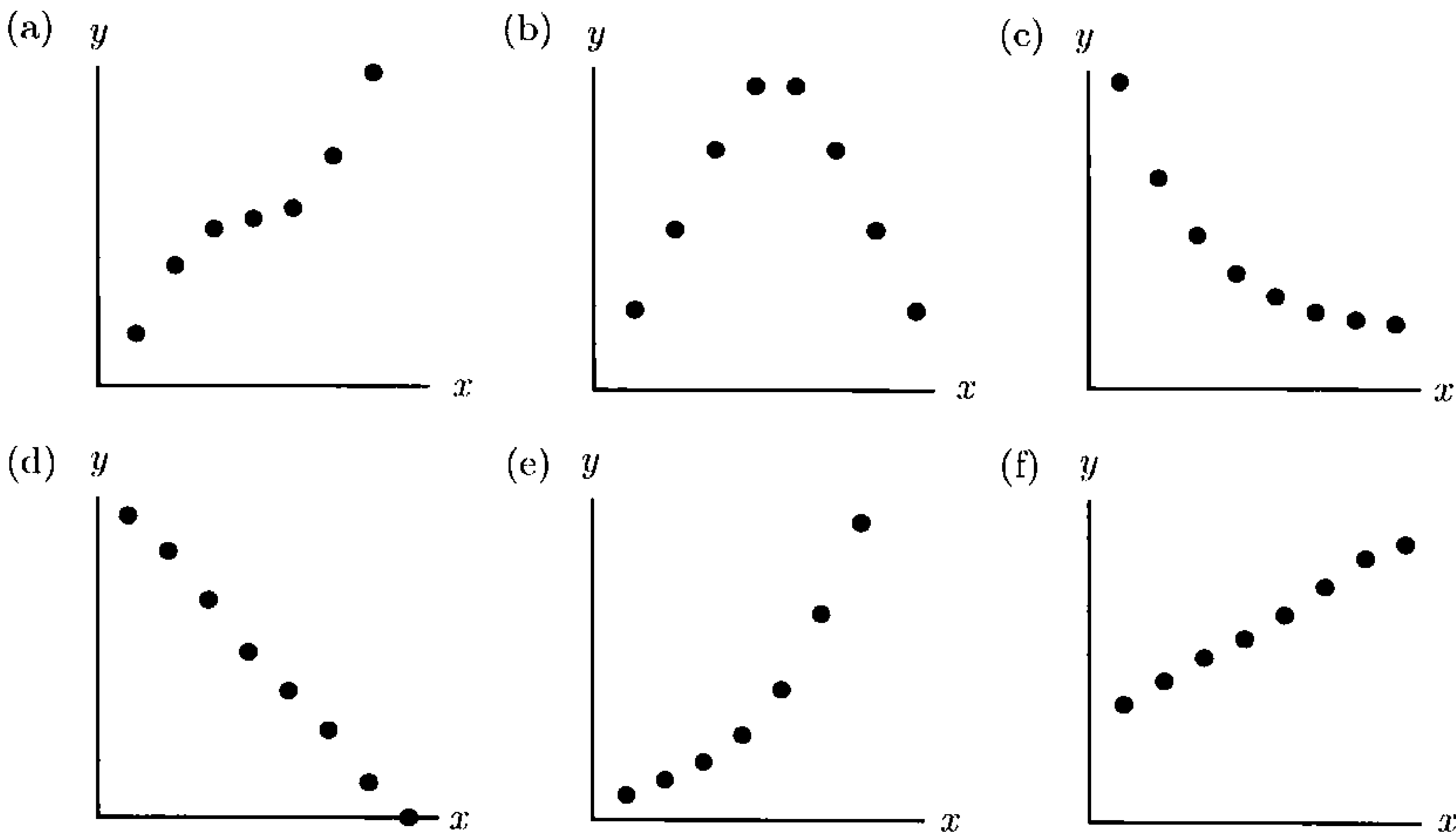


图 1-127

复利和数e

如果你有一些钱, 可以将它投资挣利息. 利息可以按照许多不同方式支付, 例如一年一次或者一年很多次. 如果利息支付得比一年一次更加频繁并且不提取利息, 那么对投资者有利, 因为利息可以挣利息. 这个结果叫做*复合*. 你也许已经注意到银行提供的账户在利率和复合方法两个方面有所不同. 一些提供的是年复利, 一些是季度复利, 还有一些是日复利, 甚至有一些还提供连续复利.

提供 8% 年复利 (每年一次) 的银行账户与提供 8% 季度复利 (每年四次) 的银行账户有什么区别呢? 两种情形中 8% 都是一年的利率. 8% 年复利的意思是在每年年底要加上当前余额的 8%. 这等价于当前余额乘以 1.08. 因此, 如果存入 100 美元, 那么余额 B(美元) 是

$$B = 100(1.08), \text{ 一年后},$$

$$B = 100(1.08)^2, \text{ 两年后},$$

$$B = 100(1.08)^t, \ t \text{ 年后}.$$

8%季度复利 的意思是每年利息要加四次 (每三个月一次) 并且每次加上当前余额的 8/4=2%. 因此, 如果存入 100 美元, 在一年年底利息复合了四次, 账户中就有 $100(1.02)^4$ 美元. 所以, 余额是

$$B = 100(1.02)^4,\ \text{一年后},$$

$$B = 100(1.02)^8,\ \text{两年后},$$

$$B = 100(1.02)^{4t},\ t\ \text{年后}.$$

注意, 8%不是三个月期限的利率, 年利率要分成四个 2% 来支付. 在每种方法下对一年后总余额的计算表明

$$\text{年复利:}\quad B = 100(1.08) = 108.00,$$

$$\text{季度复利:}\quad B = 100(1.02)^4 = 108.24.$$

这样一来, 由季度复利就可以挣更多的钱, 因为随着这一年的过去利息挣利息. 一般地, 利息复合得越频繁, 挣的钱就越多 (尽管增加的不是很多).

我们通过引入概念*有效年收益率*来估计复合的影响. 由于以 8% 的季度复利投资的 100 美元到一年年底就增加到 108.24 美元, 所以我们称这种情形下有效年收益率是 8.24%. 于是描述同一个投资我们可以用两种利率: 8% 的季度复利率和 8.24% 的有效年收益率. 银行称这个 8% 为*年度百分率*即 APR. 我们也称这个 8% 为*名义利率*(名义意味着 "有名无实"). 然而, 就是这个有效收益率才精确地告诉你该投资实际支付了多少利息. 因此, 要比较两个银行账户, 只要比较它们的有效年收益率. 下一次你路过一家银行, 看看它的广告, 广告上应该 (法律上要求) 包括 APR(即名义利率) 和有效年收益率. 我们经常将年度百分率简称为*年利率*.

有效年收益率的应用

例 4 哪个更好: 银行 X 支付 7% 的年利率每月复合, 而银行 Y 支付 6.9% 的年利率每天复合?

解 我们求每家银行的有效年收益率.

银行 X: 一年有 12 次利息, 每次支付为 0.07/12=0.005 833 倍当前余额. 如果初始存款是 100 美元, 那么余额 B 为

$$B = 100(1.005\,833),\ \text{一个月后},$$

$$B = 100(1.005\,833)^2,\ \text{两个月后},$$

$$B = 100(1.005\,833)^t,\ t\ \text{个月后}.$$

为了求有效年收益率, 我们考察一年, 也就是 12 个月, $B = 100(1.005\,833)^{12} = 100(1.072\,286)$, 所以有效的年收益率 $\approx 7.23\%$.

银行 Y: 一年有 365 次利息 (假设不是闰年), 每次为 0.069/365=0.000 189 倍

当前余额. 那么余额是

$$B = 100(1.000\ 189),\ \text{一天后},$$

$$B = 100(1.000\ 189)^2,\ \text{两天后},$$

$$B = 100(1.000\ 189)^t,\ t\ \text{天后}.$$

所以在一年的年底我们用

$$(1.000\ 189)^{365} = 1.071\ 413$$

乘以初始存款, 从而银行 Y 的有效年收益率 $\approx 7.14\%$.

比较两家银行的有效年收益率, 我们看到银行 X 提供更多的利息, 但两者差额很小. □

例 5　如果在例 4 的每家银行存入 1000 美元, 写出每家银行 t 年后余额的表达式.

解　对于银行 X, 有效年收益率 $\approx$7.23%, 所以 t 年后余额 (美元) 是

$$B = 1000\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{12t} = 1000(1.005\ 833)^{12t} = 1000(1.0723)^t.$$

对于银行 Y, 有效年收益率 $\approx$ 7.14%, 所以 t 年后余额 (美元) 是

$$B = 1000\left(1+\frac{0.069}{365}\right)^{365t} = 1000(1.0714)^t.$$

(我们还是忽略闰年.) □

> 如果年利率为 r 的利息一年复合 n 次, 那么一年要加 n 次 r/n 倍的当前余额. 因此, 如果初始存款为 P, 那么 t 年后的余额是
>
> $$B = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$
>
> 注意到 r 是名义利率. 例如, 年利率为 5% 时 $r = 0.05$.

增加复合的频率：连续复合

我们考察增加复合频率的结果. 有多大的影响?

例 6　求 7% 的年利率

(a) 一年复合 1000 次　　(b) 一年复合 10 000 次

的有效年收益率.

解　(a) 一年, 存款乘以

$$\left(1+\frac{0.07}{1000}\right)^{1000} \approx 1.072\ 505\ 6,$$

可得有效的年收益率大约为 7.250 56%.

(b) 一年, 存款乘以

$$\left(1+\frac{0.07}{10\ 000}\right)^{10\ 000}\approx 1.072\ 507\ 9,$$

可得有效年收益率大约为 7.250 79%. □

你可以看到每年复合 1000 次 (每天大约 3 次) 与每年复合 10 000 次 (每天大约复合 30 次) 没有太大的区别. 如果我们复合得再频繁些会怎样呢? 每分钟? 每秒钟? 你会惊奇地发现, 有效年收益率不会无限地增加, 而是趋向于一个有限值. 当超过某个限度时, 增加复合的频率所得到的好处会变得微不足道.

例如, 年利率为 7% 的投资每年复合 n 次, n 大于 100 000, 你要计算它的有效年收益率, 会发现

$$\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^{n}\approx 1.072\ 508\ 2.$$

因此它的有效年收益率大约是 7.250 82%. 即使你取 $n=1\ 000\ 000$ 或者 $n=10^{10}$, 它的有效年收益率也不会有明显的变化. 7.250 82% 这个值是一个上限, 就是当复合的频率增加时有效年收益不断靠近的上限.

当有效年收益率达到这个上限时, 我们称它的利息是**连续复合的**. (用到**连续**这个词是由于复合得越来越频繁这个上限就达到了.) 因此, 当 7% 的名义年利率频繁地复合使有效年收益率达到 7.250 82% 时, 我们就说这个 7% 是连续复合的. 这表示由 7% 的名义利率所能得到的最多的收益.

数 e 在哪里适合

原来, e 与连续复利紧密地联系在一起. 为了看出这一点, 用计算器核对 $e^{0.07}\approx 1.072\ 508\ 2$, 它就是由 7% 复合很大的次数所得到的数. 因此我们已经发现对于非常大的 n, 有

$$\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^{n}\approx e^{0.07}.$$

随着 n 不断变大, 其近似程度越来越好, 我们记

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0.07}{n}\right)^{n}=e^{0.07},$$

它的意思是当 n 增加时, $(1+0.07/n)^n$ 的值接近 $e^{0.07}$.

如果以连续复合的 7% 的年利率存入 P, 那么 t 年后的余额 B 可表示为

$$B=P(e^{0.07})^t=Pe^{0.07t}.$$

> 如果初始存款为 P 的利息以年利率 r **连续复合**, 那么 t 年后的余额可以用下式计算
>
> $$B=Pe^{rt}.$$

在使用复利的工作中, 重要的是要弄清楚利率是名义利率还是有效收益率, 以及复合是不是连续的.

例 7 求年利率为 6% 的连续复合的有效年收益率.

解 一年, 投资 P 变成 $Pe^{0.06}$. 通过计算器我们看到

$$Pe^{0.06} = P(1.061\,836\,5).$$

所以有效年收益率大约是 6.18%. □

例 8 你在小孩的教育储蓄账户中存了钱, 要它 10 年后价值 120 000 美元. 如果它以 9% 的年利率按季度复合支付利息, 你应该存多少钱? 连续复合呢?

解 假设你最初存入 P(美元). 9% 的年利率按季度复合的有效年收益率可表示为 $(1+0.09/4)^4 = 1.093\,083\,3$, 也就是 9.308 33%. 所以 10 年后有

$$P(1.093\,083\,3)^{10} = 120\ 000.$$

因此, 你应该存入

$$P = \frac{120\ 000}{(1.093\,083\,3)^{10}} = \frac{120\ 000}{2.435\,188\,5} = 49\ 277.50.$$

另一方面, 如果这个账户每年连续复合地支付 9%, 那么 10 年后有

$$Pe^{(0.09)10} = 120\ 000.$$

所以你必须存入

$$P = \frac{120\ 000}{e^{(0.09)10}} = \frac{120\ 000}{2.459\,603\,1} = 48\ 788.36.$$

注意, 要达到同样的结果, 连续复合比按季度复合需要更少的初始存款. 我们认为这是由于连续复合比按季度复合的有效年收益率高. □

习题

1. 一家百货商店发行自己的信用卡, 每个月的利率是 2%. 说明这与 24% 的年利率有什么不同? 它的有效年收益率是多少?
2. 10 000 美元的存款存入一个账户, 该账户支付的名义年利率是 8%. 如果利息是:
   (a) 年复合的 (b) 月复合的 (c) 周复合的
   (d) 日复合的 (e) 连续复合的
   确定 10 年后账户中的金额.
3. 50 000 美元的存款存入一个账户, 该账户支付的名义年利率是 6%. 如果利息是:
   (a) 年复合的 (b) 月复合的 (c) 周复合的
   (d) 日复合的 (e) 连续复合的
   确定 20 年后账户中的金额.
4. 用 $y=(1+0.07/x)^x$ 的图形估计当 $x\to\infty$ 时 $(1+0.07/x)^x$ 逼近的数. 进一步证实你所得到的数是 $e^{0.07}$.
5. 求年利率为 6% 的连续复合的有效年收益率.
6. 在连续复合下有效年收益率为 5% 的名义年利率是多少?
7. 在连续复合下名义年利率为 8% 的有效年收益率是多少?

8. **(a)** 5% 的年利率每年复合 n 次, 当有以下条件时求它的有效年收益率.

(i) $n = 1000$　　(ii) $n = 10\ 000$

(iii) $n = 100\ 000$

(b) 考察 (a) 中的一系列答案, 预测 5% 的年利率连续复合的有效年收益率.

(c) 计算 $e^{0.05}$. 这怎么进一步证明了 (b) 中的答案?

9. **(a)** 求 $n = 10\ 000, 100\ 000, 1\ 000\ 000$ 时 $(1 + 0.04/n)^n$ 的值. 利用这些结果预测 4% 的年利率连续复合的有效年收益率.

(b) 通过计算 $e^{0.04}$ 进一步证明你的答案.

10. 一个银行账户挣得的利息是连续复利, 每年的利率是 6%.

(a) 经过一年账户中的银行余额增加了百分之多少? (这就是有效的年收益率.)

(b) 需要多长时间余额会翻番?

(c) 对利率 r, 求用利率表示的倍增时间公式.

11. 说明不通过计算你是如何从有效年收益率 I~V 中找出与 (a)~(e) 相对应的利率的.

(a) 5.5% 的年利率, 连续复合.

(b) 5.5% 的年利率, 按季度复合.

(c) 5.5% 的年利率, 按周复合.

(d) 5.5% 的年利率, 按年复合.

(e) 5.5% 的年利率, 1 年复合两次.

I. 5%　　II. 5.06%　　III. 5.61%

IV. 5.651%　　V. 5.654%

通货膨胀率很高的国家经常发布月通货膨胀指数而不是年通货膨胀指数, 因为月指数不太吓人. 习题 12~13 涉及这种高通货膨胀率, 我们称之为*恶性通货膨胀*.

12. 1989 年, 美国的年通货膨胀率是 4.6%. 而阿根廷的月通货膨胀率是 33%.

(a) 阿根廷的月通货膨胀率 33% 等于多少年通货膨胀率?

(b) 美国的年通货膨胀率 4.6% 等于多少月通货膨胀率?

13. 在 1988 年 12 月 ~1989 年 12 月, 巴西的年通货膨胀率是 1290%. (这意味着在 1988~1989 年, 物价增长 1 + 12.90=13.90 倍.)

(a) 一件物品在 1988 年值 1000 克鲁赛罗 (巴西的货币单位) 在 1989 年值多少钱?

(b) 在这期间巴西的月通货膨胀率是多少?

相 关 理 论

无穷远过程的极限和终极性态

幂函数的比较

当 x 变大时, 如何比较不同的幂函数? 对正的幂, 图 1-128 表明 x 的幂越高, 函数爬得越快. 对大的 x 值 (实际上, 对所有的 $x > 1$), $y = x^5$ 在 $y = x^4$ 的上方, 而 $y = x^4$ 又在 $y = x^3$ 的上方, 等等. 高的幂不只是大, 而且是大得多. 这是由于 (例如) 当 $x = 100$ 时, 100^5 同 100^4 的 100 倍一样大, 而 100^4 又同 100^3 的 100 倍一样大. 当 x 变大时 (记作 $x \to \infty$), x 的任何正幂完全压倒所有的 x 的低幂. 我们称, 当 $x \to \infty$ 时, x 的高幂**控制**x 的低幂.

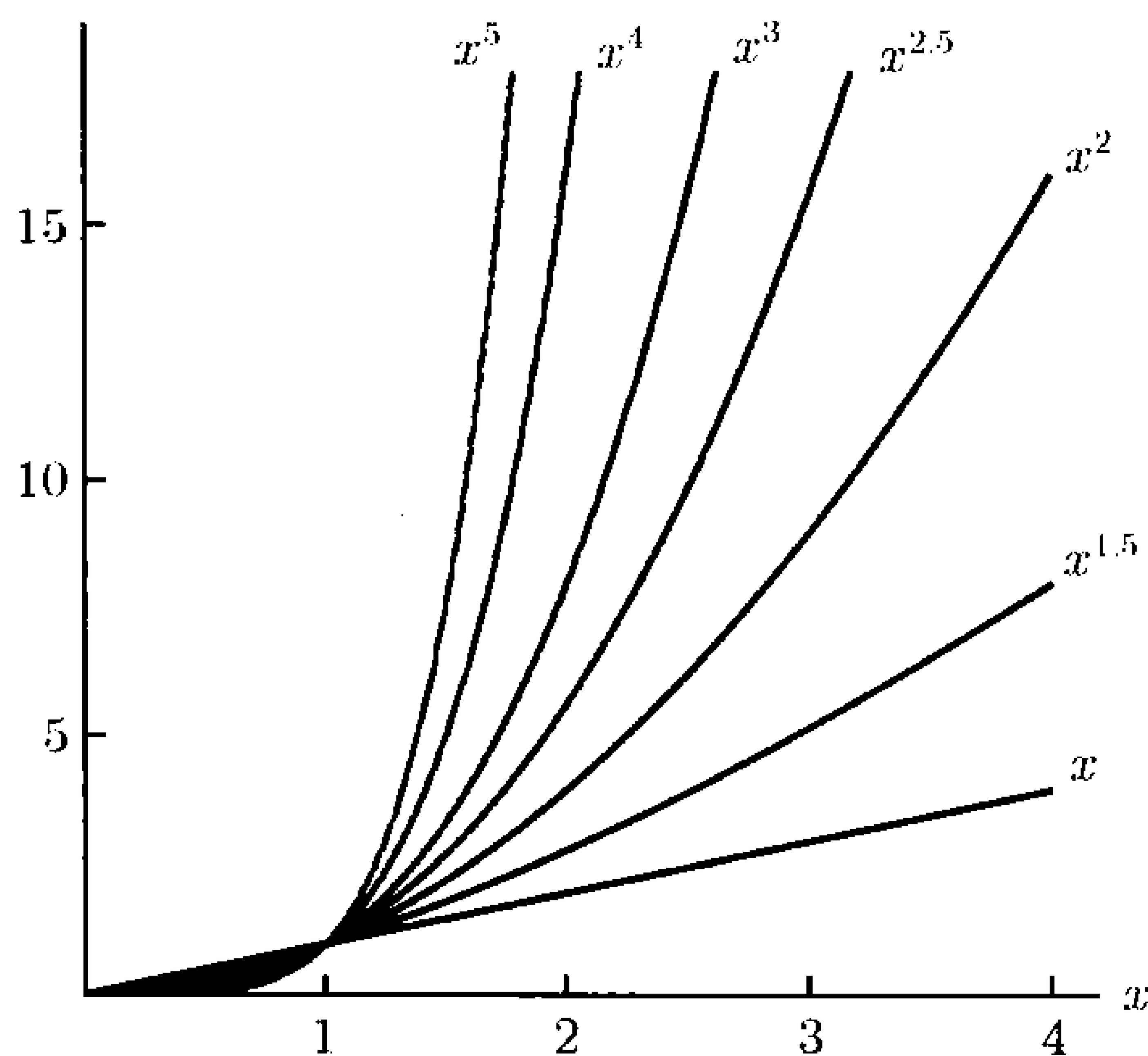


图 1-128　x 的幂: 对于大的 x 值, 幂函数最大的是哪个

无穷远过程的极限

当 $x \to \infty$ 时我们考虑函数 $f(x)$ 的值, 就是求 $x \to \infty$ 时的极限. 这可以简记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x).$$

符号 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ 表示当 x 的值变得越来越大时函数值趋于 L. 我们有当 $x \to \infty$ 时, $f(x) \to L$. 当 $x \to \infty$ 时和 $x \to -\infty$ 时函数的性态叫做函数的**终极性态**.

例 9　求每种情形下的 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(a) $f(x) = x^2$　　(b) $f(x) = -x^3$　　(c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

解　(a) 当 x 无限地越来越大时, 函数 x^2 也无限地越来越大, 所以当 $x \to \infty$ 时, 我

们有 $x^2 \to \infty$. 因此,

$$\lim_{x\to\infty}(x^2)=\infty.$$

由于负数的平方是正的, 所以当 $x\to-\infty$ 时我们有 $x^2\to+\infty$. 因此,

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2)=\infty.$$

为了从图形上看出这一点, 参见图 1-129. 当 $x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时, 函数值变得越来越大并且图形的 "终端" 上升.

(b) $f(x)=-x^3$ 的图形如图 1-130. 当 $x\to\infty$ 时函数值变得越来越负; 当 $x\to-\infty$ 时函数值为正的并且变得越来越大. 我们有

$$\lim_{x\to\infty}(-x^3)=-\infty \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty.$$

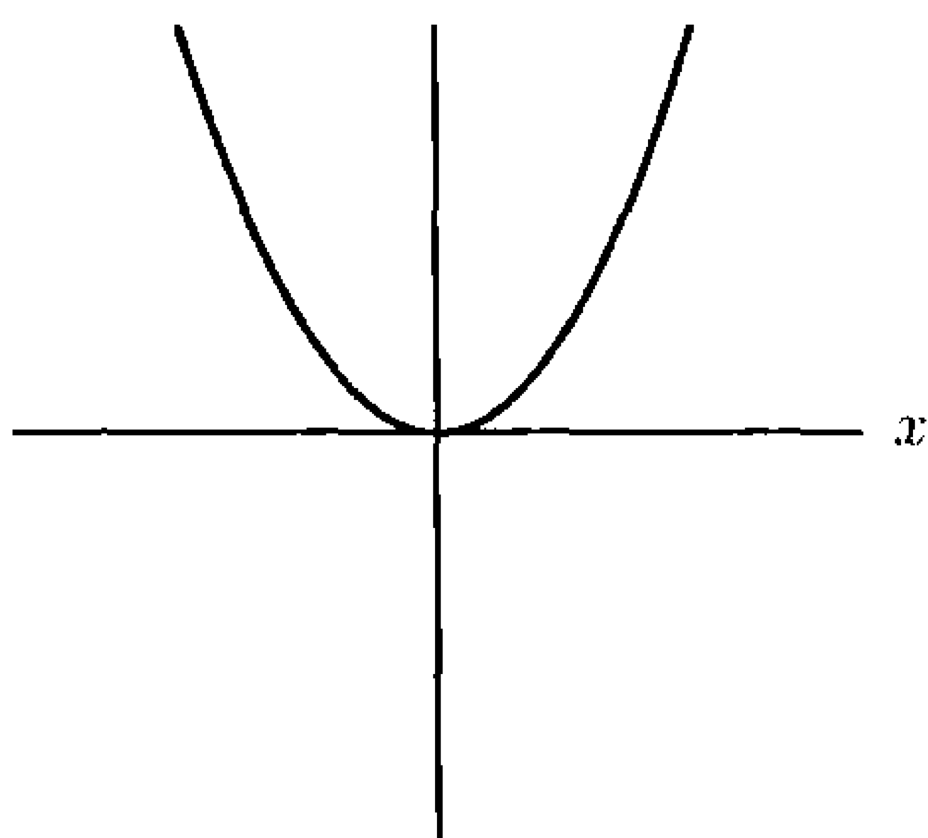


图 1-129 $f(x)=x^2$ 的终极性态

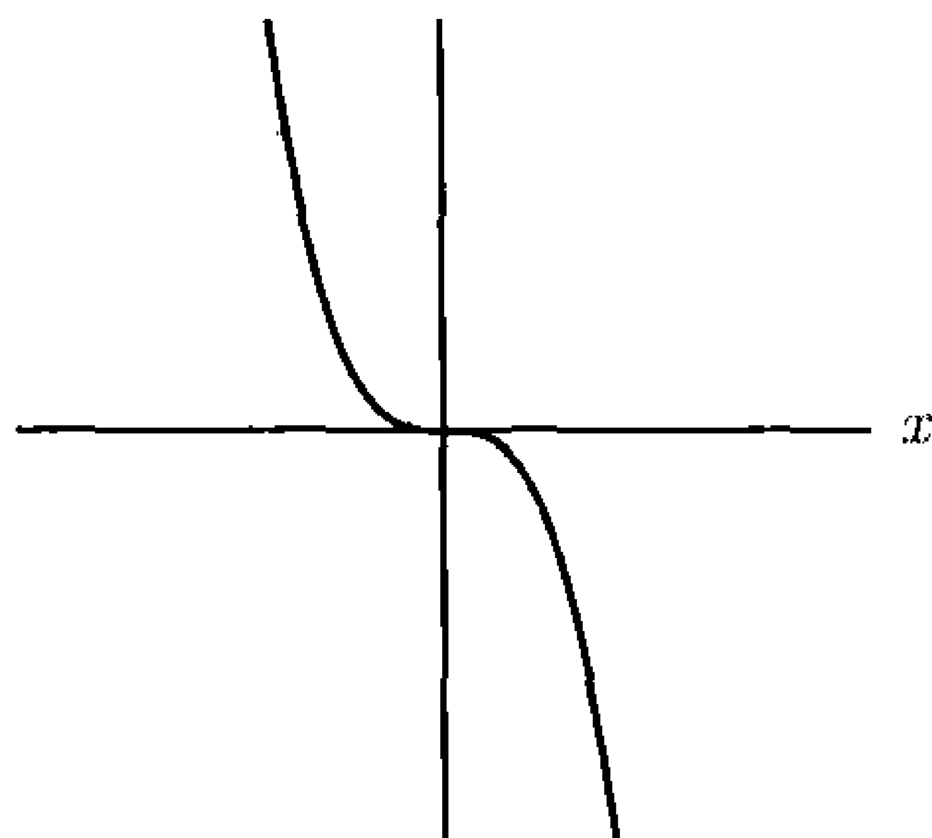


图 1-130 $f(x)=-x^3$ 的终极性态

(c) $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的图形如图 1-131. 当 $x\to\infty$ 时, 函数值无限地变大, 而当 $x\to-\infty$ 时, 函数值越来越靠近零. 我们有

$$\lim_{x\to\infty}(\mathrm{e}^x)=\infty \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x)=0. \quad \square$$

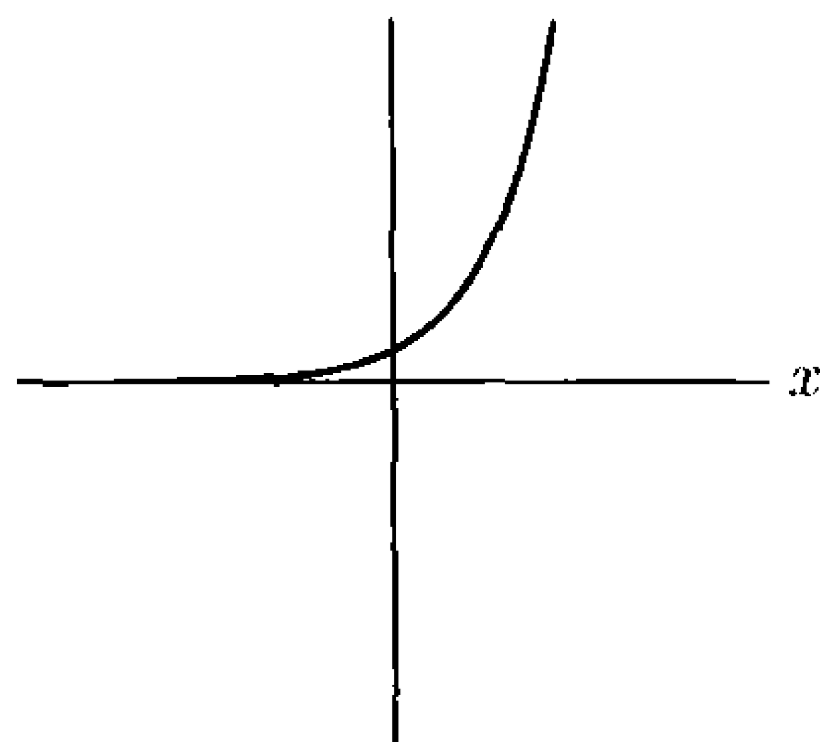


图 1-131 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的终极性态

x 的有限值过程的极限, 例如 x 趋于 0 的过程的极限, 在第 2 章相关理论部分讨论.

指数函数和幂函数: 哪个拥有压倒优势

当 x 变大时, 如何比较幂函数和指数函数的增长? 在日常用语中, 指数这个单词经常用来表示非常快的增长. 但是指数函数总是比幂函数增长得快吗? 为了确定 "终究" 是怎么回事, 我们通常要知道当 $x\to\infty$ 时哪个函数拥有压倒优势. 我们来比较形如 $y=a^x(a>1)$ 和 $y=x^n(n>0)$ 这样两种函数.

首先我们考虑 $y=2^x$ 和 $y=x^3$. 近看 (局部的), 图 1-132a 显示在 $x=2$ 和 $x=4$ 之间, $y=2^x$ 的图形位于 $y=x^3$ 的下方. 但是图 1-132b 显示指数函数 $y=2^x$

最终要超过 $y=x^3$. 远看 (整体的), 图 1-132c 显示, 对大的 x, x^3 的值与 2^x 相比显得微不足道. 的确, 2^x 比 x^3 增长得要快得多, 与 x^3 慢慢爬相比, 2^x 看起来几乎是垂直的.

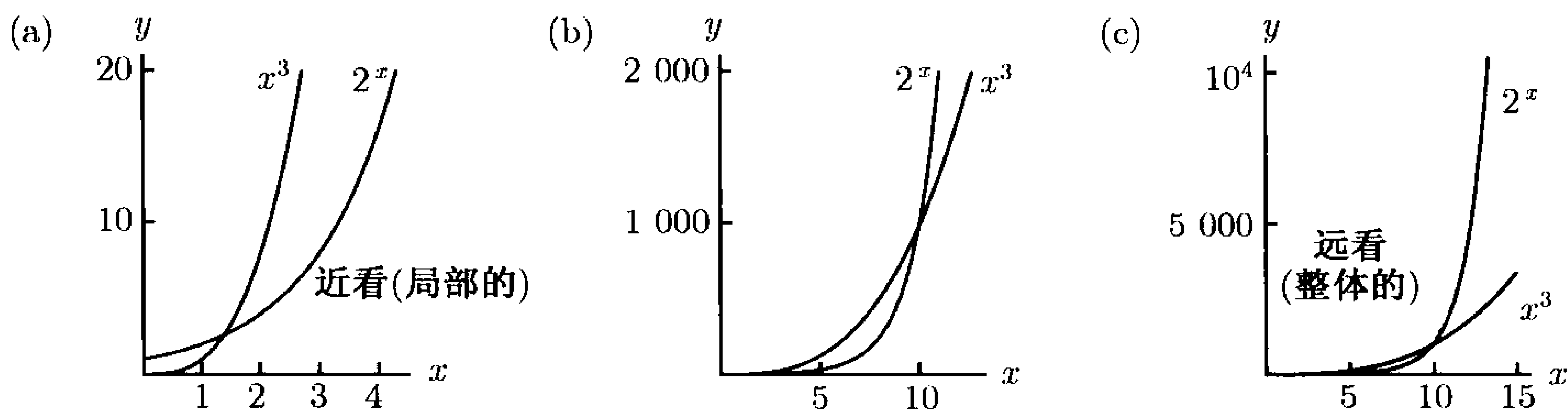


图 1-132　$y=2^x$ 和 $y=x^3$ 的局部视图和整体视图: 注意到 $y=2^x$ 最终控制 $y=x^3$

事实上, 每个指数增长函数最终会控制每个幂函数. 尽管对一些 x 的值, 指数函数可能在幂函数的下方, 但是对充分大的 x 值, 无论 n 是多少 a^x 最终会控制 x^n(只要 $a>1$).

对数函数呢? 我们知道指数函数增长得非常快而对数函数增长得非常慢. 参见图 1-133. 事实上, 对数函数增长得很慢, 每个幂函数 x^n 最终会控制 $\ln x$(只要 n 是正的).

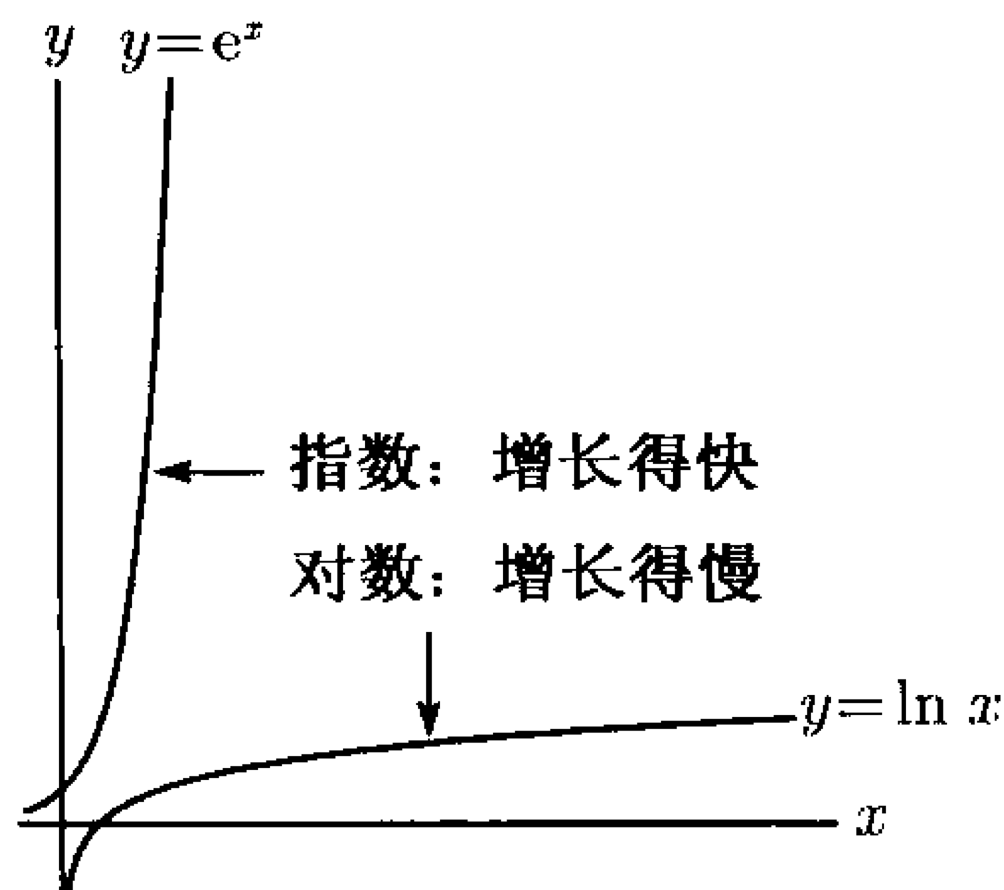


图 1-133　指数和对数增长

多项式的终极性态

在 1.9 节我们看到, 如果在一个充分大的视窗内观看多项式, 它与其首项表示的幂函数几乎有相同的形状. 假设 $a_n \neq 0$, 我们有

$$\lim_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim_{x\to\infty}(a_n x^n).$$

当 $x\to-\infty$ 时结果类似. 多项式的终极性态同其首项的终极性态相同.

例 10　求每种情形下的 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(a) $f(x)=5x^3-20x^2+15x-100$

(b) $f(x)=25+10x-15x^2-3x^4$

解　(a) 我们有

$$\lim_{x\to\infty}(5x^3-20x^2+15x-100)=\lim_{x\to\infty}(5x^3)=\infty.$$

类似地,

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^3-20x^2+15x-100)=\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty.$$

(b) 我们有

$$\lim_{x\to\infty}(25+10x-15x^2-3x^4)=\lim_{x\to\infty}(-3x^4)=-\infty.$$

类似地,

$$\lim_{x\to-\infty}(25+10x-15x^2-3x^4)=\lim_{x\to-\infty}(-3x^4)=-\infty.$$ □

习题

1. 当 $x\to\infty$ 时, 三个函数 $y=1000x^2$, $y=20x^3$ 和 $y=0.1x^4$ 哪个的值最大? 哪个的值最小? 在同一个坐标系中作出这三个函数整体的图形 ($x\geqslant 0$).

2. 当 $x\to\infty$ 时, 两个函数 $y=5000x^3$ 和 $y=0.2x^4$ 哪个拥有压倒优势? 在原点两个图形相交. 还有其他交点吗? 如果有, 求出它们的 x 值.

3. 在同一个坐标系中作出 $x\geqslant 0$ 时 $y=x^{1/2}$ 和 $y=x^{2/3}$ 的图形. $x\to\infty$ 时哪个函数的值较大?

4. 在同一个坐标系中绘出 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=20x^2$ 的图形. $x\to\infty$ 时哪个函数的值较大?

5. 在同一个坐标系中绘出 $f(x)=x^5$, $g(x)=-x^3$ 和 $h(x)=5x^2$ 的图形. $x\to\infty$ 时哪个函数有最大的正值? $x\to-\infty$ 呢?

在习题 6~7 中, 在两个视窗中作出 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图形. 描述你所看到的现象.

(a) 视窗 $-7\leqslant x\leqslant 7$ 和 $-15\leqslant y\leqslant 15$

(b) 视窗 $-50\leqslant x\leqslant 50$ 和 $-10\,000\leqslant y\leqslant 10\,000$

6. $f(x)=0.2x^3-5x+3$ 和 $g(x)=0.2x^3$

7. $f(x)=3-5x+5x^2+x^3-x^4$ 和 $g(x)=-x^4$

在习题 8~10 中作出 $f(x)$ 的恰当的图形.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

11. 一个连续函数具有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=3$.

(a) 用语言说明这个极限的含义.

(b) 在 (i)~(iv) 的每个部分, 作出函数 $f(x)$ 的图形, 这个函数具有这个极限并且

(i) 是递增的　(ii) 是递减的

(iii) 是上凹的　(iv) 是振荡的

12. 一个连续函数具有 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=3$.

(a) 用语言说明这个极限的含义.

(b) 在 (i)~(iv) 的每个部分, 作出函数 $g(x)$ 的图形, 这个函数具有这个极限并且

(i) 是递增的　(ii) 是递减的

(iii) 是上凹的　(iv) 是振荡的

13. 估计 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$. 说明理由.

14. 如果 $f(x)=-x^2$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是多少? $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 是多少?

在习题 15~18 中, 求 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

15. $f(x) = -10x^4$ **16.** $f(x) = 2^x$

17. $f(x) = 8(1 - \mathrm{e}^{-x})$

18. $f(x) = 4x^5 - 25x^3 - 60x^2 + 1000x + 5000$

在习题 19~24 中 $x \to \infty$ 时哪个函数的值较大?

19. $3x^5$ 或 $58x^4$ **20.** $12x^6$ 或 $(1.06)^x$

21. $x^{1/2}$ 或 $\ln x$

22. $x^3 + 2x^2 + 25x + 100$ 或 $10 - 6x^2 + x^4$

23. $5x^3 + 20x^2 + 150x + 200$ 或 $0.5x^4$

24. $5x^3 + 20x^2 + 150x + 200$ 或 $\mathrm{e}^{0.2x}$

25. 在图 1-134 中找出相应于 $y = 70x^2$, $y = 5x^3$, $y = x^4$ 和 $y = 0.2x^5$ 的图形.

26. 在图 1-135 中找出相应于 $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$, $y = x^2$ 和 $y = x^{1/2}$ 的图形.

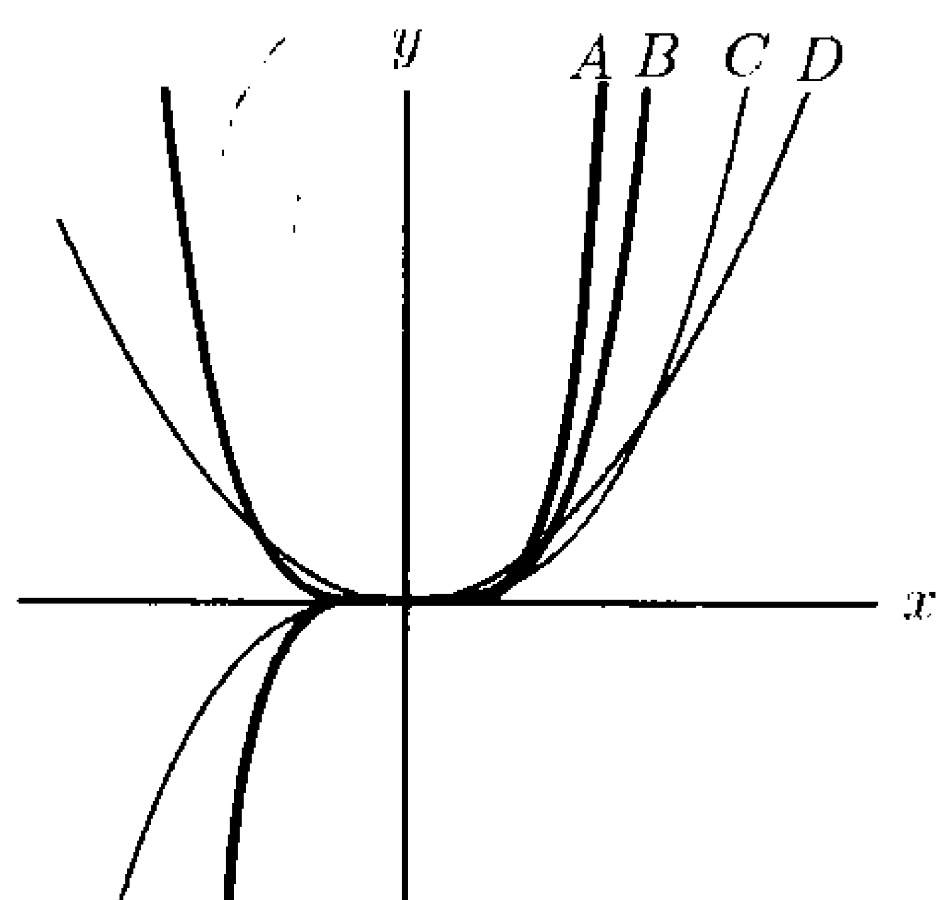


图 1-134

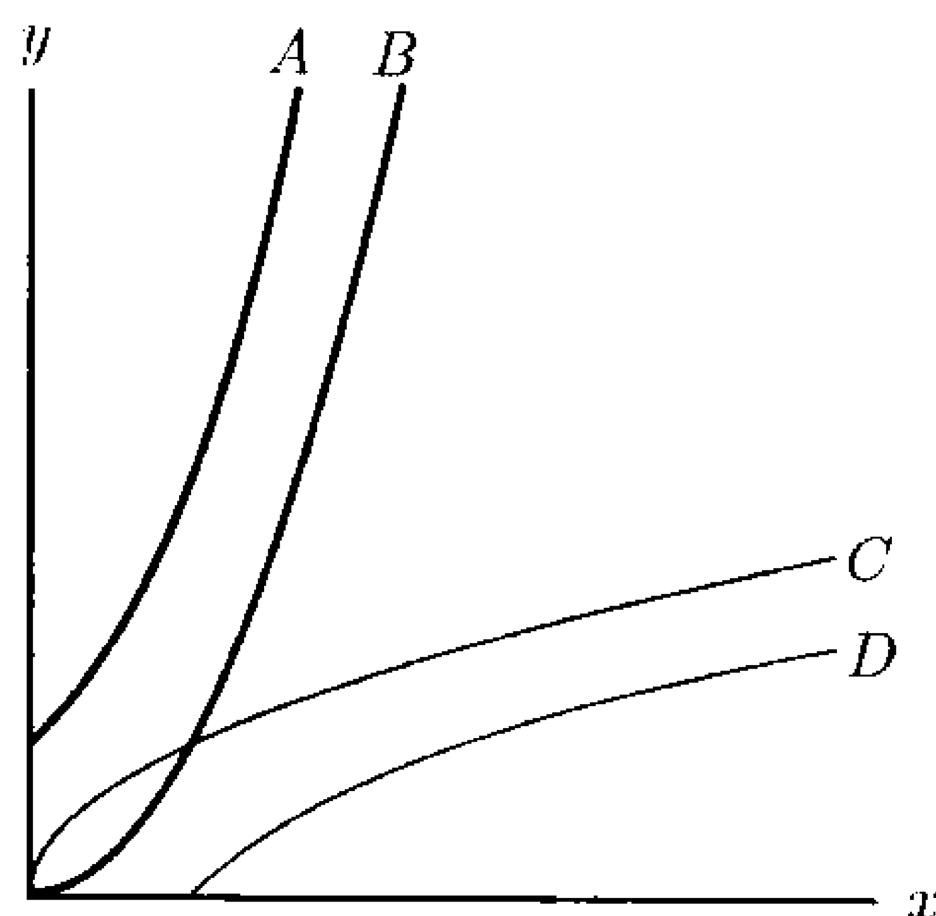


图 1-135

27. 函数 $y = x^5$, $y = 100x^2$ 和 $y = 3^x$ 的图形如图 1-136 所示. 哪个函数对应于哪条曲线?

28. 用作图计算器或者电脑作出 $y = x^4$ 和 $y = 3^x$ 的图形. 确定出表示图 1-137 中每个图形的近似的定义域和值域.

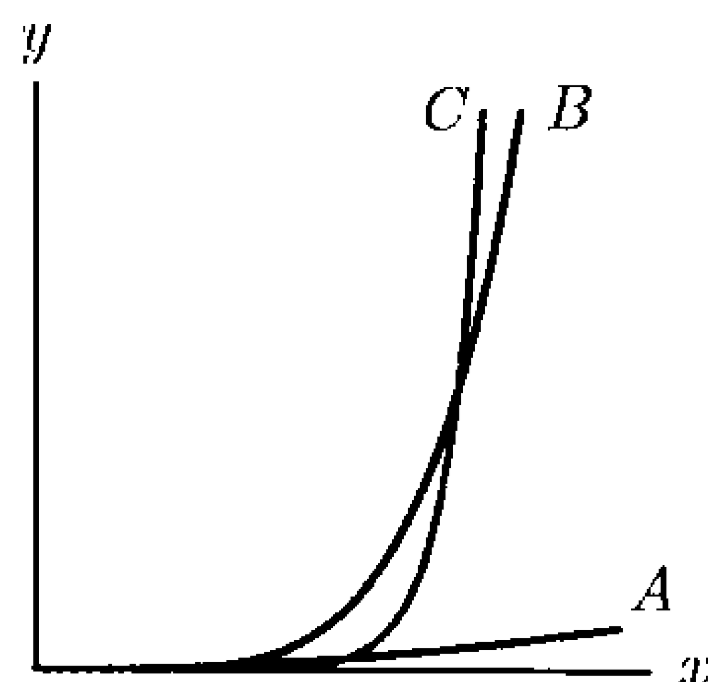


图 1-136

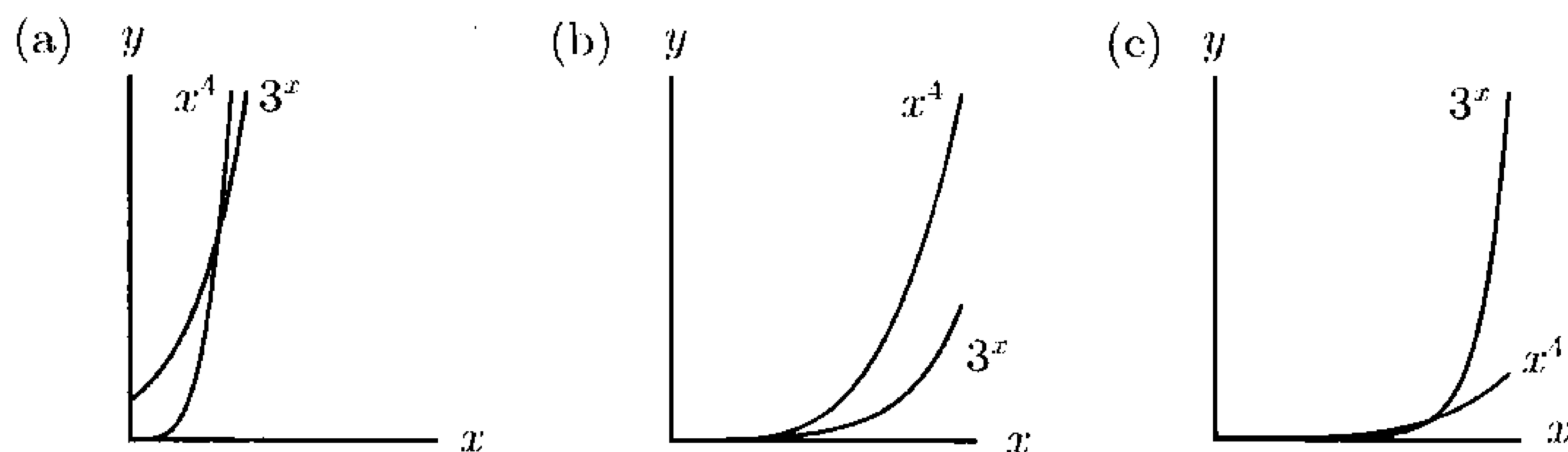


图 1-137

29. 用一个既包括正的 x 值又包括负的 x 值的视窗作出 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的图形.

(a) 对什么样的 x 值 f 是递增的? 对什么样的 x 值 f 是递减的?

(b) 靠近 $x=0$ 时 f 的图形是上凹的还是下凹的?

(c) $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 的值如何? $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 的值如何?

30. 用一个既包括正的 x 值又包括负的 x 值的视窗作出 $f(x)=\ln(x^2+1)$ 的图形.

(a) 对什么样的 x 值 f 是递增的? 对什么样的 x 值 f 是递减的?

(b) 靠近 $x=0$ 时 f 的图形是上凹的还是下凹的?

(c) $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 的值如何? $x\to-\infty$ 时, $f(x)$ 的值如何?

第 2 章　变化率：导数

第 1 章介绍了函数在一个区间上的平均变化率. 本章将考察函数在一点的瞬时变化率. 为了表示在某个给定时刻的变化率, 我们引入导数的概念.

导数从几何的角度可以解释为曲线的斜率, 从物理学的角度可以解释为变化速度. 导数可以用来表示很多事情, 从利率波动, 到鱼的死亡速度, 甚至肿瘤的增长速度.

2.1　瞬时变化率

第 1 章介绍了函数在一个区间上的平均变化率. 本节考虑函数在一点的瞬时变化率. 我们在第 1 章看到, 当物体沿着直线运动时, 其位置关于时间的平均变化率是它的平均速度. 如果位置表示为 $y = f(t)$, 其中 t 是时间, 那么

$$\text{从}t = a \text{ 到 } t = b \text{ 物体位置的平均变化率} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

如果你 4 h 行驶 200 mile, 那么平均速度就是 $200/4 = 50$ mile/h. 当然, 这并不意味着在整个旅途中你均以 50 mile/h 的速度行进. 在旅途中的某个给定时刻, 你的速度计上显示的速度就是我们现在要考察的量.

2.1.1　瞬时速度

我们垂直向上扔一只柚子. 表 2-1 给出了 t 时刻它的高度 y. 恰好在 $t = 1$ 的时刻, 柚子的速度是多少呢? 我们用平均速度来估计这个量.

表 2-1　柚子离地面的高度

t(s)	0	1	2	3	4	5	6
$y = s(t)$(ft)	6	90	142	162	150	106	30

在区间 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上, 柚子运动的平均速度是 84 ft/s, 而在区间 $1 \leqslant t \leqslant 2$ 上, 其平均速度是 52 ft/s. 注意, 在 $t = 1$ 之前的平均速度比在 $t = 1$ 之后的平均速度大, 是因为柚子的运动正在变慢. 我们预计 $t = 1$ 时的速度介于这两个平均速度之间. 怎么才能求出恰好在 $t = 1$ 时的速度呢? 我们需要进一步考察 $t = 1$ 附近的情况. 假设我们求出 $t = 1$ 两边越来越小的区间上的平均速度, 如图 2-1. 例如,

在$t=1$ 和 $t=1.01$ 之间

$$\text{物体的平均速度}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{s(1.01)-s(1)}{1.01-1}=\frac{90.678-90}{0.01}=67.8 \text{ ft/s}.$$

我们预计 $t=1$ 时, 物体的瞬时速度介于 $t=1$ 两边的平均速度之间. 在图 2-1 中, $t=1$ 之前的平均速度和 $t=1$ 之后的平均速度, 一起随着区间的缩小而越来越接近. 对于图 2-1 中最小的区间, 两个速度都是 68.0 ft/s(近似到一位小数), 所以我们说 $t=1$ 时的速度是 68.0 ft/s(近似到一位小数).

t	0	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	2
$y=s(t)$	6.000	83.040	89.318	89.932	90.000	90.068	90.678	96.640	142.000

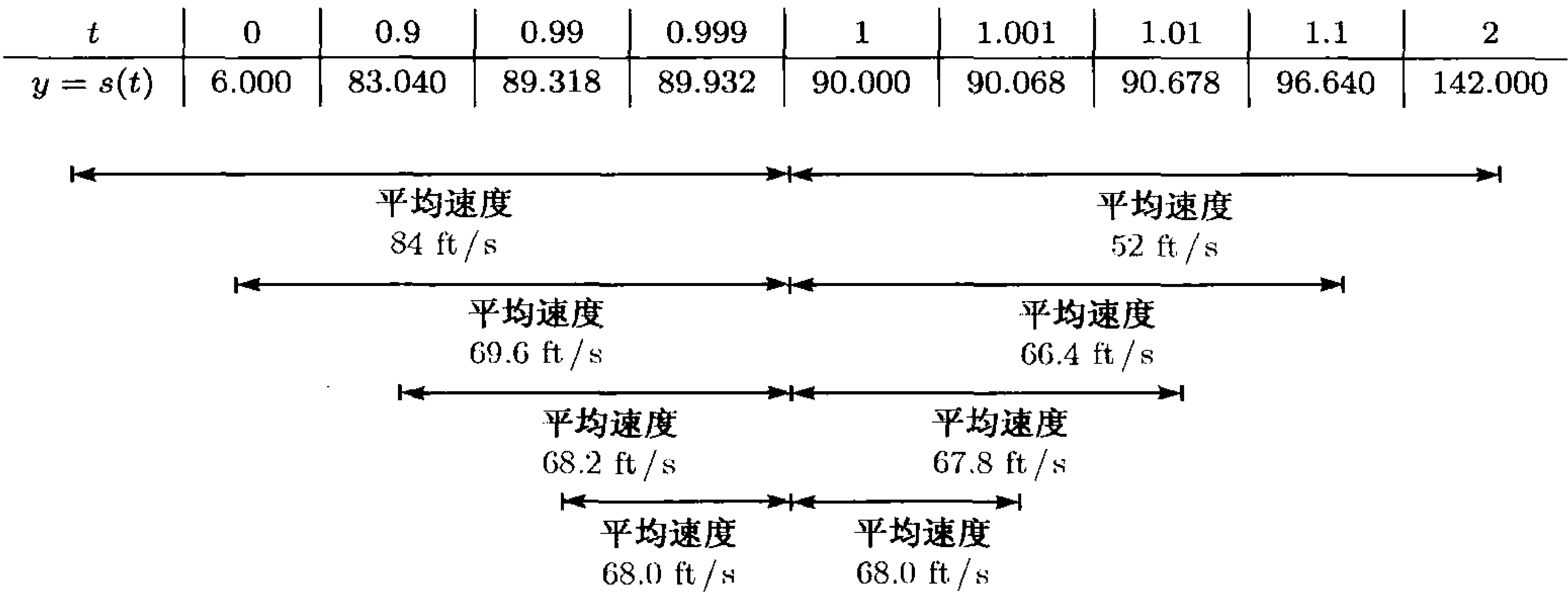


图 2-1 连续显示 $t=1$ 两边越来越小的区间上的平均速度

当然, 如果我们保留更多位小数位, $t=1$ 之前和之后的平均速度就不再相同了. 为了使 $t=1$ 时的速度精确到更多小数位, 我们可以将 $t=1$ 两边的区间取得越来越小, 直到平均速度所取的精度与我们想要达到的精度一致为止. 按这种方式, 我们可以使 $t=1$ 时速度的估计值达到任何精确度.

2.1.2 用极限的思想定义瞬时速度

当我们取 $t=1$ 附近较小的区间时, 柚子的平均速度总是要么在 68 ft/s 之上, 要么在 68 ft/s 之下. 那么定义在 $t=1$ 时刻的速度为 68 ft/s 似乎很自然. 这就叫做柚子在这一点的*瞬时速度*. 它的定义依赖于我们对以下事实的认识, 在越来越小的区间内计算出的平均速度任意接近 68. 这一过程称为*取极限*.

> 物体在 t 时刻的**瞬时速度**, 定义为物体在包含 t 的越来越短的时间区间上平均速度的极限.

注意, 瞬时速度似乎恰好是 68, 如果是 68.000 001 会怎么样呢? 我们如何确信所取的区间已经足够小了呢? 说明极限恰好是 68 需要关于如何计算速度以及极限过程的更精确的知识, 参见本章末的相关理论部分.

2.1.3 瞬时变化率

我们可以定义任何函数 $y=f(t)$ 在点 $t=a$ 的*瞬时变化率*. 我们仿照计算瞬时速度的方法来考虑在越来越小的区间上的平均变化率.

> f 在 a 点的**瞬时变化率**, 也叫做 f 在 a 点的**变化率**, 定义为 f 在 a 点周围的越来越小的区间上平均变化率的极限

因为平均变化率是形如 $\Delta y/\Delta t$ 的差商, 所以瞬时变化率就是差商的极限. 在实践中, 我们经常用差商来近似表示变化率.

例 1 $t(\mathrm{min})$ 时刻血液中药物数量 (mg) 由 $Q=25(0.8)^t$ 表示. 估计药量在 $t=3$ 时的变化率并解释你的答案.

解 我们通过计算在 $t=3$ 附近的区间上 Q 的平均变化率来估计 $t=3$ 时的变化率. 可以选取足够小的区间使得我们的估计尽可能地精确. 让我们看看在区间 $3\leqslant t\leqslant 3.01$ 上的平均变化率:

$$\text{平均变化率}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{25\times(0.8)^{3.01}-25\times(0.8)^3}{3.01-3.00}=\frac{12.7715-12.80}{3.01-3.00}=-2.85.$$

$t=3$ 时药量合理的变化率是 -2.85. 因为 Q 的单位是 mg, 而 t 的单位是 min, 所以 $\Delta Q/\Delta t$ 的单位是 mg/min. 由于变化率是负的, 因此药量是递减的. 3 分钟后, 体内的药量以 2.85 mg/min 的速度减少. □

在例 1 中, 我们是用点右边的区间 ($t=3$ 到 $t=3.01$) 估计变化率的. 我们当然也可以用点左边的区间, 还可以取左边和右边变化率的平均值. 本书中常常用点的右边区间.

2.1.4 在一点的导数

函数 f 在 a 点的瞬时变化率非常重要, 它有自己的名称, 即 f 在 a 点的*导数*, 用 $f'(a)$ 表示. 如果我们要强调 $f'(a)$ 是 $f(x)$ 当变量 x 增加时的变化率, 就称 $f'(a)$ 为 f 关于 x 在 $x=a$ 时的导数. 注意, 导数只是函数变化率的新名称.

> f 在 a 点的导数记作 $f'(a)$, 定义为 f 在 a 点的瞬时变化率.

用公式定义的导数在本章末相关理论部分中给出.

例 2 如果 $f(x)=x^3$ 估计 $f'(2)$.

解 因为 $f'(2)$ 是 $f(x)=x^3$ 在 2 这一点的导数, 也就是变化率, 所以我们考虑在 2 附近的区间上 $f(x)$ 的平均变化率. 利用区间 $2\leqslant x\leqslant 2.001$, 我们得到

$$\text{在 } 2\leqslant x\leqslant 2.001\ f(x) \text{ 的平均变化率}=\frac{(2.001)^3-2^3}{2.001-2}=\frac{8.012-8}{0.001}=12.0.$$

$f(x)$ 在 2 这一点的变化率近似地是 12, 所以我们估计得到 $f'(2)=12$. □

2.1.5　形象化导数：图形的斜率和切线的斜率

图 2-2 显示了连接 A 和 B 两点的割线其斜率所表示的函数平均变化率. 通过在越来越小的区间上取平均变化率就可以求得导数. 在图 2-3 中, 当点 B 朝点 A 运动时, 割线就变成了 A 点的切线. 因此, 导数可以由图形在这一点的切线斜率表示.

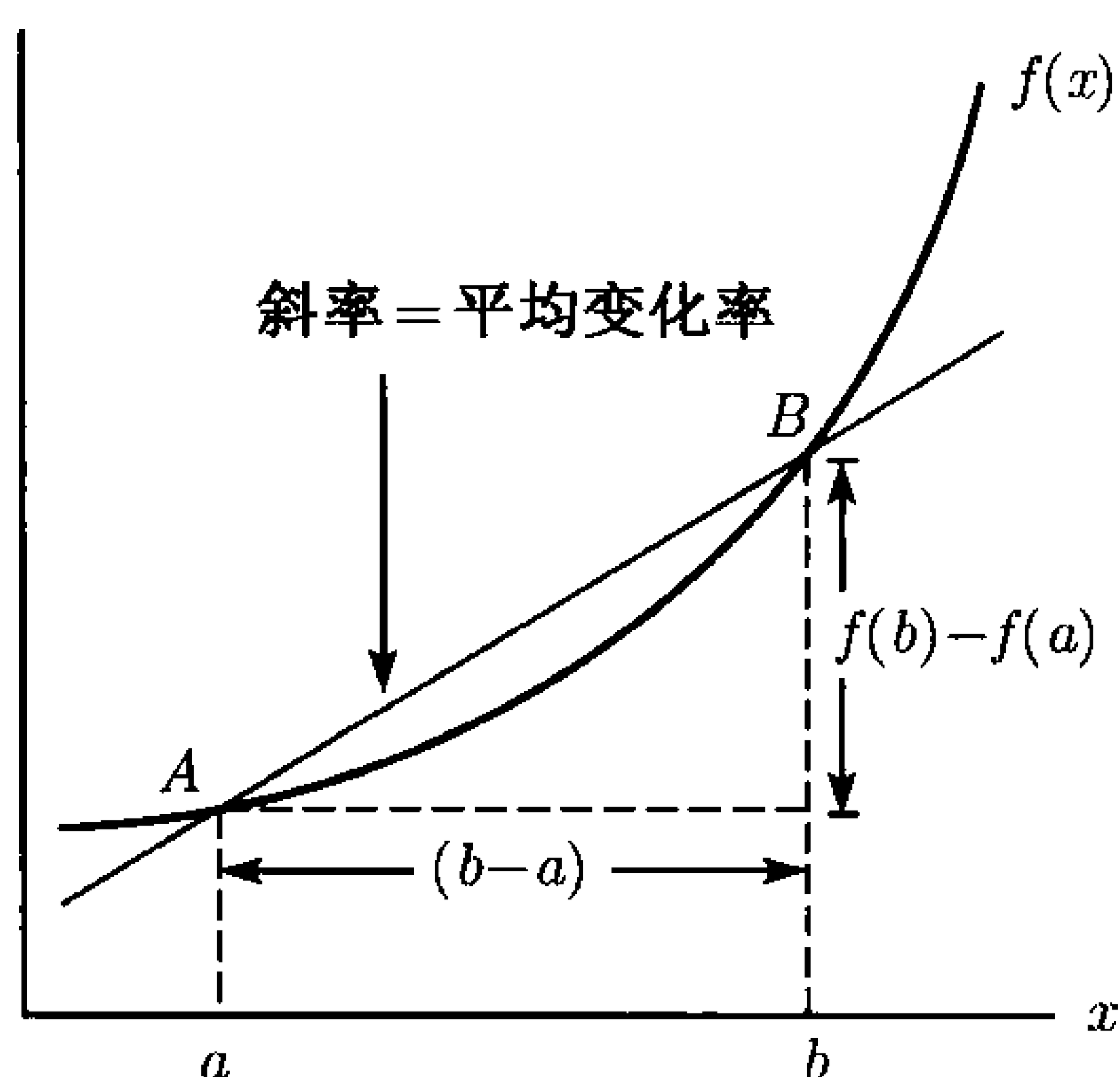


图 2-2　f 在 a 和 b 之间的平均变化率

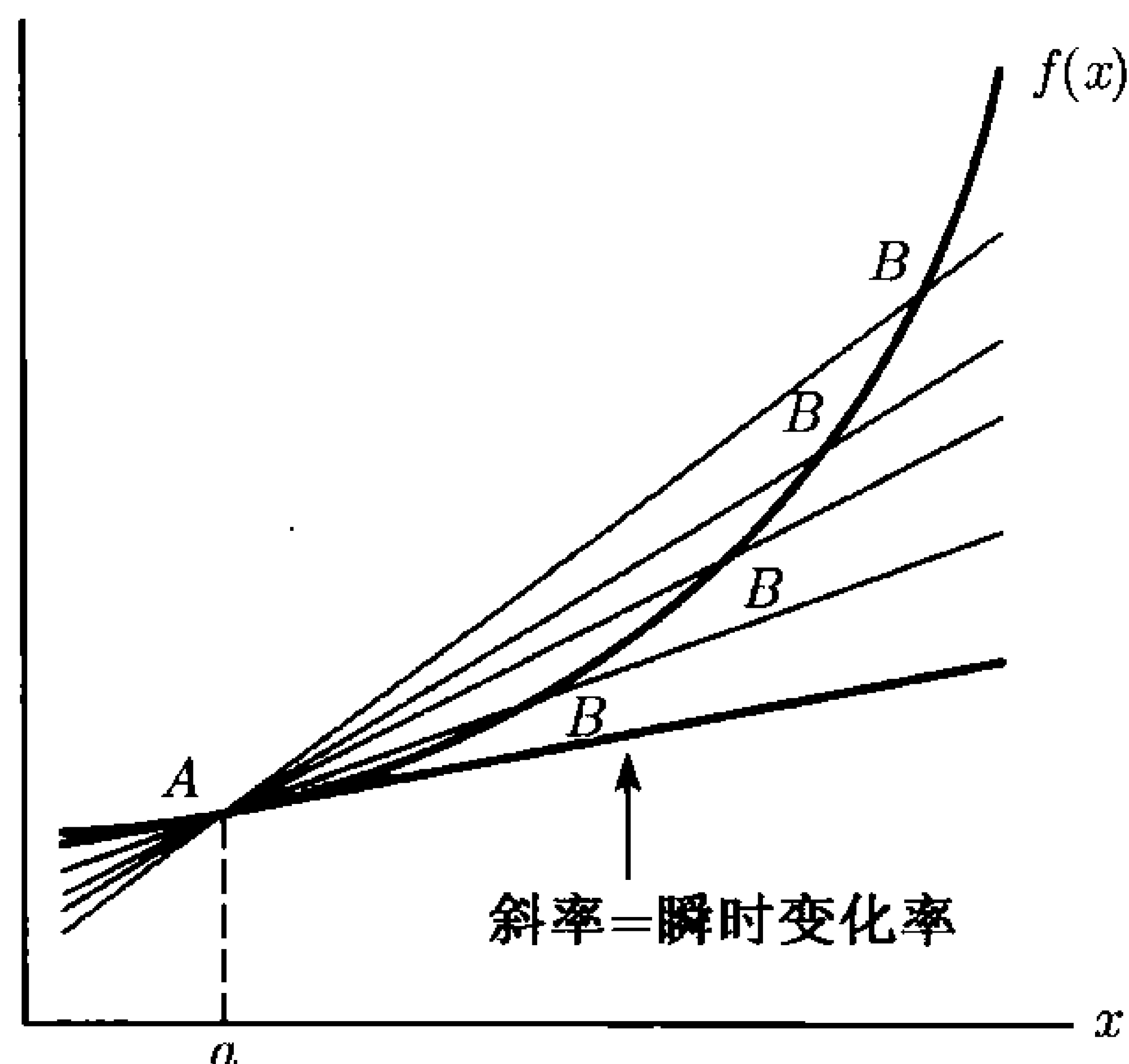


图 2-3　f 在 a 点的瞬时变化率

另一种方法, 取这一点附近的函数图形, 然后 "对准目标进行放大", 近距离地观察. (参见图 2-4.) 我们移得越近, 图形越接近直线. 我们称这一条直线的斜率为在这一点**图形的斜率**, 它也表示这个导数.

> 函数在 A 点的导数等于
> - 函数图形在 A 点的斜率.
> - 在 A 点与曲线相切的直线斜率.

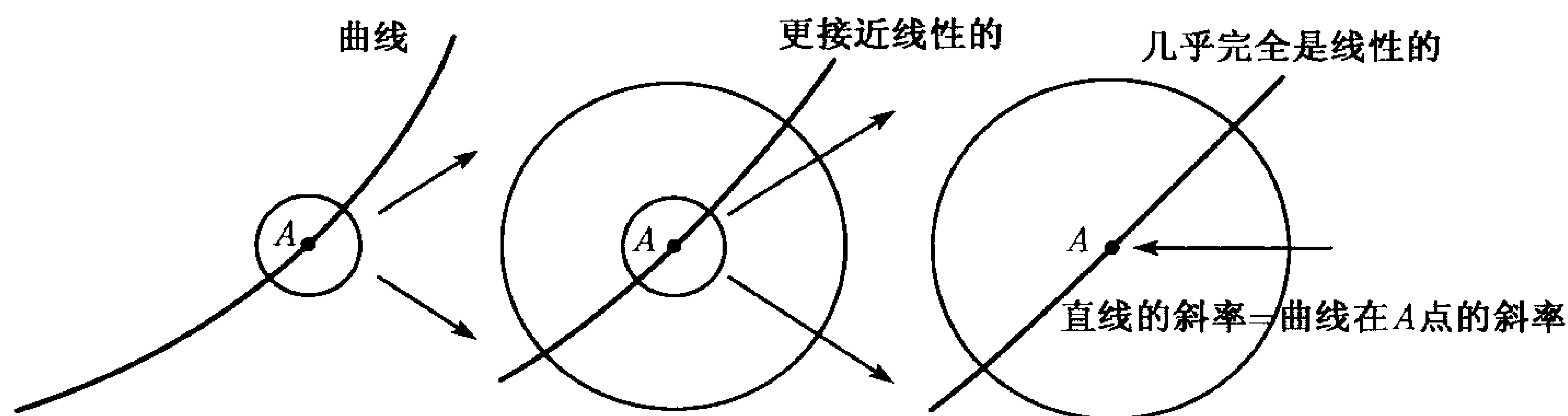


图 2-4　通过 "对准目标进行放大" 求曲线在一点的斜率

下面一些例子说明, 斜率解释往往对获得导数的大致信息有帮助.

例 3　根据 $f(x) = x^2$ 的图形确定下面这些量是正的, 负的, 还是零:

(a) $f'(1)$　　(b) $f'(-1)$　　(c) $f'(2)$　　(d) $f'(0)$

解 图 2-5 给出了函数 $f(x)=x^2$ 的图形在 $x=1, x=-1, x=2$ 和 $x=0$ 点的切线段. 因为导数是这一点切线的斜率, 所以我们有:

(a) $f'(1)$ 是正的.

(b) $f'(-1)$ 是负的.

(c) $f'(2)$ 是正的且大于 $f'(1)$.

(d) $f'(0)=0$, 因为图形在 $x=0$ 点有水平切线.

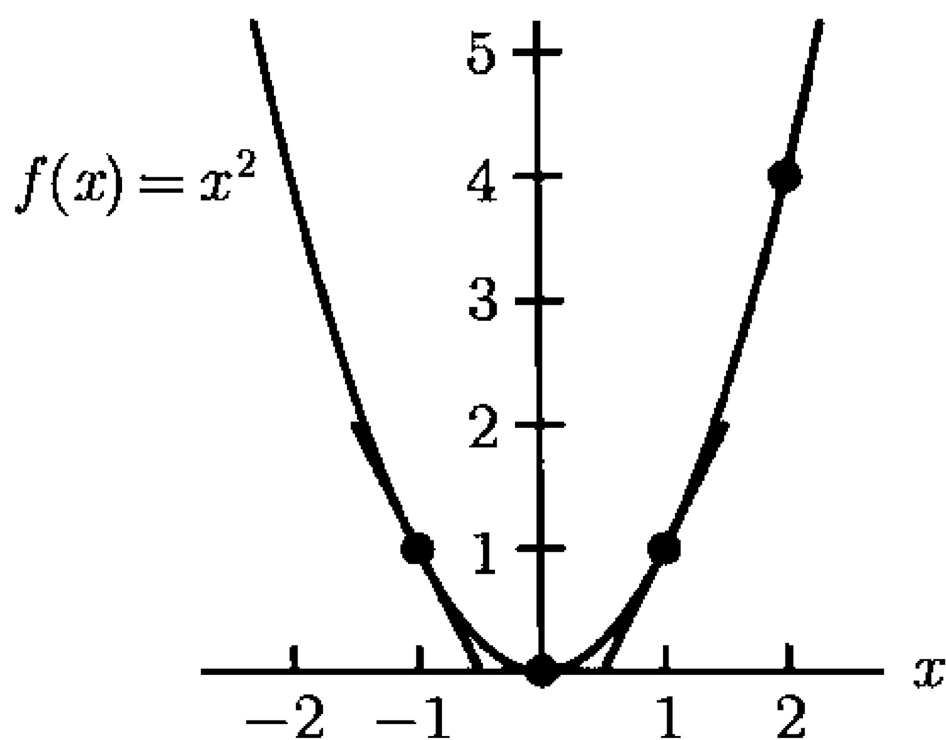


图 2-5 切线表明 $f(x)=x^2$ 的导数符号 □

例 4 根据图形估计 $f(x)=2^x$ 在 $x=0$ 点的导数, 并从数值上进行验证.

解 根据图形估计: 如果我们对图 2-6 中的指数曲线在 $x=0$ 点作切线, 就可以看到切线的斜率是正的, 且介于 0.5 和 1 之间.

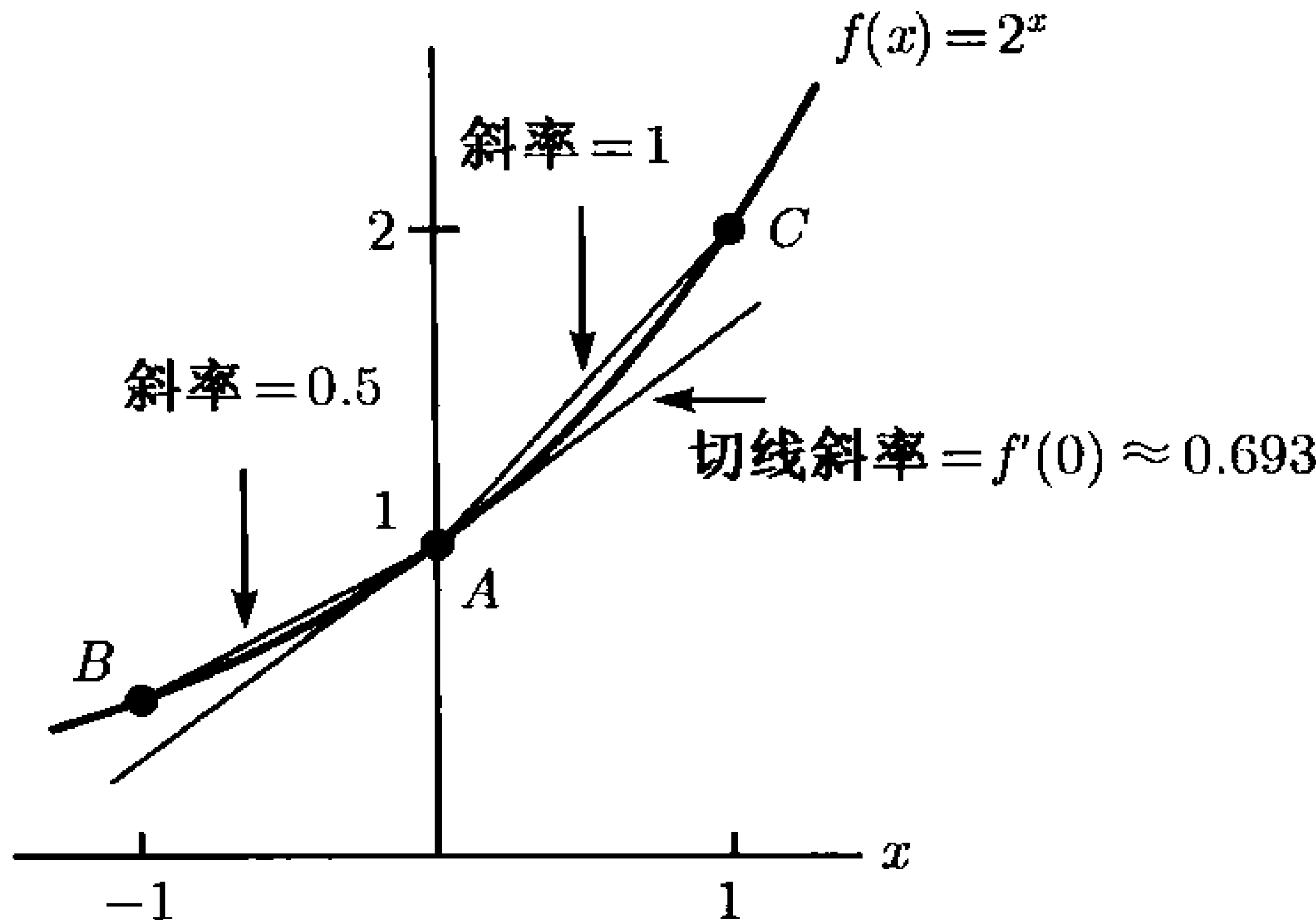


图 2-6 $f(x)=2^x$ 的图形在 $x=0$ 的切线表明 $x=0$ 点的导数

从数值上估计: 为了计算在 $x=0$ 点的导数, 我们计算在 0 点附近的区间上函数的平均变化率.

$$0 \leqslant x \leqslant 0.0001 \text{ 上 } f(x) \text{ 的平均变化率} = \frac{2^{0.0001}-2^0}{0.0001-0}$$
$$= \frac{1.000\,069\,317-1}{0.0001} = 0.693\,17.$$

由于利用较小的区间给出了相同的近似值, 所以导数的近似值是 0.693 17; 即 $f'(0)\approx 0.693$. □

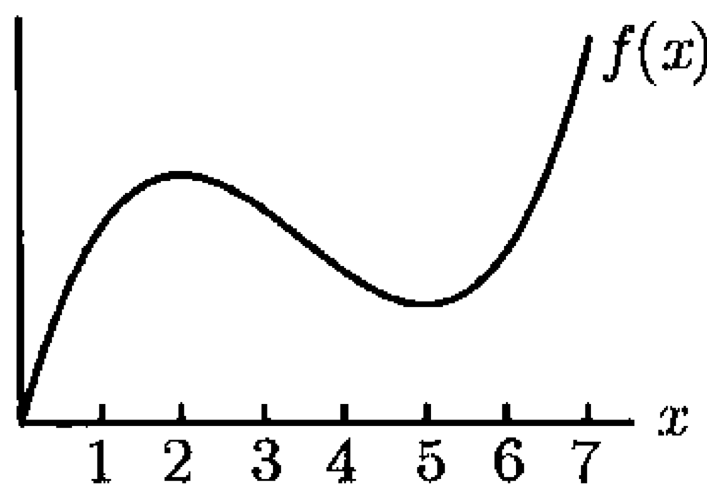


图 2-7

例 5 函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-7 所示. 指明下面每个量是正的还是负的, 并作图说明你的答案.

(a) $f'(1)$ (b) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$ (c) $f(4)-f(2)$

解 (a) 因为 $f'(1)$ 是图形 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的斜率, 由图 2-8 中得 $f'(1)$ 是正的.

(b) 差商 $(f(3)-f(1))/(3-1)$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 之间的割线斜率. 由图 2-9 我们知道这个斜率是正的.

(c) 因为 $f(4)$ 是函数在 $x=4$ 处的值, 而 $f(2)$ 是函数在 $x=2$ 处的值, 所以 $f(4)-f(2)$ 是函数在 $x=2$ 和 $x=4$ 之间的变化量. 由于 $f(4)$ 位于 $f(2)$ 的下方, 因此这个变化量是负的. 参见图 2-10.

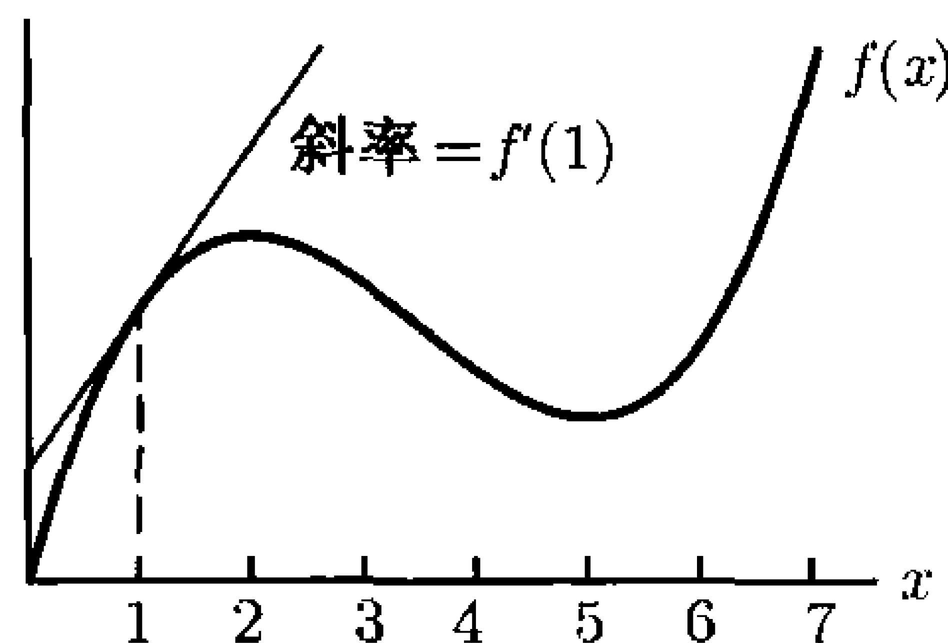


图 2-8

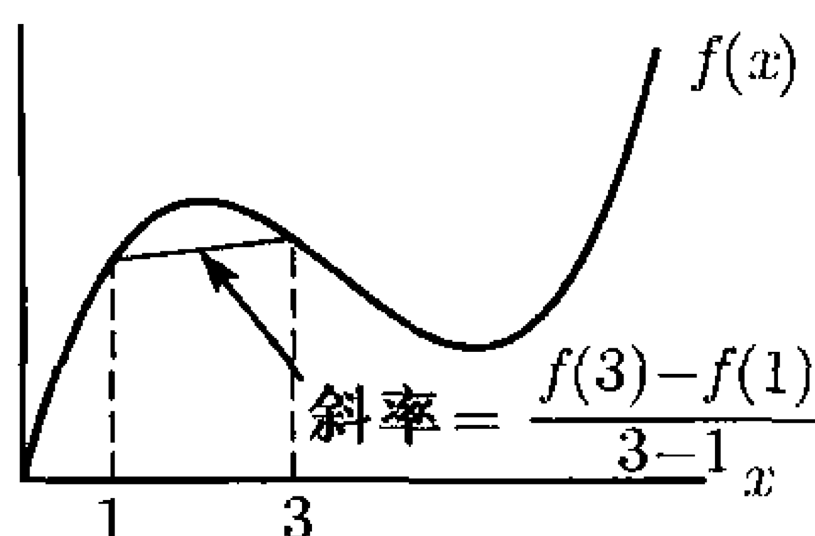


图 2-9

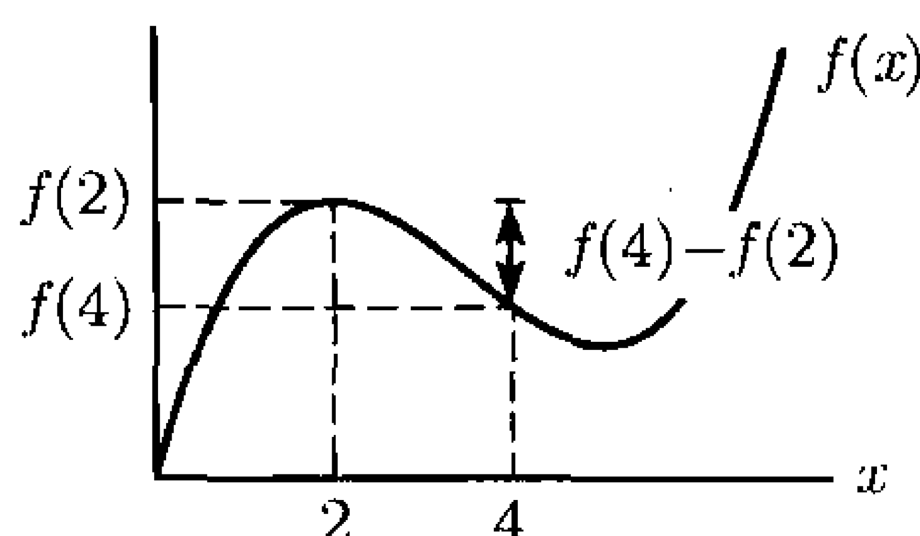


图 2-10 □

2.1.6 估计数值函数的导数

给定一个函数的数值表, 我们就可以估计它的导数值. 为此, 我们必须假设表中的点充分接近, 使函数在它们之间的变化不是太随意.

例 6　自 1980 年以来美国农田的总英亩数[①]一直在减少. 参见表 2-2.

表 2-2　农田总数 (百万英亩)

年	1980	1985	1990	1995	2000
农田 (百万英亩)	1039	1012	987	963	945

(a) 1980~2000 年农田的平均变化率是多少?

(b) 估计 $f'(1995)$ 并从农田角度解释你的答案.

解　(a) 在 1980~2000 年,

$$\text{平均变化率}=\frac{945-1039}{2000-1980}=\frac{-94}{20}=-4.7\ \text{百万英亩/年}.$$

在 1980~2000 年, 农田数量以每年 4.7 百万英亩的平均速度减少.

(b) 我们用 1995~2000 年的区间估计 1995 年的瞬时变化率:

$$f'(1995)=1995\ \text{年的变化率}\approx\frac{945-963}{2000-1995}=\frac{-18}{5}=-3.6\ \text{百万英亩/年}.$$

1995 年, 农田数量以每年约 3.6 百万英亩的速度减少. □

习题

1. 一个物体与某一点的距离 (ft) 由 $s(t)=t^2$ 表示, 其中时间 t 的单位是秒.
   (a) 物体在 $t=3$ 到 $t=5$ 之间的平均速度是多少?
   (b) 利用包含 3 的越来越小的区间估计 $t=3$ 时的瞬时速度.

① 《2004–2005 年美国统计摘要》, 表 796.

2. 在 t 时间内, 粒子相对其出发点运动了 s 米的距离, 其中 $s=4t^2+3$.

(a) 求下列情况下:

(i) $h=0.1$, (ii) $h=0.01$, (iii) $h=0.001$

粒子在 $t=1$ 和 $t=1+h$ 之间的平均速度.

(b) 用 (a) 部分的答案估计 $t=1$ 时粒子的瞬时速度.

3. 肿瘤的大小 $S\,(\text{mm}^3)$ 由 $S=2^t$ 表示, 其中 t 是发现肿瘤以来的月数. (给出答案的单位.)

(a) 在前 6 个月肿瘤大小的总变化量是多少?

(b) 在前 6 个月肿瘤大小的平均变化率是多少?

(c) 估计 $t=6$ 时肿瘤增长的速度. (用越来越小的区间.)

4. 在图 2-11 中曲线上找出所标的点, 使得它与所给的斜率相对应.

斜率	点
-3	
-1	
0	
1/2	
1	
2	

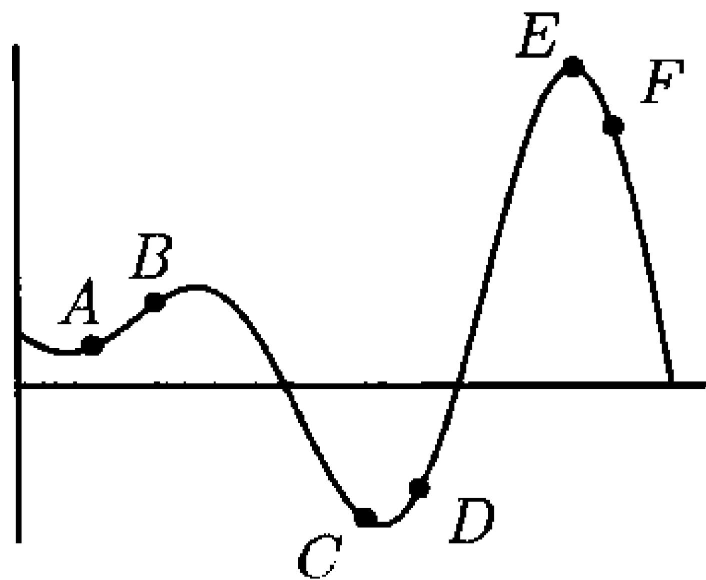


图 2-11

5. 如果 t 表示 2000 年以来的年数, 得克萨斯州麦卡伦市的人口 (千人) 由 $P(t)=570(1.037)^t$ 表示. 估计该市 2006 年的人口增长速度 (人/年).

6. 图 2-12 表示生产 x(kg) 化学药品的成本 $y=f(x)$.

(a) $x=0$ 到 $x=3$ 之间的成本平均变化率和 $x=3$ 到 $x=5$ 之间的成本平均变化率相比, 哪个大? 用图形说明.

(b) 生产 x(kg) 化学药品成本的瞬时变化率是 $x=1$ 时的大, 还是 $x=4$ 时的大? 用图形说明.

(c) 这些变化率的单位是什么?

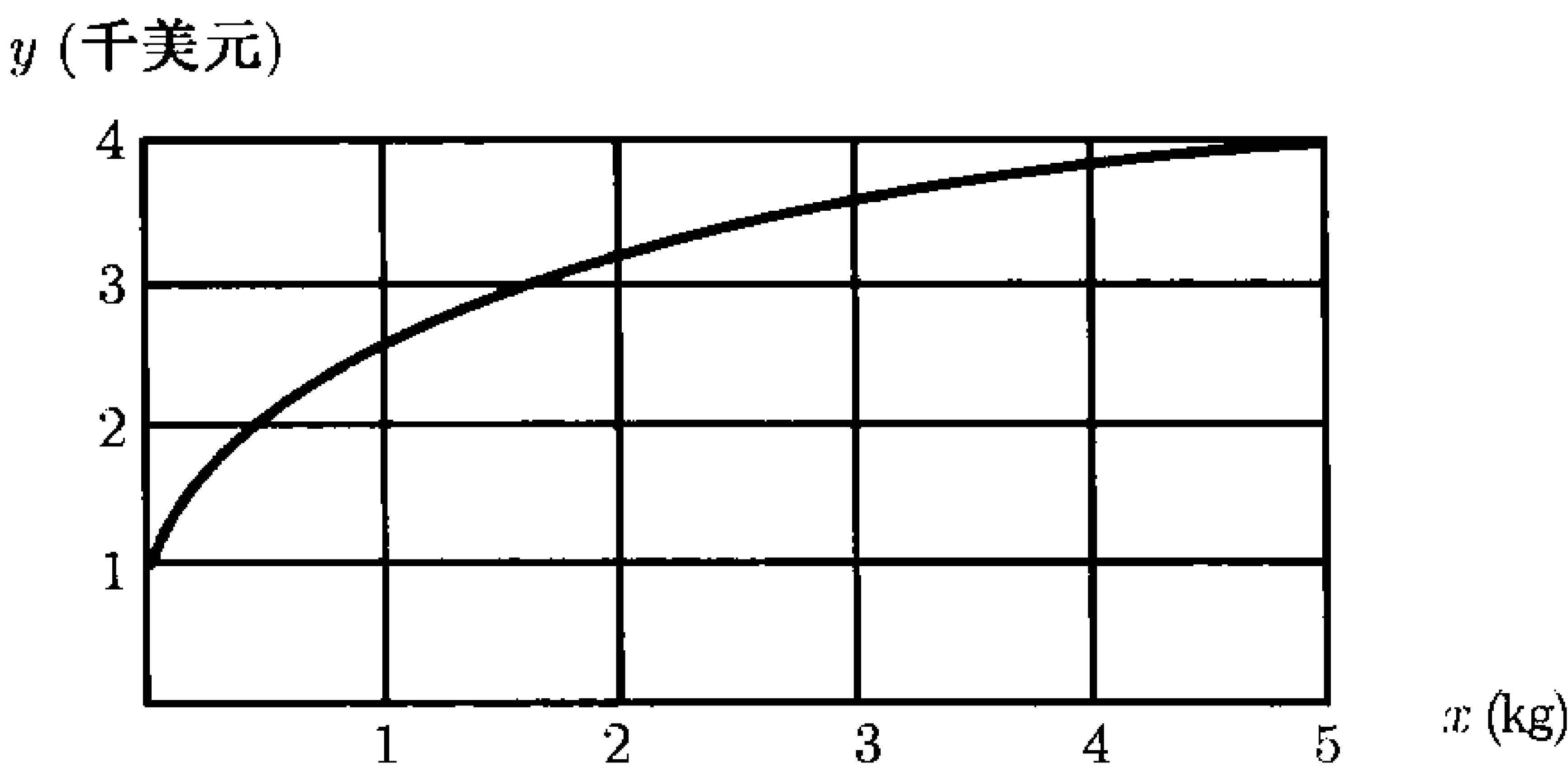


图 2-12

7. 汽车的位置 s 如下表所示, 求汽车在区间 $0\leqslant t\leqslant 0.8$ 上的平均速度, 并估计其在 $t=0.2$ 时的速度.

t(s)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
s(ft)	0	0.5	1.8	3.8	6.5	9.6

8. 生活在城市中的人中占美国总人口[①]的百分数是年份的函数，如下表所示.

年	1800	1830	1860	1890	1920
百分数	6.0	9.0	19.8	35.1	51.2
年	1950	1980	1990	2000	
百分数	64.0	73.7	75.2	79.0	

(a) 求 1890~1990 年，该百分数的平均变化率.

(b) 估计 1990 年这个百分数的增长速度.

(c) 估计 1830 年这个函数的变化率并且解释它的含义.

(d) 这个函数是递增的还是递减的?

9. (a) 函数 f 由图 2-13 表示. 在所标出的点中，哪个点上 $f'(x)$ 是正的? 哪个点上 $f'(x)$ 是负的? 哪个点上 $f'(x)$ 是零?

(b) 在所标出的点中，哪个点上 $f'(x)$ 最大? 哪个点上 $f'(x)$ 最小?

图　2-13

10. 用计算器或电脑作出函数

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 8x)(2 - 3^x)$$

在 $-3 \leqslant x \leqslant 7$ 上的图形.

(a) 在这个区间上 f 有多少个零点?

(b) 在 $x=0$ 处 f 是递增的还是递减的? 在 $x=2$ 处呢? 在 $x=4$ 处又怎样?

(c) 在下面哪个区间上，f 的平均变化率较大?
$-1 \leqslant x \leqslant 0$，$2 \leqslant x \leqslant 3$.

(d) f 的瞬时变化率是在 $x=0$ 处较大，还是在 $x=2$ 处较大?

11. 设 $f(x) = 5^x$. 先用一个小区间估计 $f'(2)$. 再用一个更小的区间再次估计 $f'(2)$ 来提高精确度.

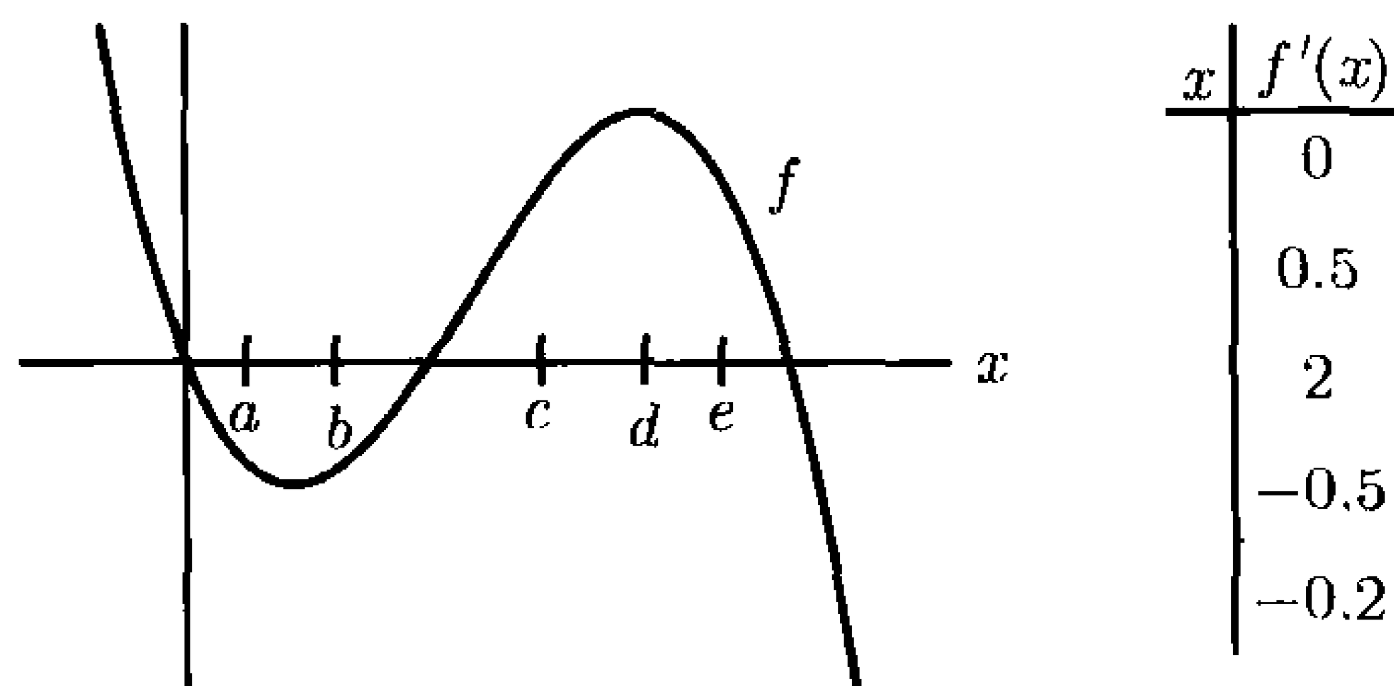
12. (a) 设 $g(t) = (0.8)^t$. 通过图形判断 $g'(2)$ 是正的，负的，还是零.

(b) 用一个小区间估计 $g'(2)$.

13. (a) 画出 $f(x) = 2 - x^3$ 的图形，判断 $f'(1)$ 是正的还是负的? 说明理由.

(b) 用一个小区间估计 $f'(1)$.

14. 图 2-14 表示 f 的图形. 在表中找出与点 a, b, c, d, e 相对应的导数.



x	$f'(x)$
	0
	0.5
	2
	−0.5
	−0.2

图　2-14

① 《1985 年美国统计摘要》，美国商务部，人口普查局，第 22 页，和《2005 年世界年鉴》，第 624 页 (纽约).

15. 如果 $P(t) = 200(1.05)^t$ 估计 $P'(0)$. 说明你是如何得到答案的?

16. 对于函数 $f(x) = 3^x$, 估计 $f'(1)$. 通过 $f(x)$ 的图形, 验证你的估计值, 它比 $f'(1)$ 的实际值是大还是小?

17. 下表表示 1990 年以来的 t 年, 美国拥有有线电视的家庭[①]的百分数 $P = f(t)$.

(a) 估计 $f'(6)$ 是正的还是负的? 从拥有有线电视的家庭所占的百分数角度分析它的含义是什么?

(b) 估计 $f'(2)$ 和 $f'(10)$. 说明含义.

t(1990 年以来的年数)	0	2	4	6	8	10	12
P(拥有有线电视的家庭所占的百分数)	59.0	61.5	63.4	66.7	67.4	67.8	68.9

18. 图 2-15 表示在 1930~2000 年美国的农场数[②]是年份 t 的函数, $N = f(t)$.

(a) $f'(1950)$ 是正的还是负的? 从农场数角度来说它的含义是什么?

(b) $f'(1960)$ 与 $f'(1980)$ 哪个更小? 说明理由.

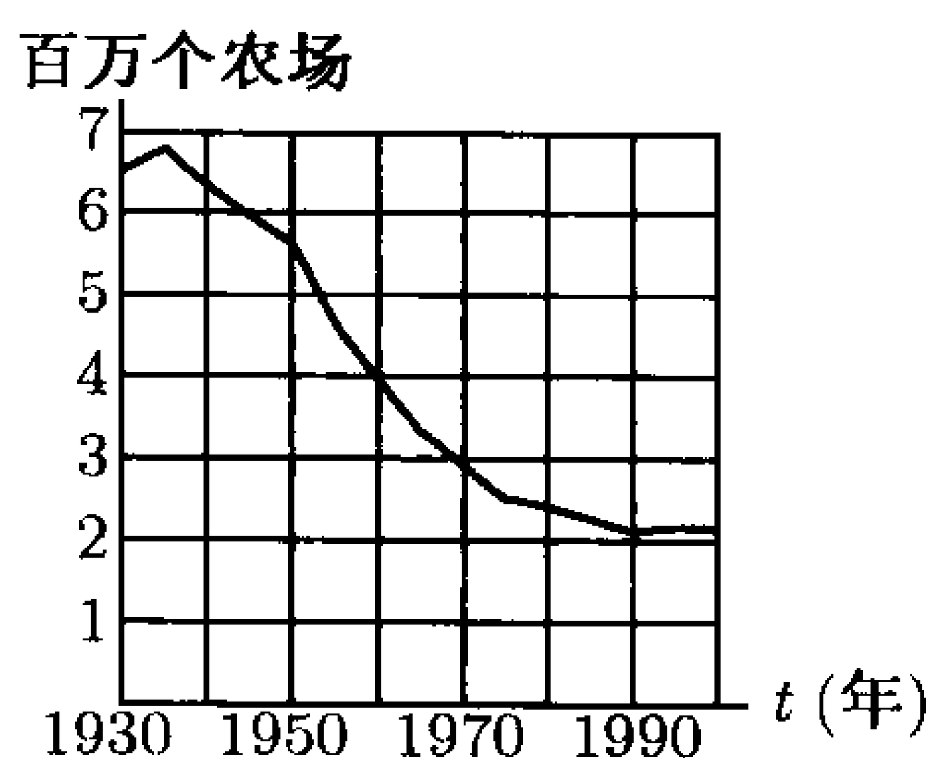


图 2-15

19. 估计函数 $f(x) = x\ln x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处的瞬时变化率. 这些值说明 $f(x)$ 的图形在 1 和 2 之间的凹性如何?

20. 用本节的图 2-7 确定下面每个量是正的, 负的, 还是近似为零? 用图形描述你的答案.

(a) $f(x)$ 在 $x = 3$ 和 $x = 7$ 之间的平均变化率.

(b) $f(x)$ 在 $x = 3$ 处的瞬时变化率.

21. 以下是函数 g 在 B 点的值和导数值, 用图 2-16 填空.

(a) $g(__) = __$　　(b) $g'(__) = __$

22. 以下是函数 f 在 A 点的值和导数值, 用图 2-17 填空.

(a) $f(__) = __$　　(b) $f'(__) = __$

23. 说明如何在图 2-18 中表示如下量.

(a) $f(4)$　　(b) $f(4) - f(2)$

(c) $\dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2}$　　(d) $f'(3)$

24. 对下列每对数, 根据图 2-18 确定哪个大. 说明你的答案.

(a) $f(3)$ 和 $f(4)$?　　(b) $f(3) - f(2)$ 和 $f(2) - f(1)$?

(c) $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$ 和 $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$?　　(d) $f'(1)$ 和 $f'(4)$?

25. (a) 在同一个坐标系中作出函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^2 + 3$ 的图形. 关于这两个图形在 $x = 0$ 处的切线斜率, 你能得出什么? 在 $x = 1$ 处呢? 在 $x = 2$ 处呢? 在 $x = a$ 处呢? 其中 a 是任意值.

(b) 说明如下结论: 任何函数加上一个常数不改变其在任意点的导数值.

① 《2005 年世界年鉴》, 第 310 页 (纽约).

② www.nass.usda.gov:81/ipedb/farmnum.htm, 访问日期 2005 年 4 月 11 日.

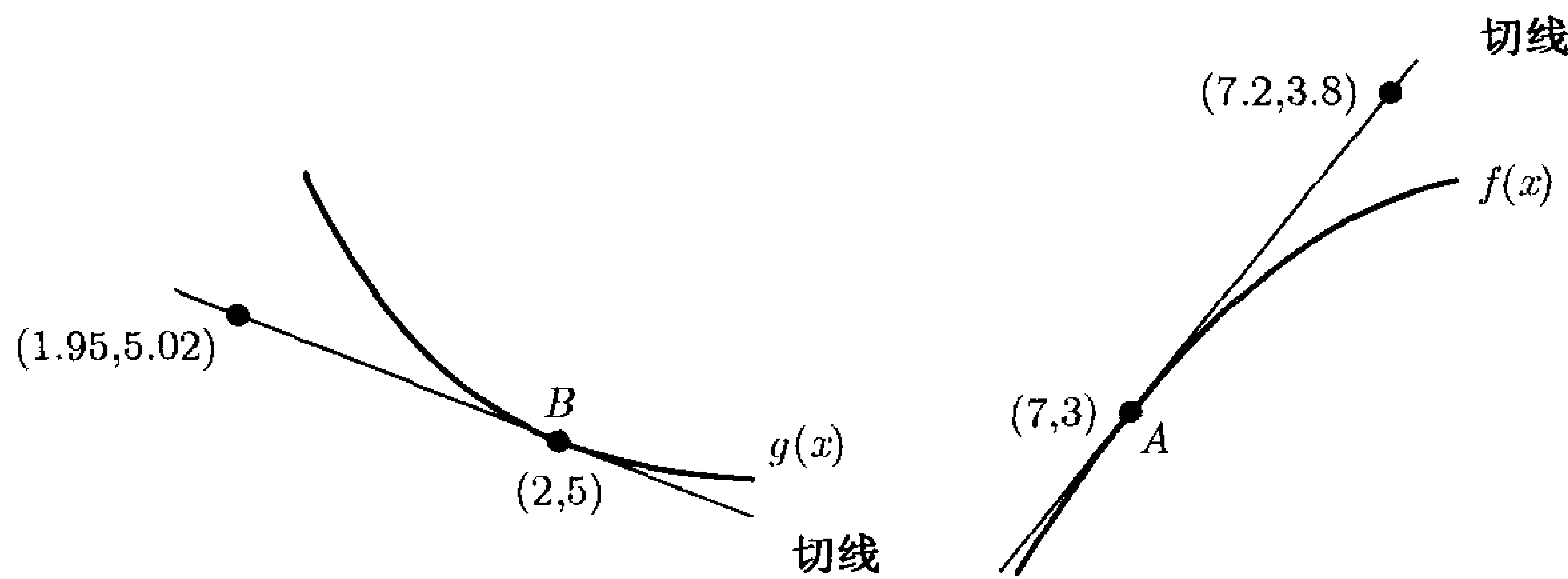


图 2-16

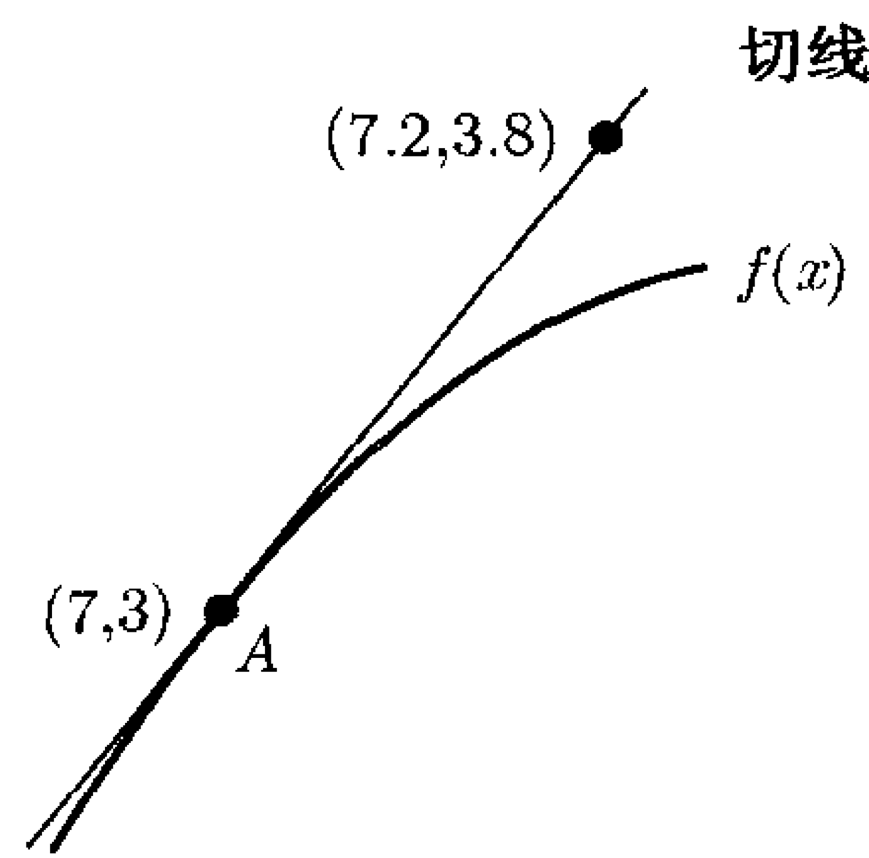


图 2-17

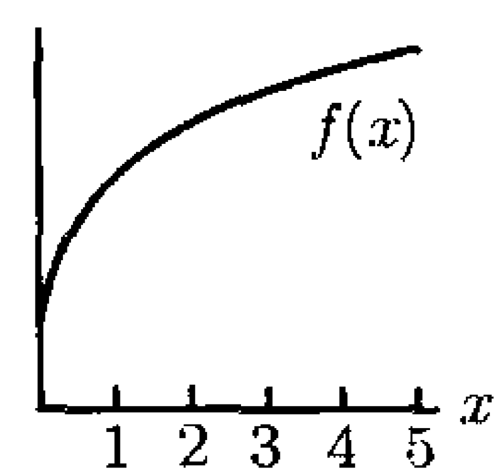


图 2-18

26. 产业工人每周工作的小时数 $f(t)$，每小时的收入 $g(t)$(美元) 和每周的收入 $h(t)$(美元)，是年份 t 的函数[①]，如下表所示.

(a) 指出下面每个导数是正的，负的还是零：$f'(t)$，$g'(t)$ 和 $h'(t)$. 用小时数和收入值解释每个答案.

(b) 估计下列导数，并解释你的答案：

(i) $f'(1970)$ 和 $f'(1995)$

(ii) $g'(1970)$ 和 $g'(1995)$

(iii) $h'(1970)$ 和 $h'(1995)$

t	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
$f(t)$	37.0	36.0	35.2	34.9	34.3	34.3	34.3
$g(t)$	3.40	4.73	6.84	8.73	10.09	11.64	14.00
$h(t)$	125.80	170.28	240.77	304.68	349.29	399.53	480.41

2.2 导 函 数

在 2.1 节，我们考虑了函数在一点的导数. 一般地，在不同的点导数取不同的值，并且导数本身也是一个函数. 回忆上节内容，我们还知道导数是图形在一点切线的斜率.

2.2.1 求由图形给出的函数导数

例 1 估计如图 2-19 的函数 $f(x)$ 在 $x=-2,-1,0,1,2,3,4,5$ 这些点上的导数.

解 由所给的图形，我们估计任意点处的导数，是通过在这一点上放一个直尺使得在这一点形成切线，然后利用直尺上的格子估计切线的斜率. 例如，$x=-1$ 这一点的切线画在图 2-19 中，它的斜率大约是 2，所以 $f'(-1)\approx 2$. 注意，在 $x=-2$ 处的斜率是正的而且相当大；在 $x=-1$ 处的斜率也是正的不过小一些. 在 $x=0$ 处，斜

① 《2005 年世界年鉴》，第 151 页 (纽约). 产业工人包括以下行业中的非管理工作人员：采矿业，制造业，建筑业，运输业，公共事业，批发和零售贸易业，金融业，保险业，房地产业以及服务业.

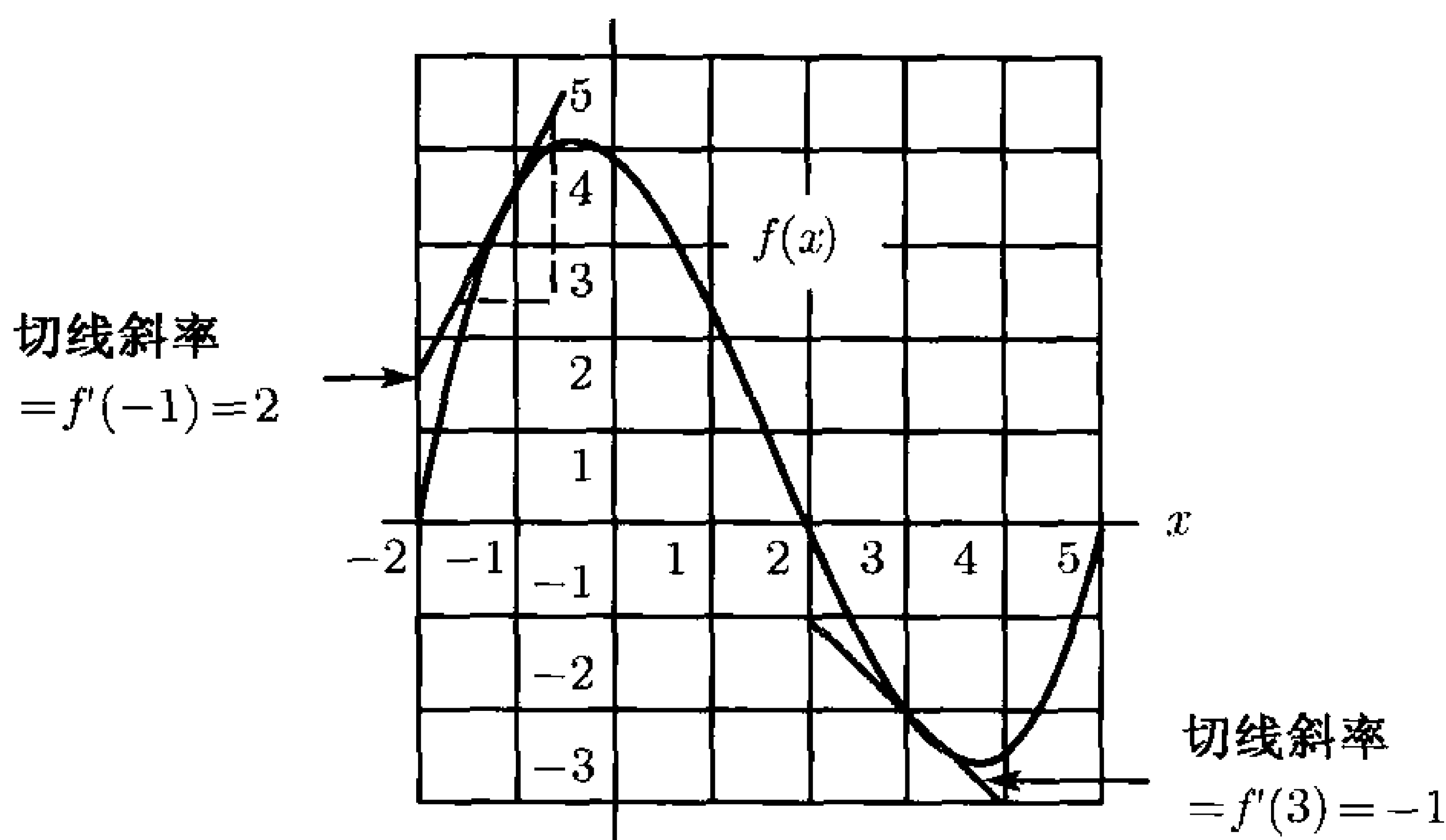


图 2-19 从图形上估计作为切线斜率的导数

率是负的, 到了 $x=1$ 处它就变得更加负了, 等等. 表 2-3 中列出了导数的近似值, 近似到最接近的整数. 你应该亲自验证这些值. 你预计哪里的导数是正的? 哪里的是负的?

表 2-3 图 2-19 中函数导数的近似值

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
($f(x)$ 在 x 点的导数)	6	2	-1	-2	-2	-1	1	4

□

要注意的重点是, 对每个 x 值有一个相应的导数值. 因此, 导数是 x 的函数.

> 对于函数 f, 我们定义它的**导函数**f':
>
> $$f'(x)=f \text{ 在 } x \text{ 点的瞬时变化率}.$$

例 2 画出例 1 中所计算的导函数值的图形. 比较 f' 和 f.

解 f 和 f' 的图形分别如图 2-20 和图 2-21 所示. 注意, 在 f 递增的区间 f' 是正

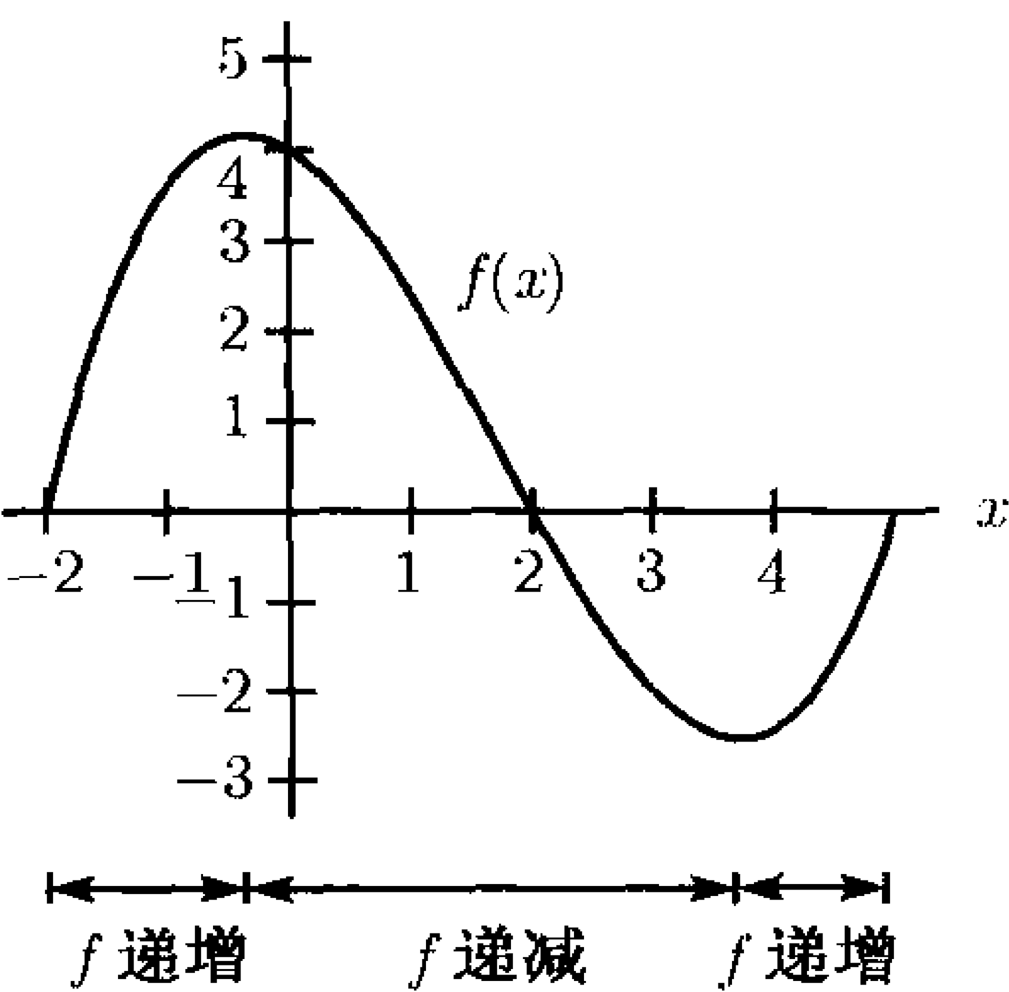


图 2-20 函数 f

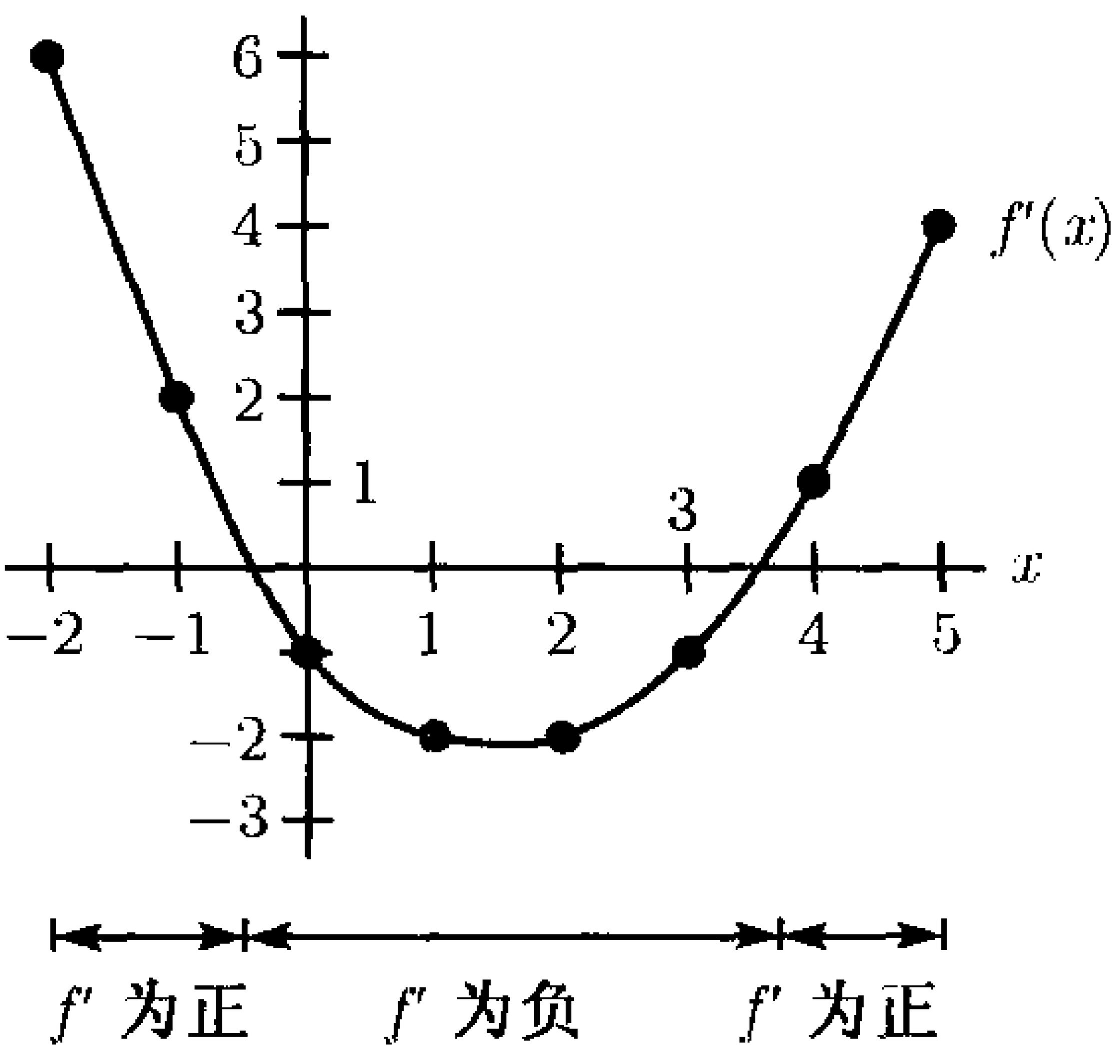


图 2-21 导数 f' 的近似

□

的 (它的图形在 x 轴上方), 而在 f 递减的区间 f' 是负的 (它的图形在 x 轴下方). 在 f 有最大值或最小值的点 (大约在 $x=-0.5$ 和 $x=3.7$ 处)$f'(x)$ 是零.

例 3 f 的图形如图 2-22 所示. 图形 (a)~(c) 中的哪一个是导数 f' 的图形?

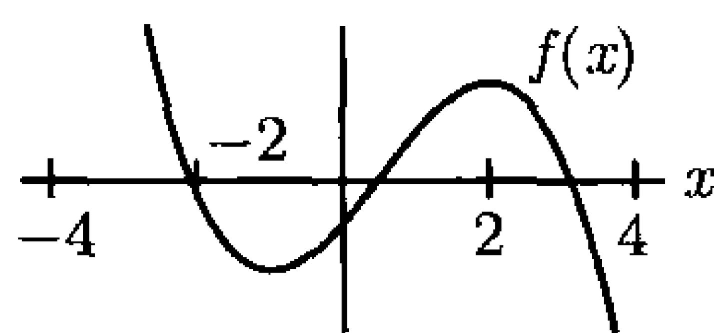
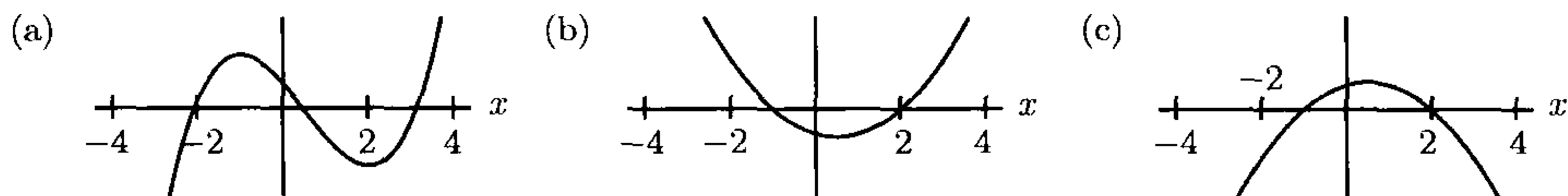


图 2-22



解 因为 $f(x)$ 的图形在 $x=-1$ 和 $x=2$ 处是水平的, 所以在这点的导数为零. 从而, $f'(x)$ 的图形在 $x=-1$ 和 $x=2$ 处与 x 轴相交.

$x<-1$ 时函数 f 递减, $-1<x<2$ 时递增, 并且 $x>2$ 时递减. 在 f 递增的区间导数是正的 (它的图形位于 x 轴上方), 而在 f 递减的区间导数是负的 (它的图形位于 x 轴下方). 正确的图形是 (c). □

2.2.2 从图形看导数的含义

函数的导数 f' 是正的区间, f 的图形的切线向上倾斜; f' 是负的区间, f 的图形的切线向下倾斜. 如果 $f'=0$ 处处成立, 那么切线处处是水平的, 从而 f 是常数. 导数 f' 的符号告诉我们在什么情况下函数 f 递减或者递增.

> 如果在一个区间上 $f'>0$, 那么在这个区间上 f **递增**.
> 如果在一个区间上 $f'<0$, 那么在这个区间上 f **递减**.
> 如果在一个区间上 $f'=0$, 那么在这个区间上 f **是常数**.

导数的量值表示 f 的变化率的量值. 如果 f' 的量值大, 那么 f 的图形是急剧上下变化的 (如果 f' 是正的, 图形是急剧上升的; 如果 f' 是负的, 图形则是急剧下降的); 如果 f' 的量值小, 那么 f 的图形是慢慢倾斜的.

2.2.3 估计数值函数的导数

如果已知函数值表而不是函数的图形, 我们也可以估计它的导数.

例 4 表 2-4 表示 t(min) 时刻血液中药物浓度 $c(t)$(mg/cc) 的值. 构造一个 $c'(t)$ 近似值的表, 也就是 $c(t)$ 关于 t 的变化率表.

表 2-4 药物浓度作为时间的函数

t(min)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$c(t)$(mg/cc)	0.84	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63	0.41

解 为了用表中的数值估计 c 的导数, 我们假设这些数据点是充分靠近的, 在它们之间的浓度不会随意变化. 由表看出, 浓度在 $t=0$ 和 $t=0.4$ 之间是递增的, 所以我们预计在那里导数是正的. 从 $t=0.5$ 到 $t=1.0$, 浓度开始递减, 并且递减的速度越来越快, 所以我们预计这里的导数是负的, 而且它的量值越来越大.

我们用差商来估计每个 t 的导数. 例如,

$$c'(0)\approx\frac{c(0.1)-c(0)}{0.1-0}=\frac{0.89-0.84}{0.1}=\text{每分钟 }0.5(\text{mg/cc}).$$

类似地, 我们得到

$$c'(0.1)\approx\frac{c(0.2)-c(0.1)}{0.2-0.1}=\frac{0.94-0.89}{0.1}=0.5$$

$$c'(0.2)\approx\frac{c(0.3)-c(0.2)}{0.3-0.2}=\frac{0.98-0.94}{0.1}=0.4$$

等等. 这些值组成的表就是表 2-5. 注意, 直到 $t=0.4$ 导数值都是较小的正值, 然后导数变成负的并且量值越来越大, 这和我们预计的一样.

表 2-5 浓度的导数

t	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$c'(t)$	0.5	0.5	0.4	0.2	0.0	−0.3	−0.7	−1.1	−1.6	−2.2

□

改进导数的数值估计

上一个例子中, 估计 $c(t)$ 在 $t=0.2$ 处的导数用的是右边的点. 我们求出了其在 $t=0.2$ 到 $t=0.3$ 之间的平均变化率. 然而, 我们也可以转到左边用 $t=0.1$ 到 $t=0.2$ 之间的变化率来近似在 0.2 处的导数. 为了使得结果更精确, 我们可以将这些斜率进行平均, 得到近似值

$$c'(0.2)\approx\frac{1}{2}(0.2\text{左边的斜率}+0.2\text{右边的斜率})=\frac{0.5+0.4}{2}=0.45.$$

每一种求导数近似值的方法所给出的答案都是合理的. 我们通常从右边估计导数.

2.2.4 求由公式表示的函数的导数

如果已知函数 f 的公式, 我们可以得到 f' 的公式吗? 利用导数的定义, 通常可以. 的确, 微积分中大多数幂函数的导数由我们所熟悉的函数导数公式决定. 这一点在第 3 章中会详细说明. 在下一个例子中, 我们考虑怎么猜测导数公式.

例 5 猜测 $f(x)=x^2$ 的导数公式.

解 我们先用差商估计 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$ 的值. 然后在这些值中找出一种式样, 我们利用这个式样来猜测 $f'(x)$ 的公式.

靠近 $x=1$, 我们有

$$f'(1) \approx \frac{1.001^2-1^2}{0.001} = \frac{1.002-1}{0.001} = \frac{0.002}{0.001} = 2.$$

类似地,

$$f'(2) \approx \frac{2.001^2-2^2}{0.001} = \frac{4.004-4}{0.001} = \frac{0.004}{0.001} = 4$$

$$f'(3) \approx \frac{3.001^2-3^2}{0.001} = \frac{9.006-9}{0.001} = \frac{0.006}{0.001} = 6.$$

知道一些特殊点上 f' 的值我们并不能得出 f' 的公式, 但是这些值可以给我们一些启发: $f'(1)\approx 2$, $f'(2)\approx 4$, $f'(3)\approx 6$ 是否意味着 $f'(x)=2x$. 在第 3 章中, 我们会说明事实确实如此. □

习题

1. $f(x)$ 的图形如图 2-23 所示. 画出图形在 $x=-2$, $x=-1$, $x=0$ 和 $x=2$ 处的切线. 估计 $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

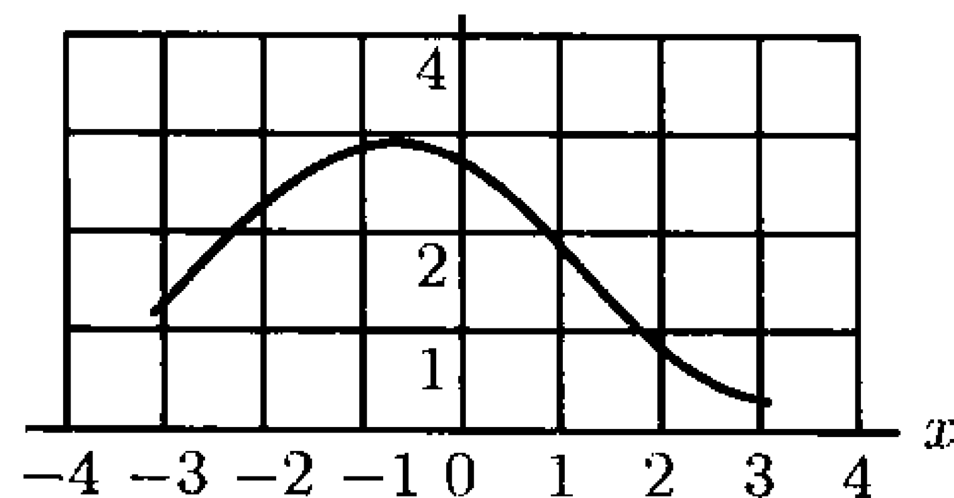
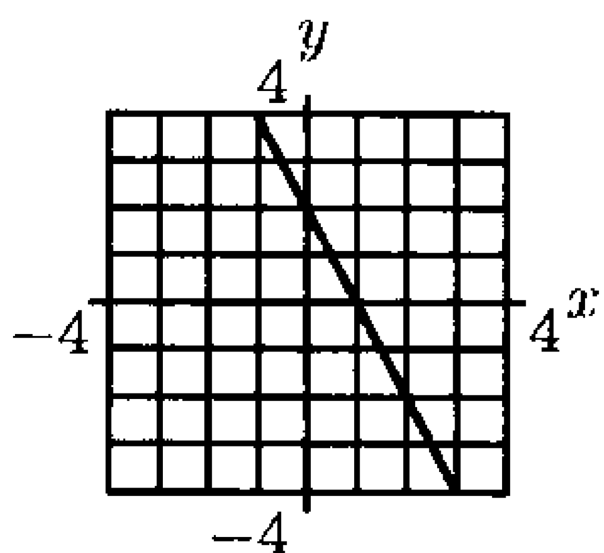
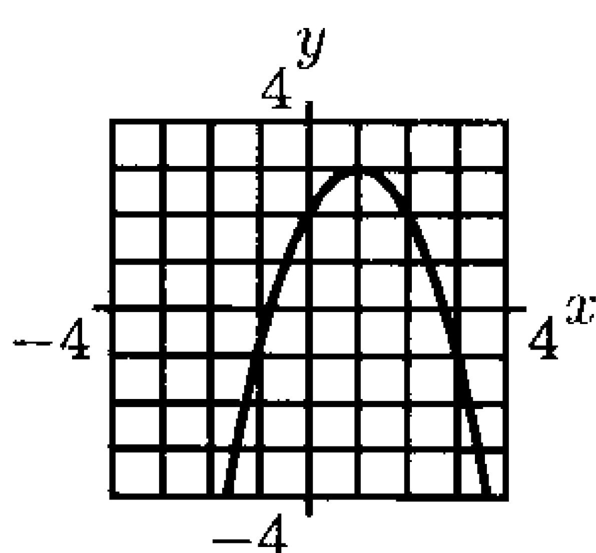
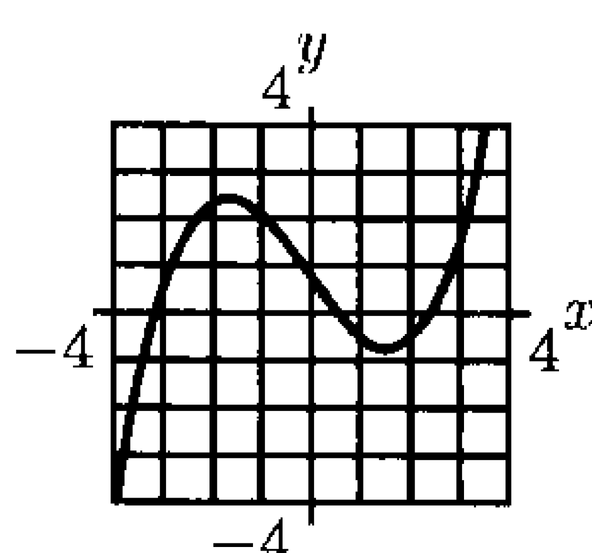


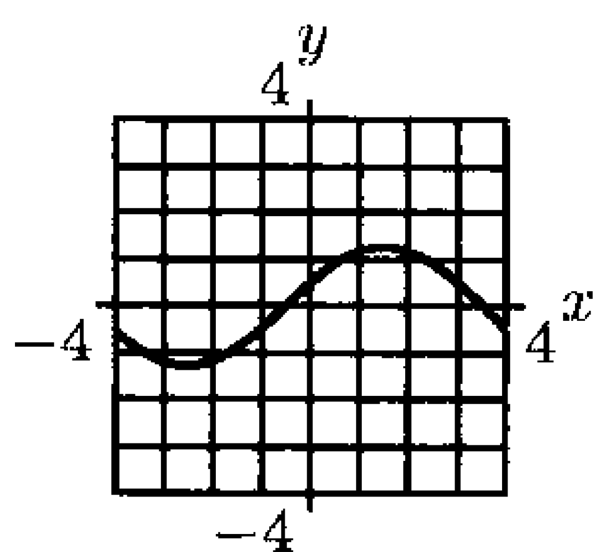
图 2-23

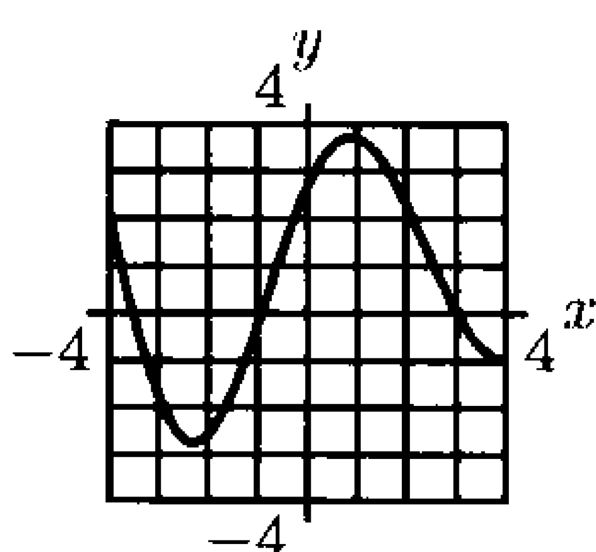
在习题 2~7 中, 作出所给函数导数的图形.

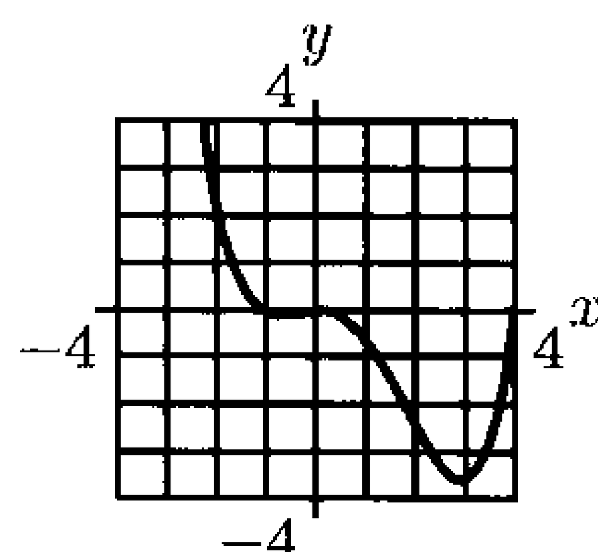
2.


3.


4.


5.


6.


7.


8. 某城市在整个 20 世纪 80 年代人口都在增长. 在 1990 年, 其人口达到了它的最大值, 随后整个 20 世纪 90 年代一直在减少. 设 $P=f(t)$ 表示 1980 年以来 t 年该城市的人口数. 作出 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 的略图, 并在坐标系中标出它们的单位.

在图 2-24 中找出与习题 9~12 中的函数相对应的导数图形.

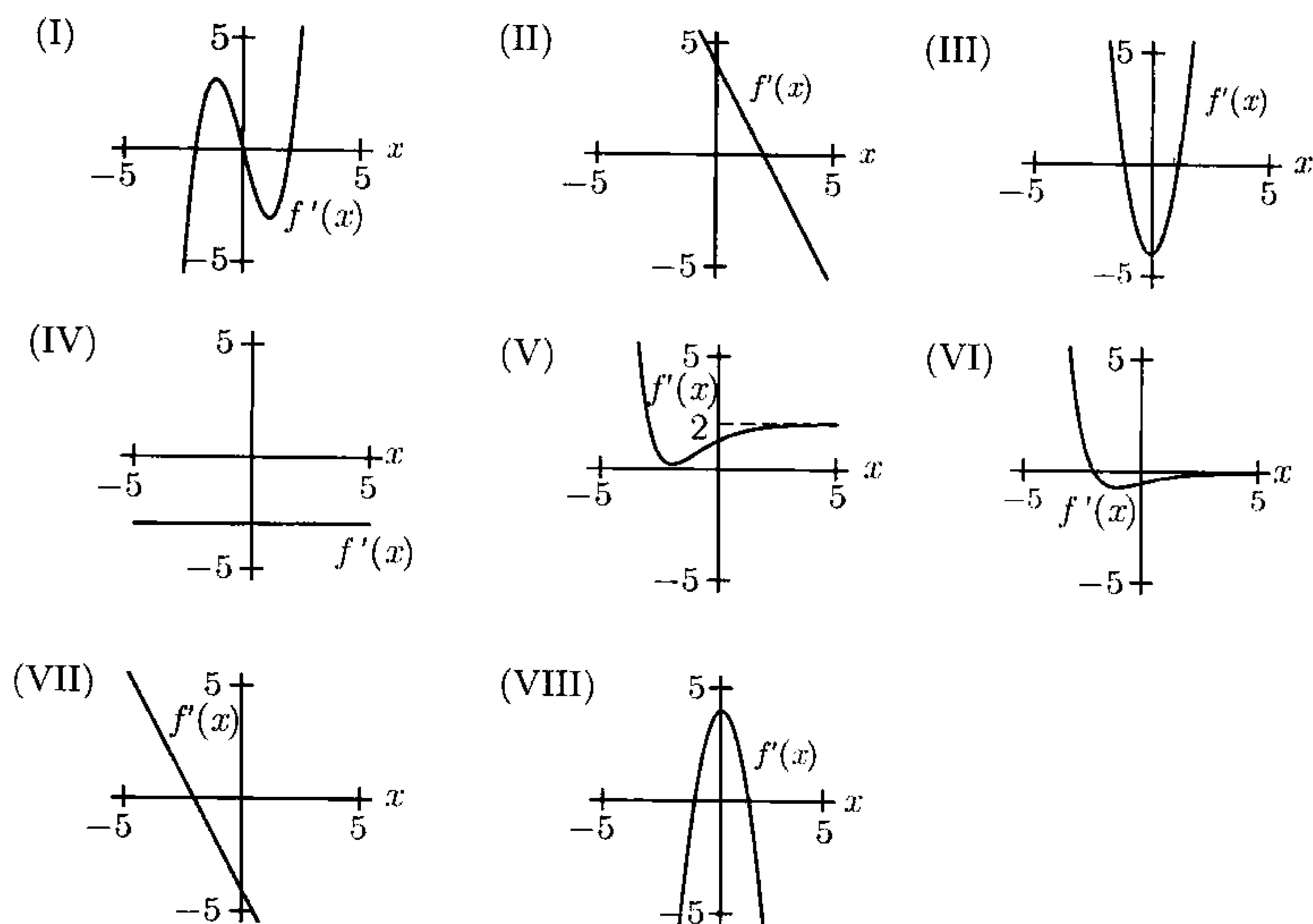
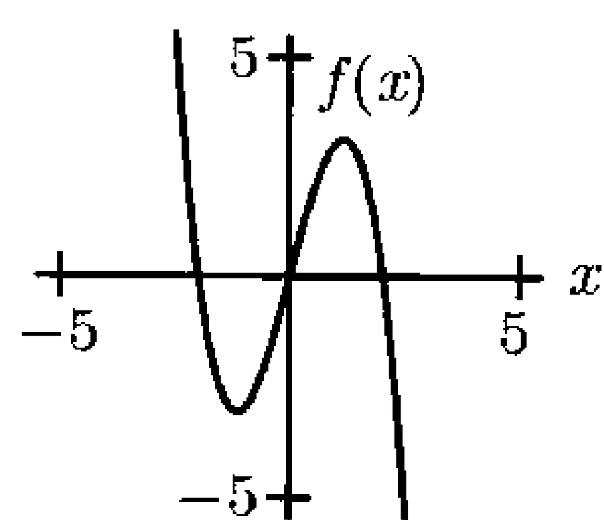
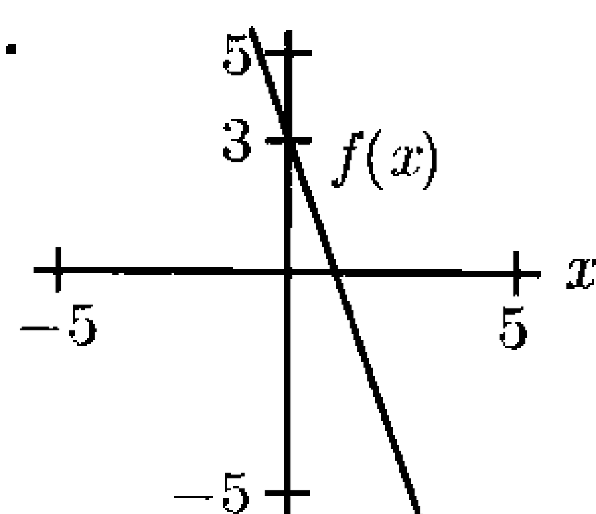


图 2-24

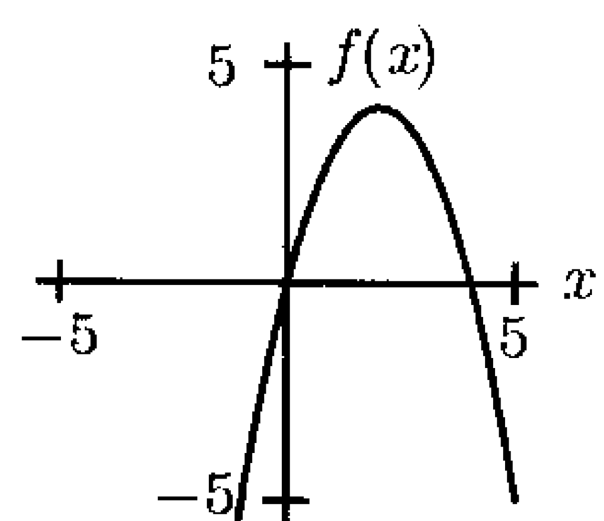
9.



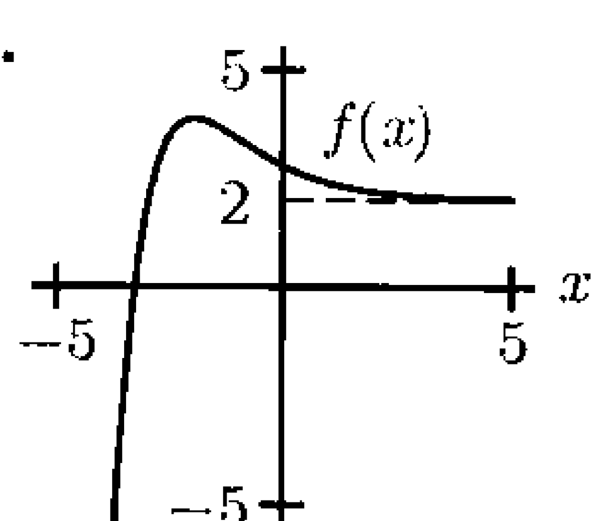
10.



11.



12.



13. 在如图 2-25 表示的 f 的图形中, 所标出的 x 值中哪一点

(a) $f(x)$ 最大? **(b)** $f(x)$ 最小?

(c) $f'(x)$ 最大? **(d)** $f'(x)$ 最小?

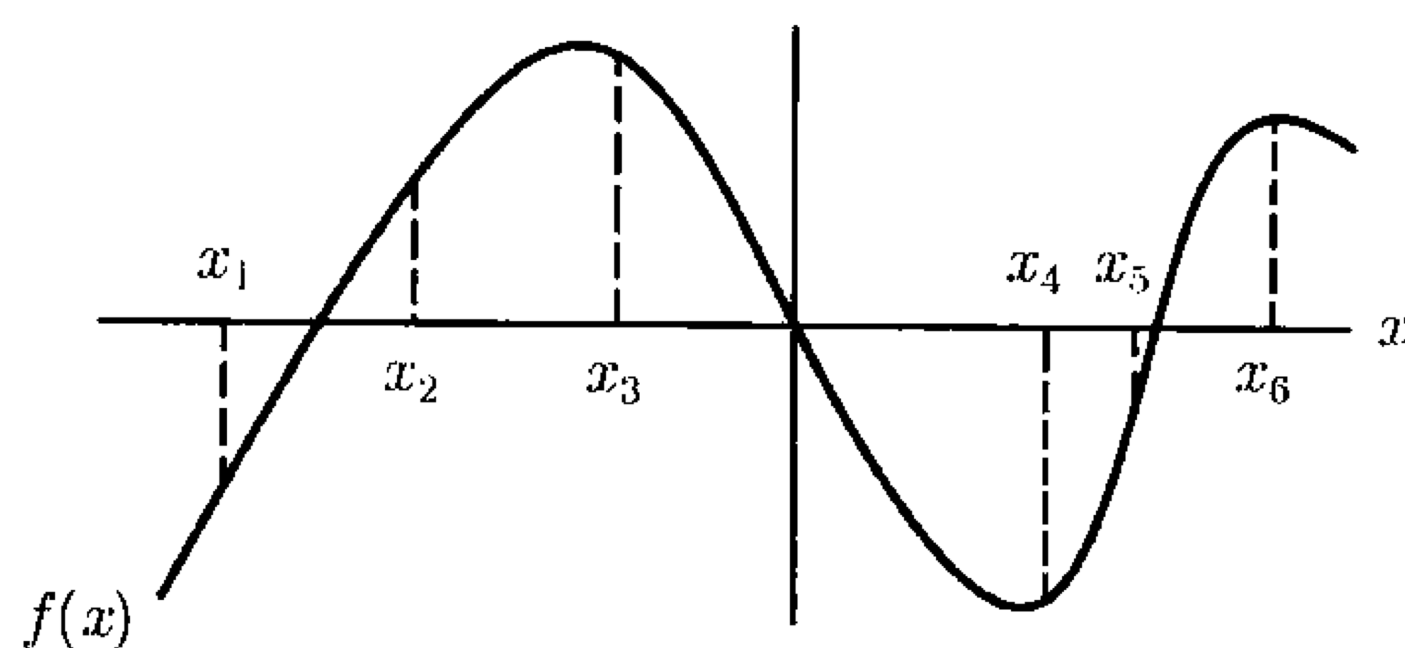


图 2-25

14. (a) 利用下表中 f 的值估计 $f'(2)$.

(b) 对哪些 x 值 $f'(x)$ 看起来像是正的? 哪些像是负的?

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	10	18	24	21	20	18	15

15. 求下表中每个 x 值的 $f'(x)$ 近似值.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	100	70	55	46	40

16. 画一个恰当的 $y = f(x)$ 的图形, 使得它的导数具有下面所给的信息.

- $f'(x) > 0, x < -1$
- $f'(x) < 0, x > -1$
- $f'(x) = 0, x = -1$

17. 画一个恰当的 $y = f(x)$ 的图形, 使得它的导数具有下面所给的信息.

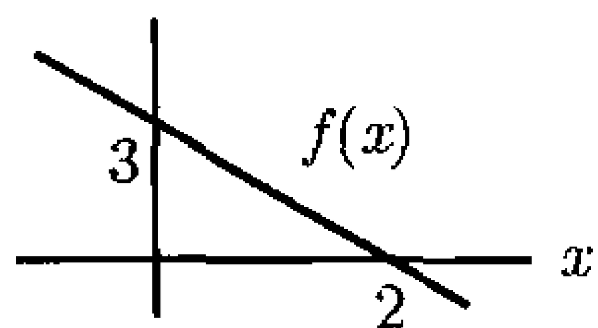
- $f'(x) > 0, 1 < x < 3$
- $f'(x) < 0$, 对于 $x < 1$ 和 $x > 3$
- $f'(x) = 0$, 在 $x = 1$ 和 $x = 3$ 处

18. x 和 $g(x)$ 如下表所示. x 为何值时, $g'(x)$ 最靠近 3?

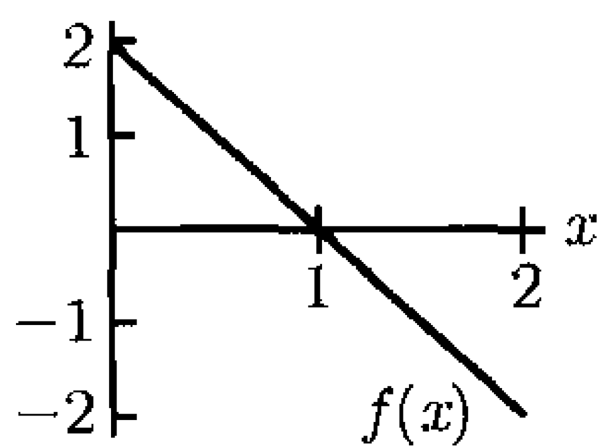
x	2.7	3.2	3.7	4.2	4.7	5.2	5.7	6.2
$g(x)$	3.4	4.4	5.0	5.4	6.0	7.4	9.0	11.0

在习题 19-26 中, 作出 $f'(x)$ 的略图.

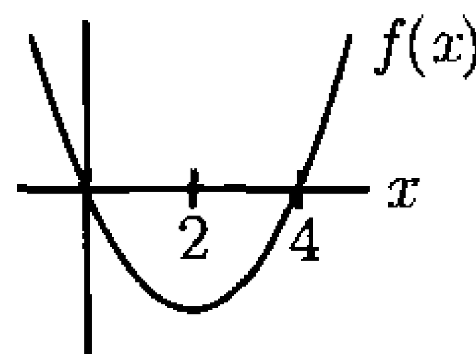
19.



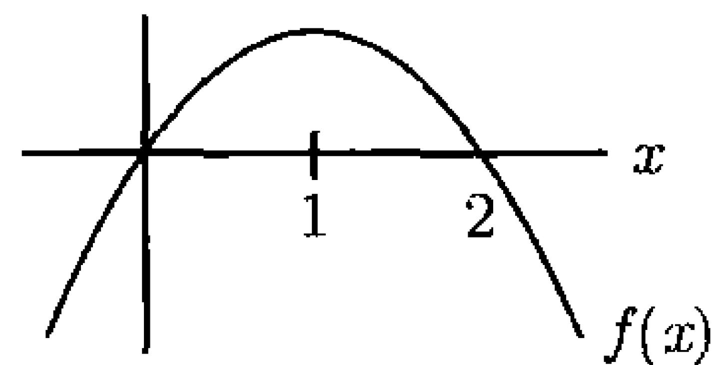
20.



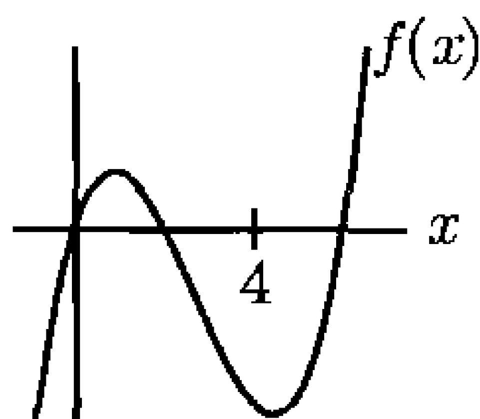
21.



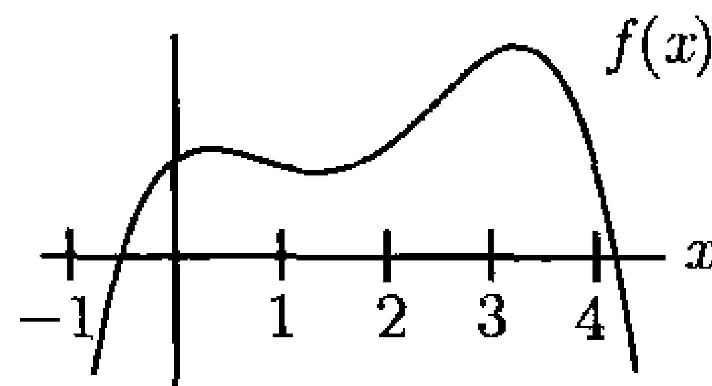
22.



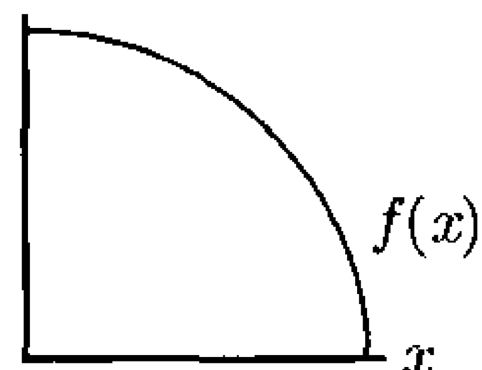
23.



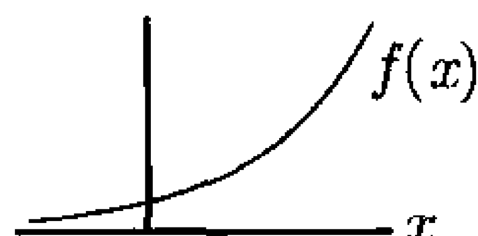
24.



25.



26.



27. (a) 设 $f(x) = \ln x$. 用较小的区间估计 $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(4)$ 和 $f'(5)$.

(b) 利用 (a) 的答案猜测 $f(x) = \ln x$ 的导数公式.

28. 假设 $f(x)=\frac{1}{3}x^3$. 估计 $f'(2)$, $f'(3)$, 和 $f'(4)$. 你注意到什么了? 能猜出 $f'(x)$ 的公式吗?

29. 图 2-26 是函数 f 的导数 f' 的图形. 在哪些区间上 f 是

(a) 递增的? **(b)** 递减的?

30. 小孩给一个气球充气, 玩了一会儿之后就以一个不变的速度将气放掉. 如果 $V(t)$ 表示 t 时刻气球的体积, 那么图 2-27 表示 t 的函数 $V'(t)$.

(a) 在什么时刻这个小孩开始给气球充气?

(b) 在什么时刻这个小孩停止充气?

(c) 在什么时刻这个小孩开始放气?

(d) 如果这个小孩不是以一个不变的速度将气放掉, 而是时而捏紧气球的出气口又时而松开, 那么 $V'(t)$ 的图形像什么样?

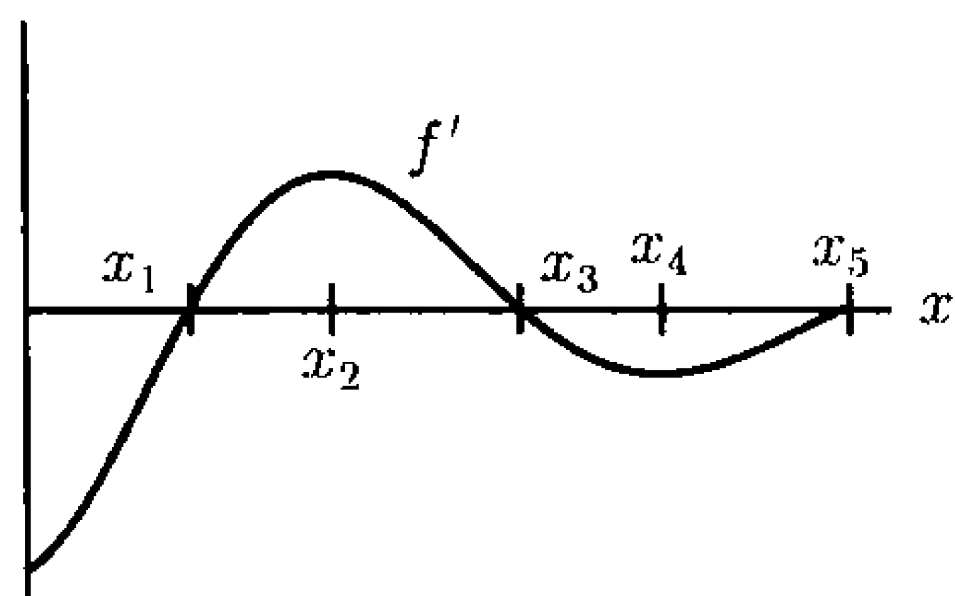


图 2-26 f' 的图形, 不是 f 的

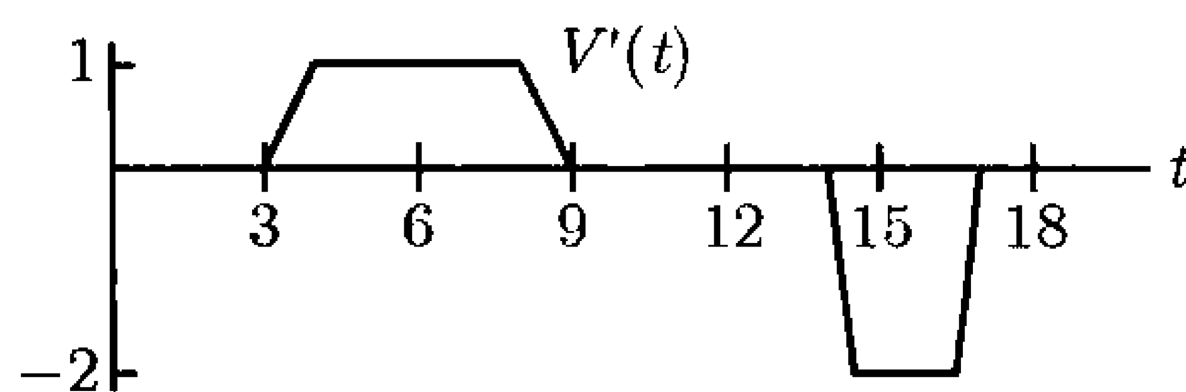


图 2-27

2.3 导数的解释

我们已经看到导数可以解释成斜率和变化率. 本节, 我们看看导数的其他解释. 这些例子的目的不是作一个解释的目录, 而是描述获得它们的过程. 导数的另一个记号常常是有用的.

2.3.1 导数的另一个记号

至今我们一直用 f' 代表函数 f 的导数. 导数的另一个记号是由德国数学家莱布尼茨 (1646—1716) 引入的, 当时微积分才刚刚发展. 我们知道 $f'(x)$ 可以由一个小区间上的平均变化率近似得到. 如果 $y=f(x)$, 那么平均变化率用 $\Delta y/\Delta x$ 表示. 对于较小的 Δx, 我们有

$$f'(x)\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

莱布尼茨的导数记号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 就是为了使我们能够记得这一点. 如果 $y=f(x)$, 那么我们记

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

尤其是当我们想到在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 中的字母 d 代表 "关于……的较小的差" 时，就会发现莱布尼茨的记号很有启发性. 记号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 提醒我们，导数是形如

$$\frac{y\text{ 值的差}}{x\text{ 值的差}}$$

的极限. 记号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 对确定导数单位也有用：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的单位是 y 的单位除以 x 的单位.

$\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$ 没有正式的独立意义[①]：它们都是一个记号中的某部分. 其实，看待记号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的一种比较好的方式是，把 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 当作一个独立的符号，它的意思是 "……关于 x 的导数". 因此，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 可以看作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y),\text{ 意思是“}y\text{ 关于 }x\text{ 的导数”}.$$

另一方面，很多科学家和数学家确实把 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$ 看作独立的实体，用来表示关于 y 和 x 的 "无限小的" 差，尽管难以准确地说出 "无限小" 到底是多小. 正式来说，这也许不正确，但直观上把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 看作 y 的非常小的变化量除以 x 的非常小的变化量是很有用的.

例如，以前我们曾定义过 $s = f(t)$ 是运动着的物体在 t 时刻的位置，那么 $v = f'(t)$ 就是 t 时刻物体的运动速度. 记号

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

能够提醒我们 v 是速度，其原因在于这个符号给出了距离 $\mathrm{d}s$ 除以时间 $\mathrm{d}t$，而我们也知道距离除以时间就是速度. 类似地，我们把

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

当作 $y = f(x)$ 的图形的斜率，是由于想起了斜率是竖直上升的高度 $\mathrm{d}y$ 除以水平距离 $\mathrm{d}x$.

莱布尼茨记号的缺点，在于它难以处理在某一点的导数中要指明的 x 值. 例如，要指明 $f'(2)$，我们必须写成

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}.$$

2.3.2 利用单位解释导数

假设 $s = f(t)(\mathrm{m})$ 表示在 $t(\mathrm{s})$ 时刻物体离一个固定点的位置函数. 那么，

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f'(2) = 10\ \mathrm{m/s}$$

① 由于这本教材没有介绍 "微分" 的概念，因此这里认为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 中每部分 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}x$ "没有正式的独立意义". 其实在微分中它们都有独立的意义，它们分别是 y 的微分和 x 的微分. 而导数又称为 "微商".
——译者注

告诉我们在 $t = 2$ s 时, 物体正以 10 m/s 的速度运动. 如果该物体继续以这一速度运动整整 1 s(从 $t = 2$ 到 $t = 3$), 它就会又移动 10 m. 一般地,

- 函数的导数单位是因变量的单位除以自变量的单位.
- 如果一个函数的导数在某一点附近不是剧烈地变化的, 那么它的导数近似地等于自变量增加一个单位时函数的变化量.

我们定义速度 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 的导数为*加速度*.

例 1 如果物体在 t(s) 时刻的速度用 m/s 来计, 那么它的加速度的单位是什么?

解 因为加速度 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 是速度的导数, 所以加速度的单位是速度的单位除以时间的单位, 也就是 (m/s)/s, 记成 m/s^2. □

下一个例子描述单位在解释导数时是多么的有用.

例 2 建一栋 A 平方英尺的房子其成本 C(美元) 由函数 $C = f(A)$ 表示. 函数 $f'(A)$ 的实际意义是什么?

解 用莱布尼茨的记号,

$$f'(A) = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}A}.$$

这是成本除以面积, 所以它可以用美元/平方英尺来计量. 你可以把 $\mathrm{d}C$ 看成是建造外加 $\mathrm{d}A$ 平方英尺房子所需的外加成本. 因此, $\mathrm{d}C/\mathrm{d}A$ 是每平方英尺的追加成本. 所以, 如果你计划建造一栋大约 A 平方英尺的房子, 那么 $f'(A)$ 就是建造稍大一点房子的每平方英尺外加面积的成本, 并且称之为*边际成本*. 边际成本未必是整栋房子的每平方英尺的平均成本, 因为一旦你已经准备建一栋大房子, 那么增加几平方英尺而产生的成本是比较小的. □

例 3 从一个矿井中采 T 吨铜矿石的成本是 $C = f(T)$ 美元. $f'(2000) = 100$ 的含义是什么?

解 用莱布尼茨的记号,

$$f'(2000) = \left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}\right|_{T=2000}.$$

因为 C 的计量单位是美元, 而 T 的计量单位是吨, 那么 $\mathrm{d}C/\mathrm{d}T$ 的计量单位应该是美元/吨. 所以陈述

$$\left.\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}T}\right|_{T=2000} = 100$$

是说从矿井中已经采得 2000 吨矿石时, 再采下一吨矿石的成本近似为 100 美元. 另一种说法是, 采第 2001 吨矿石的成本大约是 100 美元. 注意, 这和采第 10 吨的成本的区别非常大, 采第 10 吨的成本很可能更容易理解. □

例 4　如果 $q=f(p)$ 表示价格为 p 美元/磅时所产糖的磅数, 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right|_{p=3}=50$$

的单位和含义是什么?

解　$\mathrm{d}q/\mathrm{d}p$ 的单位是 q 的单位除以 p 的单位, 也就是磅/美元.

$$\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right|_{p=3}=f'(3)=50\text{ 磅/美元}$$

告诉我们, 当 $p=3$ 时 q 关于 p 的变化率是 50. 这意味着当价格为 3 美元时, 价格每增加 1 美元产量就增加 50 磅. 这是瞬时变化率, 意思是如果速度保持在 50 磅 / 美元并且价格增加整整 1 美元, 那么产量就会增加 50 磅. 其实, 这个速度可能不会保持不变, 所以产量可能不会恰好增加 50 磅. □

例 5　药物在某人体内逗留的时长 L(小时) 是所给药量 q(毫克) 的函数, 所以 $L=f(q)$.

(a) 解释 $f(10)=6$. 给出数字 10 和 6 的单位.

(b) 用莱布尼茨记号表示函数 $L=f(q)$ 的导数. 如果 $f'(10)=0.5$, 那么 0.5 的单位是什么?

(c) 用药物剂量和持续时间解释 $f'(10)=0.5$.

解　(a) 我们知道 $f(q)=L$. 在 $f(10)=6$ 中, 我们有 $q=10$ 并且 $L=6$, 所以它们的单位分别是 10 mg 和 6 h. $f(10)=6$ 告诉我们, 剂量为 10 mg 的药物要持续 6 h.

(b) 因为 $L=f(q)$, 所以我们看到 L 由 q 决定. 这个函数的导数是 $\mathrm{d}L/\mathrm{d}q$. 由于 L 的单位是小时而 q 的单位是 mg, 因此导数的单位是 h/mg. 在 $f'(10)=0.5$ 中, 0.5 是导数从而它的单位是 h/mg.

(c) $f'(10)=0.5$ 告诉我们, 在药物剂量为 10 mg 时, 持续时间的变化率是 0.5 h/mg. 换句话说, 如果我们增加 1 mg 的药物剂量, 它在体内就会逗留将近 30 分钟. □

例 6　已知在一个管道中水以 10 立方英尺/秒的速度流动. 以某个函数的导数解释这个速度.

解　也许你首先想到了这个陈述与水流速度有关, 但是事实上 10 立方英尺/秒的水流速度, 可能是流动非常缓慢的水通过一个较大的管道所达到的, 也可能是流动非常迅速的水通过一个较窄的管道所达到的. 如果我们考察它的单位 —— 立方英尺/秒, 就会发现告诉我们的是以立方英尺计量的某个量的变化率. 然而立方英尺是体积的计量单位, 所以告诉我们的是体积的变化率. 如果你设想所有流动的水最后流进了水箱的某个地方, 并且设 $V(t)$ 表示 t 时刻水箱中水的体积, 那么告诉我们的就是 $V(t)$ 的变化率为 10, 即

$$V'(t) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 10.$$ □

2.3.3 用导数估计函数值

因为导数告诉我们函数值变化得有多快, 所以我们可以用在一点的导数估计函数在这点附近的函数值.

例 7 一种报纸在某个月新的预订份数 y 是当月广告投入金额 x(美元) 的函数, 所以 $y = f(x)$.

(a) 解释 $f(250) = 180$ 和 $f'(250) = 2$.

(b) 用 (a) 中的式子估计 $f(251)$ 和 $f(260)$. 哪个估计更可靠?

解 (a) $f(250) = 180$ 告诉我们, 当 $x = 250$ 时 $y = 180$. 这意味着一个月花在广告上的费用为 250 美元时, 这个月新的预订份数就是 180. 因为导数为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, 所以 $f'(250) = 2$ 告诉我们

$$\text{当 } x = 250 \text{ 时}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2.$$

这意味着花在广告上的金额为 250 美元, 并且再增加 1 美元, 新的预订份数就会增加 2 份.

(b) $f(250) = 180$ 是说, 花在广告上的费用为 250 美元时, 新的预订份数是 180. $f'(250) = 2$ 意味着新的预订份数以每追加 1 美元的广告费就增加 2 份的速度增加. 如果广告费再增加 1 美元 (所以 $x = 251$), 我们预计新的预订份数就要比 180 多 2, 所以

$$f(251) \approx 180 + 2 = 182.$$

类似地, 如果广告费再增加 10 美元 (所以 $x = 260$), 我们预计新的预订份数要多 10(2)=20 左右, 所以

$$f(260) \approx 180 + 10(2) = 200.$$

注意, 为了估计 $f(260)$, 我们必须假设每追加 1 美元新的预订份数就增加 2 份这个速度要在从 $x = 250$ 到 $x = 260$ 的整个过程中保持基本不变. 这意味着 $f(251)$ 的估计更可靠. □

如果用 Δy 表示 y 的变化量, 而 Δx 表示 x 的变化量, 那么在例 7 中我们用到了下面的结果.

局部线性近似

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x, \qquad \text{当 } \Delta x \text{ 接近 } 0 \text{ 时}.$$

例 8 健康保险总是上涨, 有时确实令人挠头. 用表2-6中的数据[①]估计在2005~2020

① 《2004−2005 年美国统计摘要》, 表 125.

年的平均消费 (单位: 每消费者).

表 2-6 1990 年以来各种年度年均健康保险费用 (每消费者)

年	1990	1995	1998	2000	2002
人均消费 (美元)	1480	1732	1903	2066	2350

解 健康保险费用在所示期间始终在增加. 从 2000~2002 年, 它们每年增加 $(2350-2066)/2=142$ 美元. 为了估计 2002 年以后的费用, 我们假设费用以同样的速度持续上涨. 由此, 我们估计得到

$$\begin{aligned}2005\ \text{年的费用} &= 2002\ \text{年的费用} + \text{费用的变化量}\\ &\approx 2350\text{美元} + 142\text{美元}\times 3 = 2776\text{美元}.\end{aligned}$$

因为 2020 年超过 2002 年 18 年, 所以

$$2020\ \text{年的费用} \approx 2350\text{美元} + 142\text{美元}\times 18 = 4906\text{美元}.$$ □

在上一个例子中, 对 2005 年的估计比 2020 年的估计可能更接近真实的值. 由所给数据外推得越远, 可能越不精确. 到 2020 年健康保险费用的变化率不可能还停留在 142 美元/年.

从图形上看, 我们所做的只是延长了连接 2000 年和 2002 年两点的直线, 以便对将来做预测. 参见图 2-28. 你可能会担心我们所作的估计只用到了最后两年的数据. 难道从其余的数据中所获得的信息就没有价值吗? 确实没有——尽管如何使用这个信息没有固定的方式. 你可以对 2000 年以前的那些年考察它的变化率, 然后再取平均, 要不然用线性回归或者指数回归试一下.

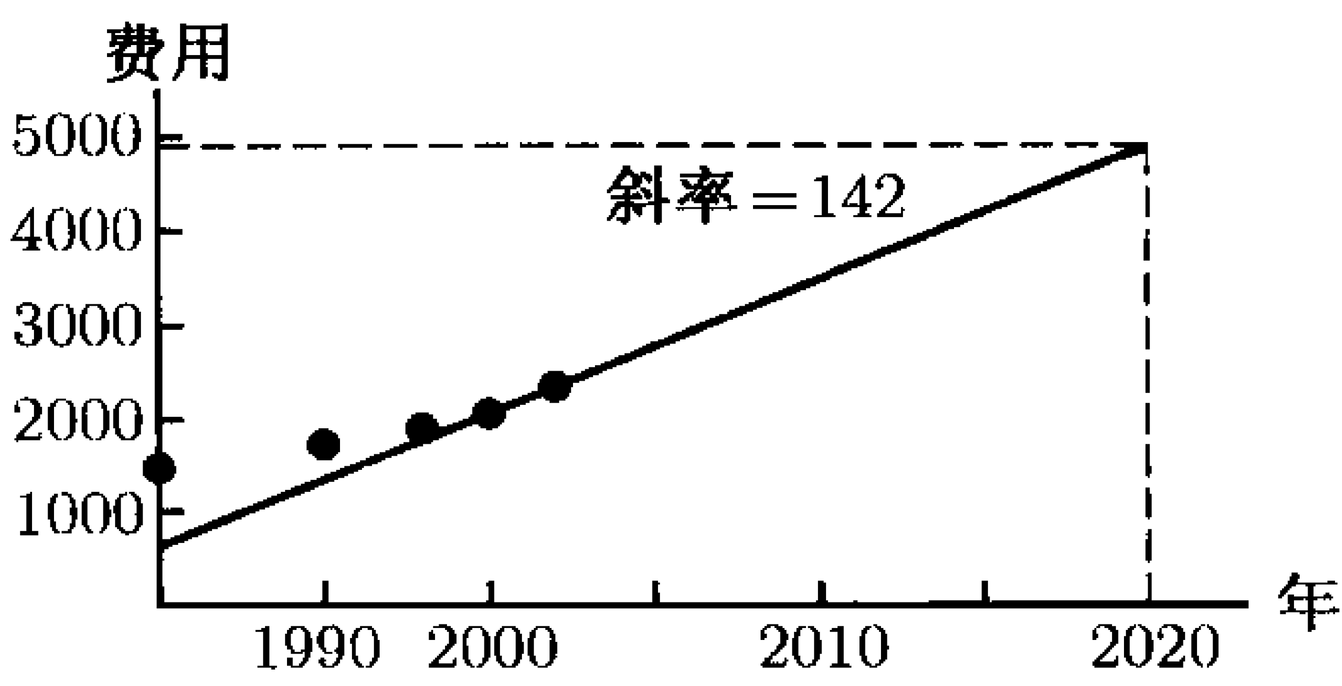


图 2-28 健康保险费用的图形

习题

1. 高为 x(m) 的橡树其平均重量 W(kg) 由函数 $W=f(x)$ 表示. $f'(x)$ 的计量单位是什么?
2. 图 2-29 表明全世界太阳能发电量 (MW) 是 1990 年以来年数的函数①. 估计 $f'(6)$, 给出 $f'(t)$ 单位并解释你的答案.
3. 购买某种化学药品的费用 $C=f(w)$(美元) 是所买重量 w(lb) 的函数.
   (a) 在 $f(12)=5$ 中, 12 的单位是什么? 5 的单位又是什么? 说明它在购买化学药品方面的含义.
   (b) 你预计导数 f' 是正的还是负的? 为什么?

① 世界观察研究所, 《生命体征 2001》, 第 47 页 (纽约: W. W. Norton, 2001).

(c) 在 $f'(12)=0.4$ 中, 12 的单位是什么? 0.4 的单位又是什么? 说明它在购买化学药品方面的含义.

4. 生产 g 加仑冰淇淋的成本 C(美元) 可以表示成 $C=f(g)$. 利用单位说明下式的实际含义.

(a) $f(200)=350$ (b) $f'(200)=1.4$

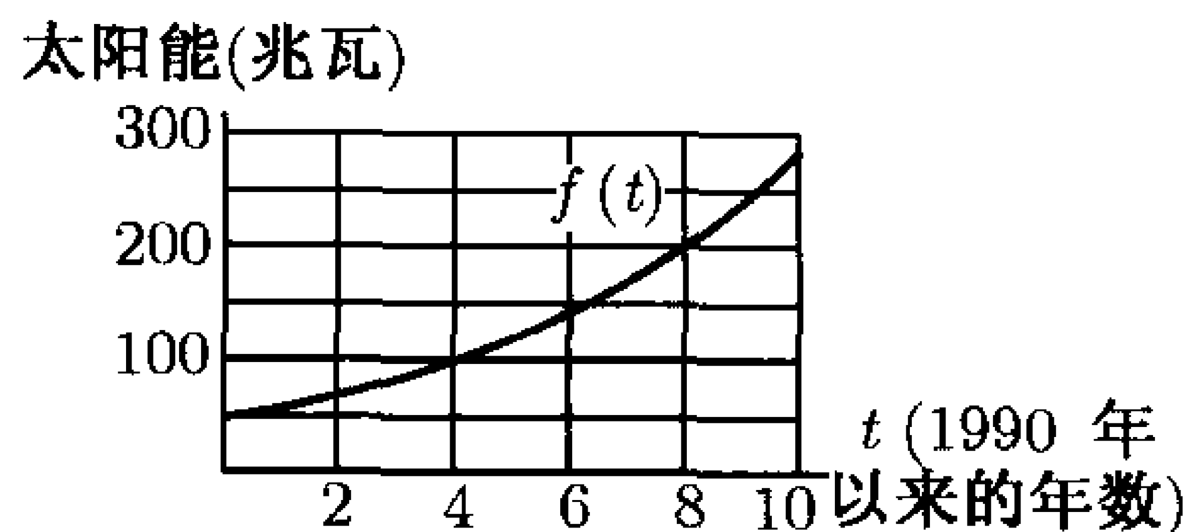


图 2-29

5. 某种化学反应所需的时间 T(min) 是提供的催化剂数量 a(ml) 的函数, 所以 $T=f(a)$.

(a) 如果 $f(5)=18$, 那么 5 的单位是什么? 18 的单位又是什么? 这个式子的实际含义是什么?

(b) 如果 $f'(5)=-3$, 那么 5 的单位是什么? -3 的单位又是什么? 这个式子的含义是什么?

6. 美国拥有个人电脑家庭的百分数 P 是 1982 年 (当时这个百分数基本上是零) 以来的年数 t 的函数, 所以 $P=f(t)$. 解释 $f(20)=57$ 和 $f'(20)=3$ 的含义.

7. 一个山药刚好从烤箱中取出, 没动之前渐渐变凉. 山药的温度 T(°F) 是它从烤箱中取出的时间 t(min) 的函数. 因此我们有 $T=f(t)$.

(a) $f'(t)$ 是正的还是负的? 为什么?

(b) $f'(t)$ 的单位是什么?

8. 某种产品的销售量 q 是它的销售价格 p 的函数, 所以 $q=f(p)$. 解释下面式子的实际含义:

(a) $f(15)=200$ (b) $f'(15)=-25$.

9. 一个小孩的重量 W(lb) 是他的年龄 a(岁) 的函数, 所以 $W=f(a)$.

(a) 你预计 $f'(a)$ 是正的还是负的? 为什么?

(b) $f(8)=45$ 的含义是什么? 分别给出 8 和 45 的单位.

(c) $f'(a)$ 的单位是什么? 用年龄和重量说明 $f'(a)$ 的含义.

(d) $f'(8)=4$ 在年龄和重量方面的含义是什么?

(e) 当 a 增加时, $f'(a)$ 是增加的还是减少的? 说明理由.

10. 蛋壳的厚度 P(mm) 依赖于蛋壳中 PCB 的浓度 c 以 ppm(百万分之一) 计量; 即 $P=f(c)$.

(a) 导数 $f'(c)$ 是负的. 这句话的含义是什么?

(b) 给出单位并用解释 $f(200)=0.28$ 和 $f'(200)=-0.0005$ 的实际意义.

习题 11~14 与图 2-30 中的 $g(t)$ 有关, 其中 $g(t)$ 表示胎儿的重量, 它是其年龄的函数.

11. (a) $g'(24)$ 的单位是什么?

(b) $g'(24)=0.096$ 的生物学含义是什么?

12. (a) $g'(20)$ 和 $g'(36)$ 哪个大?

(b) 从胎儿成长来说, 你的答案的含义是什么?

13. (a) 在 20 周 (b) 在 36 周

重量的瞬时增长率比 40 周中重量的平均变化率大还是小?

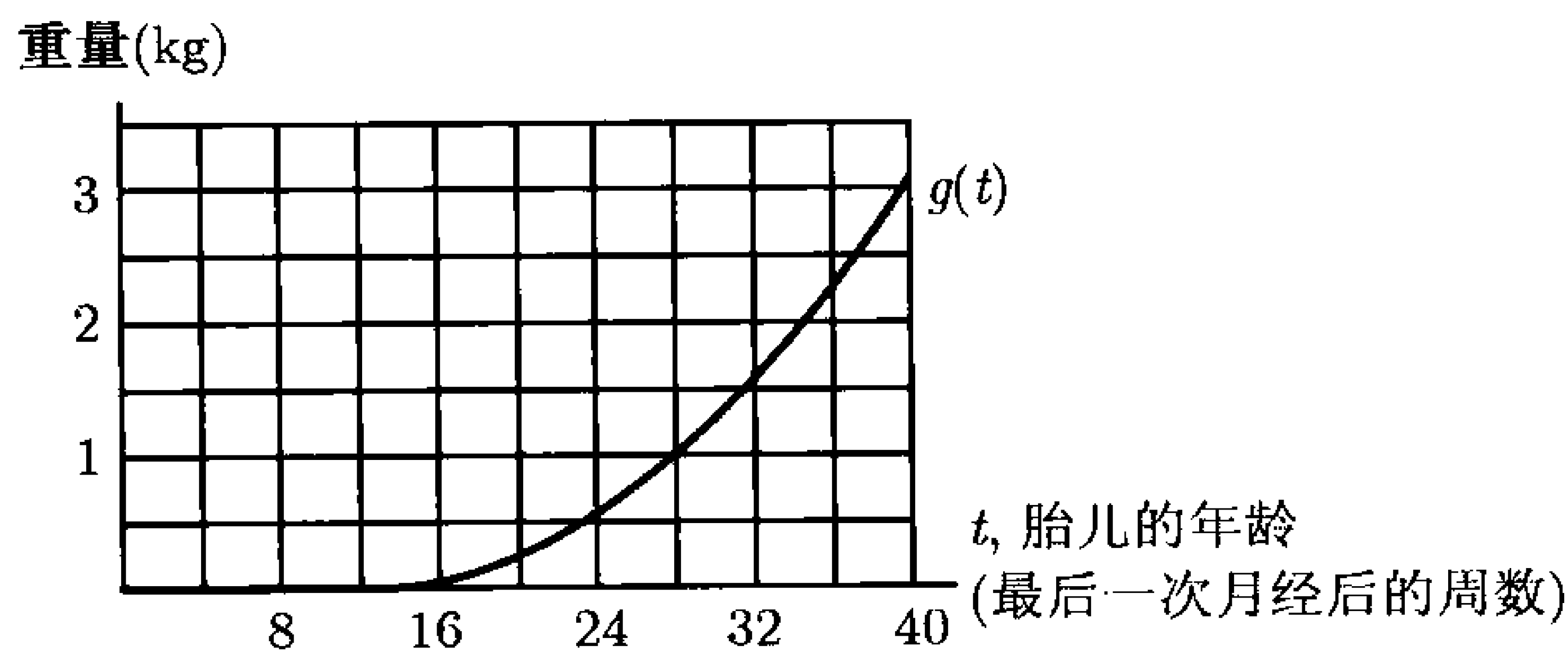


图 2-30

14. 估计

(a) $g'(20)$ (b) $g'(36)$ (c) 整个妊娠 40 周的重量平均变化率.

15. 离飓风中心 x(km) 的风速 W(m/s) 由函数 $W = h(x)$ 表示. $h'(15) > 0$, 从飓风角度它的含义是什么?

16. 你从一个高塔上扔下一个石头. 下落 x(m) 后它的速度 S(m/s) 是 $S = h(x)$. $h'(20) = 0.5$ 的含义是什么?

17. 如果 t 表示 2003 年以来的年数, 那么中国的人口 P(十亿) 可以由函数

$$P = f(t) = 1.291 \times (1.006)^t.$$

表示. 估计 $f(6)$ 和 $f'(6)$ 并给出单位. 这两个数的实际含义是什么?

18. 图 2-31 表明鲟 (一种鱼) 的长度 L(cm) 是时间 t(年) 的函数.[①] 估计 $f'(10)$, 给出单位并解释你的答案.

19. 连续复利的年利率为 7%, 存入 1000 美元, t 年后你的余额是 B, 其中 $B = f(t)$. dB/dt 的单位是什么? dB/dt 从金融角度讲是什么意思?

20. 对某些止痛药, 所用剂量的大小 D 依赖于病人的体重 W. 因此, $D = f(W)$, 其中 D 的单位是毫克而 W 的单位是磅.

(a) 用这种止痛药解释 $f(140) = 120$ 和 $f'(140) = 3$.

(b) 用 (a) 中式子所给的信息估计 $f(145)$.

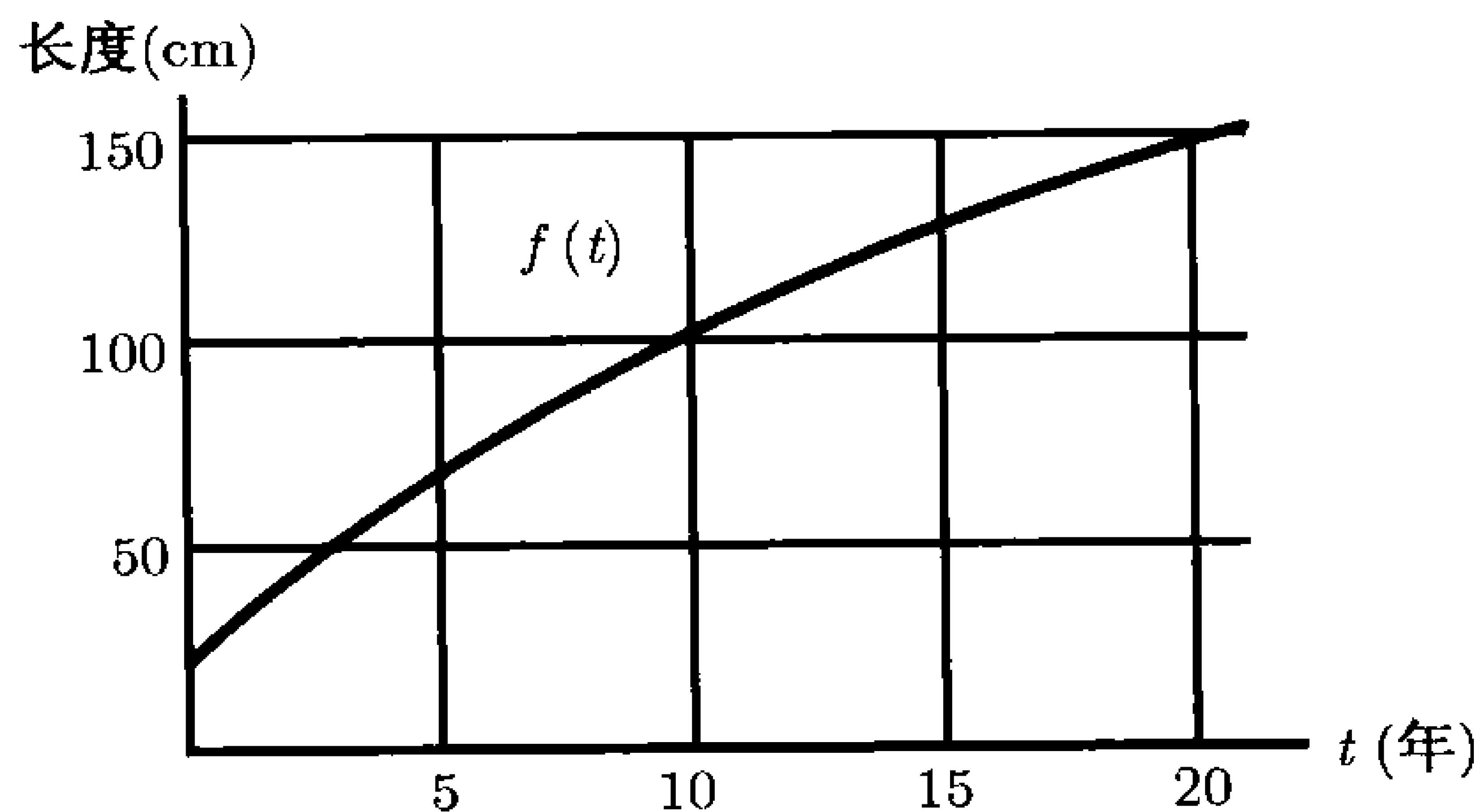


图 2-31

① 数据来自 von Bertalanffy, L.,《一般系统论》, 第 177 页 (纽约: Braziller, 1968).

21. 对于函数 $f(x)$, 我们知道 $f(20)=68$ 和 $f'(20)=-3$. 估计 $f(21)$, $f(19)$ 和 $f(25)$.

22. 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(20)=345$ 和 $f'(20)=6$. 估计 $f(22)$.

23. 抽一支烟后 t 分钟体内尼古丁含量 Q(mg) 由 $Q=f(t)$ 表示.

(a) 用尼古丁解释 $f(20)=0.36$ 和 $f'(20)=-0.002$. 数字 20, 0.36 和 -0.002 的单位是什么?

(b) 用 (a) 中所给的信息估计 $f(21)$ 和 $f(30)$. 验证你的答案.

24. 下表表明世界黄金产量①$G=f(t)$ 是年度 t 的函数.

(a) $f'(t)$ 是正的还是负的? 就黄金产量来说这意味着什么?

(b) 在哪个时间段 $f'(t)$ 最大?

(c) 估计 $f'(2002)$. 给出单位并用黄金产量解释你的答案.

(d) 用 $f'(2002)$ 的估计值估计 $f(2003)$ 和 $f(2010)$, 并解释你的答案.

t(年)	1990	1993	1996	1999	2002
G(百万金衡制盎司)	70.2	73.3	73.6	82.6	82.9

25. 图 2-32 显示当负重变化时肌肉的收缩速度 $v(x)$ 是如何变化的.

(a) 求负重 2 kg 时收缩速度图形的切线斜率. 给出单位.

(b) 用 (a) 的答案估计, 当负重从 2 kg 再增加 50 g 时收缩速度的变化量.

(c) 把 (a) 的答案表示成 $v(x)$ 的导数.

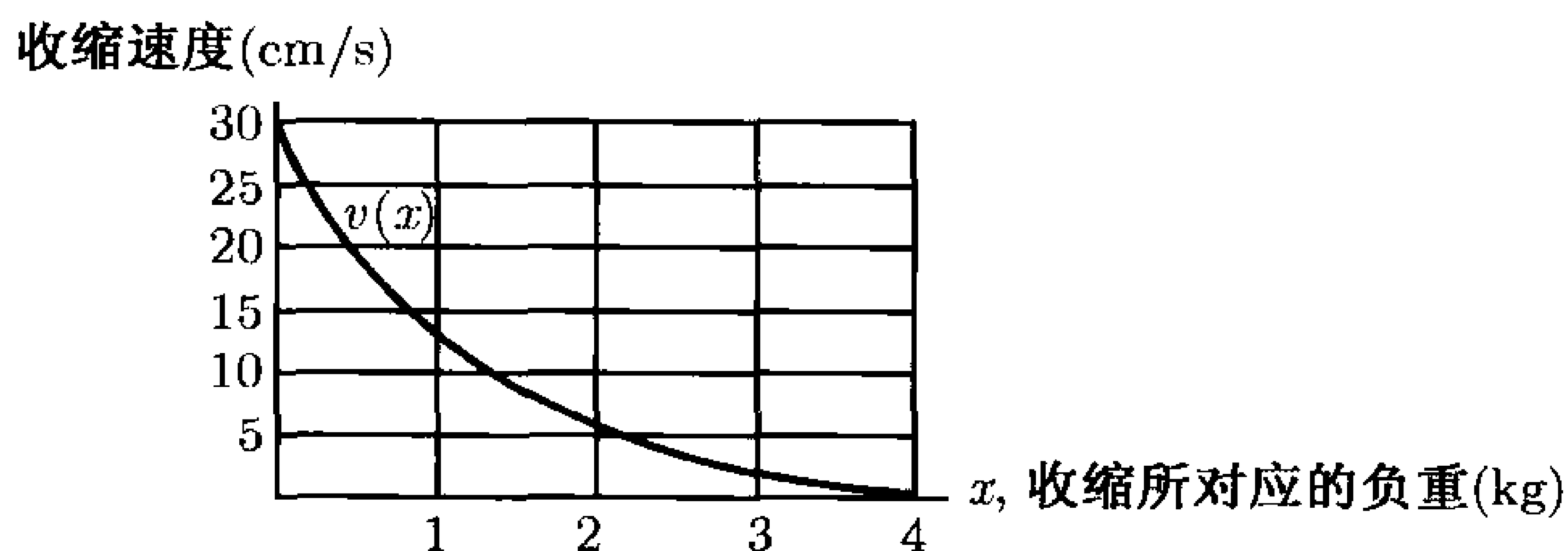


图 2-32

26. 假设 $C(r)$ 表示付清购车贷款的总成本, 其中贷款的年利率为 $r\%$. $C'(r)$ 的单位是什么? $C'(r)$ 的实际含义是什么? 它的符号是什么?

27. 珠穆朗玛峰的攀登者离他的攀登路径起点 6000 m, 这个位置的海拔高度 8000 m. 在距出发点 x(m) 处, 海拔高度是 $h(x)$m. 如果 x 接近 6000 m 时 $h'(x)=0.5$, 那么沿着这个路径再走 3 m 大约升高多少?

28. 设 $f(v)$ 表示以速度 v(km/h) 行驶汽车的油耗 (l/km). 换句话说, $f(v)$ 表示以速度 v 行驶一千米汽车要消耗的汽油升数. 说明下式的含义:

$$f(80)=0.05 \quad 并且 \quad f'(80)=0.0005.$$

29. 图 2-33 显示流血后人的心脏供血速度是如何变化的.

(a) 求 2 小时的时候图形的切线斜率. 给出单位.

(b) 用 (a) 中的答案估计从 2 小时那一刻开始的一分钟内供血速度增加了多少.

(c) 根据 (a) 中的答案表示 $g(t)$ 的导数.

① 《2005 年世界年鉴》, 第 135 页 (纽约).

30. 为了解交通流量, 某城市安装一种设备, 用来记录上午 4: 00 以后 t 小时经过的汽车总数 $C(t)$. $C(t)$ 的图形如图 2-34 所示.

(a) 什么时候交通流量最大?

(b) 估计 $C'(2)$.

(c) $C'(2)$ 的实际意义是什么?

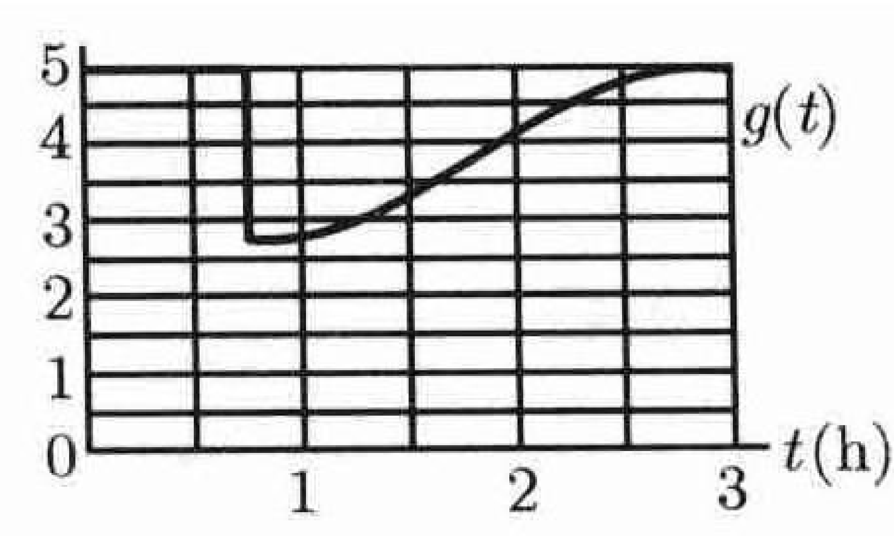


图　2-33

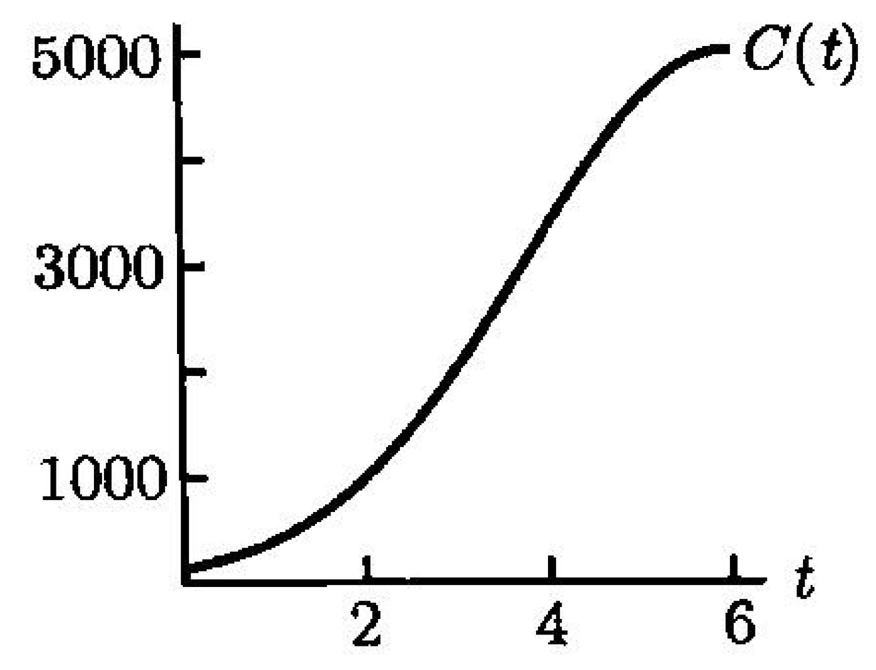


图　2-34

习题 31~35 参考图 2-35, 它表示人在饥饿时体内食物储备的消耗情况.

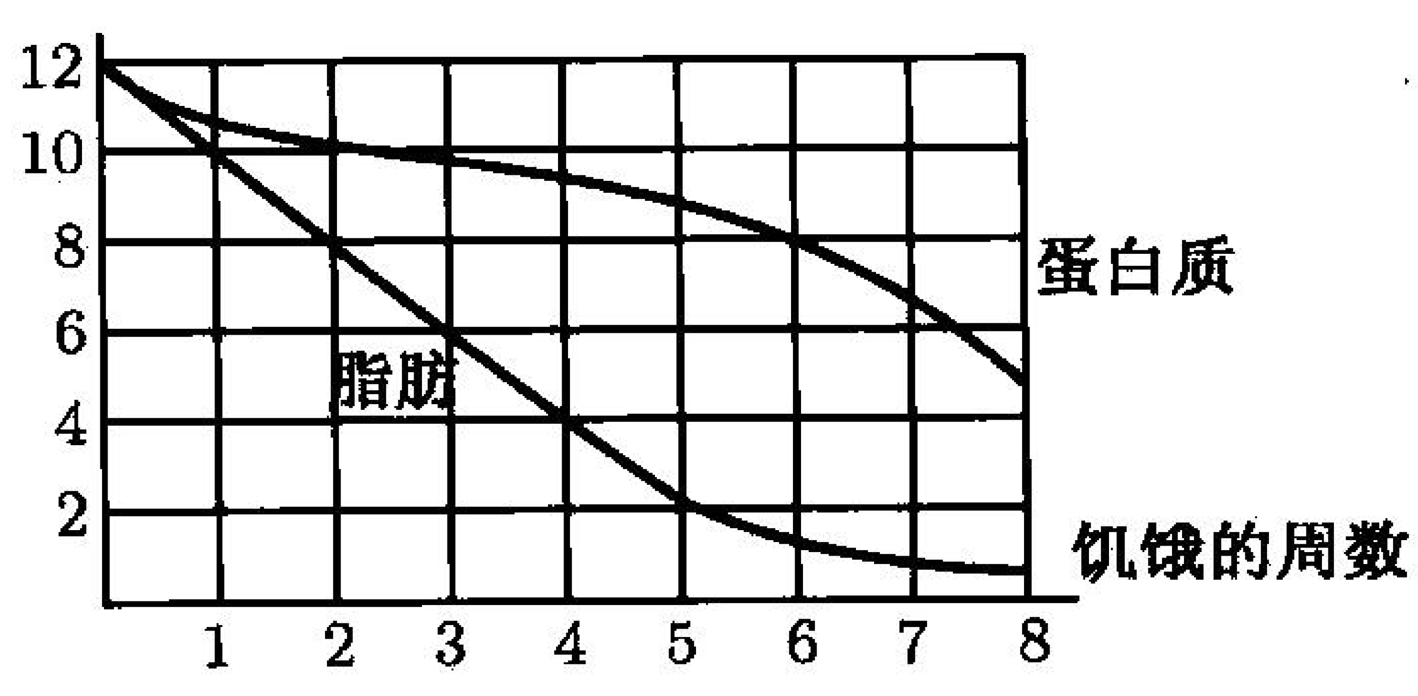


图　2-35

31. 在下面每个期间中, 脂肪和蛋白质消耗的速度哪个大?

(a) 第三周　　(b) 第七周

32. 在前四周脂肪储备图形是线性的. 从使用储备的脂肪的角度讲它的含义是什么?

33. 估计

(a) 3 周后　　(b) 6 周后　　(c) 8 周后

脂肪消耗的速度.

34. 第六周期间发生了什么? 你认为原因是什么?

35. 图 2-36 表示蛋白质和脂肪储备函数的导数. 判断两个导数分别对应哪个图?

36. 音乐光盘 (CD) 的总销售量 $f(t)$(百万张) 和音乐磁带的总销售量 $g(t)$(百万张) 是年度 t 的函数, 如下表所示.

(a) 估计 $f'(2002)$ 和 $g'(2002)$. 给出单位并从 CD 和磁带的销售量角度解释每个答案.

(b) 用 $f'(2002)$ 估计 $f(2003)$ 和 $f(2010)$. 从 CD 的销售量角度解释你的答案.

年, t	1994	1996	1998	2000	2002
CD 销售量, $f(t)$	662.1	778.9	847.0	942.5	803.3
磁带销售量, $g(t)$	345.4	225.3	158.5	76.0	31.1

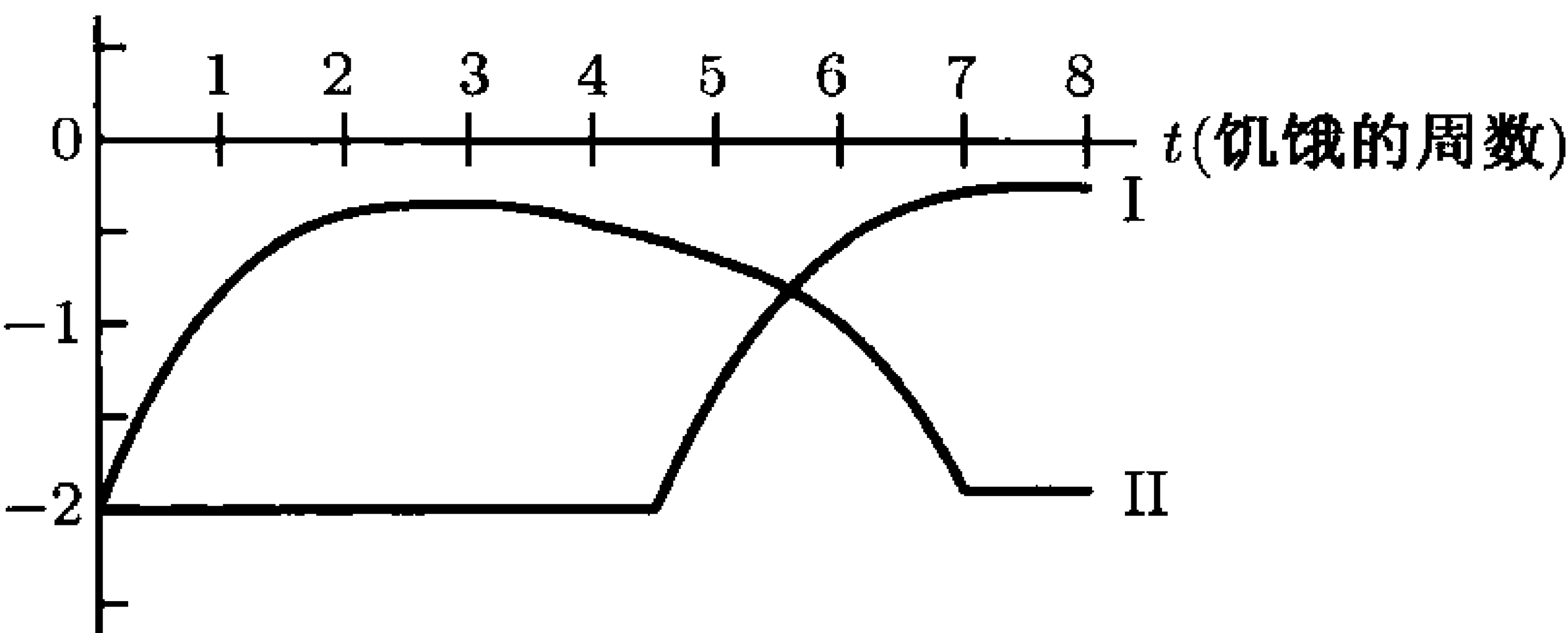


图 2-36

37. 当你呼吸时, 一块叫做横隔膜的肌肉不仅减少肺周围的压力而且它们扩张以便填充空气. 下面的表表示肺的体积是膜上压力减少量的函数. 肺科专家 (肺科大夫) 定义这个函数的导数为肺的*顺从度*[①].

(a) 顺从度的单位是什么?

(b) 估计肺的最大顺从度.

(c) 说明肺接近充满的时候 (1 升左右) 它的顺从度变小的原因.

压力减少量 (厘米水柱)	体积 (升)
0	0.20
5	0.29
10	0.49
15	0.70
20	0.86
25	0.95
30	1.00

38. 某人得了一种肝脏疾病, 最初表现为血液中的某些酶 (SGOT 和 SGPT) 的浓度越来越大. 当病情发展的时候, 这些酶的浓度开始下降, 最初下降到病前水平而最终下降到零 (这时所有的肝脏细胞几乎都坏死). 检查这些酶的水平可以使医生了解这种病患者的病情进展. 如果 $C = f(t)$ 表示血液中这些酶的浓度是时间的函数.

(a) 作出合理的 $C = f(t)$ 的略图.

(b) 在这个图形上标出 $f' > 0$ 和 $f' < 0$ 的区间.

(c) 在实际中, $f'(t)$ 表示什么?

2.4 二阶导数

因为导数本身是一个函数, 所以我们也可以计算它的导数. 对函数 f, 它的导数的导数称作 f 的二阶导数, 并且记为 f''. 如果 $y = f(x)$, 它的二阶导数也可以记为 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, 它的意思是 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的导数.

2.4.1 二阶导数能够告诉我们什么呢

函数的导数能够告诉我们这个函数是递增的还是递减的:

如果在一个区间上 $f' > 0$, 那么在这个区间上 f 是递增的.

如果在一个区间上 $f' < 0$, 那么在这个区间上 f 是递减的.

---

① 引自 John B. West,《呼吸生理学》, 第 4 版 (纽约: Williams 和 Wilkins, 1990).

因为 f'' 是 f' 的导数, 所以我们有

如果在一个区间上 $f''>0$, 那么在这个区间上 f' 是递增的.

如果在一个区间上 $f''<0$, 那么在这个区间上 f' 是递减的.

所以问题就变为: f' 是递增的或者是递减的其含义是什么? f' 递增的情形如图 2-37 所示, 在这里 f 的图形是向上弯曲的, 也就是 f 是上凹的. f' 递减的情形如图 2-38 所示, 在这里 f 的图形是向下弯曲的, 也就是 f 是下凹的.

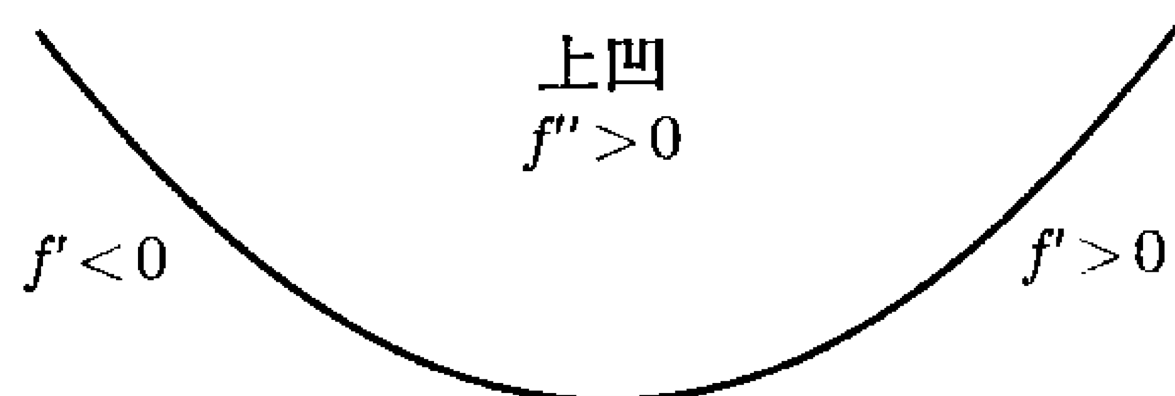


图 2-37 f'' 的含义: 当你从左向右运动时斜率由负的增加为正的, 所以 f'' 是正的并且 f 是上凹的

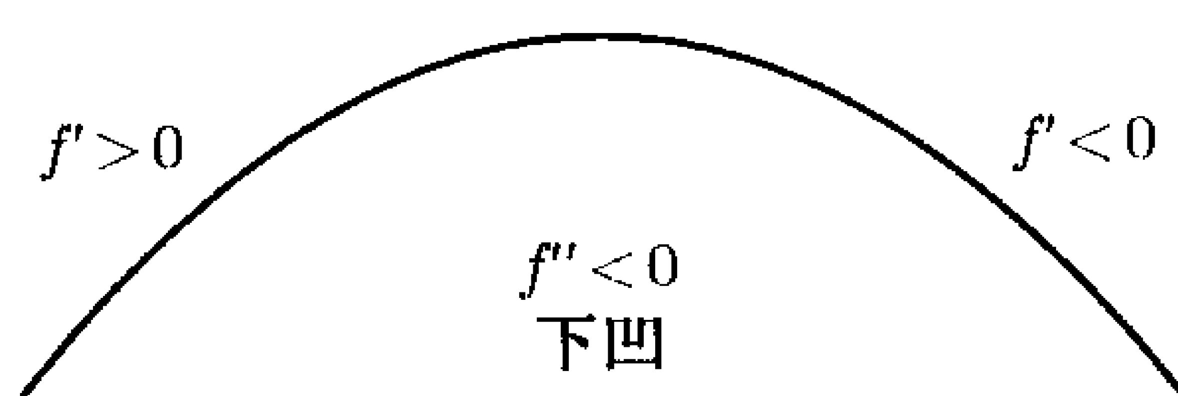


图 2-38 f'' 的含义: 当你从左向右运动时斜率由正的减少为负的, 所以 f'' 是负的并且 f 是下凹的

> 在一个区间上 $f''>0$ 意味着 f' 是递增的, 所以在那里 f 的图形是上凹的.
> 在一个区间上 $f''<0$ 意味着 f' 是递减的, 所以在那里 f 的图形是下凹的.

例 1 对于如图 2-39 中的函数, 确定在什么区间它们的二阶导数为正的在什么区间它们的二阶导数为负的.

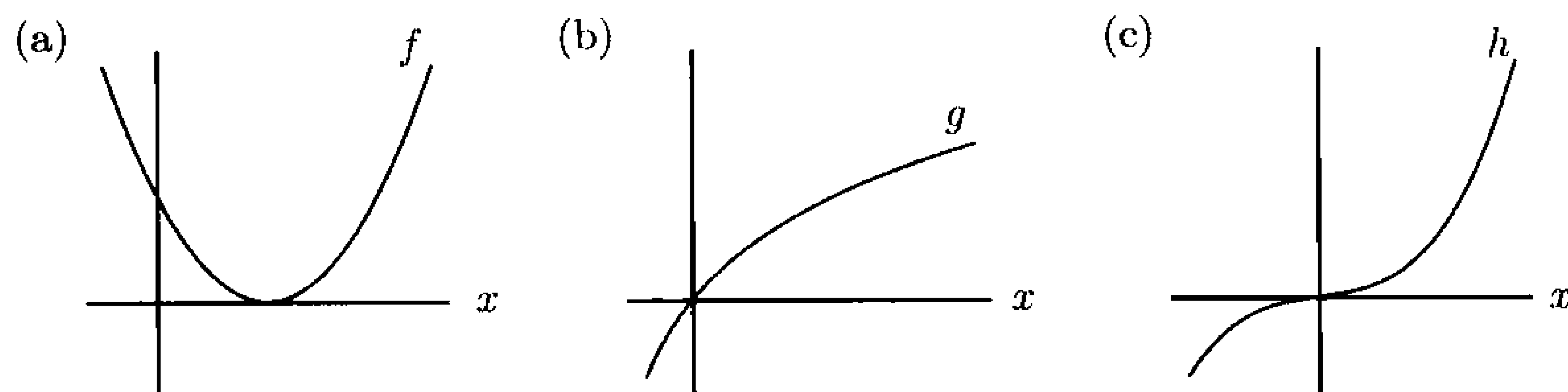


图 2-39 二阶导数的符号是什么

解 由图形可以看出

(a) 处处有 $f''>0$, 因为 f 的图形处处是上凹的.

(b) 处处有 $g''<0$, 因为 g 的图形处处是下凹的.

(c) $x>0$ 时 $h''>0$, 因为在那里 h 的图形是上凹的; $x<0$ 时 $h''<0$, 因为在那里 h 的图形是下凹的. □

2.4.2 二阶导数解释为变化率

如果我们把导数看成是变化率, 那么二阶导数就是变化率的变化率. 如果二阶导数是正的, 那么变化率是递增的; 如果二阶导数是负的, 那么变化率就是递减的.

二阶导数常常与实际相关. 1985 年一家报纸在头条位置报道了美国国防部长

谈到国会和参议院已经削减了国防预算. 然而, 和他的反对者指出的一样, 国会只是削减了国防预算的增长率[①]. 换句话说, 国防预算的导数仍然是正的 (预算在增加), 但是二阶导数是负的 (预算的增长速度放慢了).

例 2 在一个有限的环境中增长的人口 P 通常服从 Logistic 增长曲线, 如图 2-40 所示. 它描述了人口增长的速度是如何随时间变化的. 二阶导数 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2$ 的符号是什么? t^* 和 L 的实际解释是什么?

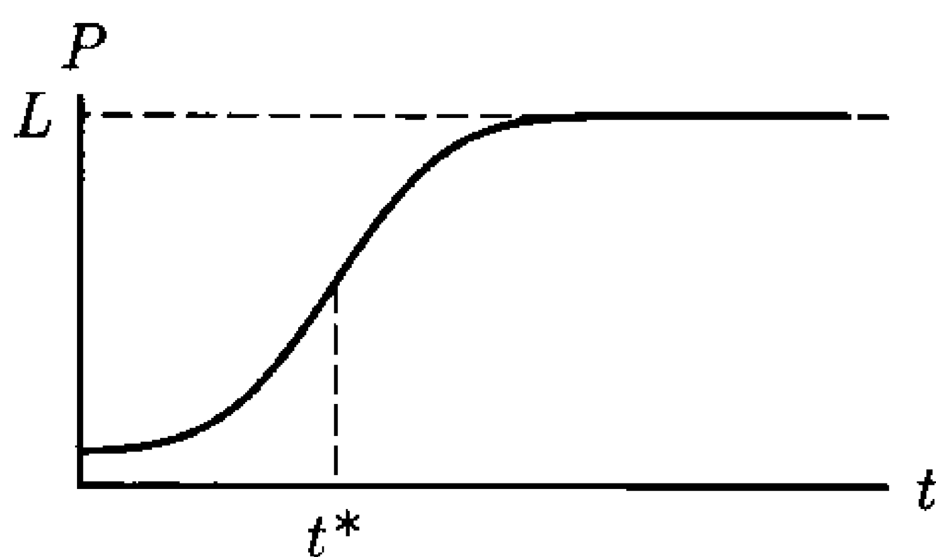


图 2-40 Logistic 增长曲线

解 起初, 人口是递增的, 并且以一个递增的速度递增. 所以, 起初 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 是递增的并且 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2 > 0$. 在 t^* 处, 人口递增的速度达到最大, 从而人口增长得最快. 超过 t^* 后, 人口增长的速度递减, 所以 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2 < 0$. 在 t^* 处, 图形从上凹变到下凹并且 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2 = 0$.

量 L 表示当 t 趋于无穷大时人口所能达到的极限值, L 叫作该环境的承受能力, 并且表示这个环境所能维持的最大人口. □

例 3 表 2-7 表示在 t 年度美国报告的每年流产的胎儿数[②] A.

表 2-7 美国 (1972～2000) 报告的流产胎儿

年, t	1972	1975	1980	1985	1990	1995	2000
千个上报的流产胎儿, A	587	1034	1554	1589	1609	1359	1313

(a) 计算所示时间区间 1972～2000 年的平均变化率.

(b) 在 1972～1975 年对于 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2$ 的符号, 你能得出什么结论?

解 (a) 对每个时间区间, 我们都可以求每年流产胎儿数的平均变化率. 例如, 在 1972～1975 年,

$$\text{平均变化率} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1034 - 587}{1975 - 1972} = \frac{447}{3} \approx 149.$$

因此, 在 1972～1975 年, 每年报告的流产胎儿将近 149 000 个. $\Delta A/\Delta t$ 的值列在表 2-8 中.

表 2-8 报告的流产胎儿数的变化率

时间	1972 ～ 1975	1975 ～ 1980	1980 ～ 1985	1985 ～ 1990	1990 ～ 1995	1995 ～ 2000
平均变化率, $\Delta A/\Delta t$ (千个/年)	149	104	7	4	−50	−9.2

① 在《波士顿环球报》, 1985 年 3 月 13 日的报道中, 据称众议院议员 William Gray(宾夕法尼亚) 说: "其实你谈到的只是增长的消减, 却暗指国会用消减来威胁国家安全, 这就把美国人民搞糊涂了."

② 《2004～2005 年美国统计摘要》, 表 89.

(b) 我们假设数据位于一条光滑曲线上. 因为 1975~1995 年 $\Delta A/\Delta t$ 的值显然是递减的, 所以我们非常确信 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 也是递减的, 从而这个期间 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2$ 是负的. 对于 1972~1975 年, $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2$ 的符号不明显; 1968 年的流产数据对我们判断它会有帮助. 图 2-41 可以确定这一点; 1975~1995 年, 它的图形似乎是下凹的. 在 1972~1980 年 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 是正的这一事实告诉我们, 1972~1980 年报告的流产胎儿数递增. 在 1990~2000 年 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 是负的这一事实告诉我们, 1990~2000 年报告的流产胎儿数递减. 在 1975~1995 年 $\mathrm{d}^2A/\mathrm{d}t^2$ 是负的这一事实告诉我们, 在这一期间递增的速度放慢.

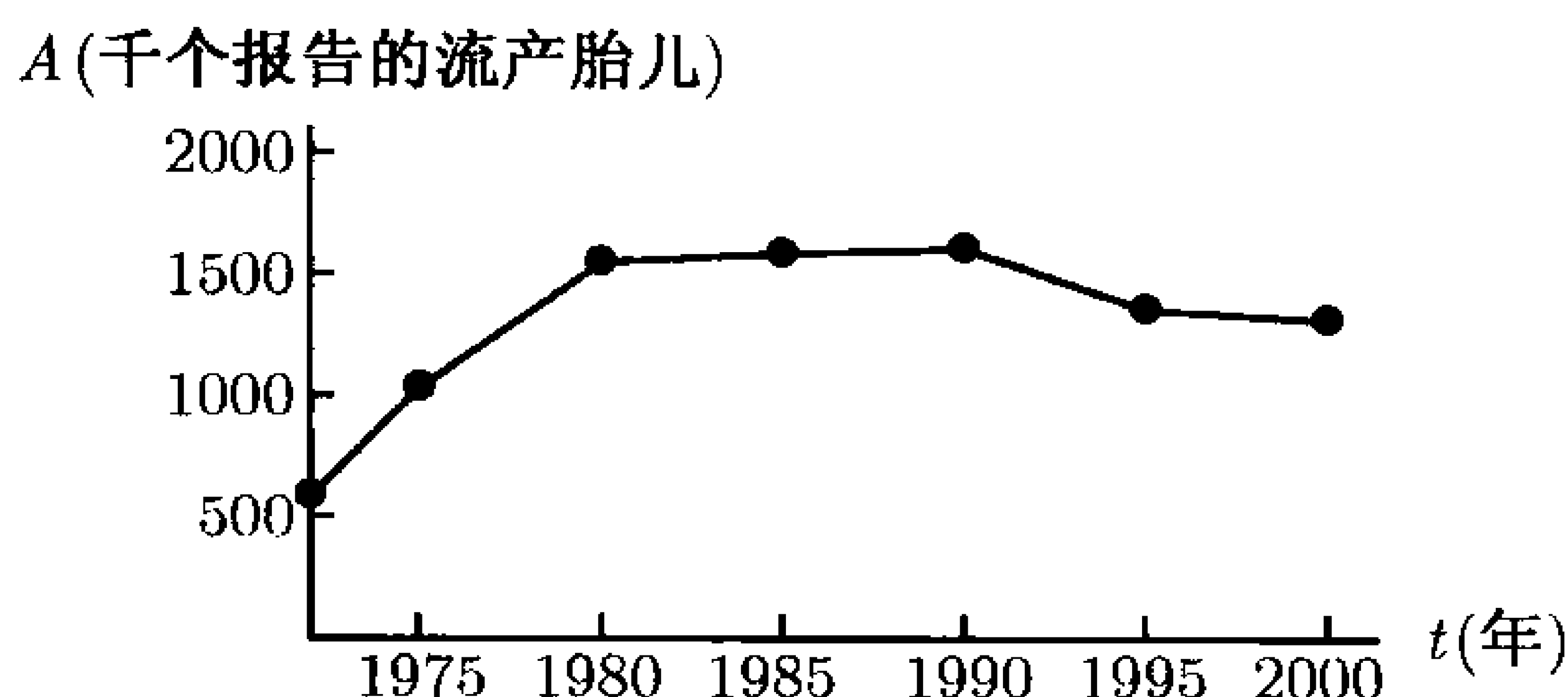


图 2-41 美国报告的流产胎儿数是如何随时间变化的 □

习题

1. 对图 2-42 表示的函数, 下面这些非零的量是正的还是负的?

   (a) $f(2)$ (b) $f'(2)$ (c) $f''(2)$

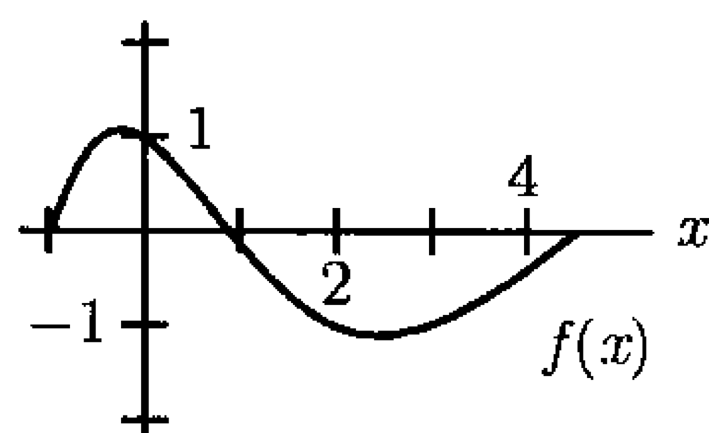
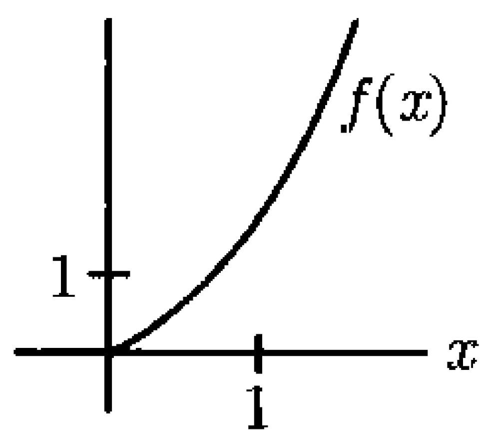


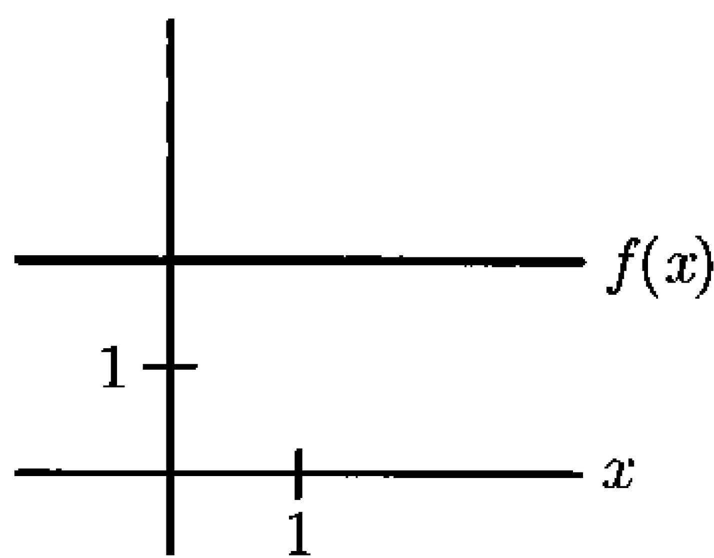
图 2-42

对于习题 2~7, 给出下面每个函数的一阶导数和二阶导数的符号. 每个导数要么处处是正的, 要么处处是零, 要么处处是负的.

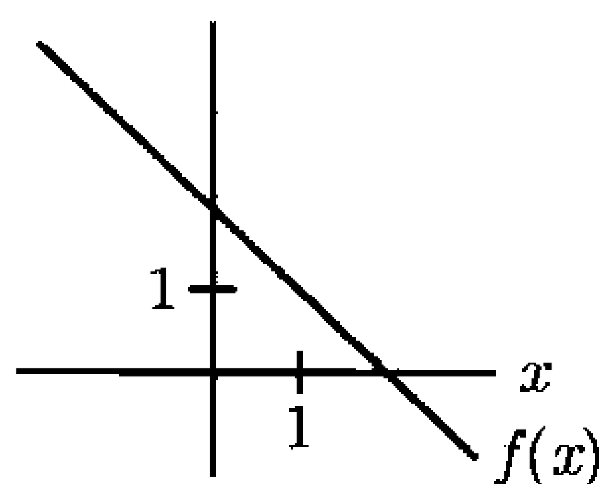
2.



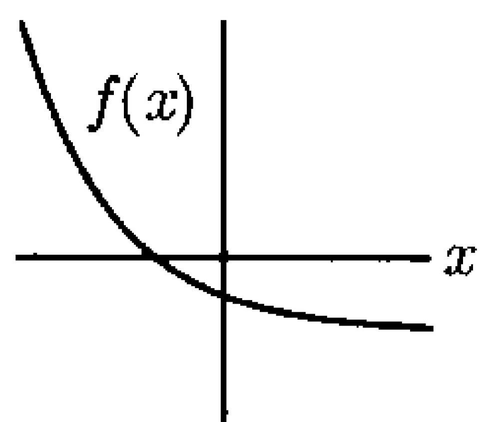
3.



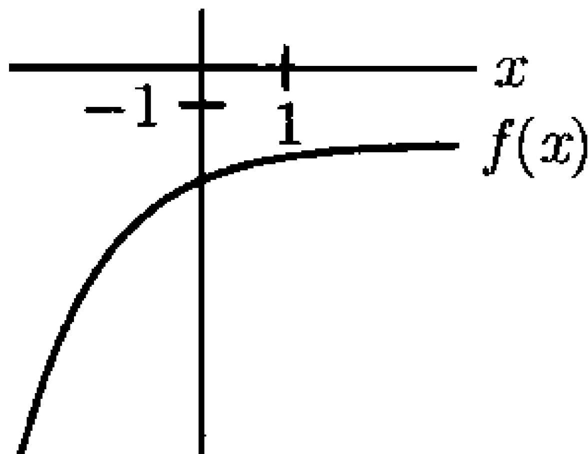
4.



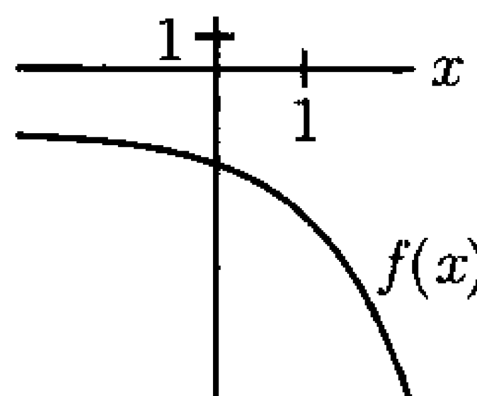
5.



6.



7.



在习题 8 和习题 9 中, 利用每个函数所给的函数值.

(a) 在所给的区间上函数的导数是正的还是负的? 说明理由.

(b) 在所给的区间上函数的二阶导数是正的还是负的? 说明理由.

8.

t	100	110	120	130	140
$w(t)$	10.7	6.3	4.2	3.5	3.3

9.

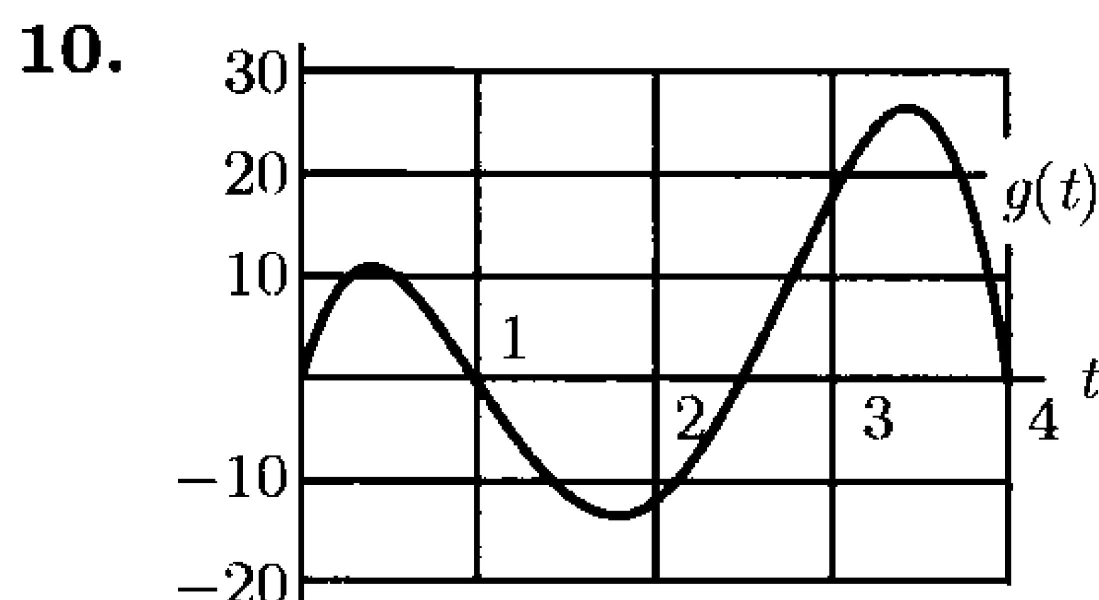
t	0	1	2	3	4	5
$s(t)$	12	14	17	20	31	55

在习题 10 和习题 11 中, 利用每个函数所给的图形.

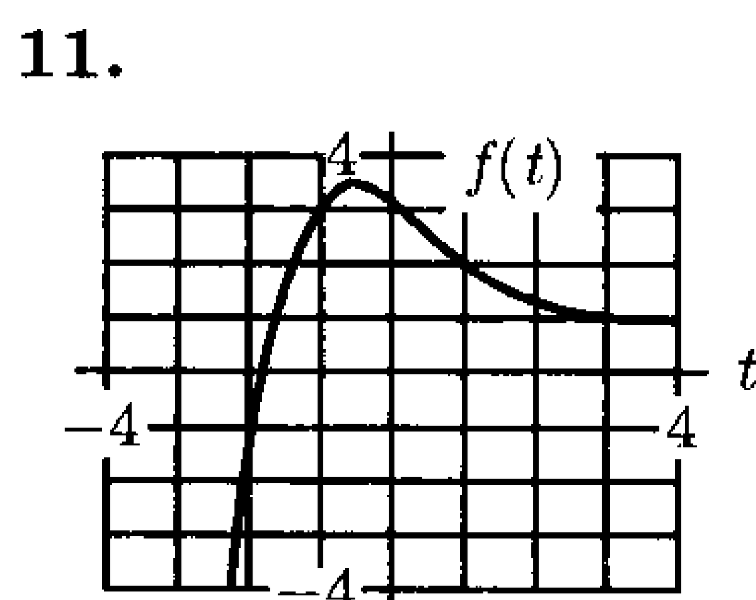
(a) 估计导数为正的区间和导数为负的区间.

(b) 估计二阶导数为正的区间和二阶导数为负的区间.

10.



11.



12. (a) 作一个函数的图形, 它的一阶和二阶导数处处是正的.
   (b) 作一个函数的图形, 它的二阶导数处处是负的而它的一阶导数处处是正的.
   (c) 作一个函数的图形, 它的二阶导数处处是正的而它的一阶导数处处是负的.
   (d) 作一个函数的图形, 它的一阶和二阶导数处处是负的.

13. 在图 2-43 中, 在所标出的点中恰好有两个点上的导数 f' 是 0; 在任何所标出的点上二阶导数 f'' 不是零. 在右侧表中, 给出每个标出的点处 f, f', f'' 的符号.

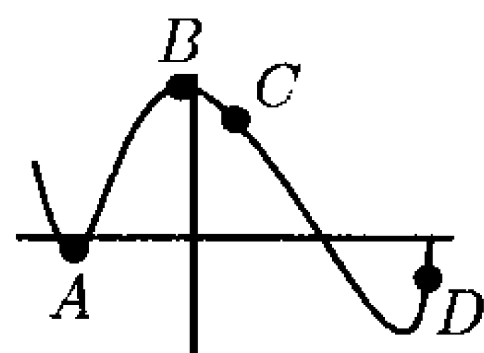


图 2-43

点	f	f'	f''
A			
B			
C			
D			

14. 在 6 月 21 日, 赤道以北 x 千米处一天的长度 L(分钟)(从日出到日落) 由 $L = f(x)$ 表示下面的单位是什么?.
   (a) $f'(3000)$ (b) $f''(3000)$

15. 三分钟的时候一个发烧的人的体温的一阶导数是正的而二阶导数是负的. 下面结论哪一个正确?
   (a) 在最后一分钟内升高的体温比之前的一分钟内升高的体温要大.
   (b) 在最后一分钟内体温升高, 但比之前的一分钟内升高的小.
   (c) 在最后一分钟内体温下降但比之前的一分钟内下降的要小.
   (d) 两分钟前体温升高但在最后一分钟内体温下降.

16. 昨天午夜后 t 小时温度为 $f(t)$°C. 在中午温度是 20°C. 一阶导数 $f'(t)$, 整个上午递减, 在中午达到较低的 2°C/小时, 然后在这一天的其余时间递增. 下面哪个一定正确?
   (a) 在上午温度下降而在下午温度上升.
   (b) 在下午 1 点温度是 18°C.
   (c) 在下午 1 点温度是 22°C.
   (d) 中午的温度比其他时间的温度都低.
   (e) 全天温度都在上升.

17. $f(t)$ 的值由下表给出.

(a) 这个函数的一阶导数看起来是正的还是负的？二阶导数呢？说明理由.

(b) 估计 $f'(2)$ 和 $f'(8)$.

t	0	2	4	6	8	10
$f(t)$	150	145	137	122	98	56

18. 作出函数 f 的略图，其中 $f(2)=5$, $f'(2)=1/2$ 而且 $f''(2)>0$.

19. 作出具有如下性质的连续函数的略图：

- 对所有的 $x>0$, $f'(x)>0$.
- 对 $x<2$, $f''(x)<0$, 而对 $x>2$, $f''(x)>0$.

20. 下面的陈述分别与图 2-44 中标出的哪个 x 值符合？

(a) $f(x)<0$

(b) $f'(x)<0$

(c) $f(x)$ 是递减的

(d) $f'(x)$ 是递减的

(e) $f(x)$ 的斜率是正的

(f) $f(x)$ 的斜率是递增的

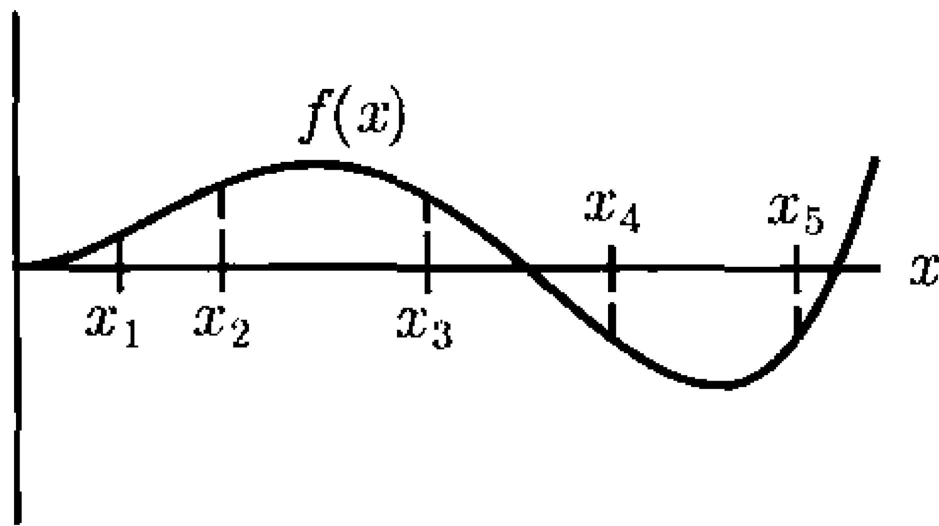


图 2-44

21. 函数 f 具有性质 $f(5)=20$, $f'(5)=2$ 并且 $x\geqslant 5$ 时 $f''(x)<0$. 对于 $f(7)$ 的值下面哪个是可能的哪个是不可能的？

(a) 26　　(b) 24　　(c) 22

22. 下表表示在 t 年美国轿车数 $C=f(t)$(百万辆)①.

(a) 在 1940~1980 年 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 看上去是正的还是负的？

(b) 估计 $f'(1975)$. 利用单位，从轿车角度解释你的答案.

t	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
C	27.5	40.3	61.7	89.2	121.6	133.7	133.6

23. "战胜贫困" 这一口号一直被嘲讽地描述成放慢人们在贫困线下的下滑速度. 假设这种情况正在发生：

(a) 作出在贫困中的总人数关于时间的函数图形.

(b) 如果 N 表示 t 时刻贫困线下的人数, $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}^2N/\mathrm{d}t^2$ 的符号是什么？

24. 设 $P(t)$ 表示 t 时刻某公司的每股股票价格. 下面每个陈述告诉我们 $P(t)$ 的一阶和二阶导数符号是什么？

(a) "股票价格上升得越来越快."

(b) "股票价格接近走出谷底."

25. 在经济学中，总效用指的是消费某些商品的总满足. 根据经济学家 Samuelson②的观点：如果你消费同一种商品较多，你的总 (心理) 效用就会增加. 然而，…… 如果商品单位不断更新，你的总效用增加得就会越来越慢，由于基本趋势是，你欣赏较多商品的心理能力会变迟钝.

---

① 《2005 年世界年鉴》，第 237 页 (纽约).

② 引自 Paul A. Samuelson,《经济学》，第 11 版 (纽约：McGraw-Hill, 1981).

(a) 作出总效用作为消费单位数的函数略图.

(b) 按导数的说法, Samuelson 所说的是什么?

26. 环保局 (EPA) 指控一个工厂向湖中倾倒的有毒污染物达到了不能接受的水平. 工程公司几个月以来, 每天检测污染物向湖中排放的速度. 工程师们制作了类似于图 2-45a 或图 2-45b 的图形. 对每种情形, 为 EPA 在法庭上可能提出反对该工厂的理由出个主意, 并且为工厂提出辩护出个主意.

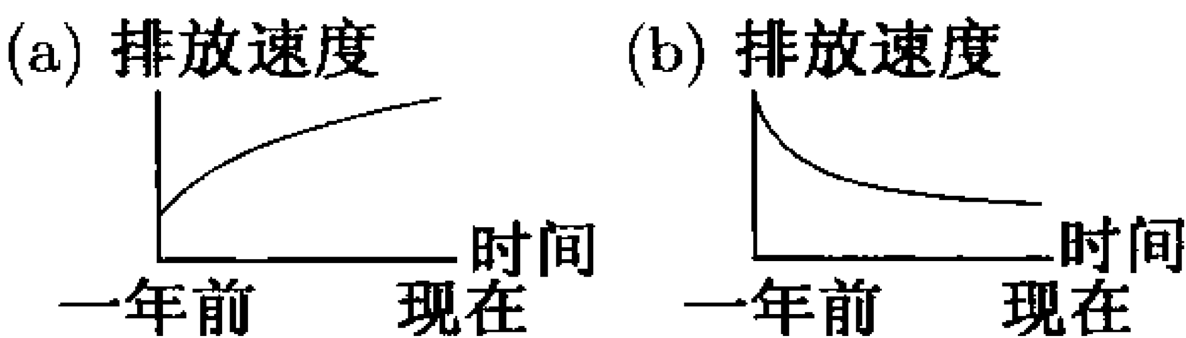


图 2-45

27. 作出粒子高度关于时间的函数略图, 其中它的速度是正的而加速度是负的.

28. 图 2-46 表示 t 时刻粒子的位置 $f(t)$. 下面的陈述在标出的哪个 t 的值上是正确的?

(a) 位置是正的.

(b) 速度是正的.

(c) 加速度是正的.

(d) 位置是递减的.

(e) 速度是递减的.

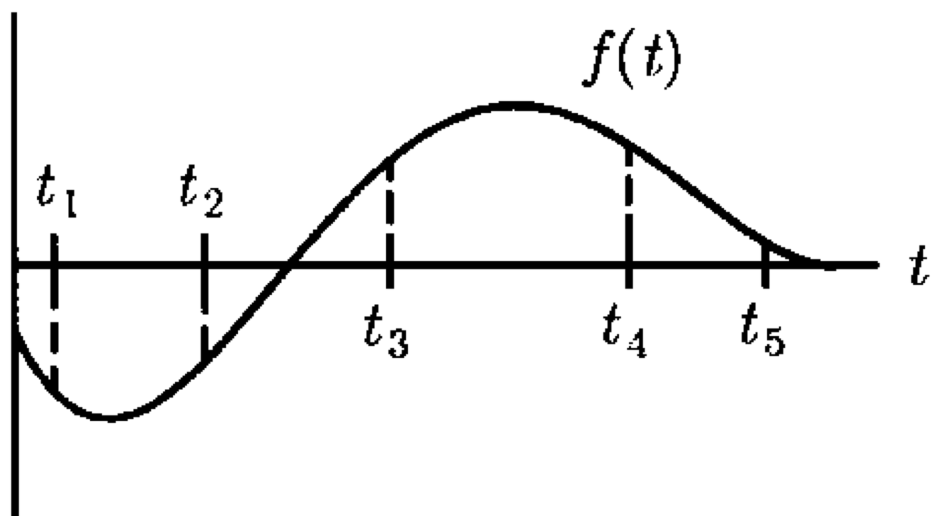


图 2-46

29. 图 2-47 中每个图形表示 t 时刻, $0 \leqslant t \leqslant 5$, 沿 x 轴运动的粒子位置函数. 图形的竖直标度都是相同的. 在这个时间区间中, 哪个粒子具有

(a) 不变的速度?

(b) 最大的初始速度?

(c) 最大的平均速度?

(d) 零平均速度?

(e) 零加速度?

(f) 全程正的加速度?

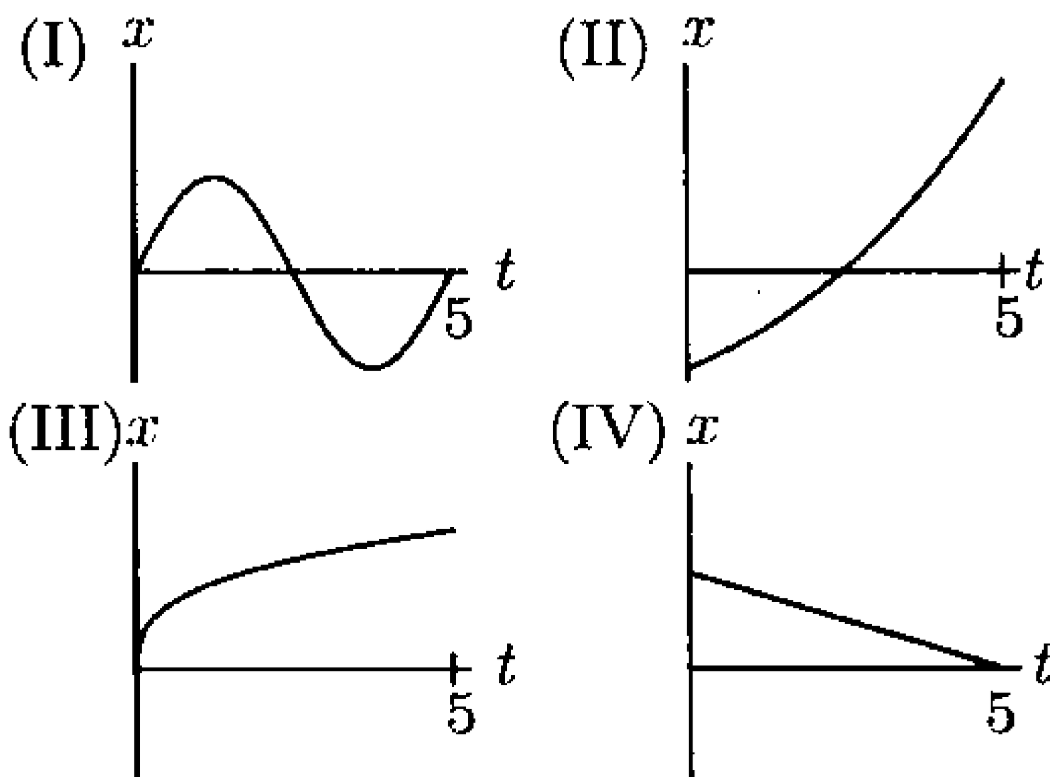


图 2-47

2.5 边际成本和边际收益

在一个特定的公司或工厂中, 管理决策常常依赖于相关的成本和收益. 这一节我们考察成本函数和收益函数.

2.5.1 成本函数和收益函数的图形

成本函数的图形可以是线性的, 如图 2-48, 也可以是如图 2-49 所示的形状. 在 C 轴上的截距表示固定成本, 即使什么都不生产它也会产生. (例如, 它包括开始生产所必需的机器.) 图 2-49 中, 成本函数开始快速地递增然后越来越慢, 这是由于生产大量的产品比生产少量的产品更高效, 这就叫作规模经济. 在稳定的高生产水

平上, 成本函数还是快速地递增以致于资源短缺; 当必须建造新的工厂时成本会急剧递增. 因此, 成本函数 C 的图形, 可能开始下凹后来变成上凹.

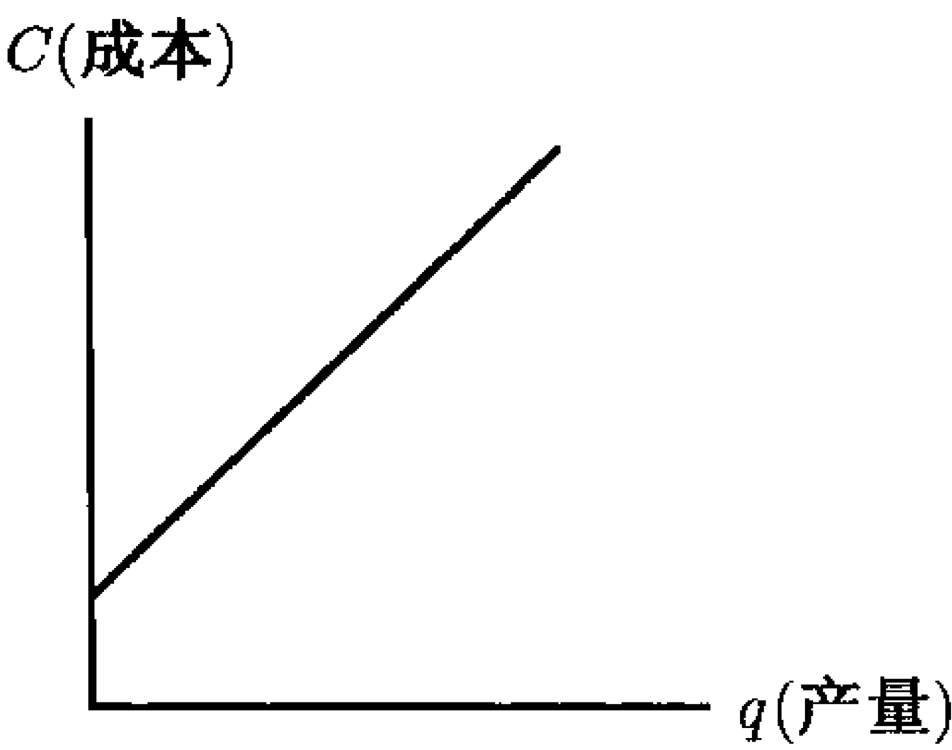


图 2-48　线性成本函数

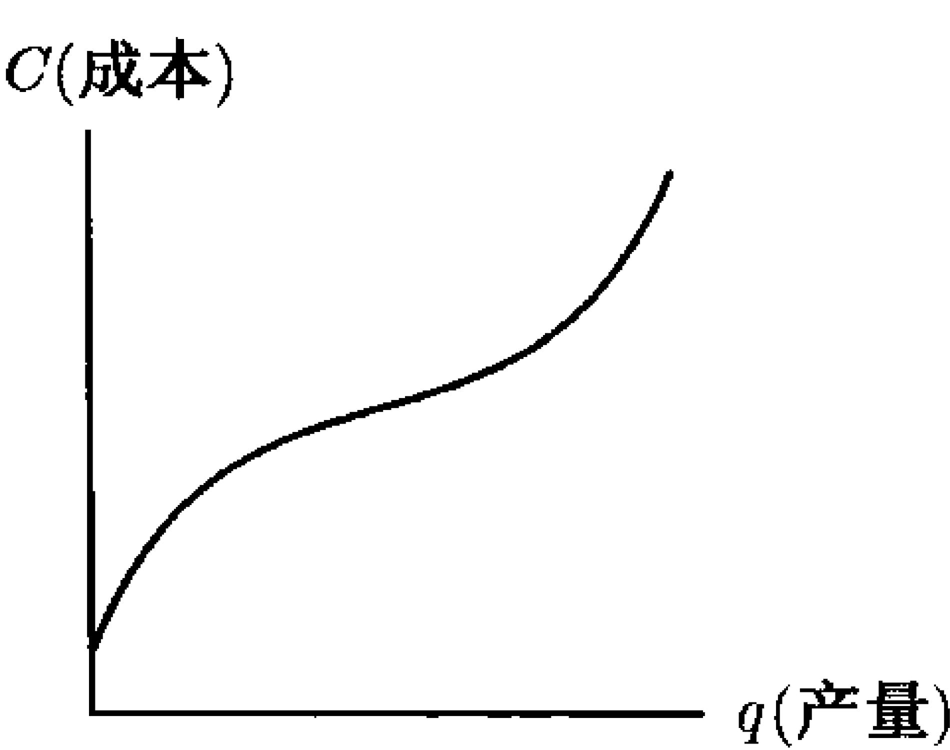


图 2-49　非线性成本函数

收益函数是 $R = pq$, 其中 p 是价格 q 是产量. 如果价格是 p 常数, 那么 R 关于 q 的图形是一条经过原点且斜率等于价格的直线. (参见图 2-50). 在实际中, 对于较大的 q, 市场被该商品充斥, 这会引起价格下降并且 R 的形状如图 2-51 所示.

例 1　如果成本 C 和收益 R 由图 2-52 给出, 那么能使公司获利的产量是多少?

解　当收益大于成本时, 即 $R > C$ 时, 公司才获利. 大概在 $130 < q < 215$ 时 R 的图形位于 C 的上方. 所以产量位于 130 个单位到 215 个单位之间时会产生利润.□

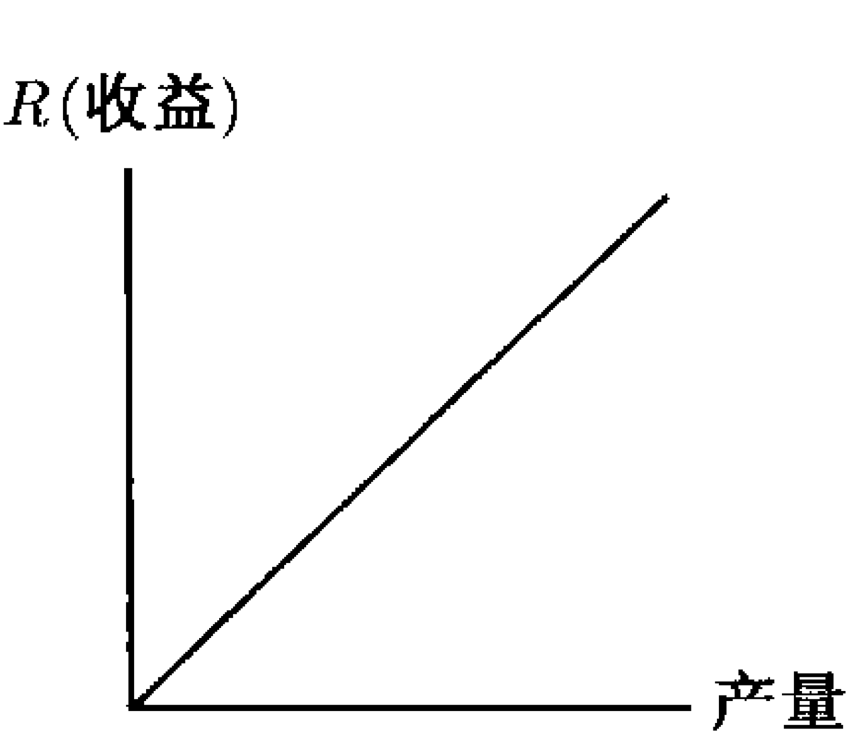


图 2-50　收益：常数价格

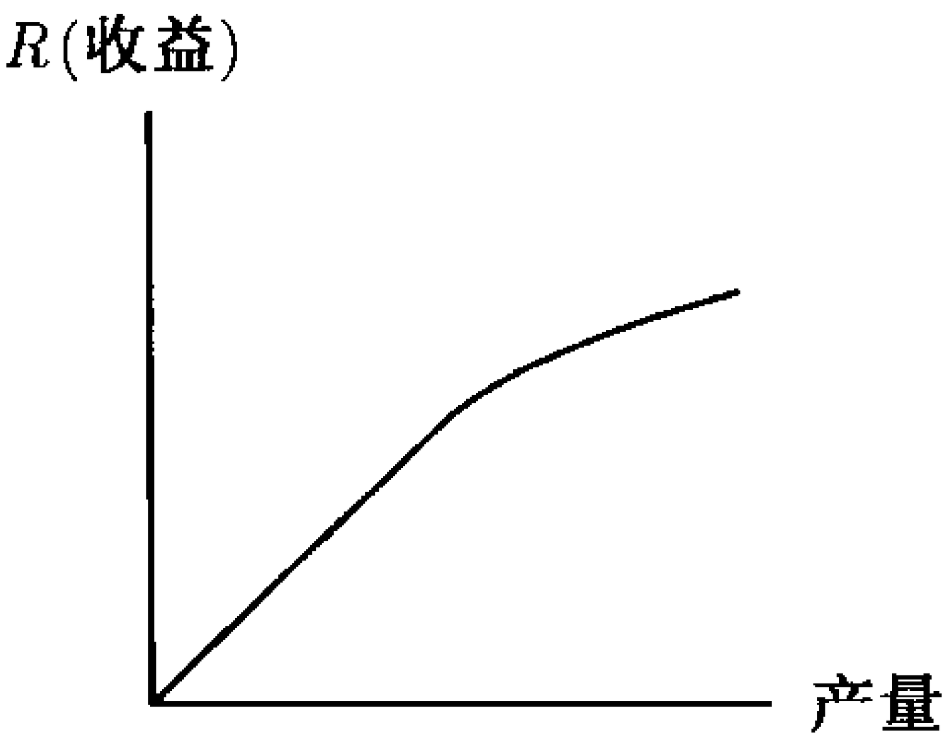


图 2-51　收益：递减价格

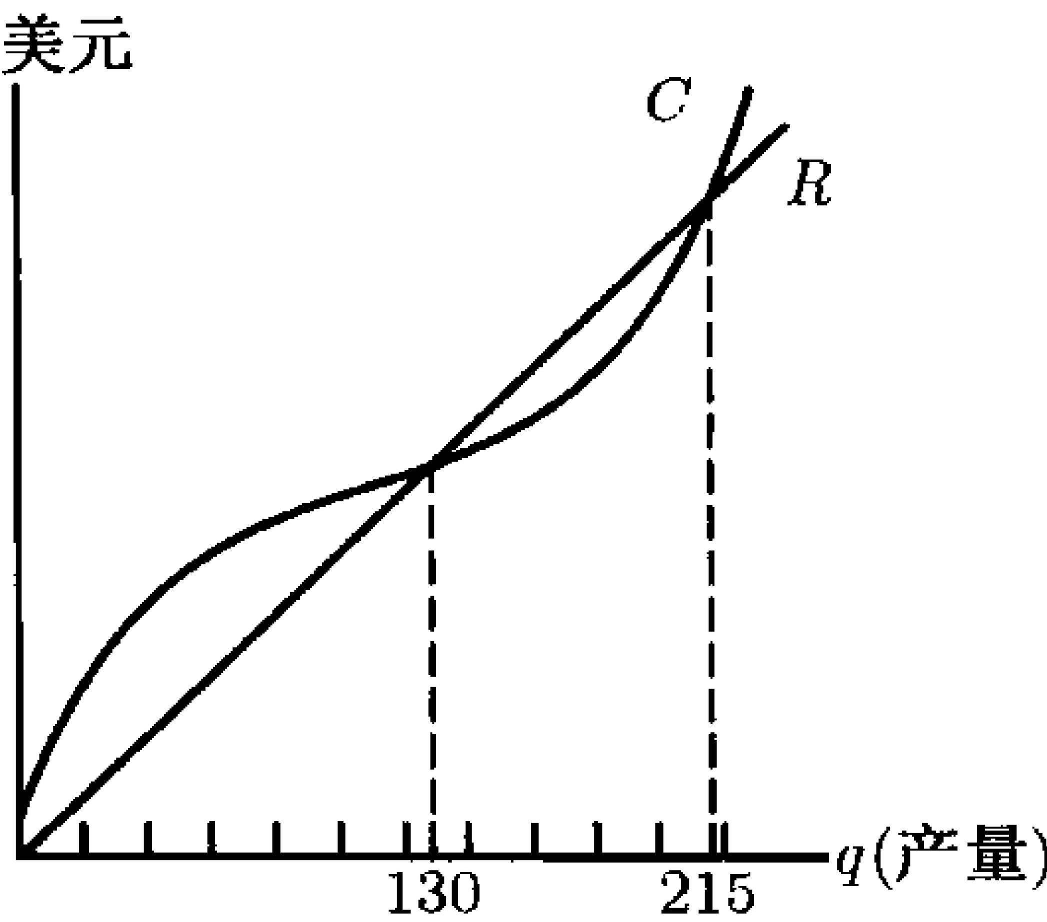


图 2-52　例 1 中的成本和收益

2.5.2 边际分析

许多经济决策以“边际”成本和收益的分析为基础. 让我们通过一个例子来考虑这一思想.

假设你经营一个航线, 并且打算决定是否再增加一架航班. 你应该如何决定呢? 我们假设作出的决定纯粹以金钱为基础: 如果这架航班能够为公司挣钱, 那么就应该增加. 显然你需要考虑到相关的成本和收益. 因为是在增加这架航班还是仍然处于原来的状态两者之间作选择, 所以关键的问题是带来的追加成本与这架航班产生的追加收益相比大还是小. 这里的追加成本和追加收益分别叫作边际成本和边际收益.

假设 $C(q)$ 表示经营 q 架航班的成本函数. 如果这个航线原来计划经营 100 架航班, 它的成本是 $C(100)$. 加上这个追加航班, 它的成本就是 $C(101)$. 因此

$$\text{边际成本} = C(101) - C(100).$$

于是

$$C(101) - C(100) = \frac{C(101) - C(100)}{101 - 100},$$

并且这个量是在 100 架航班和 101 架航班之间成本的平均变化率. 在图 2-53 中这个平均变化率就是割线的斜率. 如果成本函数的图形在这一点附近弯曲得不是太快, 那么割线的斜率就近似于这一点切线的斜率. 因此, 平均变化率近似于瞬时变化率. 因为这两个变化率差别不大, 所以许多经济学家选择将边际成本 MC 定义为成本关于产量的瞬时变化率.

$$\boxed{\text{边际成本} = MC = C'(q).}$$

边际成本由成本曲线的斜率表示.

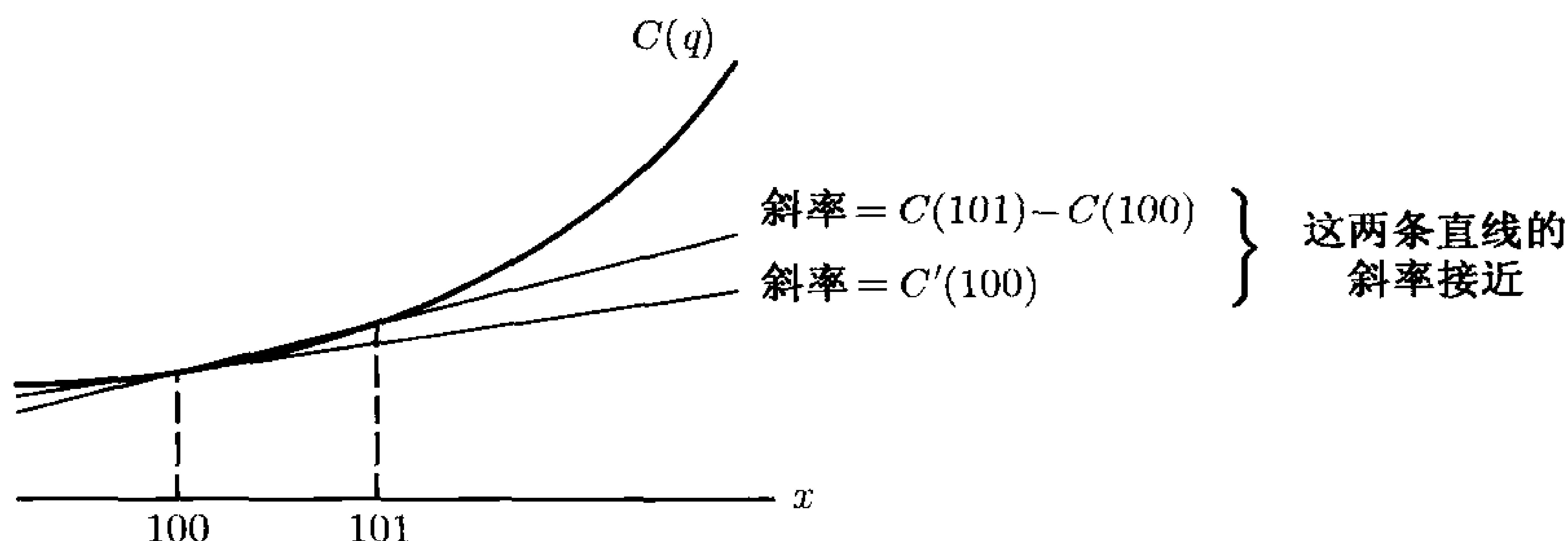


图 2-53 边际成本: 两条直线的斜率之一

类似地, 由 q 架航班产生的收益是 $R(q)$, 那么从 100 架航班到 101 架航班所增加的航班数产生的追加收益是

$$\text{边际收益} = R(101) - R(100).$$

于是 $R(101) - R(100)$ 也是 100 架航班到 101 架航班之间收益的平均变化率. 同前面一样, 平均变化率近似地等于瞬时变化率, 所以经济学家们通常定义如下.

$$\text{边际收益} = MR = R'(q).$$

边际收益由收益曲线的斜率表示.

例 2　如果这条航线的 $C(q)$ 和 $R(q)$ 由图 2-54 表示, 公司应该增加第 101 架航班吗?

解　边际收益是收益曲线在 $q = 100$ 时的斜率. 边际成本是 C 的曲线在 $q = 100$ 时的斜率. 图 2-54 给出 A 点的斜率比 B 点的斜率小, 所以 $q = 100$ 时 $MC < MR$. 这意味着, 如果该航线再经营一家航班产生的追加收益比花费的追加成本要多, 所以该公司应该经营第 101 架航班.

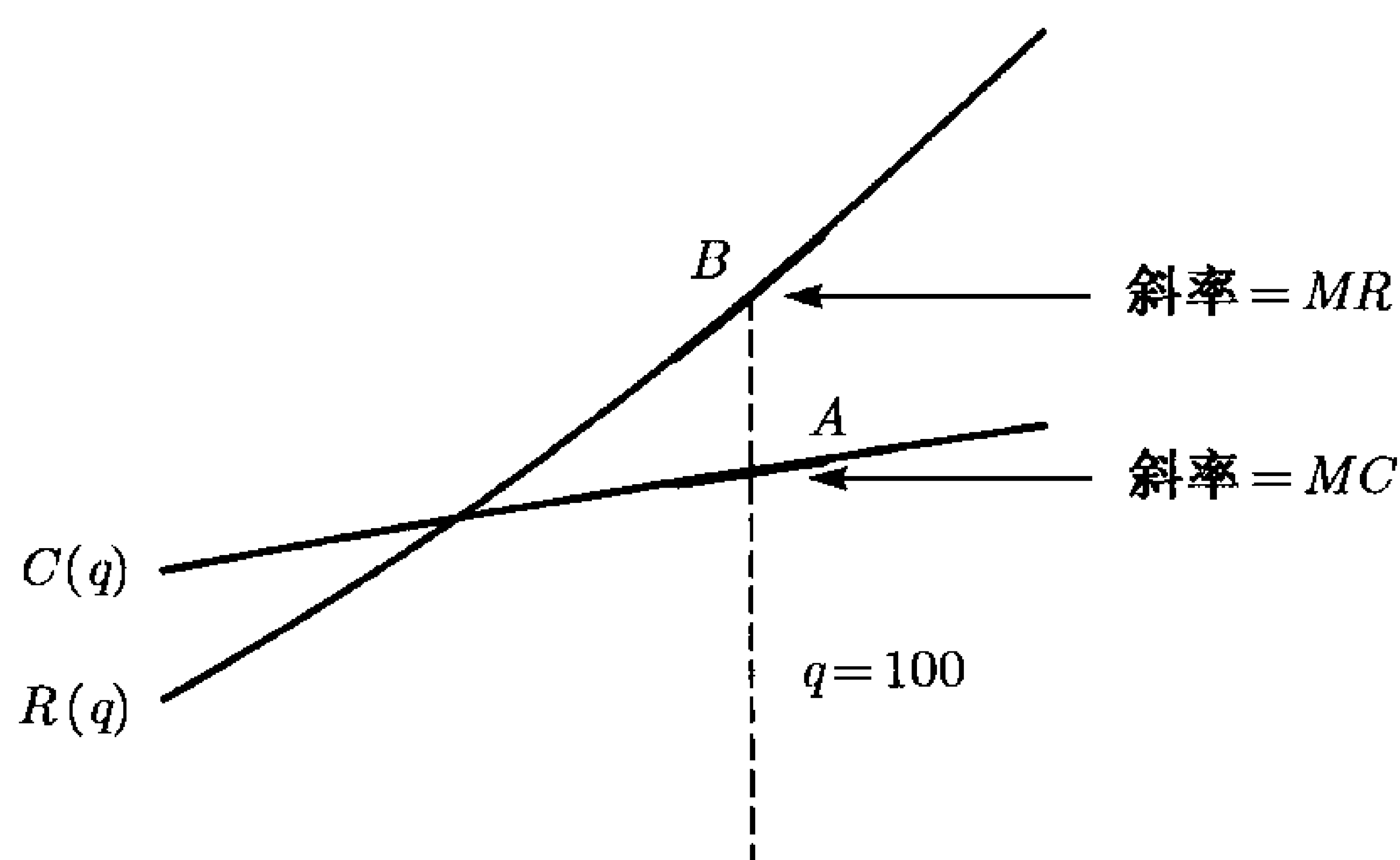


图 2-54　例 2 中的成本和收益　□

例 3　成本函数的图形由图 2-55 表示. 生产第 500 个单位产品的成本高还是生产第 2000 个单位产品的成本高? 生产第 3000 个单位产品的成本高还是生产第 4000 个单位产品的成本高? 以什么样的近似生产水平生产其边际成本最小? 在这个生产水平上总成本是多少?

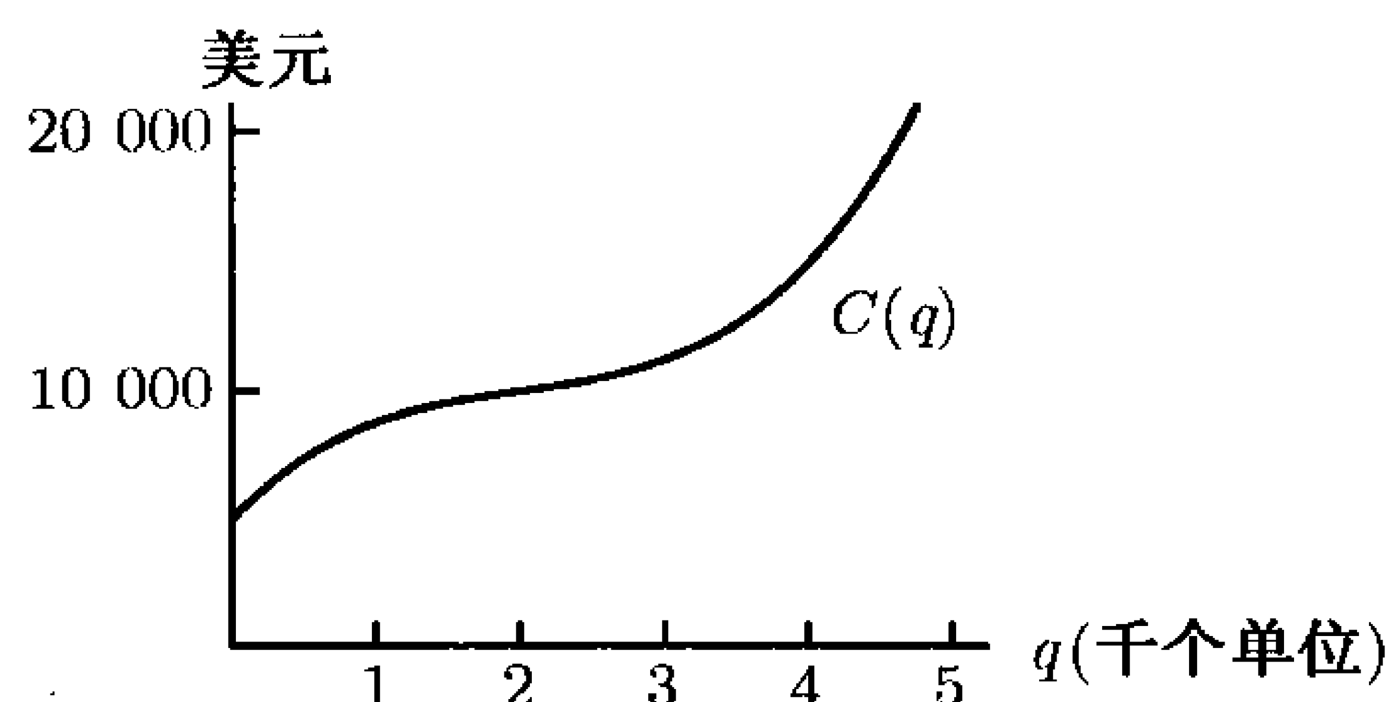


图 2-55　估计边际成本: 哪里边际成本最小

解　生产一个追加产品的成本是边际成本, 它由成本曲线的斜率表示. 因为图 2-55 中成本函数在 $q = 0.5$ 时 (当产量是 0.5 千个单位, 即 500 个单位时) 的斜率比在

$q=2$ 时的斜率大, 所以生产第 500 个单位产品的成本比生产第 2000 个单位产品的成本高. 因为在 $q=4$ 处的斜率比 $q=3$ 处的斜率大, 所以生产第 4000 个单位产品的成本比生产第 3000 个单位产品的成本高.

在 $q=2$ 处成本函数的斜率近似于零, 并且其他地方的斜率处处为正, 所以在 $q=2$ 时的斜率最小. 以 2000 个单位的生产水平生产其边际成本最小. 由于 $C(2)\approx 10\ 000$, 因此生产 2000 个单位产品的总成本大约是 10 000 美元. □

例 4 如果收益函数 R 和成本函数 C 由图 2-56 中的图形表示, 作出边际收益函数 MR 和边际成本函数 MC 的略图.

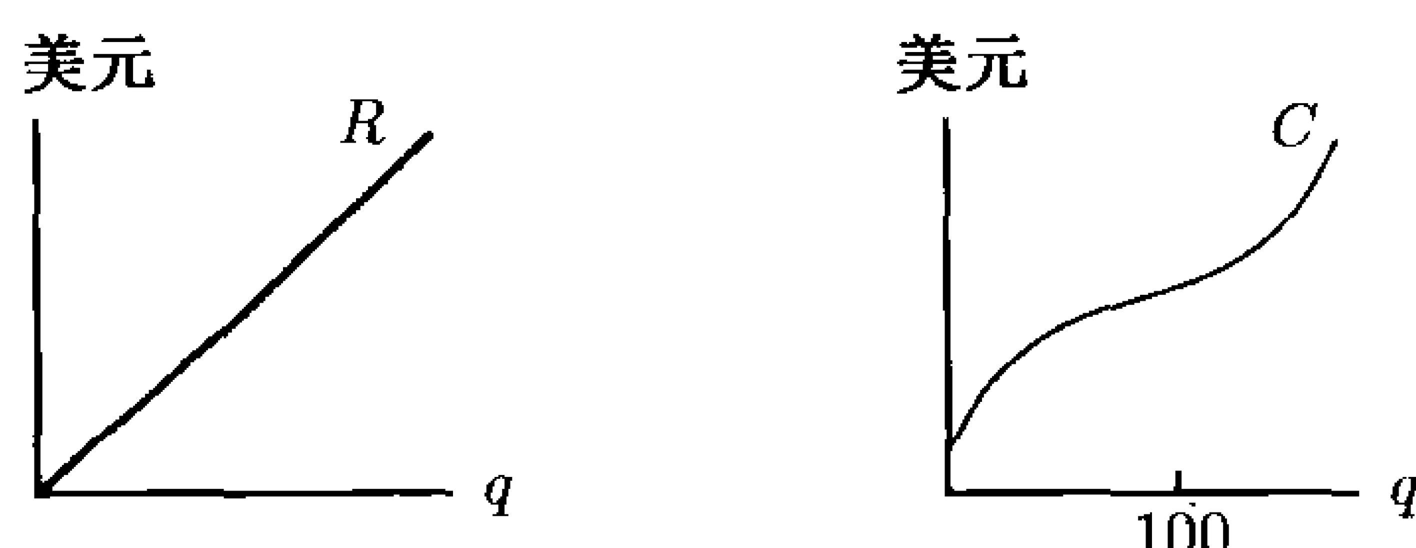


图 2-56 例 4 中的总收益和总成本

解 收益曲线是一条经过原点的直线, 其方程是

$$R = pq$$

其中 p 表示常数价格, 所以它的斜率为 p 并且

$$MR = R'(q) = p.$$

总成本是递增的, 所以总成本总是正的. 对于较小的 q 值, 成本函数的图形是下凹的, 所以它的边际成本是递减的. 对于较大的 q 值, 比如说 $q>100$, 成本函数的图形是上凹的从而它的边际成本是递增的. 因此, 大约在 $q=100$ 的时候它的边际成本有最小值. (参见图 2-57.)

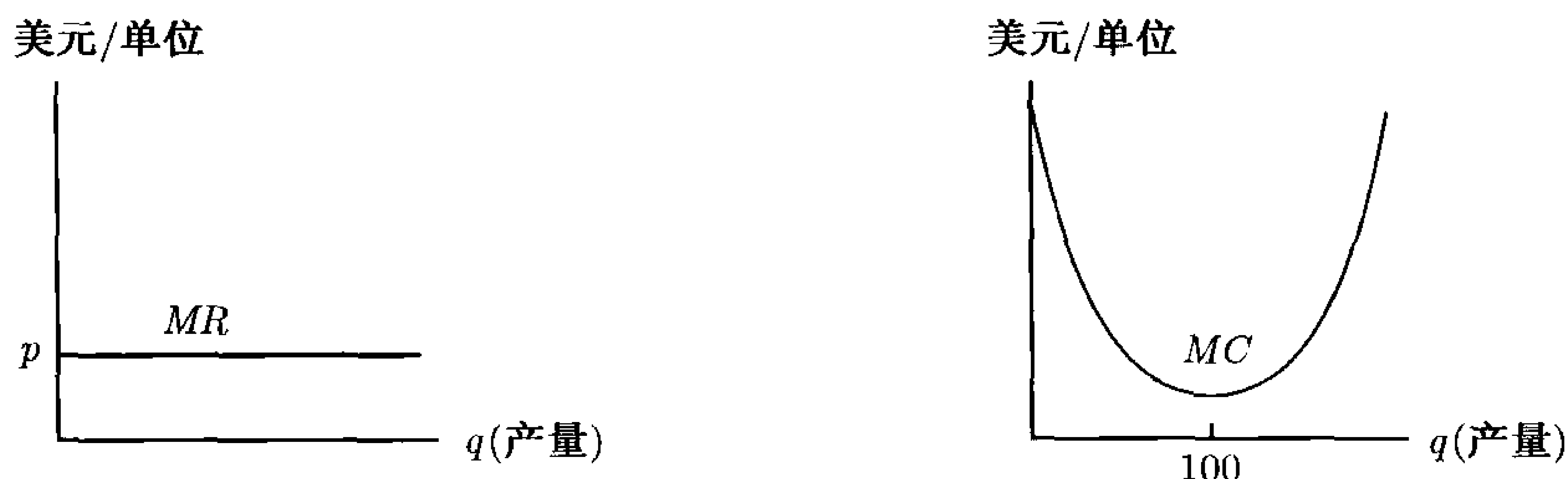


图 2-57 例 4 中的边际收益和边际成本 □

习题

1. 在图 2-58 中, 估计生产水平为 10 000 单位时的边际成本并解释它.
2. 在图 2-59 中, 估计生产水平为 600 单位时的边际收益并解释它.

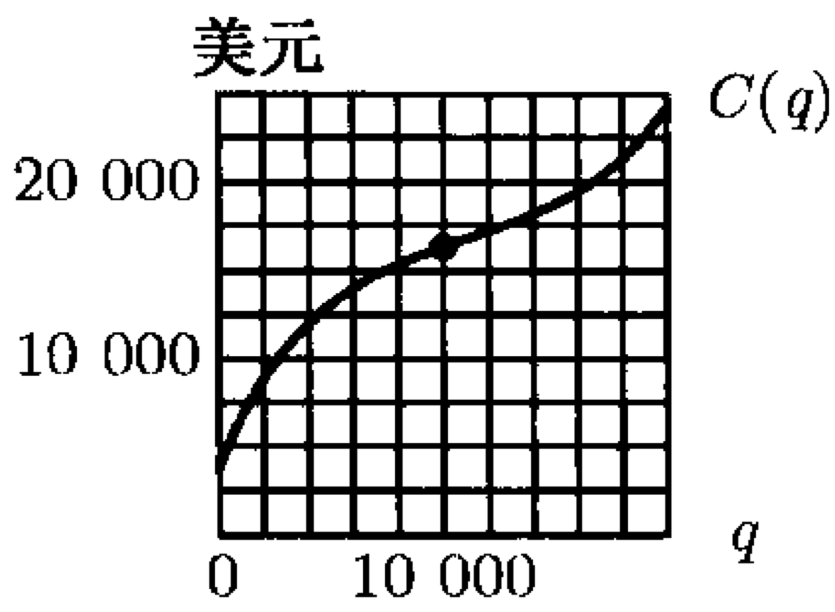


图 2-58

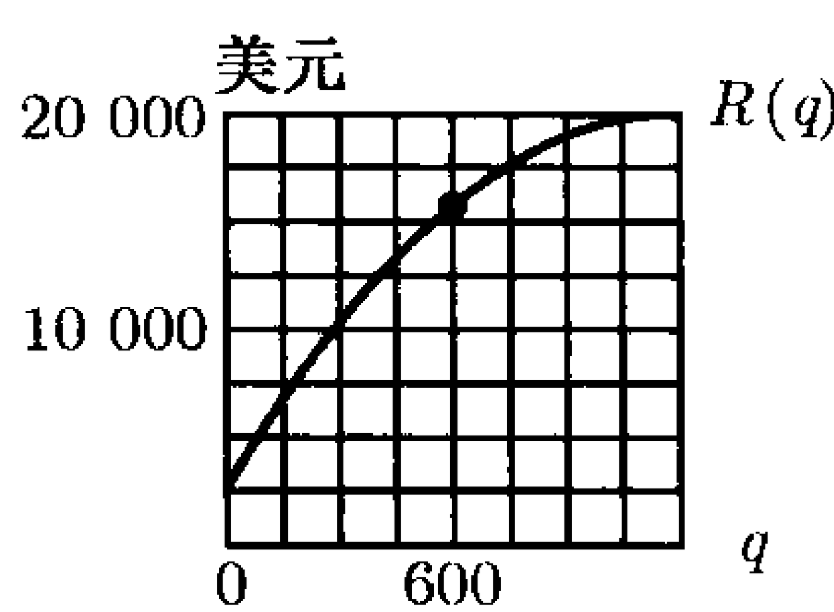


图 2-59

3. 函数 $C(q)$(美元) 表示生产 q 桶橄榄油的成本.

(a) 边际成本的单位是什么?

(b) "$q = 100$ 时 $MC = 3$" 的实际意义是什么?

4. 生产 1295 个单位产品的成本是 4800 美元, 而生产 1305 个单位产品的成本是 4830 美元. 在 1300 个单位产品的生产水平上边际成本近似为多少?

5. 在图 2-60 中, 是在 $q = 5$ 处的边际成本大, 还是在 $q = 30$ 处的边际成本大? 是在 $q = 20$ 处的边际成本大, 还是在 $q = 40$ 处的边际成本大? 说明理由.

6. 图 2-61 表示汽车制造商的成本和收益曲线的一部分. 在下面两处的边际成本和边际收益哪个大?

(a) q_1 **(b)** q_2

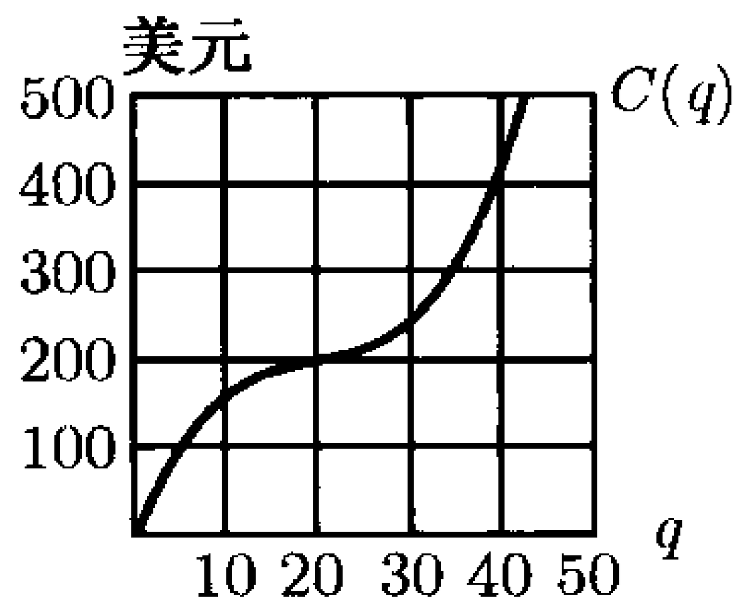


图 2-60

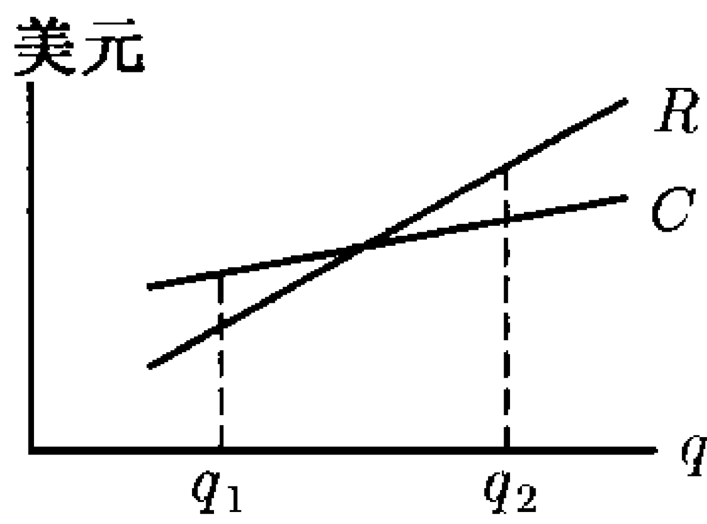


图 2-61

7. 设 $C(q)$ 表示生产 q 单位产品的总成本. 假设 $C(15) = 2300$ 并且 $C'(15) = 108$. 估计下面两种生产方式下的总成本:

(a) 16 个单位产品 **(b)**14 个单位产品

8. 要生产 1000 个单位产品, 成本是 5000 美元而边际成本是每单位产品 25 美元. 估计生产 1001 个单位产品, 999 个单位产品, 和 1100 个单位产品的成本.

9. 设 $C(q)$(美元) 表示生产 q 个单位产品的成本而 $R(q)$(美元) 表示生产 q 个单位产品的收益.

(a) 如果 $C(50) = 4300$ 并且 $C'(50) = 24$, 估计 $C(52)$.

(b) 如果 $C'(50) = 24$ 并且 $R'(50) = 35$, 那么第 51 个单位的产品挣得的利润大概是多少?

(c) 如果 $C'(100) = 38$ 并且 $R'(100) = 35$, 公司是否应该生产第 101 个单位产品? 为什么?

10. 包租巴士公司的成本和收益函数如图 2-62 所示. 该公司应该增加第 50 辆巴士吗? 第 90 辆呢? 用边际收益和边际成本解释你的答案.

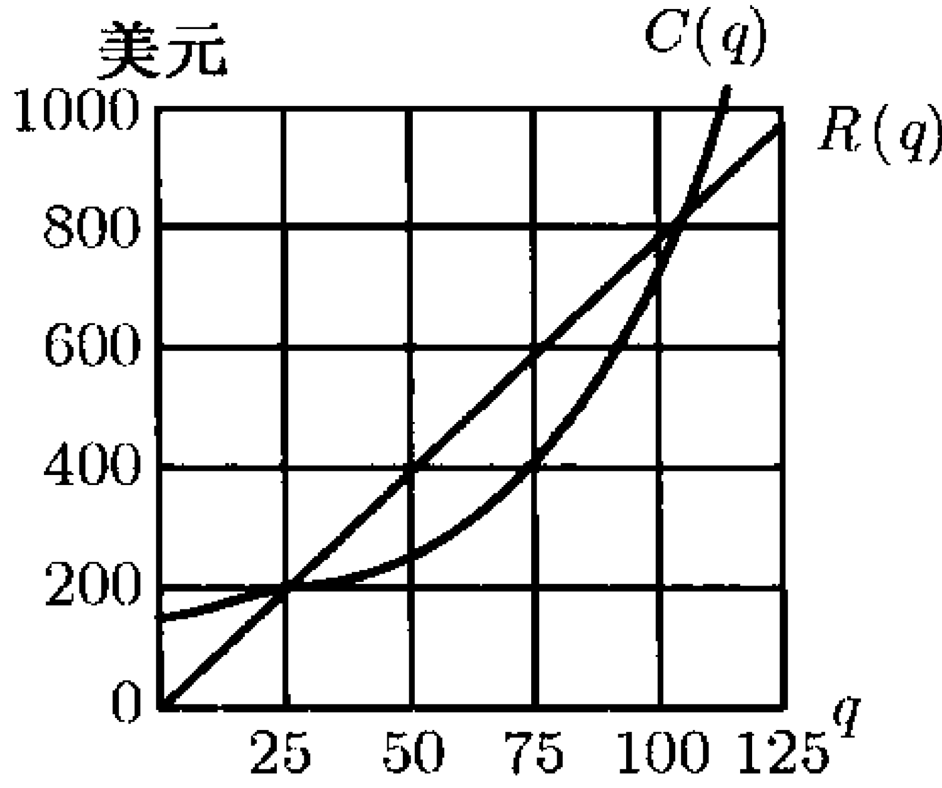


图 2-62

11. 生产q个单位产品, 制造商的成本是$C(q)$(美元), 而收益是$R(q)$(美元). 它们满足$C(500) = 7200$, $R(500) = 9400$, $MC(500) = 15$ 和 $MR(500) = 20$.

(a) 在 $q = 500$ 时利润或亏损是多少?

(b) 如果产量从 500 个单位增加到 501 个单位, 利润大约变化多少?

12. 某公司生产 q 升化学制品的成本是 $C(q)$(美元); 这个产量可以卖 $R(q)$(美元). 假设 $C(2000) = 5930$ 并且 $R(2000) = 7780$.

(a) 在 2000 升的生产水平时它的利润是多少?

(b) 如果 $MC(2000) = 2.1$ 并且 $MR(2000) = 2.5$, 那么 q 从 2000 增加到 2001 时它的利润大约变化多少? 公司在 $q = 2000$ 时应该增加产量还是减少产量?

(c) 如果 $MC(2000) = 4.77$ 并且 $MR(2000) = 4.32$, 那么公司在 $q = 2000$ 时应该增加产量还是减少产量?

13. 一个工业生产工序花费 $C(q)$ 百万美元生产 q 百万单位产品; 这些单位的产品可以卖 $R(q)$ 百万美元. 如果 $C(2.1) = 5.1$, $R(2.1) = 6.9$, $MC(2.1) = 0.6$ 且 $MR(2.1) = 0.7$, 计算

(a) 生产 2.1 百万单位产品所挣的利润.

(b) 产量从 2.1 百万单位增加到 2.14 百万单位时收益的变化量.

(c) 产量从 2.1 百万单位减少到 2.05 百万单位时收益的变化量.

(d) (b) 和 (c) 中的利润变化量.

14. 使 q 吨纸再循环的成本如下表所示. 估计 $q = 2000$ 时的边际成本. 给出单位并用成本解释你的答案. 生产水平大约是多少时它的边际成本看起来最小?

q(吨)	1000	1500	2000	2500	3000	3500
$C(q)$(美元)	2500	3200	3640	3825	3900	4400

15. 设 $C(q)$ 表示产量为 q 的某产品的生产总成本. 参见图 2-63.

(a) $C(0)$ 的含义是什么?

(b) 用语言描述当生产产量增加时边际成本是如何变化的.

(c) 说明图形的凹性 (从经济学角度).

(d) 说明凹性变化的点的经济学意义 (用边际成本).

(e) 你预计对所有生产情形 $C(q)$ 的图形看上去都和这幅图一样吗?

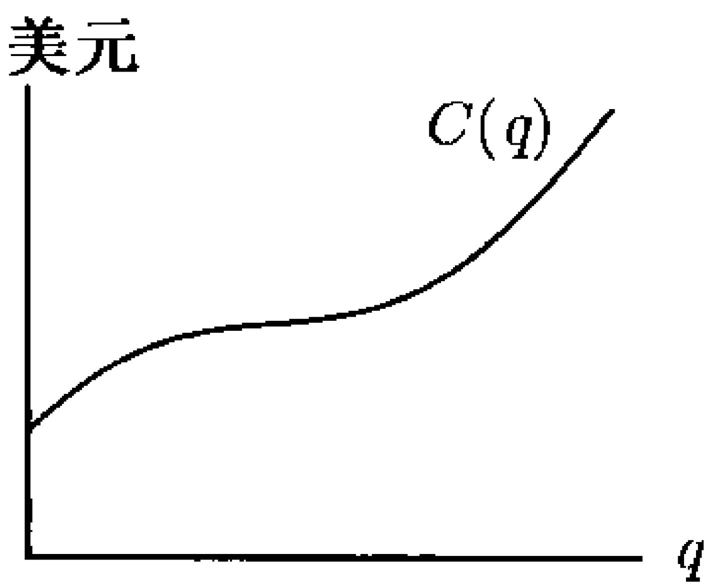


图 2-63

本章概要

- **变化率**

  平均变化率, 瞬时变化率

- **估计导数**

  由图形估计导数, 由数值表估计导数, 由公式估计导数

- **导数的解释**

用变化率, 斜率, 单位和瞬时速度解释导数

- **边际**

  边际成本和边际收益

- **二阶导数**

  凹性

- **导数和图形**

  理解 f' 的符号与 f 是递增还是递减之间的关系. 由 f 的图形作出 f' 的略图. 边际分析.

复 习 题

1. 对于图 2-64 中表示的函数, 在所标出的哪些点上图形的斜率是正的? 负的? 在所标出的哪个点上图形的斜率最大 (即正的最大量值)? 哪个点上斜率最小 (即负的最大量值)?

2. 图 2-65 中的函数满足 $f(4) = 25$ 和 $f'(4) = 1.5$. 求点 A, B, C 的坐标.

3. 对 $f(x) = 3^x$ 估计 $f'(2)$. 说明理由.

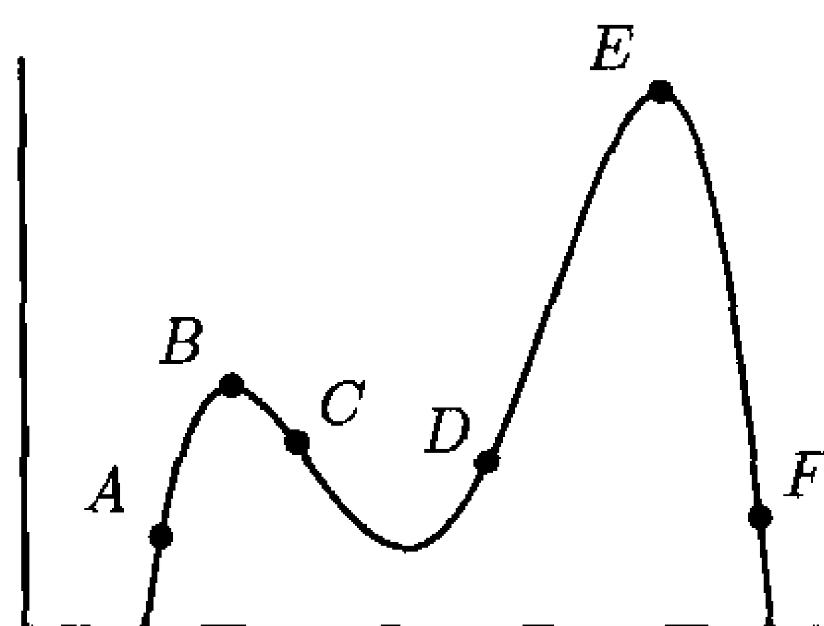


图 2-64

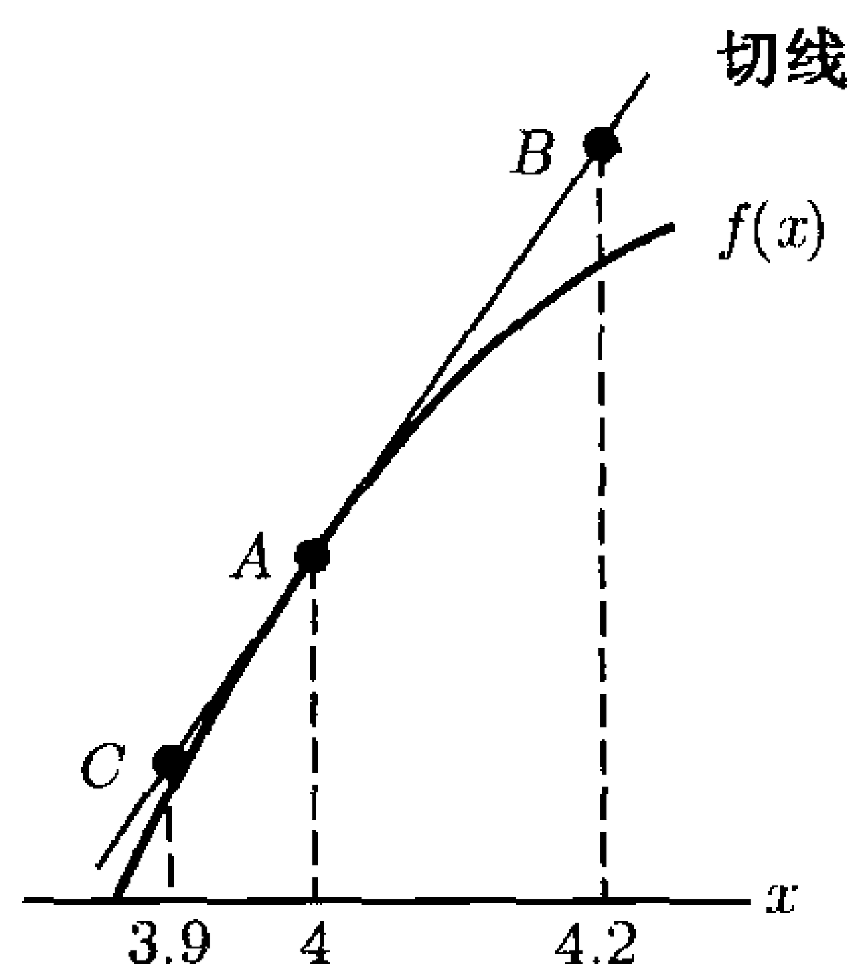


图 2-65

4. 在 t 秒时间内, 一个粒子相对于其出发点运动了 s 米的距离, 其中 $s = 3t^2$.

(a) 如果

(i) $h = 0.1$, (ii) $h = 0.01$, (iii) $h = 0.001$

求 $t = 1$ 到 $t = 1 + h$ 之间粒子的平均速度.

(b) 利用 (a) 中的答案估计粒子在 $t = 1$ 时的瞬时速度.

5. 世界人口, 在 1804 年达到 10 亿, 在 1927 年达到 20 亿, 在 1960 年达到 30 亿, 在 1974 年达到 40 亿, 在 1987 年达到 50 亿而在 1999 年达到 60 亿. 求每个区间中世界人口的平均变化率 (人/秒). (即 1804~1927 年, 1927~1960 年, 等等.)

6. 在 t 秒时间内, 一个粒子相对于其出发点运动了 s 米的距离, 其中 $s = \sin(2t)$.

(a) 如果

(i) $h = 0.1$, (ii) $h = 0.01$, (iii) $h = 0.001$,

求 $t = 1$ 到 $t = 1 + h$ 之间粒子的平均速度.

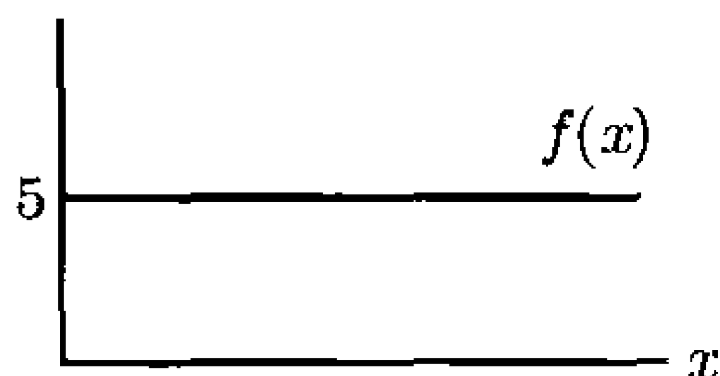
(b) 利用 (a) 中的答案估计粒子在 $t=1$ 时的瞬时速度.

7. 给定所示的数值, 求 $f(x)$ 在每个所给的 x 值上导数的近似值. 在哪里 $f(x)$ 的变化率是正的? 在哪里是负的? 在哪里 $f(x)$ 的变化率最大?

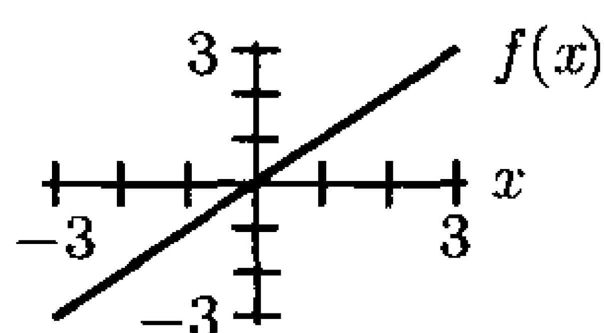
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18	13	10	9	9	11	15	21	30

作出习题 8~13 中所示的函数其导数的略图. 务必使得你的略图与原来函数图形中的重要特征保持一致.

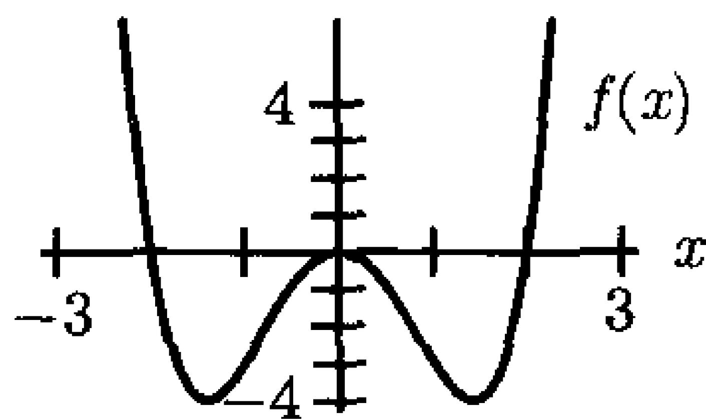
8.



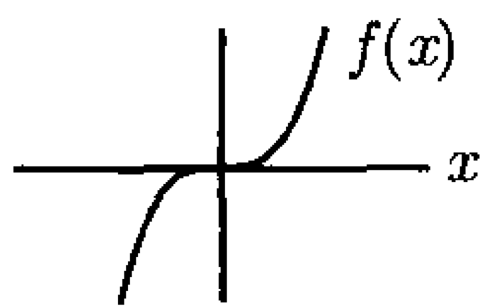
9.



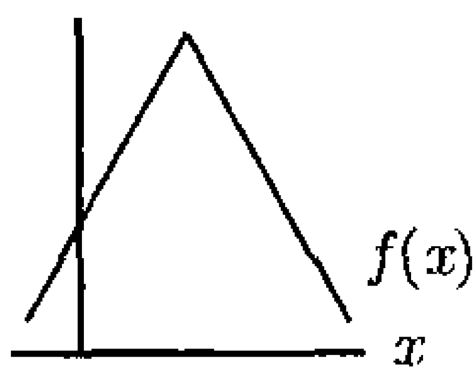
10.



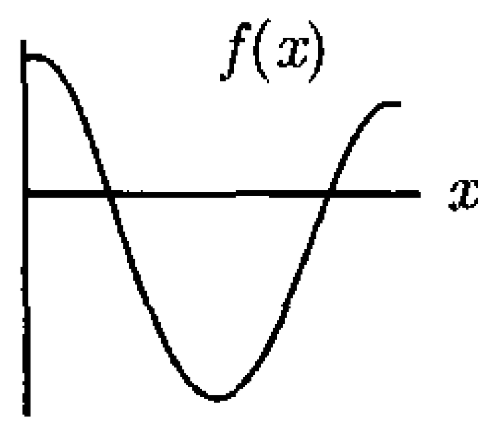
11.



12.



13.



14. 一辆机动车沿着一条笔直的公路行驶, 在 t 时刻离其出发点的距离是 $f(t)$. 对于下面情形图 2-66 中哪个图形可能是 $f'(t)$? (假设在竖直轴上的标度是相同的.)

(a) 巴士在一条热门线路上, 交通不繁忙.

(b) 汽车在交通不繁忙并且一路绿灯的情况下.

(c) 汽车在交通繁忙的情况下.

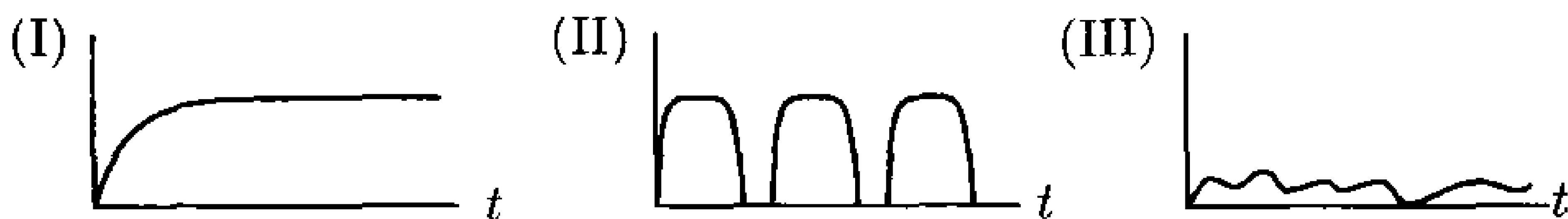


图 2-66

15. 放在厨房柜台上的一杯咖啡的温度 H(°C) 由 $H=f(t)$ 表示, 其中 t 是自咖啡放在柜台上以来的分钟数.

(a) $f'(t)$ 是正的还是负的? 说明理由.

(b) $f'(20)$ 的单位是什么? 它在咖啡温度方面的实际含义是什么?

16. 放进热烤箱中的冷山药的温度 T(°F) 由 $T=f(t)$ 表示, 其中 t 是自山药放进烤箱以来的分钟数.

(a) $f'(t)$ 的符号是什么? 为什么?

(b) $f'(20)$ 的单位是什么? $f'(20)=2$ 的实际含义是什么?

17. 假设 $f(x)$ 是满足 $f(100)=35$ 和 $f'(100)=3$ 的函数. 估计 $f(102)$.

18. 假设 $f(t)$ 是满足 $f(25)=3.6$ 和 $f'(25)=-0.2$ 的函数. 估计 $f(26)$ 和 $f(30)$.

19. 一种共同基金每股当前值是 80 美元并且它每股的值以每天 0.50 美元的速度递增. 设 $V=f(t)$ 表示从现在起 t 天每股的值.

(a) 用 f 和 f' 表示上面所给出的关于共同基金的信息.

(b) 假设增长率保持不变, 估计并解释 $f(10)$.

20. 成人的平均重量 W(lb) 是每天消费的卡路里平均数 c 的函数, $W = f(c)$.

(a) 从饮食和重量角度解释 $f(1800) = 155$ 和 $f'(2000) = 0$ 的含义.

(b) $f'(c) = \mathrm{d}W/\mathrm{d}c$ 的单位是什么?

21. 以 $r\%$ 的连续复利年利率投资 1000 美元共 10 年, 你的账户余额是 B 美元, 其中 $B = g(r)$. 给出

(a) $g(5) \approx 1649$. (b) $g'(5) \approx 165$.

的金融解释. $g'(5)$ 的单位是什么?

22. 假设 $P(t)$(美元) 是一个按揭的月支付, 该按揭需要 t 年还清. $P'(t)$ 的单位是什么? $P'(t)$ 的实际意义是什么? 它的符号是什么?

23. 设 $f(x)$(ft) 是密西西比河离它的发源地 x(m) 处的高度. $f'(x)$ 的单位是什么? $f'(x)$ 的符号是什么?

24. 一个经济学家对某商品的价格如何影响它的销售量感兴趣. 以 p 美元的价格销售, 它的销售量为 q 个单位. 如果 $q = f(p)$, 说明下面各式的含义:

(a) $f(150) = 2000$ (b) $f'(150) = -25$

25. 一个公司从汽车销售中所获得的收益 C(千美元) 是广告费用 a(千美元) 的函数, 所以 $C = f(a)$.

(a) 该公司希望的 f' 的符号是什么?

(b) $f'(100) = 2$ 的实际含义是什么? $f'(100) = 0.5$ 呢?

(c) 假设该公司计划在广告上花费 100 000 美元. 如果 $f'(100) = 2$, 那么该公司在广告上花费的应该比 100 000 美元多还是少? 如果 $f'(100) = 0.5$, 答案又是什么?

26. 在图 2-67 中所标出的一个点上 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 都是正的. 它是哪一个?

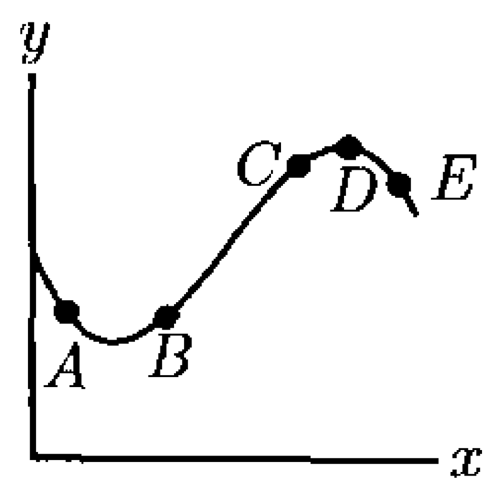


图 2-67

27. 作一个函数的略图, 它的一阶导数和二阶导数都处处是正的.

28. 作一个函数的略图, 它的一阶导数处处是负的, 而二阶导数对某些 x 值是正的, 对其他的 x 值是负的.

29. IBM-Peru 公司利用二阶导数对相对成功的各种广告活动进行评价. 他们假设所有的广告活动都有助于销售量的增长. 如果销售量关于时间的图形显示出在新的广告活动期间具有正的二阶导数, 这能给 IBM 管理部门提供什么建议? 为什么? 负的二阶导数会提供什么建议?

30. 一位高中校长十分不安, 因为她的学校毕业生占总学生人数的百分比在下降, 这个百分比如下表所示.

进校年度, t	1992	1995	1998	2001	2004
毕业生的百分数, P	62.4	54.1	48.0	43.5	41.8

(a) 计算 1992~2004 年每三年 P 的平均变化率.

(b) 在 1992~2004 年 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2$ 看上去是正的还是负的?

(c) 说明 P 和 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 的值为什么使校长烦恼.

(d) 说明在 2001 年 $\mathrm{d}^2P/\mathrm{d}t^2$ 的符号和 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 的量值为什么能给出让校长乐观的理由.

31. 要求学生根据下面表所显示的函数 f 的值求 $f'(4)$ 的值:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	4.2	4.1	4.2	4.5	5.0	5.7

- 学生 A 估计的导数为 $f'(4) \approx \dfrac{f(5)-f(4)}{5-4} = 0.5$.
- 学生 B 估计的导数为 $f'(4) \approx \dfrac{f(4)-f(3)}{4-3} = 0.3$.
- 学生 C 提出应该分别差分再求这两个结果的平均值, 即 $f'(4) \approx 1/2 \times (0.5+0.3) = 0.4$.

(a) 作出 f 的略图, 并指明在图形中如何表示这三个估计值.

(b) 说明哪个答案最好.

32. 由所给的下列关于函数 f 的信息, 作出它的略图.

- 在 $x=-5$, $x=0$, $x=5$ 处 $f(x)=0$
- 当 $x\to-\infty$ 时 $f(x)\to\infty$
- 当 $x\to\infty$ 时 $f(x)\to-3$
- 在 $x=-3$, $x=2.5$, $x=7$ 处 $f'(x)=0$

33. 图 2-68 表示以速度 v(m/s) 飞行的鸟消耗能量的速度 $f(v)$.

(a) 这只鸟能量消耗的速度必须达到多少才能保持向上而不向前?

(b) 关于这只鸟是如何飞行的, 这个图形的斜率会告诉你什么?

(c) 作出 $f'(v)$ 的略图.

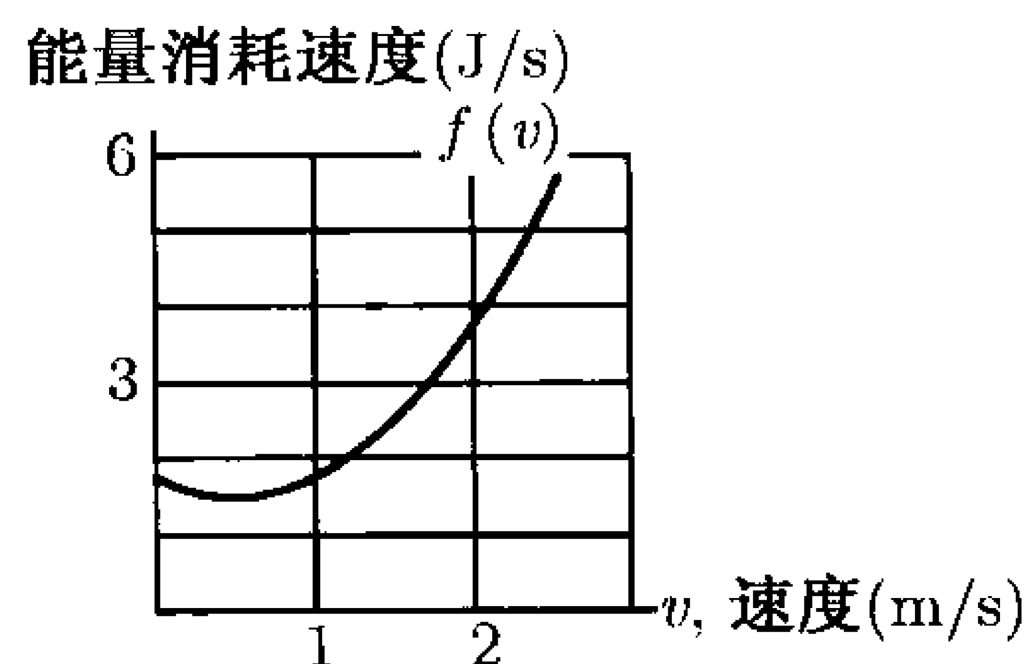


图 2-68

课外自修项目

1. 估计山药的温度

假设你将一个山药放进一个热烤箱中, 烤箱保持恒定的温度 200°C. 由于山药会从烤箱中吸取热量, 所以它的温度升高①.

(a) 画出山药的温度 T 关于时间 t(min) 的恰当的函数图形, 其中 t 表示自山药放入烤箱中以来的时间. 说明图形任何有意义的特征, 尤其要说明它的凹性.

(b) 假设在时刻 $t=30$ 处, 山药的温度 T 是 120°C 并且以 2°C/min 的速度 (瞬时速度) 增加. 利用这一信息, 加上你所知道的 T 的图形形状, 估计在时刻 $t=40$ 处的温度.

① 引自 Peter D. Taylor, 《微积分：函数分析》(多伦多：Wall & Emerson, Inc., 1992).

(c) 假设另外告诉你在时刻 $t = 60$ 处, 山药的温度是 165°C. 你能否改进在时刻 $t = 40$ 处你对温度的估计?

(d) 假设已知上述所有的数据, 估计山药的温度达到 150°C 的时刻.

2. 温度和亮度

你独自呆在昏暗的房间里, 没有暖气. 点上一支蜡烛, 又径直地离开. 随着你离蜡烛的距离增加, 温度 (°F) 和亮度 (一支蜡烛能量的百分之一) 在下降. 其实, 这些信息可以由下面的表说明.

距离 (ft)	温度 (°F)
0	55
1	54.5
2	53.5
3	52
4	50
5	47
6	43.5

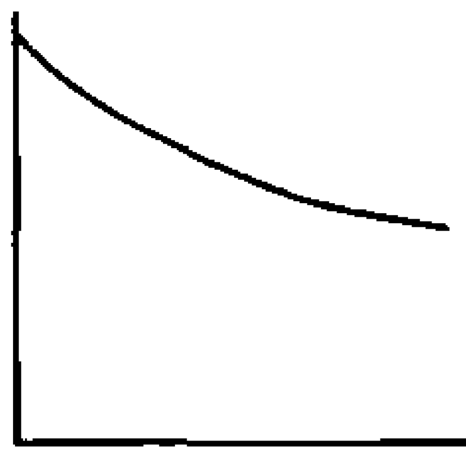
距离 (ft)	亮度 (%)
0	100
1	85
2	75
3	67
4	60
5	56
6	53

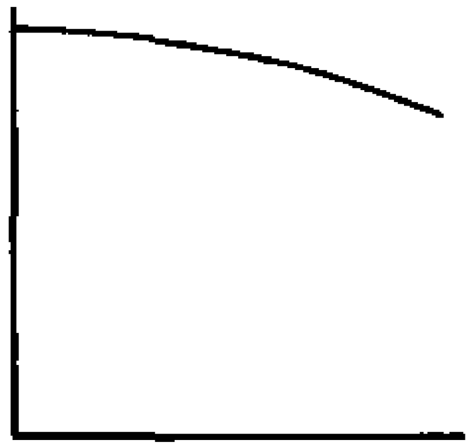
当温度低于 40°F 时, 你就会冷. 当亮度至多是一支蜡烛的能量的 50% 时, 你就会感到黑暗.

(a) 给出图 2-69 和图 2-70 两个图形. 一个是温度作为距离的函数, 而另一个是亮度作为距离的函数. 哪个图形是哪个函数的? 说明理由.

(b) 当亮度从 75% 降到 56% 时温度变化的平均变化率是多少?

(c) 当亮度大约为 65% 时你仍然可以读你的手表. 在 3.5 ft 你还能读你的手表吗? 说明理由.


图 2-69


图 2-70

(d) 假设你知道在 6 ft 的地方温度的瞬时变化率是 -4.5 °F/ft, 而亮度的变化率是 -3% 支蜡烛能量/ft. 估计在 7 ft 地方的温度和亮度.

(e) 在你觉得冷之前就感到黑暗了呢, 还是相反呢?

相 关 理 论

极限、连续性和导数的定义

精确地定义在某一时间点的速度是出人意料地困难. 考虑这样的陈述: “在冲过终点的那一刻, 那匹马飞驰的速度达到 42 mile/h. ” 如何证实这样的断言呢? 在那一刻拍摄的照片显示那匹马是静止的 —— 这对求速度一点用也没有. 试图在某个特定时刻量化运动性质多少有些自相矛盾, 因为关注某个单独的时刻就使运动停止了.

一旦我们试图测量任何事物的变化率, 类似的困难也会产生. 例如, 石油从受损的油船中漏出. “船壳破裂一个小时后, 石油以每秒 200 桶的速度在漏” 似乎讲不通. 我们可以争辩说在任何给定的时刻没有石油泄漏.

早在公元前五世纪, 运动的问题就是芝诺 (Zeno) 以及其他哲学家们关心的核心问题. 我们采用的方法, 是因为牛顿的微积分而变得著名, 这种方法不是寻找某个时刻速度的简单概念, 而是考察包含这个时刻的小区间上的速度. 这个方法虽然回避了早期提出的哲学问题, 但是它本身产生了一个新的问题.

利用平均速度的导数定义

在 2.1 节, 我们定义导数为函数的瞬时变化率. 我们可以通过计算在越来越小的区间上的平均变化率估计导数. 我们用这个思想给出导数的符号定义. 设 h 表示区间的大小, 我们有

$$\text{在 } x \text{ 到 } x+h \text{ 之间的平均变化率} = \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

为了求在 x 点的导数, 或瞬时变化率, 我们用越来越小的区间计算. 为了精确地求出这个导数, 我们取区间大小 h 收缩到零时的极限, 所以我们说

$$\text{导数} = \text{当 } h \text{ 趋于零时}, \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{的极限}.$$

最后, 我们用记号 $\lim\limits_{h\to 0}$ 代替短语 “当 h 趋于零时的极限”. 这就引出如下的符号定义.

> 对任何函数 f, 只要极限
> $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
> 存在, 我们就定义它为**导函数** f'. 称函数 f 在导函数有定义的任何点 x 处是**可微的**.

注意, 我们已经将原先求某一点速度的难点换化为讨论当时间区间的大小收缩

时平均变化率趋于一个数. 在某种意义上, 我们是将一个难题变成了另一个难题, 因为如何确定平均速度趋于什么数, 我们对此还没有任何想法.

极限思想

我们用极限定义导数了. 于是我们要更多地考察函数在点 c 的极限思想. 当这个极限存在时:

我们用 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 表示 x 趋于 c 时 $f(x)$ 趋于的数.

例 1 研究 $\lim\limits_{x\to 2} x^2$.

解 注意到我们可以通过取充分靠近 2 的 x 而使得 x^2 任意靠近 4. (观察表 2-9 中 1.9^2, 1.99^2, 1.999^2 和 2.1^2, 2.01^2, 2.001^2 的值; 它们好像趋于 4.) 我们记

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4,$$

它读作"当 x 趋于 2 时, x^2 的极限是 4. " 注意, 这个极限不涉及在 $x=2$ 这一点的情况怎么样, 所以不足以用 2 代入来求答案. 极限是描述函数在一点附近的性态, 而不是在这一点的性态.

表 2-9 x^2 在 $x=2$ 附近的值

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
x^2	3.61	3.96	3.996	4.004	4.04	4.41

□

例 2 根据图形估计 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-1}{x}$.

解 注意, 表达式在 $x=0$ 处没有定义. 为了研究当 $x\to 0$ 时这个表达式的变化情况, 我们来观察 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{x}$ 的图形. 图 2-71 显示当 x 从两边趋于 0 时, $\dfrac{2^x-1}{x}$ 的值好像趋于 0.7. 如果我们放大 $x=0$ 附近的图形, 就可以更精确地估计这个极限, 得到

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} \approx 0.693.$$

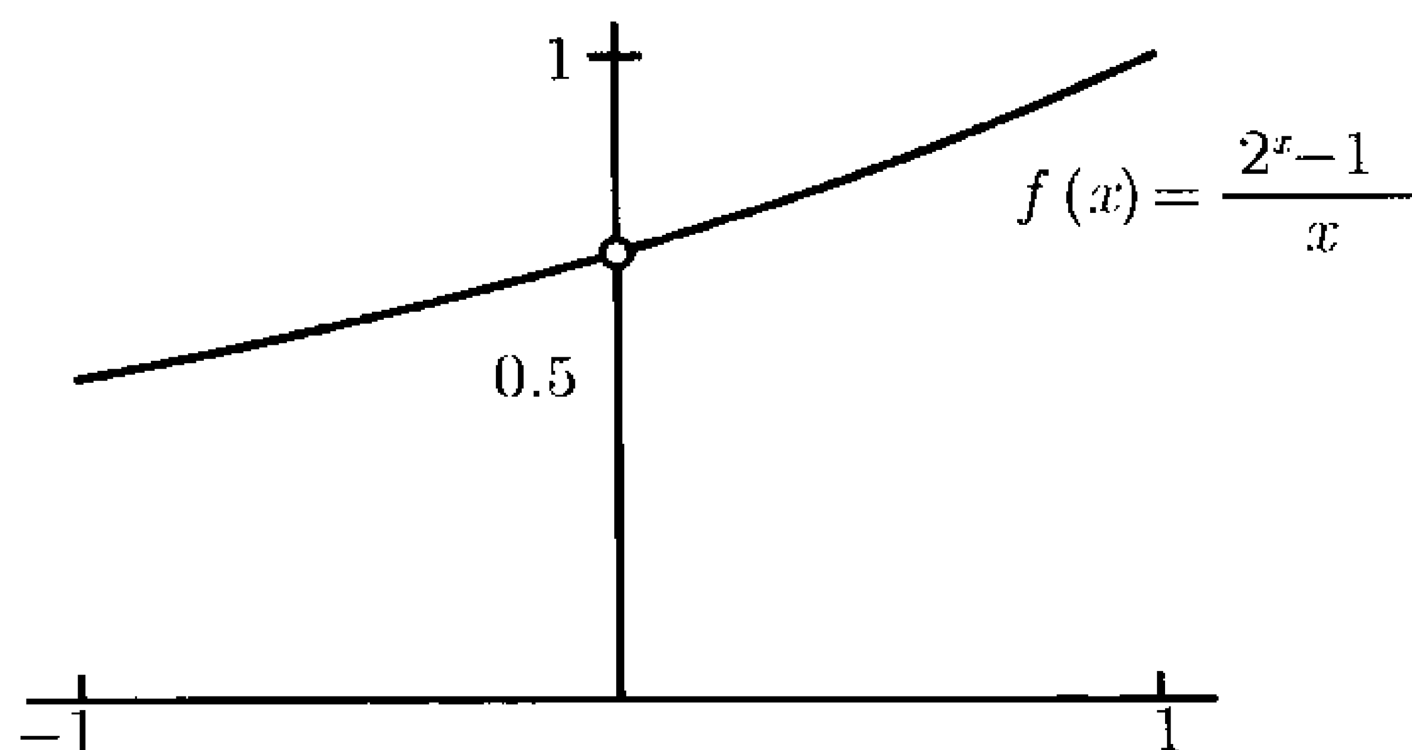


图 2-71 求 $x\to 0$ 时 $\dfrac{2^x-1}{x}$ 的极限 □

例 3 从数值上估计 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$.

解 该极限是当 h 趋于 0 时由这个表达式趋近的值. 表 2-10 中的值似乎是当 $h\to 0$ 时趋于 6. 所以猜测

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=6,$$

是有道理的. 然而, 我们不能通过观察这个表就相信这个极限恰好就是 6. 要精确地计算这个极限还需要代数知识.

表 2-10 $((3+h)^2-9)/h$ 的值

h	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$((3+h)^2-9)/h$	5.9	5.99	5.999	6.001	6.01	6.1

□

例 4 用代数求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$.

解 展开分子得到

$$\frac{(3+h)^2-9}{h}=\frac{9+6h+h^2-9}{h}=\frac{6h-h^2}{h}.$$

因为取 $h\to 0$ 时的极限意味着观察 h 靠近 0 的值, 而不是等于 0 的值, 所以我们可以约去公因子 h, 得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h).$$

因为 h 趋于 0 时, $(6+h)$ 的值趋于 6, 所以

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}(6+h)=6.$$ □

连续性

粗略地说, 一个函数被称为在一个区间上是连续的, 如果它的图形在这个区间中没有断裂, 跳跃, 或者洞. 一个连续函数的图形可以不从作图纸上提起铅笔而画出来.

例如, 函数 $f(x)=3x^3-x^2+2x+1$ 在任何区间上都是连续的. (参见图 2-72.)

例如, 函数 $f(x)=1/x$ 在 $x=0$ 点没有定义. 在任何不包含原点的区间上它是连续的. (参见图 2-73.)

例如, 假设 $p(x)$ 是投递重量为 x 盎司的第一类信件的价格. 不超过一盎司, 它的价格是 34 美分, 在第一盎司到第二盎司之间是 57 美分, 等等. 所以它的图形 (如图 2-74) 是一系列阶梯. 这个函数在诸如 (0, 2) 的区间上是不连续的, 因为在 $x=1$ 处图形跳跃了.

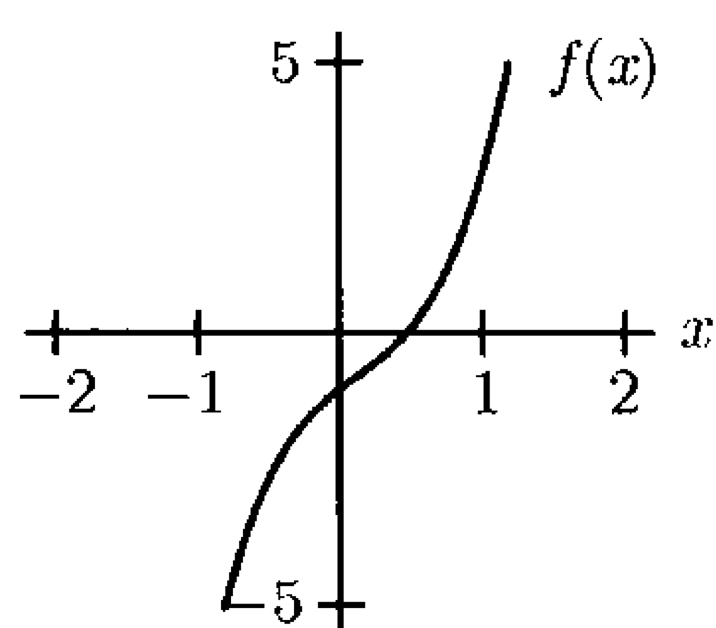


图2-72 $f(x)=3x^3-x^2+2x-1$的图形

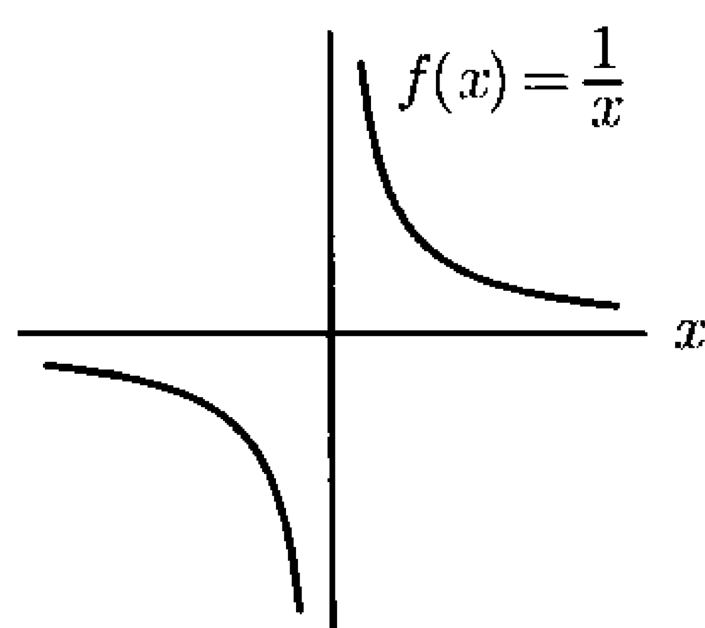


图2-73 $f(x)=1/x$ 的图形：在0点没有定义

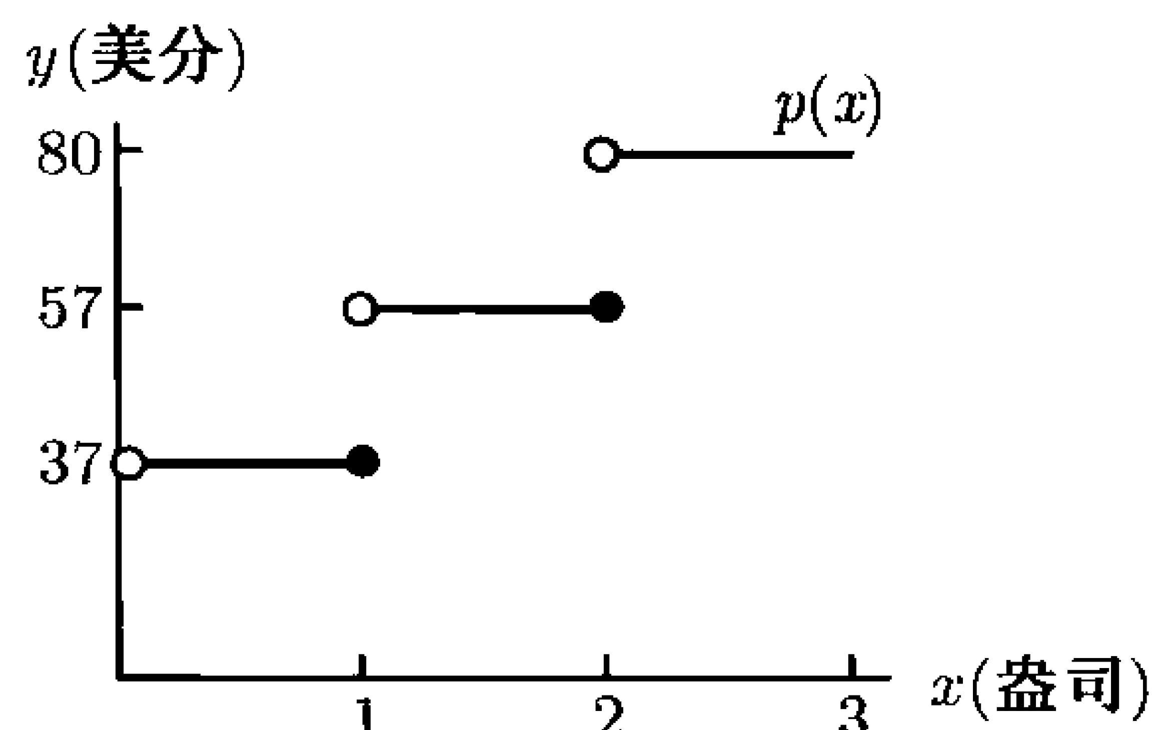


图2-74 投递一个信件的费用

连续性在数值上意味着什么

在实际工作中连续性是很重要的, 因为它意味着自变量的较小误差会导致函数值的较小误差.

例如, 假设 $f(x)=x^2$ 并且我们要计算 $f(\pi)$. 知道 f 是连续的这就告诉我们取 $\pi=3.14$ 可以得到 $f(\pi)$ 的很好的近似值, 并且利用 π 的小数位数越多就能得到 $f(\pi)$ 的更好的近似值.

例如, 如果 $p(x)$ 是投递重量为 x 盎司的信件所需的费用, 那么 $p(0.99)=p(1)=34$ 美分, 同时 $p(1.01)=57$ 美分, 因为一旦我们超过 1 盎司, 其价格就跳到 57 美分. 所以信件重量的较小的不同可以导致其投递费用较大的不同. 因此 p 在 $x=1$ 处不连续.

连续性的定义

我们现在用极限定义连续性. 通过要求函数靠近一点的性态和在这一点的性态一致, 这就会排除断裂, 跳跃, 或者洞.

> 如果函数 f 在 $x=c$ 处有定义并且
>
> $$\lim_{x\to c} f(x)=f(c),$$
>
> 那么 f 在 $x=c$ 处是**连续的**. 如果函数在区间 (a,b) 内每一点连续那么它**在区间(a,b)上连续**.

哪些函数是连续的

要求一个函数在一个区间上是连续的这个要求并不多, 因为任何函数只要它的图形在这个区间上是一条不断裂的曲线那么它就是连续的. 例如, 指数函数, 多项式, 正弦和余弦函数在每个区间上都是连续的. 由连续函数相加, 相乘, 以及复合所生成的函数也是连续的.

用定义计算导数

在 2.2 节例 5 中, 通过估计函数 $f(x)=x^2$ 在几个点上的导数, 我们猜到 x^2 的

导数是 $f'(x)=2x$. 为了证明这个公式是正确的, 我们必须利用本部分所给的导数的符号定义.

在求表达式

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

值时, 我们首先化简其中的差商, 然后求 h 趋于零时的极限.

例 5 证明 $f(x)=x^2$ 的导数是 $f'(x)=2x$.

解 对 $f(x)=x^2$ 利用导数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}.\end{aligned}$$

为了求这个极限, 考察当 h 靠近 0 但不让 $h=0$ 时的情况. 因为 $h\neq 0$, 我们约去公因子 h, 当 h 越来越靠近零时, $2x+h$ 越来越靠近 $2x$, 所以我们得到

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

因此

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=2x.$$

□

例 6 证明如果 $f(x)=3x-2$, 那么 $f'(x)=3$.

解 因为线性函数 $f(x)=3x-2$ 的斜率是 3 并且它的导数就是这个斜率, 所以我们得到 $f'(x)=3$. 我们也可以利用定义得到这个结果:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(x+h)-2)-(3x-2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-2-3x+2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}.\end{aligned}$$

为了求出这个极限, 我们考察 h 靠近零但不等于零的情况. 化简后, 我们就得到

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3.$$

□

习题

1. 在图 2-75 上, 标出表示 (a)~(e) 中量的长度. (任取 h, $h>0$.)

(a) $a+h$ **(b)** h **(c)** $f(a)$

(d) $f(a+h)$ **(e)** $f(a+h)-f(a)$

(f) 利用 (a)~(e) 中的答案, 说明量 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 是如何由图中直线的斜率表示的.

2. 在图 2-76 上, 标出表示 (a)~(e) 中量的长度. (任取 h, $h>0$.)

(a) $a+h$ **(b)** h **(c)** $f(a)$

(d) $f(a+h)$　　(e) $f(a+h)-f(a)$

(f) 利用 (a)~(e) 中的答案, 将量 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 表示成图中直线的斜率.

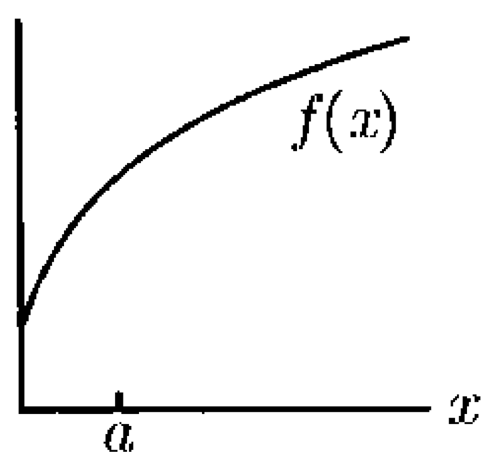


图 2-75

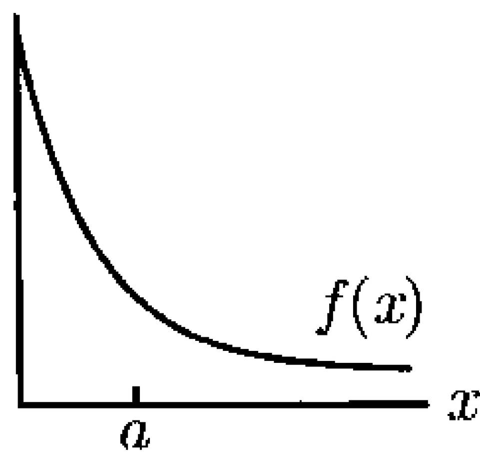


图 2-76

根据图形估计习题 3 和习题 4 中的极限

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$($x$ 是弧度)　　**4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x}$

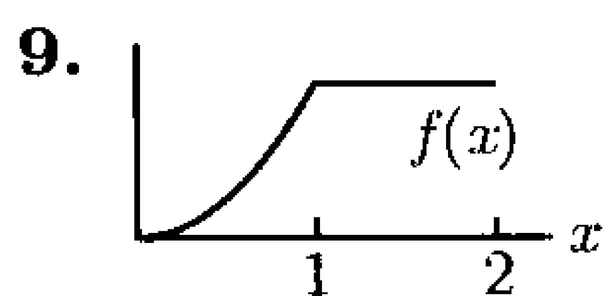
通过代入越来越小的 h 的值估计习题 5~8 中的极限. 对于三角函数, 用弧度单位. 答案近似到一位小数.

5. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^3-27}{h}$　　**6.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{7^h-1}{h}$

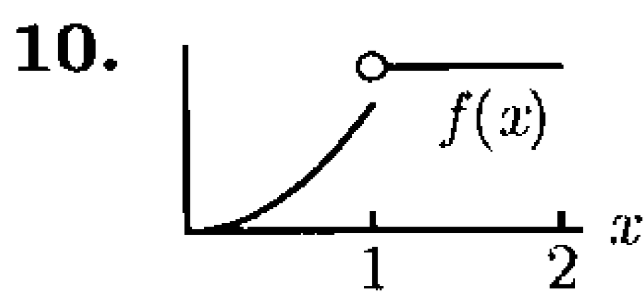
7. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{1+h}-e}{h}$　　**8.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}$

在习题 9~12 中, 函数 $f(x)$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant 2$ 是连续的吗? 如果不是, 在区间 $0\leqslant x\leqslant 0.5$ 上呢?

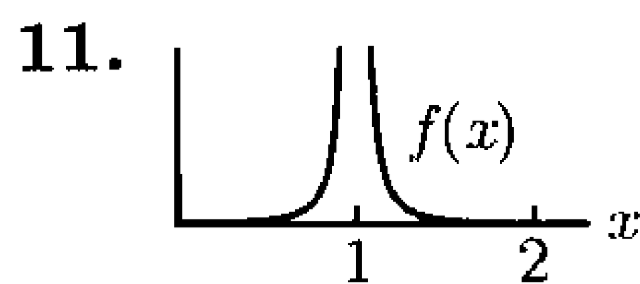
9.



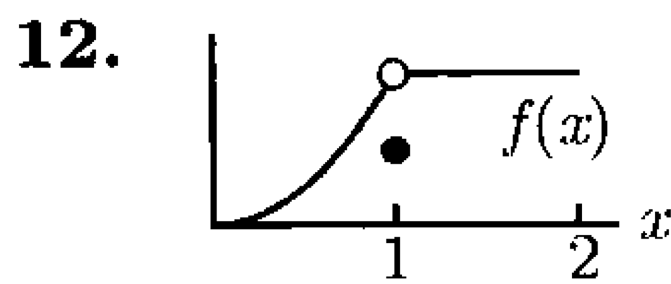
10.



11.



12.



习题 13~18 中的函数在所给区间上是连续的吗?

13. $f(x)=x+2$, 在 $-3\leqslant x\leqslant 3$ 上

14. $f(x)=2^x$, 在 $0\leqslant x\leqslant 10$ 上

15. $f(x)=x^2+2$, 在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 上

16. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, 在 $2\leqslant x\leqslant 3$ 上

17. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上

18. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上

在习题 19~23 中所描述的函数哪个是连续的?

19. 在一个村庄中的人数作为时间的函数.

20. 在婴儿刚生下的最初两个月, 它的体重作为时间的函数.

21. 裤子的条数作为制作它们的布料码数的函数. 每条裤子需要 3 码布料.

22. 走走停停的交通状况中, 汽车行驶的距离作为时间的函数.

23. 你从北卡罗来纳出发, 在 40 号州际公路上向西朝加利福尼亚驶去. 考虑当天的本地时间作为你离出发点的距离的函数.

用导数的定义证明习题 24~33 中的公式是如何得到的.

24. 如果 $f(x) = 5x$, 那么 $f'(x) = 5$.

25. 如果 $f(x) = 3x - 2$, 那么 $f'(x) = 3$.

26. 如果 $f(x) = x^2 + 4$, 那么 $f'(x) = 2x$.

27. 如果 $f(x) = 3x^2$, 那么 $f'(x) = 6x$.

28. 如果 $f(x) = -2x^3$, 那么 $f'(x) = -6x^2$.

29. 如果 $f(x) = x - x^2$, 那么 $f'(x) = 1 - 2x$.

30. 如果 $f(x) = 1 - x^3$, 那么 $f'(x) = -3x^2$.

31. 如果 $f(x) = 5x^2 + 1$, 那么 $f'(x) = 10x$.

32. 如果 $f(x) = 2x^2 + x$, 那么 $f'(x) = 4x + 1$.

33. 如果 $f(x) = 1/x$, 那么 $f'(x) = -1/x^2$.

第3章　微分捷径

在本章，我们计算给定解析式的函数的导数. 这些函数包括幂函数、多项式、指数函数、对数函数和周期函数. 本章也包括一般法则，比如乘法法则、商法则和链式法则，利用这些法则我们能计算函数的组合的导数.

3.1　幂函数和多项式的导数公式

函数在一点的导数表示斜率和变化率. 在第 2 章，我们学习了怎么计算由图像或表格给出的函数的导数值. 这里，我们学习如何求给定解析式的函数的导数公式.

3.1.1　常数函数的导数

常数函数 $f(x)=k$ 的图像是一条水平直线，其斜率处处为 0. 因此，它的导数处处为 0. (参见图 3-1).

$$\text{如果 } f(x)=k,\ \text{则 } f'(x)=0$$

比如，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5)=0$.

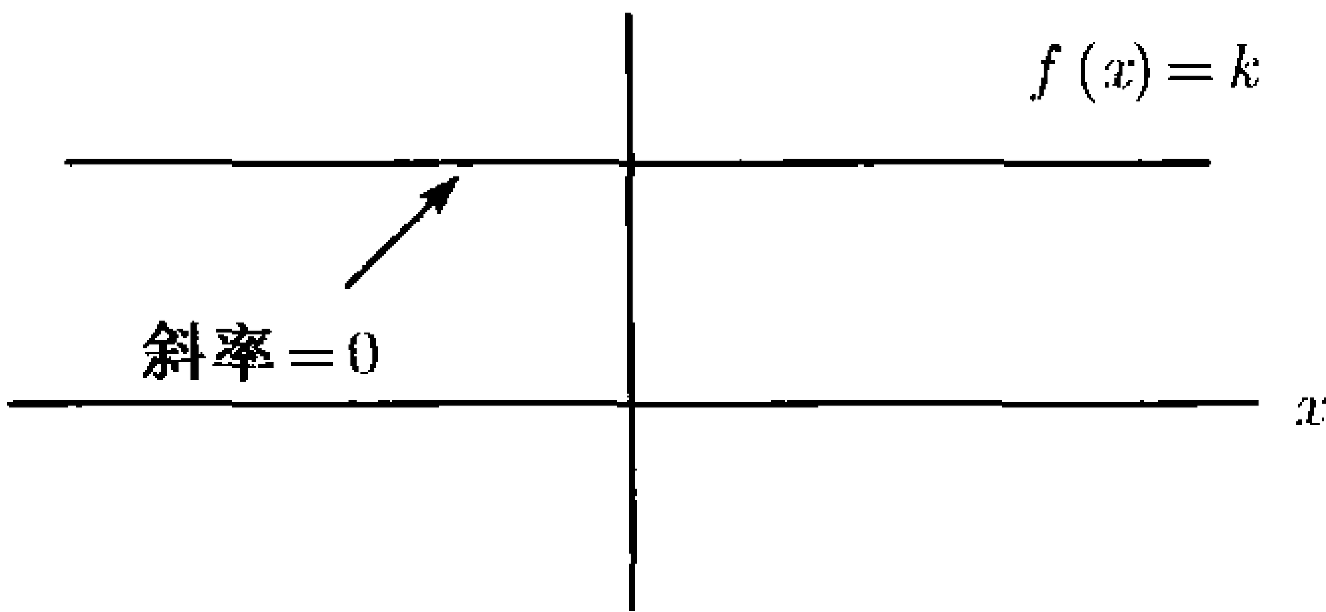


图 3-1　常数函数

3.1.2　线性函数的导数

我们已经知道直线的斜率为常数，这告诉我们线性函数的导数为常数.

$$\text{如果 } f(x)=b+mx,\ \text{则 } f'(x)=\text{斜率}=m.$$

比如，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5-\dfrac{3}{2}x\right)=-\dfrac{3}{2}$.

3.1.3 数乘函数的导数

图 3-2 给出了函数 $y=f(x)$ 及它的三个倍函数 $y=3f(x), y=\frac{1}{2}f(x)$ 和 $y=-2f(x)$ 的图像. 这些函数的导数之间有何联系? 也就是说, 这些图像在特定的 x 处的斜率有何联系?

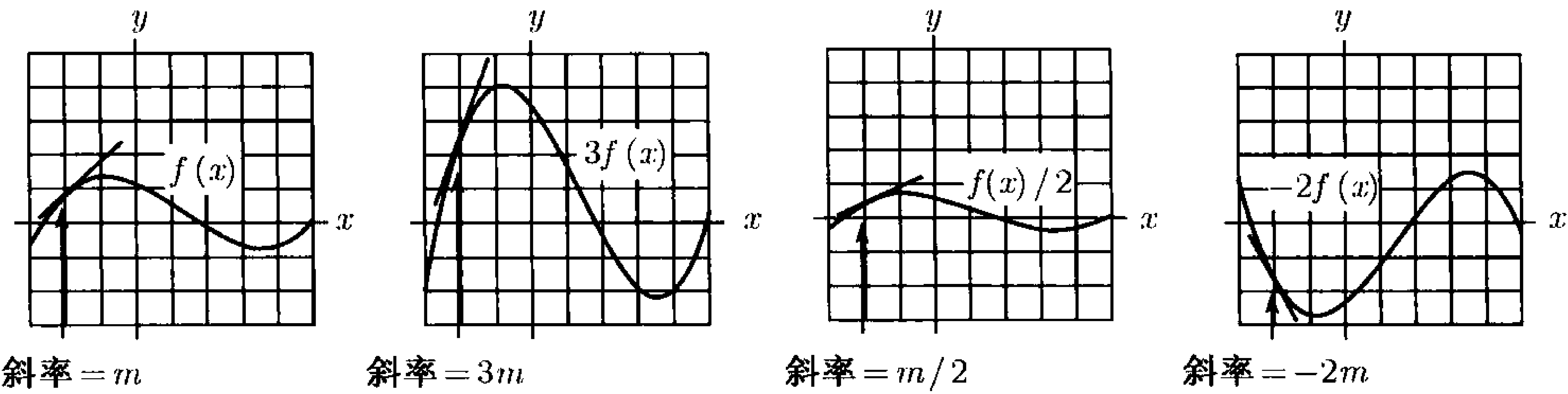


图 3-2 函数和它的倍函数: 倍函数的导数等于导数的倍数

函数乘以一个常数就是对图像的拉伸或收缩 (常数为负数则是图像关于 x 轴的反射). 这就改变了曲线在每一点的斜率. 如果图像被拉伸, 在每一点 "上升的高度" 都以相同的倍数增加, 而 "平移的距离" 相同, 因此, 在每一点的斜率都应以相同的速度增加. 如果图像被收缩, 则斜率都以相同的速度减小. 如果图像关于 x 轴被作反射, 则斜率都应改变符号. 因此, 如果一个函数乘以一个常数 c, 它的导数也如此.

数乘函数的导数

若 c 是一个常数, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[cf(x)]=cf'(x).$$

3.1.4 和与差的导数

两个函数 $f(x), g(x)$ 与它们的和函数 $f(x)+g(x)$ 的值由表 3-1 给出.

表 3-1 函数的和

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$
0	100	0	100
1	110	0.2	110.2
2	130	0.4	130.4
3	160	0.6	160.6
4	200	0.8	200.8

我们清楚 $f(x)$ 的增量与 $g(x)$ 的增量之和即为 $f(x)+g(x)$ 的增量. 比如, 当 x 的值从 0 增加到 1 时, $f(x)$ 增加 10, $g(x)$ 增加 0.2, 而 $f(x)+g(x)$ 增加

$110.2 - 100 = 10.2$. 类似地, 当 x 的值从 3 增加到 4 时, $f(x)$ 增加 40, $g(x)$ 增加 0.2, 而 $f(x)+g(x)$ 增加 $200.8 - 160.6 = 40.2$.

我们从这个例子得知, $f(x)+g(x)$ 的增长率是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的增长率之和. 类似的推理对两者之差 $f(x)-g(x)$ 也适用. 用导数的形式表示如下.

和与差的导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)-g(x)] = f'(x)-g'(x).$$

3.1.5　x 的幂

我们从考虑函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 入手. 在本章末的"相关理论"部分我们证明了

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x, \quad g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = 3x^2.$$

函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ 和它们的导数的图像如图 3-3 和图 3-4 所示. 注意, $f'(x)=2x$ 具有我们所预料的性质. 当 $x<0$ 时, 它为负 (此时 f 递减); 当 $x=0$ 时, 它为 0; 当 $x>0$ 时, 它为正 (此时 f 递增). 类似地, $g'(x)=3x^2$ 在 $x=0$ 时为 0, 但在其他点处处为正, 因为 g 在其他点处递增. 这些例子是幂法则的特殊情形.

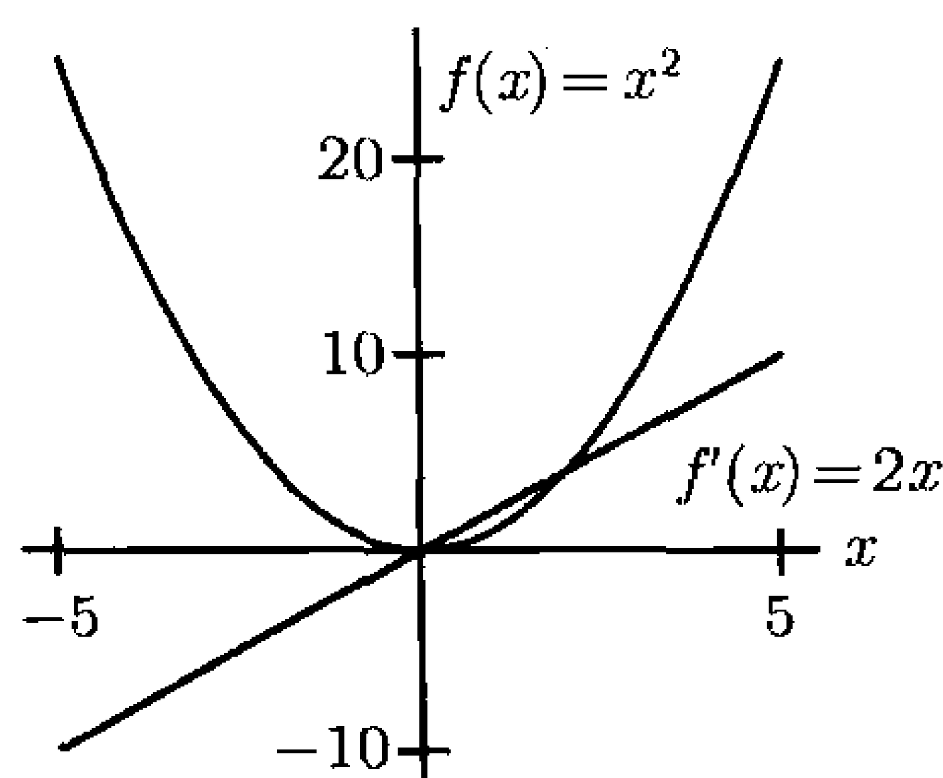


图3-3　$f(x)=x^2$及它的导数 $f'(x)=2x$的图像

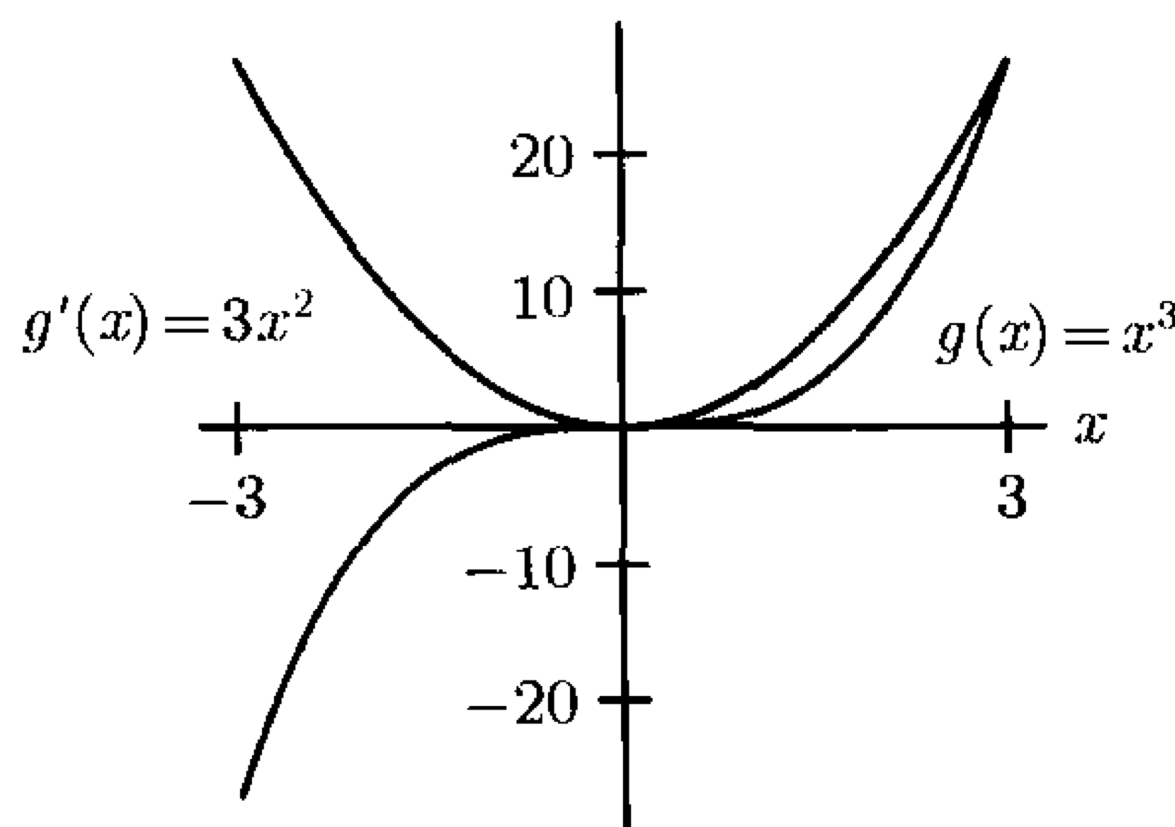


图3-4　$g(x)=x^3$及它的导数 $g'(x)=3x^2$的图像

幂法则

对任何实常数 n,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}.$$

例 1　求 (a) $h(x)=x^8$,　(b) $P(t)=t^7$ 的导数.

解　(a) $h'(x)=8x^7$,　(b) $P'(t)=7t^6$. □

3.1.6 多项式的导数

利用幂函数、数乘函数及和的导数, 我们能求任何多项式的导数.

例 2 求下列函数的导数.

(a) $A(t)=3t^5$, (b) $r(p)=p^5+p^3$, (c) $f(x)=5x^2-7x^3$.

解 (a) 利用数乘函数法则, 得 $A'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3t^5)=3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^5)=3\cdot 5t^4=15t^4$.

(b) 利用和法则, 得 $r'(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^5+p^3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^5)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^3)=5p^4+3p^2$.

(c) 利用这两个法则, 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2-7x^3)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7x^3) \quad \text{差的导数}\\&=5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)-7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) \quad \text{数乘函数的导数}\\&=5(2x)-7(3x^2)=10x-21x^2.\end{aligned}$$

□

例 3 求 (a) $5x^2+3x+2$, (b) $\sqrt{3}x^7-\frac{x^5}{5}+\pi$ 的导数.

解 (a)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2+3x+2)&=5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)+3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2)\\&=5\cdot 2x+3\cdot 1+0 \quad \left(\text{由于常数的导数 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2) \text{ 为 } 0\right)\\&=10x+3.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{3}x^7-\frac{x^5}{5}+\pi\right)&=\sqrt{3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7)-\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^5)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi)\\&=\sqrt{3}\cdot 7x^6-\frac{1}{5}\cdot 5x^4+0\\&\quad\left(\text{由于 } \pi \text{ 是常数, 所以 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi) \text{ 为 } 0\right)\\&=7\sqrt{3}x^6-x^4.\end{aligned}$$

□

我们能利用幂法则计算负指数和分数指数幂函数的导数.

例 4 利用幂法则求导:

(a) $\frac{1}{x^3}$ (b) $\sqrt{x}$ (c) $2t^{4.5}$

解 (a) 由于 $n=-3$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3})=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$.

(b) 由于 $n=1/2$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2})=\frac{1}{2}x^{(1/2)-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(c) 由于 $n=4.5$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2t^{4.5})=2(4.5t^{4.5-1})=9t^{3.5}$. □

3.1.7 导数公式的应用

由于一条曲线的切线斜率就是导数, 所以我们利用求导来求切线方程.

例 5 求函数 $y = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ 的图像在 $x = 1$ 处的切线方程, 并在同一坐标系下画出曲线及其切线的图像.

解 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 2(2x) - 5(1) + 0 = 3x^2 + 4x - 5,$$

因此在 $x = 1$ 处切线的斜率为

$$m = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = 3(1)^2 + 4(1) - 5 = 2.$$

在 $x = 1$ 时, 我们有 $y = 1^3 + 2(1^2) - 5(1) + 7 = 5$, 因此点 $(1, 5)$ 在切线上. 利用公式 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 得,

$$y - 5 = 2(x - 1)$$

$$y = 3 + 2x.$$

切线方程为 $y = 3 + 2x$. 参见图 3-5.

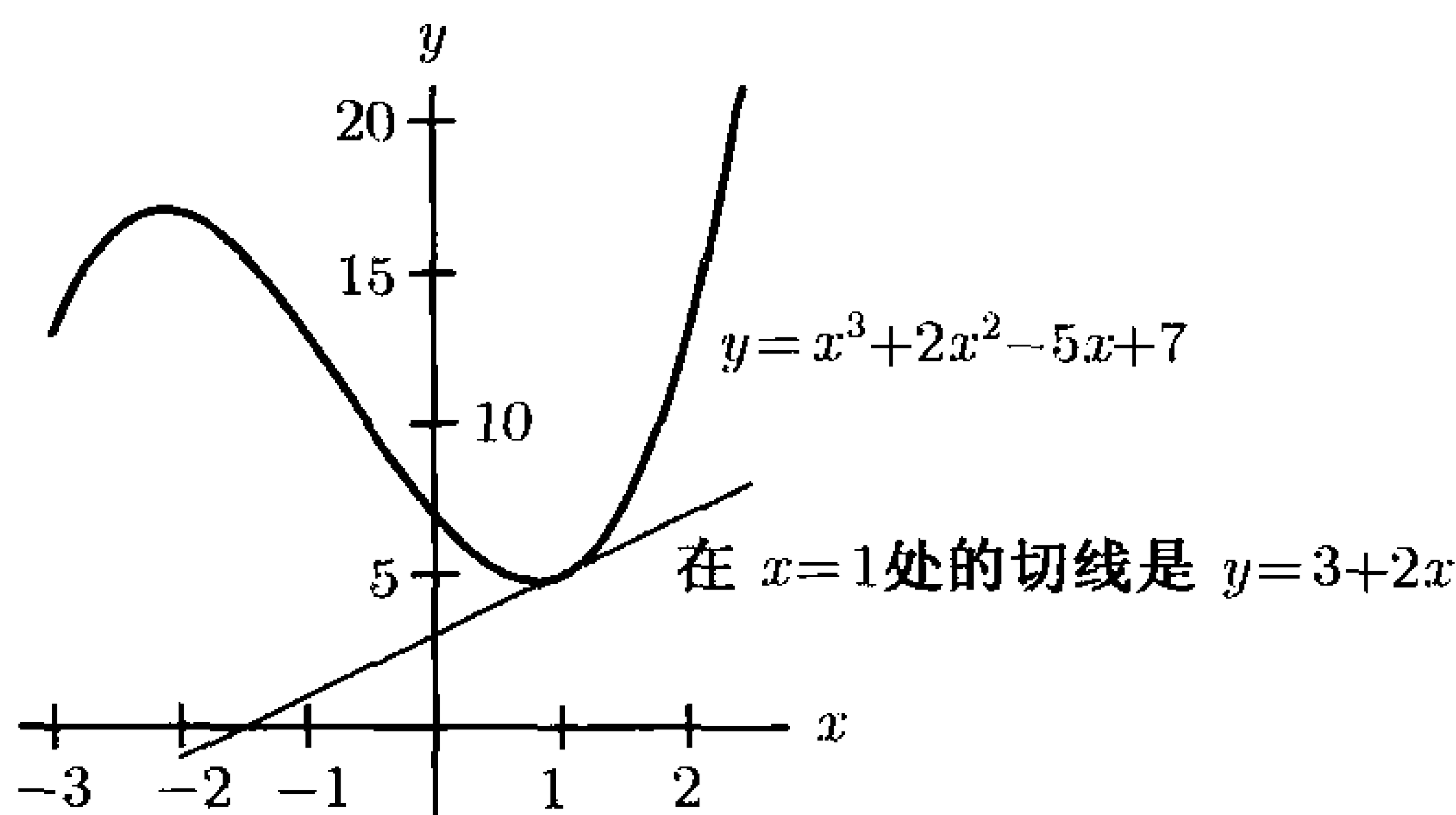


图 3-5 求切线方程 □

例 6 计算 (a) $f(x) = x^2$ 和 (b) $g(x) = x^3$ 的二阶导数, 并解释.

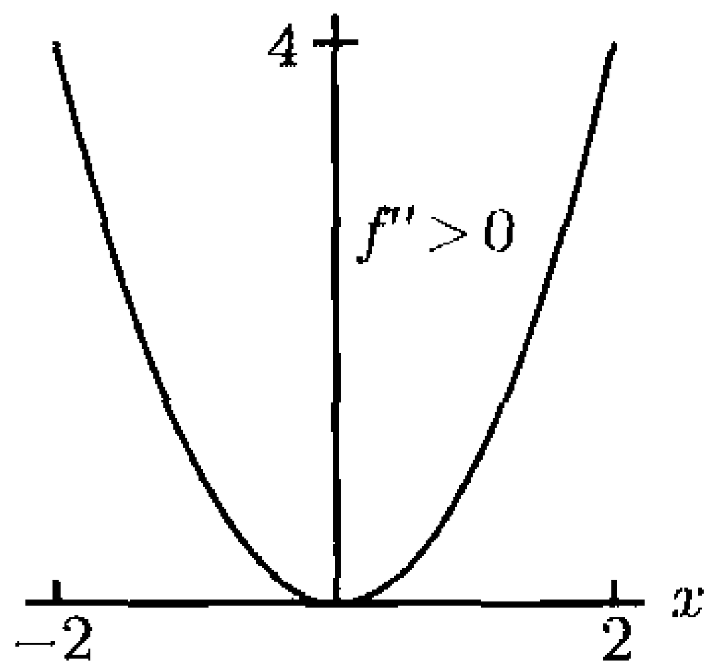


图3-6 $f(x)=x^2$的图像,其二阶导数$f''(x)=2$

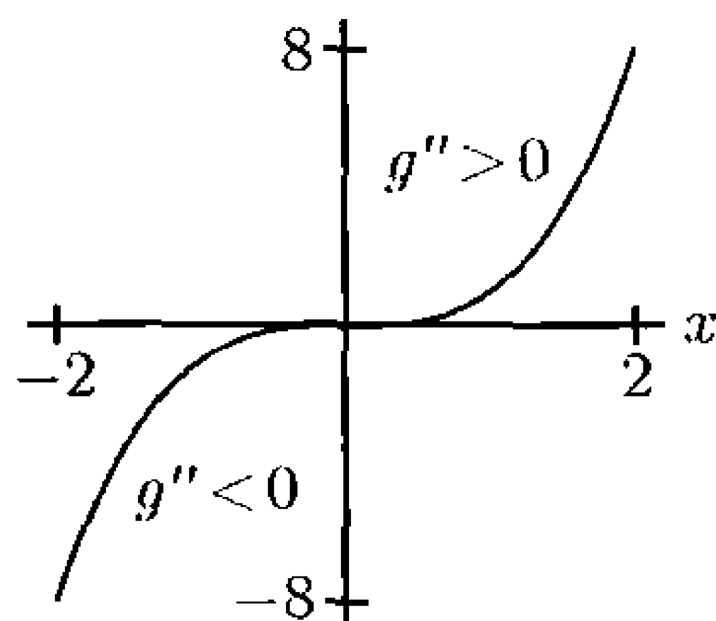


图3-7 $g(x)=x^3$的图像,其二阶导数$g''(x)=6x$

解 (a) 对 $f(x) = x^2$ 求导得 $f'(x) = 2x$, 于是 $f''(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = 2$. 由于 f'' 总是

正的, 所以 f 的图像上凹, 正如我们了解的开口向上的抛物线一样. (参见图 3-6.)

(b) 对 $g(x)=x^3$ 求导得, $g'(x)=3x^2$, 于是 $g''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2)=6x$. 它在 $x>0$ 时为正, $x<0$ 时为负, 这表明 $g(x)=x^3$ 的图像在 $x>0$ 时上凹, $x<0$ 时下凹. (参见图 3-7.) □

例 7 如果一个物体的位移 (单位: m) 是时间 t(单位: s) 的函数

$$s=-4.9t^2+5t+6,$$

求它在 t 时刻的速度.

解 速度 v 是位移的导数:

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-4.9t^2+5t+6)=-9.8t+5 \text{ m/s}$$ □

例 8 图 3-8 是三次多项式的图像. 分别用图像和代数方法描述三次导数的特点.

解 图像的方法: 假设我们沿着曲线从左向右移动. 在 A 的左侧, 斜率为正; 一开始, 斜率很大, 然后递减直到斜率为 0 的 A 点. A 与 C 之间的斜率为负. A 和 B 之间的斜率是递减的 (负得越来越多); 它在 B 处负得最多. B 与 C 之间的斜率为负, 但却是递增的; 在 C 处的斜率为零. 从 C 向右移动, 斜率为正而且是递增的. 导函数的图像如图 3-9 所示.

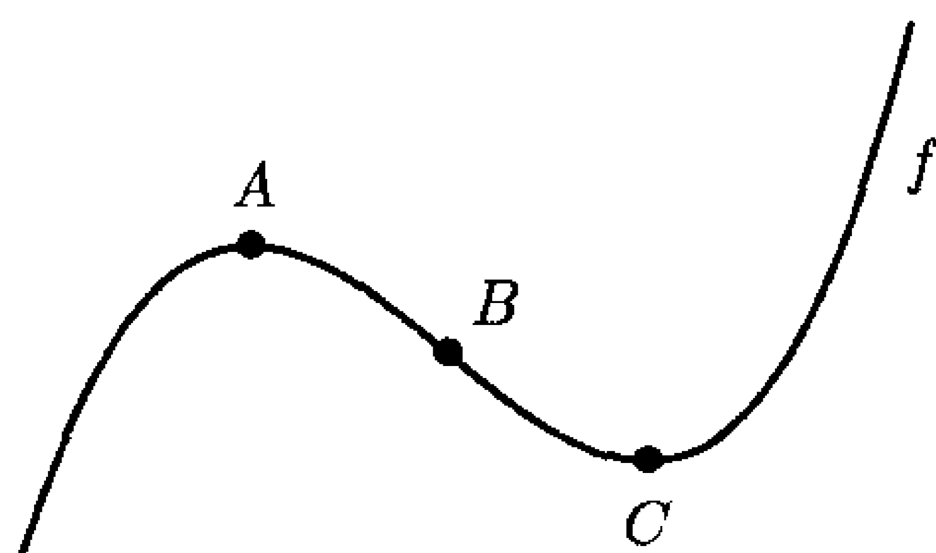


图 3-8 例 8 中的三次多项式

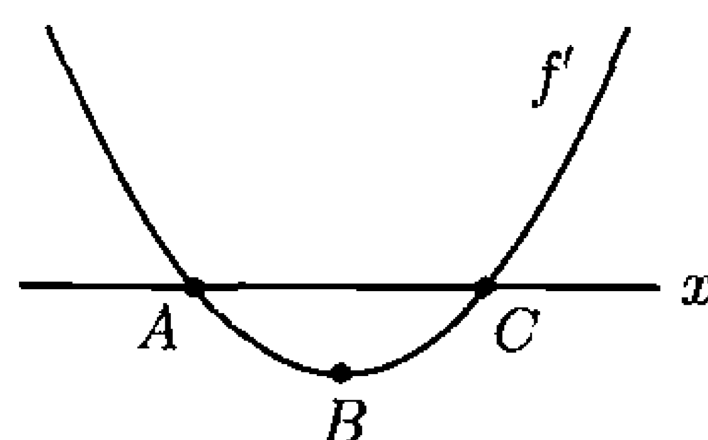


图 3-9 例 8 中三次多项式的导数

代数方法: f 是三次多项式而且当 $x\to+\infty$ 时趋于 $+\infty$, 从而

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

且 $a>0$. 因此,

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,$$

其图像是开口向上的抛物线, 如图 3-9 所示. □

习题

计算习题 1~36 的导数. 假设 a,b,c,k 是常数.

1. $y=5$ **2.** $y=3x$

3. $y=x^{12}$ **4.** $y=x^{-12}$

5. $y=x^{4/3}$ **6.** $y=8t^3$

7. $y = 3t^4 - 2t^2$

8. $y = 5x + 13$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

10. $f(q) = q^3 + 10$

11. $y = x^2 + 5x + 9$

12. $y = 6x^3 + 4x^2 - 2x$

13. $y = 3x^2 + 7x - 9$

14. $y = 8t^3 - 4t^2 + 12t - 3$

15. $y = 4.2q^2 - 0.5q + 11.27$

16. $y = -3x^4 - 4x^3 - 6x + 2$

17. $g(t) = \dfrac{1}{t^5}$

18. $f(z) = -\dfrac{1}{z^{6.1}}$

19. $y = \dfrac{1}{r^{7/2}}$

20. $y = \sqrt{x}$

21. $h(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\theta}}$

22. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$

23. $y = 3t^5 - 5\sqrt{t} + \dfrac{7}{t}$

24. $y = z^2 + \dfrac{1}{2z}$

25. $y = 3t^2 + \dfrac{12}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t^2}$

26. $h(t) = \dfrac{3}{t} + \dfrac{4}{t^2}$

27. $y = \sqrt{x}(x + 1)$

28. $h(\theta) = \theta(\theta^{-1/2} - \theta^{-2})$

29. $f(x) = kx^2$

30. $y = ax^2 + bx + c$

31. $Q = aP^2 + bP^3$

32. $v = at^2 + \dfrac{b}{t^2}$

33. $P = a + b\sqrt{t}$

34. $V = \dfrac{4}{3}\pi r^2 b$

35. $w = 3ab^2 q$

36. $h(x) = \dfrac{ax + b}{c}$

37. 设 $f(t) = t^2 - 4t + 5$.

(a) 求 $f'(t)$.

(b) 求 $f'(1)$ 和 $f'(2)$.

(c) 利用 $f(t)$ 的图像验证你 (b) 部分的答案, 并作出解释.

38. 设 $f(x) = x^2 + 1$. 计算导数 $f'(0), f'(1), f'(2)$ 和 $f'(-1)$. 用图像验证你的答案.

39. 设 $f(x) = x^2 + 3x - 5$. 计算 $f'(0), f'(3)$ 和 $f'(-2)$.

40. 一座沙丘的高度 (单位: cm) 为 $f(t) = 700 - 3t^2$, 其中 t 是自 2005 年以来的年数. 计算 $f(5)$ 和 $f'(5)$. 解释每个值表示的含义.

41. 计算人口数 $P(t) = t^3 + 4t + 1$ 在 $t = 2$ 时的变化率.

42. 设 $f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 1$, 计算 $f'(t)$ 和 $f''(t)$.

43. 设 $f(t) = t^4 - 3t^2 + 5t$, 计算 $f'(t)$ 和 $f''(t)$.

44. 萨氏仿贻贝是一种浅水贝, 它于 20 世纪 80 年代初最先出现在圣罗伦斯河, 并很快蔓延到五大湖. 假设萨氏仿贻贝在某个海湾出现的 t 个月后, 数量为 $Z(t) = 300t^2$. 4 个月后, 这个海湾有多少萨氏仿贻贝? 它们的数量在此时的增长率是多少? 请给出单位.

45. (a) 计算 $f(x) = x^3$ 在 $x = 2$ 处的切线方程.

(b) 在同一坐标系下画出切线和函数的图像. 如果用切线估计函数值, 那么估计值是偏大还是偏小?

46. 求 $f(t) = 6t - t^2$ 的图像在 $t = 4$ 处的切线方程, 并在同一坐标系下画出 $f(t)$ 及切线的图像.

47. 求 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

48. 假设 W 与 r^3 成比例, 则导数 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}r$ 与 r 的几次幂成比例.

49. 假设生产 q 个产品的成本为 $C(q) = 1000 + 2q^2$ 美元. 计算生产第 25 个产品的边际成本, 并解释你的答案.

50. 某产品的需求曲线由 $q = 300 - 3p$ 给出, 其中 p 是该产品的价格, q 是消费者以该价格购买该产品的数量.

(a) 把收益表示成价格的函数.

(b) 计算价格为 10 美元时的边际收益, 并解释你的答案.

(c) 边际收益何时为正? 何时为负?

51. 苹果园的产量 Y(每亩的苹果产量以蒲式耳计) 是每亩所施化肥量 (单位: 磅) 的函数. 假设

$$Y = f(x) = 320 + 140x - 10x^2.$$

(a) 每亩施 5 磅化肥时的产量是多少?

(b) 计算 $f'(5)$. 给出你的答案 (带单位) 并从苹果和化肥的角度解释你的答案.

(c) 根据 (b) 部分的答案, 判断应该增加还是减少施肥量? 请解释.

52. 某产品的需求量为

$$p = f(q) = 50 - 0.03q^2,$$

其中 $p, q \geqslant 0$.

(a) 计算该函数的 p, q 截距, 并从产品的需求量角度解释.

(b) 计算 $f(20)$, 给出你的答案 (带单位), 并从需求量角度解释它的含义.

(c) 计算 $f'(20)$, 给出你的答案 (带单位), 并从需求量角度解释它的含义.

53. 生产 q 单位产品的成本 (单位: 美元) 为 $C(q) = 0.08q^3 + 75q + 1000$.

(a) 计算边际成本函数.

(b) 计算 $C(50)$ 和 $C'(50)$. 给出你的答案 (带单位), 并从产品成本角度解释它们分别表示的含义.

54. 设 $f(x) = x^2 - 4x + 8$, 求 x 的值, 使 $f'(x) = 0$.

55. 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 20$, 求 $f'(x)$ 及所有使得 $f'(x) = 0$ 的 x 的值, 并说明这些值和 $f(x)$ 的图像之间的关系.

56. 函数 $y = x^3 - 9x^2 - 16x + 1$ 的图像有两个点处的切线斜率为 5, 求出这两点的坐标.

57. 证明对于任意幂函数 $f(x) = x^n$, $f'(1) = n$.

58. 如果需求曲线是直线, 我们把它记成 $p = b + mq$, 其中 p 是产品价格, q 是以该价格卖出的产品数量, b 和 m 是常数.

(a) 把收益表示成卖出的产品数量的函数.

(b) 求边际收益函数.

59. 一球从帝国大厦顶层掉下. 球离地面的高度 y(单位: ft) 是时间 t(单位: s) 的函数

$$y = 1250 - 16t^2.$$

(a) 计算球在 t 时刻的速度. 速度的符号是什么? 为什么这是我们所期望的?

(b) 球何时落到地面? 此时, 它的速度是多少? 分别用单位 ft/s 和 mile/h 给出你的答案.

3.2 指数函数和对数函数

3.2.1 指数函数

我们预计指数函数 $f(x)=a^x$ 的导数的图像应该是什么样子？$a>1$ 的指数函数的图像参见图 3-10. 函数在 $x<0$ 时缓慢地增加，在 $x>0$ 时增加地更快，因此 f' 的值在 $x<0$ 时小，在 $x>0$ 时大. 由于函数关于所有的 x 递增，导数的图像必然在 x 轴上方. 事实上，f' 的图像与 f 本身的图像相似. 我们将以 $f(x)=2^x$ 和 $g(x)=3^x$ 为例来验证上述结论.

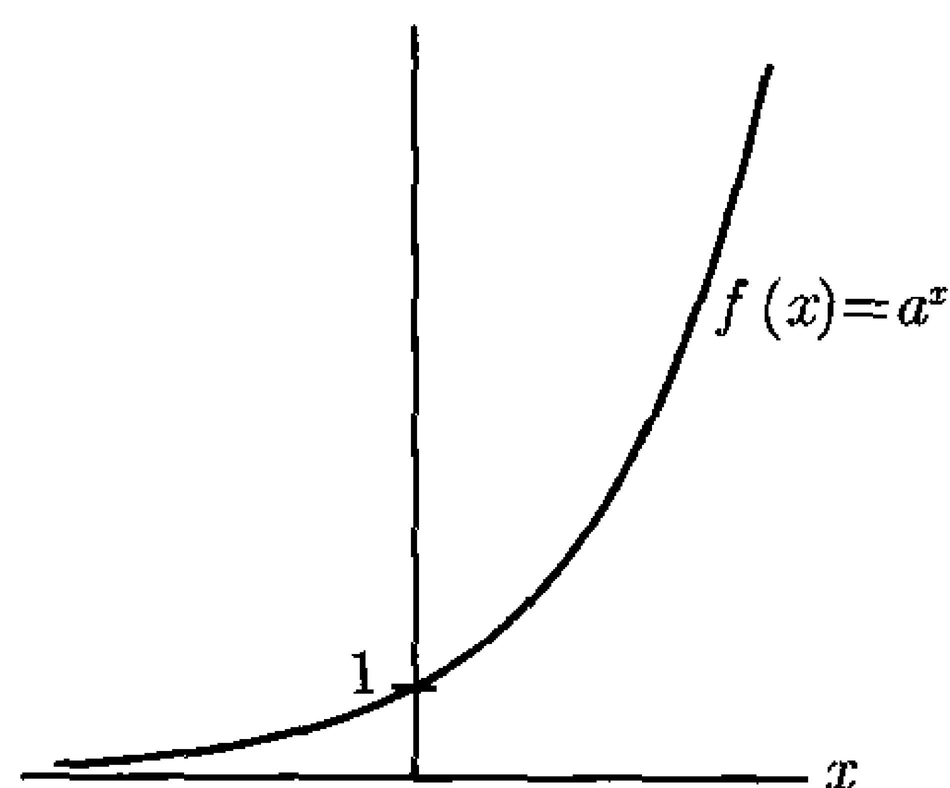


图 3-10 $f(x)=a^x, a>1$

2^x 和 3^x 的导数

我们在 2.1 节估计了 $f(x)=2^x$ 在 $x=0$ 处的导数值为 $f'(0)\approx 0.693$. 通过估计在其他 x 值处的导数值，我们得到图 3-11 中的图像. 由于 f' 的图像看上去像由 f 的图像垂直拉伸得到，我们假定 f' 是 f 的倍数. 既然 $f'(0)\approx 0.693=0.693\cdot 1=0.693f(0)$，这个倍数应该约等于 0.693，这就表明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x)=f'(x)\approx(0.693)2^x.$$

类似地，在图 3-12 中，$g(x)=3^x$ 的导数是 g 的倍数，且倍数 $g'(0)\approx 1.0986$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3^x)=g'(x)\approx(1.0986)3^x.$$

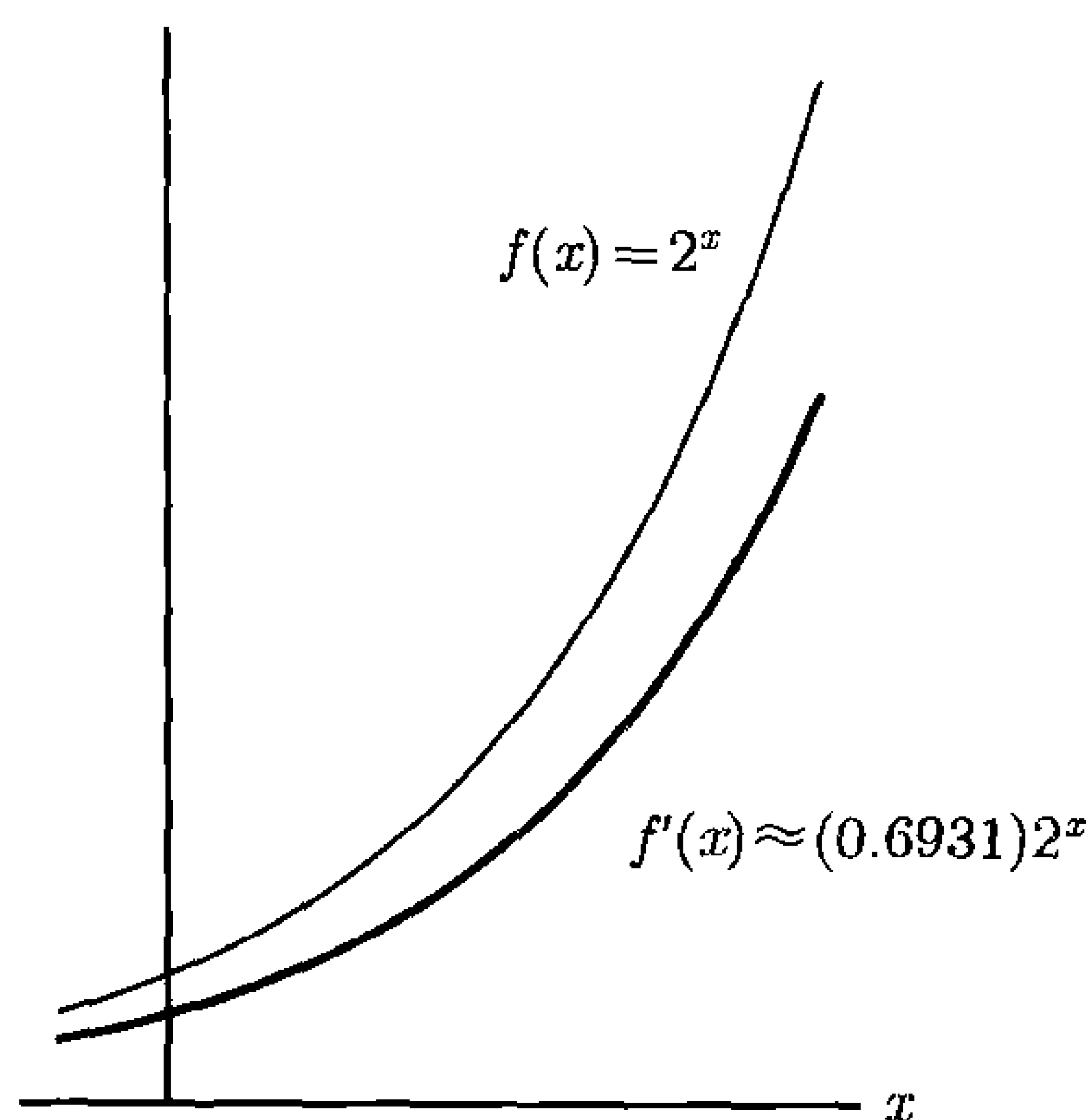


图 3-11 $f(x)=2^x$ 和它的导数的图像

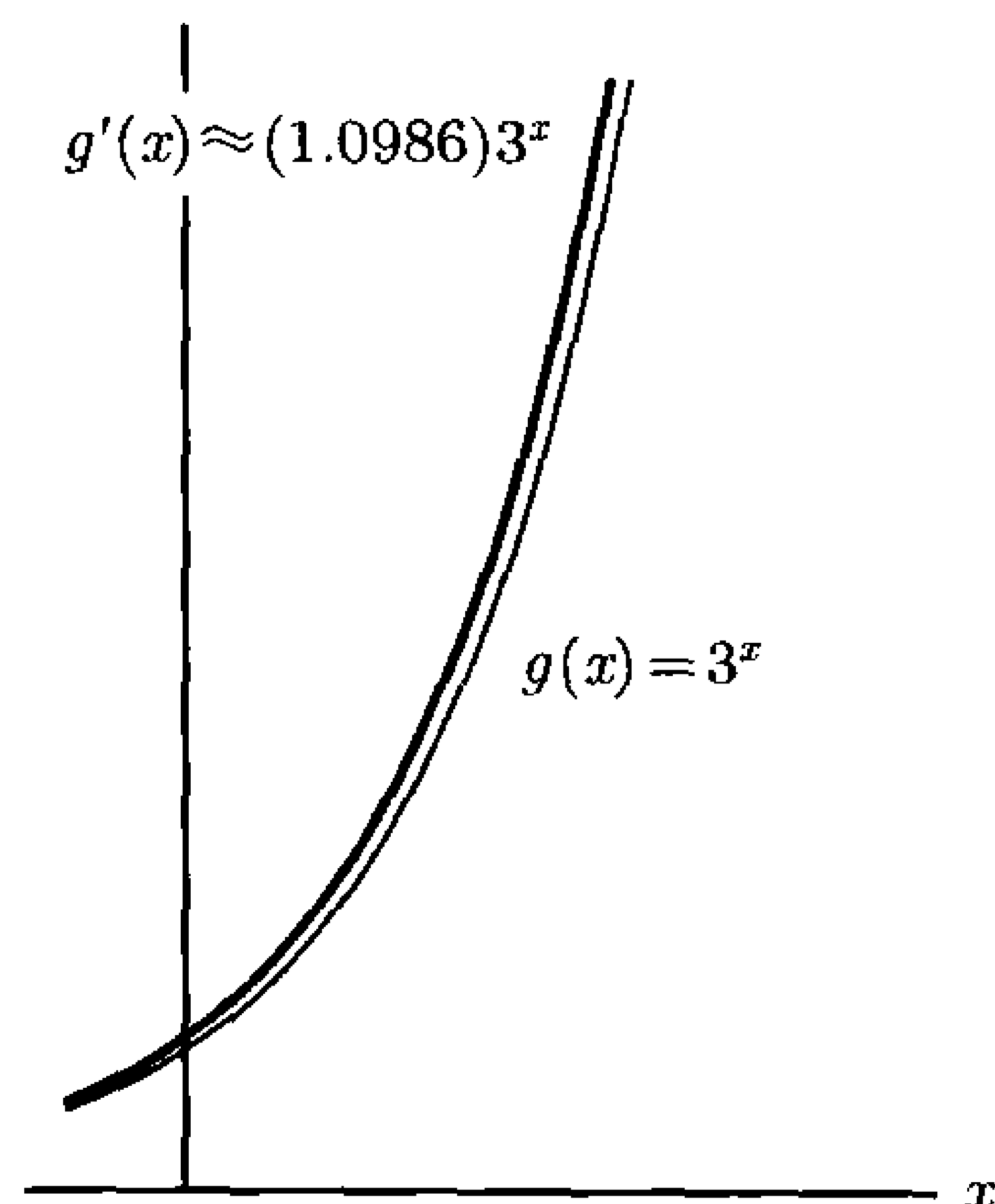


图 3-12 $g(x)=3^x$ 和它的导数的图像

a^x 的导数及数 e

函数 $f(x)=a^x, a>0$ 的导数的计算与2^x 和 3^x 的类似. 导数还是和原来的函

数成比例. 当 $a=2$ 时, 比例常数 (0.6931) 小于 1, 导数小于原来的函数. 当 $a=3$ 时, 比例常数 (1.0986) 大于 1, 导数大于原来的函数. 是否有中间情形, 导数和函数恰好相等? 换句话讲, 是否存在 a 的某个值, 使得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x)=a^x$?

答案是肯定的: 这个值是 $a\approx 2.718...$, 即第 1 章中介绍的 e. 这就是说, 函数 e^x 的导数是它自己.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x.$$

结果表明, 2^x 和 3^x 的导数中的常数是自然对数. 事实上, 由于 $0.6931\approx \ln 2$, $1.0986\approx \ln 3$, 我们 (准确地) 猜测到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2^x)=(\ln 2)2^x \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3^x)=(\ln 3)3^x.$$

在本章末的 "相关理论" 部分, 我们证明了下面的法则.

指数法则

对任意正常数 a,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x)=(\ln a)a^x.$$

由于 $\ln a$ 是常数, a^x 的导数与 a^x 成比例. 很多量的变化率和它们本身成比例. 例如, 人口增长的最简单模型就具有这一性质. 当 $a=\mathrm{e}$ 时, 比例常数等于 1 这个事实使 e 成为指数函数极为有用的基底.

例 1 求 $2\cdot 3^x+5\mathrm{e}^x$ 的导数.

解 我们有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\cdot 3^x+5\mathrm{e}^x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3^x)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x)=2\ln 3\cdot 3^x+5\mathrm{e}^x$. □

3.2.2 $\ln x$ 的导数

对数函数 $f(x)=\ln x$ 的导数的图像大致如何? 图 3-13 表明 $\ln x$ 是增函数, 因此它的导数为正. $f(x)=\ln x$ 的图像下凹, 因此它的导数是递减的. 除此之外, $f(x)=\ln x$ 的斜率在靠近 $x=0$ 处非常大, 在 x 取值很大时又非常小, 因此, 在 0 附近的 x 处的导数趋于 $+\infty$, 非常大的 x 处的导数趋于 0. 参见图 3-14. 可以证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\frac{1}{x}.$$

在本章末的 "相关理论" 部分, 我们给出了这条法则的代数证明.

例 2 求 $y=5\ln t+7\mathrm{e}^t-4t^2+12$ 的导数.

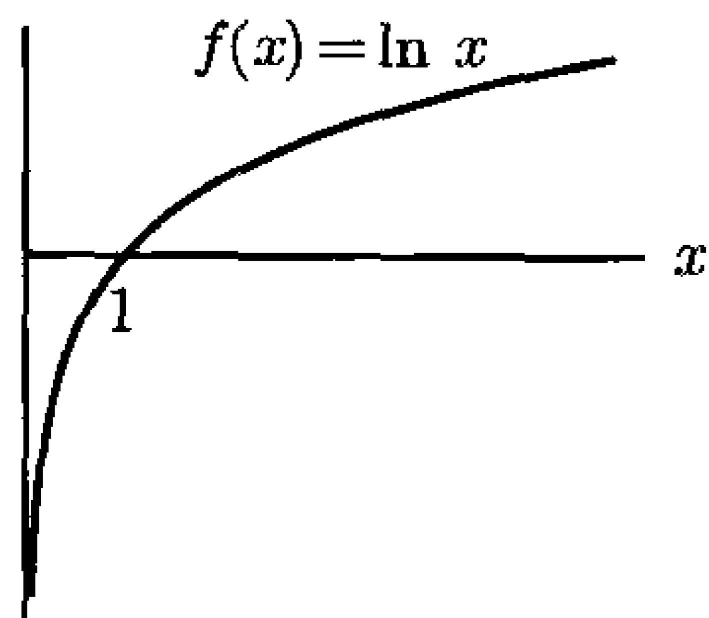


图 3-13 $f(x)=\ln x$ 的图像

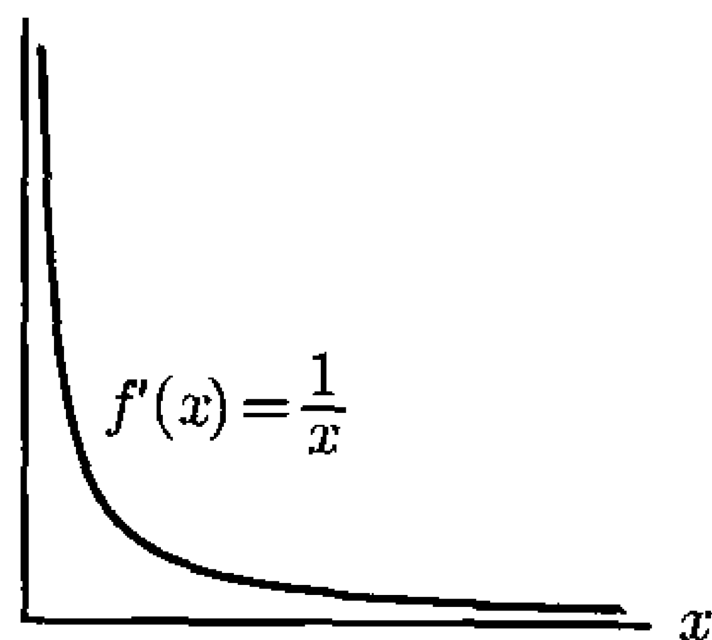


图 3-14 $f(x)=\ln x$ 的导数的图像

解 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\ln t+7\mathrm{e}^t-4t^2+12)&=5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^t)-4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(12)\\&=5\left(\frac{1}{t}\right)+7(\mathrm{e}^t)-4(2t)+0\\&=\frac{5}{t}+7\mathrm{e}^t-8t.\end{aligned}$$

□

3.2.3 导数公式的应用

例 3 在第 1 章, 我们看到得克萨斯州麦卡伦的人口的模型可以表示为

$$P=570(1.037)^t,$$

其中 P 的单位是千人, t 是自 2000 年以来的年数. 在 2005 年年初, 人口以何种速度增长? 请给出你的答案 (带单位).

解 瞬时增长率是导数, 因此我们需要计算 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 在 $t=5$ 时的值. 我们有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(570(1.037)^t)=570(\ln 1.037)(1.037)^t=20.709(1.037)^t.$$

将 $t=5$ 代入, 得

$$20.709(1.037)^5=24.835.$$

麦卡伦的人口在 2005 年年初大约以每年 24.835 千人即 24835 人的速度增长. □

例 4 计算 $f(x)=\ln x$ 的图像在 $x=2$ 处的切线方程. 在同一坐标系下画出 $f(x)$ 和它的导数的图像.

解 由于 $f'(x)=1/x$, 在 $x=2$ 处的切线斜率为 $f'(2)=1/2=0.5$. 当 $x=2$ 时, $y=\ln 2=0.693$, 因此切线上有点 $(2, 0.693)$. 代入直线方程, 我们有:

$$\begin{aligned}y-0.693&=0.5(x-2)\\y&=-0.307+0.5x.\end{aligned}$$

切线方程为 $y=-0.307+0.5x$. 参见图 3-15.

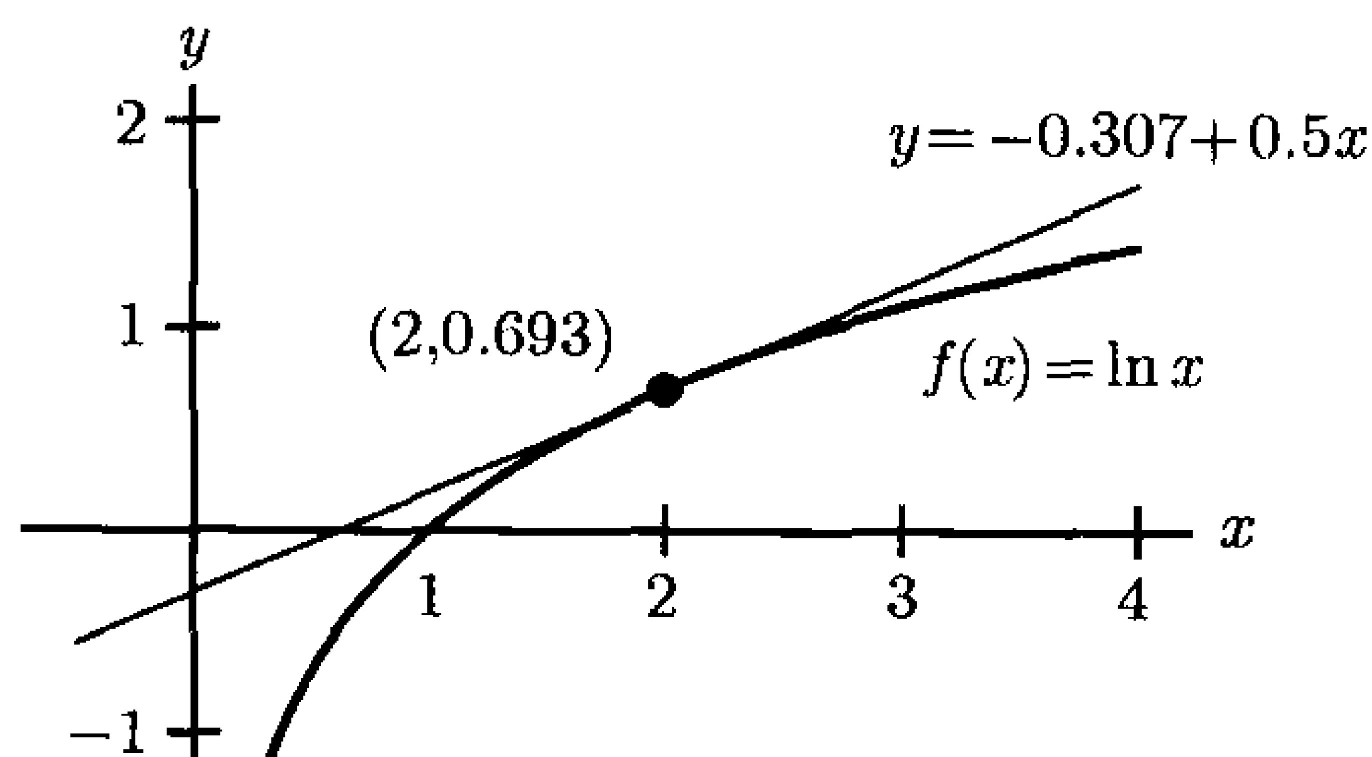


图 3-15 $f(x)=\ln x$ 和其一条切线的图像 □

习题

求 1~22 题中函数的导数, 假设 A, B 和 C 是常数.

1. $f(x)=2e^x+x^2$

2. $P=3t^3+2e^t$

3. $y=5t^2+4e^t$

4. $f(x)=x^3+3^x$

5. $y=2^x+\dfrac{2}{x^3}$

6. $y=5\cdot 5^t+6\cdot 6^t$

7. $f(x)=2^x+2\cdot 3^x$

8. $y=4\cdot 10^x-x^3$

9. $y=3x-2\cdot 4^x$

10. $y=5\cdot 2^x-5x+4$

11. $P(t)=3000(1.02)^t$

12. $P(t)=12.41(0.94)^t$

13. $P(t)=Ce^t$

14. $y=B+Ae^t$

15. $f(x)=Ae^x-Bx^2+C$

16. $y=10^x+\dfrac{10}{x}$

17. $R=3\ln q$

18. $D=10-\ln p$

19. $y=t^2+5\ln t$

20. $R(q)=q^2-2\ln q$

21. $y=x^2+4x-3\ln x$

22. $f(t)=Ae^t+B\ln t$

23. 设 $f(t)=4-2e^t$, 求 $f'(-1), f'(0)$ 和 $f'(1)$. 画出 $f(t)$ 的图像及在 $t=-1, t=0$ 和 $t=1$ 处的切线. 这些切线的斜率与你求出的导数相等吗?

24. 求 $y=3^x$ 的图像在 $x=1$ 处的切线方程. 通过在同一坐标系下画出的函数图像及切线, 验证你得出的结果.

25. (a) 求 $f(x)=1-e^x$ 的图像在与 x 轴的交点处的斜率.

(b) 求曲线在该点处的切线方程.

26. 全世界太阳能的产量 (单位: 兆瓦特) 模型为 $f(t)=1040(1.3)^t$, 其中 t 是自 1990 年以来的年数①. 求 $f(0), f'(0), f(15)$ 和 $f'(15)$. 给出你的答案 (带单位), 并作出解释.

27. 在 20 世纪 90 年代, 匈牙利的人口大约为

$$P=10.8(0.994)^t,$$

其中 P 以百万计, t 是自 1990 年以来的年数. 假设保持这样的趋势.

(a) 根据这个模型估计 2010 年匈牙利有多少人口?

① www.bp.com, 于 2005 年 5 月 29 日访问.

(b) 根据这个模型估计匈牙利人口在 2010 年以什么样的速度 (人/年) 减少?

28. 某些古董家具的价格在 20 世纪 90 年代和 21 世纪初飞速上涨. 比如, 某把摇椅的价格为

$$V = 75(1.35)^t,$$

其中 V 的单位是美元, t 是 1995 年以来的年数. 求价格的增长率 (单位: 美元/年).

29. 由于年通货膨胀率为 5%, 价格由

$$P = P_0(1.05)^t$$

确定, 其中 P_0 是 $t=0$ 时的价格 (单位: 美元), t 的单位是年. 假设 $P_0 = 1$, 问 $t = 10$ 时, 价格的增长有多快? (单位: 美分/年)

30. 对于成本函数 $C = 1000 + 300\ln q$(单位: 美元), 求在产量水平 500 下的成本和边际成本, 并用经济学术语解释你的答案.

31. 2000 年全球报告指出, 1975 年的全世界人口 P 为 41 亿, 并以每年 2%的速度增长.

(a) 用自 1975 年以来的年数 t 表示 P.

(b) 求 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}, \left.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right|_{t=25}$. 这些值在实际中表示什么含义?

32. 1990 年, 墨西哥人口约为 84 000 000, 年增长率为 2.6%, 而美国人口约为 250 000 000, 年增长率为 0.7%. 若用人/年度量增长率, 哪国的人口增长较快? 解释你的答案.

33. (a) 求 $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

(b) 利用它计算 $\ln(1.1)$ 和 $\ln(2)$ 的近似值.

(c) 利用图像说明近似值比真值大还是小? 如果用该切线估计 $\ln(0.9)$ 和 $\ln(0.5)$, 同样的结论是否成立? 为什么?

34. 利用 e^x 的图像在 $x = 0$ 处的切线方程证明: 对任意 $x, e^x \geqslant 1 + x$. 画出草图可能会有所帮助.

35. 求图 3-16 中 c 的值, 其中 $y = 2^x$ 的图像在 $(0,1)$ 处的切线与 x 轴在该处相交.

36. 求二次多项式 $g(x) = ax^2 + bx + c$, 使其在 $g(0) = f(0), g'(0) = f'(0)$ 和 $g''(0) = f''(0)$ 的意义下, 与 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 点拟合得最好.

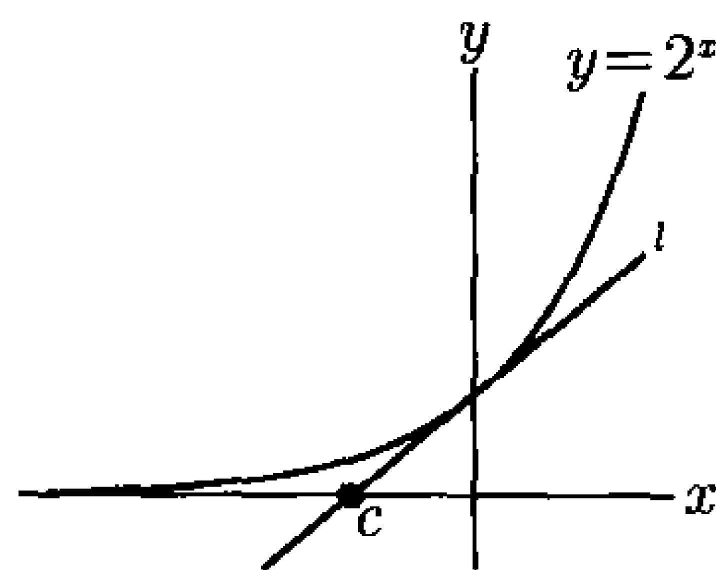


图 3-16

3.3 链式法则

现在我们学习如何计算复合函数, 比如 $f(t) = \ln(3t)$ 和 $g(x) = e^{-x^2}$ 的导数.

复合函数的导数

假设对某个内函数 g 和外函数 $f, y = f(z), z = g(t)$, 且 f 和 g 都可导. t 的微小改变量 Δt 导致了 z 的微小改变量 Δz. 相应地, Δz 导致了 y 的微小改变, 记为 Δy. 如果 $\Delta t, \Delta z$ 都不为零, 我们有

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

由于导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 是商 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 在 Δt 越来越小时的极限, 这就表明

链式法则

如果 $y=f(z)$ 和 $z=g(t)$ 可导, 则 $y=f(g(t))$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

换句话讲, 复合函数的导数等于外函数的导数乘以内函数的导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(g(t))=f'(g(t))\cdot g'(t).$$

下面的例子告诉我们, 怎么用实际术语解释链式法则.

例 1 一辆轿车消耗的汽油量 G(单位: gal) 取决于它行驶的路程 s(单位: mile), 而 s 又取决于行驶时间 t(单位: h). 如果每行驶一英里消耗 0.05 gal 汽油, 且轿车以 30 mile/h 的速度行驶, 汽油消耗率是多少? 结果请带单位.

解 我们期望汽油消耗率的单位是 gal/h. 已知

$$\text{汽油关于路程的消耗率}=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}=0.05\ \mathrm{gal/mile}$$

$$\text{路程关于时间的增长率}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=30\ \mathrm{mile/h}.$$

我们需要计算汽油关于时间的消耗率, 或 $\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$.

把 G 看作 s 的函数, s 看作 t 的函数. 由链式法则, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=(0.05\ \mathrm{gal/mile})\cdot(30\mathrm{mile/h})=1.5\ \mathrm{gal/h}.$$

因此, 汽油的消耗率为 1.5 gal/h. □

给定解析式的函数的链式法则

为利用链式法则求复合函数的导数, 我们首先利用新变量 z 代替内函数, 得到:

$$y=(t+1)^4 \text{ 与 } y=z^4(z=t+1) \text{ 是同一个函数}.$$

例 2 利用新变量 z 代替内函数, 把下列函数分别表示成复合函数:

(a) $y=\ln(3t)$ (b) $P=\mathrm{e}^{-0.03t}$ (c) $w=5(2r+3)^2$.

解 (a) 内函数是 3t, 因此我们有 $y=\ln z, z=3t$.

(b) 内函数是 $-0.03t$, 因此我们有 $P=\mathrm{e}^z, z=-0.03t$.

(c) 内函数是 $2r+3$, 因此我们有 $w=5z^2, z=2r+3$. □

例 3 求下列函数的导数:

(a) $y=(4t^2+1)^7$ (b) $P=\mathrm{e}^{3t}$.

解 (a) 这里 $z=4t^2+1$ 是内函数; $y=z^7$ 是外函数. 由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z=7z^6$, $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=8t$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=(7z^6)(8t)=7(4t^2+1)^6(8t)=56t(4t^2+1)^6.$$

(b) 设 $z=3t$, $P=\mathrm{e}^z$, 则 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z=\mathrm{e}^z, \mathrm{d}z/\mathrm{d}t=3$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^z\cdot 3=\mathrm{e}^{3t}\cdot 3=3\mathrm{e}^{3t}.$$ □

求导法则告诉我们

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^n)=nt^{n-1},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^t,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t)=\frac{1}{t}.$$

另外, 利用链式法则, 我们有下面的结果.

> 如果 z 是 t 的可导函数, 则
>
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^n)=nz^{n-1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^z)=\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln z)=\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

例 4 求导:

(a) $(3\mathrm{t}^3-\mathrm{t})^5$ (b) $\ln(q^2+1)$ (c) e^{-x^2}.

解 (a) 设 $z=3t^3-t$, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3t^3-t)^5=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^5)=5z^4\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=5(3t^3-t)^4(9t^2-1).$$

(b) 我们有, $z=q^2+1$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(\ln(q^2+1))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(\ln z)=\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q}=\frac{1}{q^2+1}(2q).$$

(c) 由于 $z=-x^2$, 所求导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x^2})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^z)=\mathrm{e}^z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x^2}(-2x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$ □

正如我们在下面的例子中所看到的, 利用链式法则时, 不引入新变量 z 通常计算速度要快些.

例 5 求导:

(a) $(x^2+4)^3$ (b) $5\ln(2t^2+3)$ (c) $\sqrt{1+2\mathrm{e}^{5t}}$

解 (a) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x^2+4)^3)&=3(x^2+4)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+4)\\&=3(x^2+4)^2\cdot 2x\\&=6x(x^2+4)^2.\end{aligned}$$

(b) 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\ln(2t^2+3)) = 5\cdot\frac{1}{2t^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t^2+3)$$
$$= 5\cdot\frac{1}{2t^2+3}\cdot 4t$$
$$= \frac{20t}{2t^2+3}.$$

(c) 下面我们两次利用链式法则, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((1+2\mathrm{e}^{5t})^{1/2}) = \frac{1}{2}(1+2\mathrm{e}^{5t})^{-1/2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+2\mathrm{e}^{5t})$$
$$= \frac{1}{2}(1+2\mathrm{e}^{5t})^{-1/2}\cdot 2\mathrm{e}^{5t}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5t)$$
$$= \frac{1}{2}(1+2\mathrm{e}^{5t})^{-1/2}\cdot 2\mathrm{e}^{5t}\cdot 5$$
$$= \frac{5\mathrm{e}^{5t}}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^{5t}}}.$$

例 6 令 $h(x) = f(g(x)), k(x) = g(f(x))$. 利用图 3-17 计算: (a) $h'(1)$; (b) $k'(2)$.

解 (a) 链式法则告诉我们 $h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$, 因此

$$h'(1) = f'(g(1))\cdot g'(1)$$
$$= f'(7)\cdot g'(1)$$
$$= 0\cdot(-1)$$
$$= 0.$$

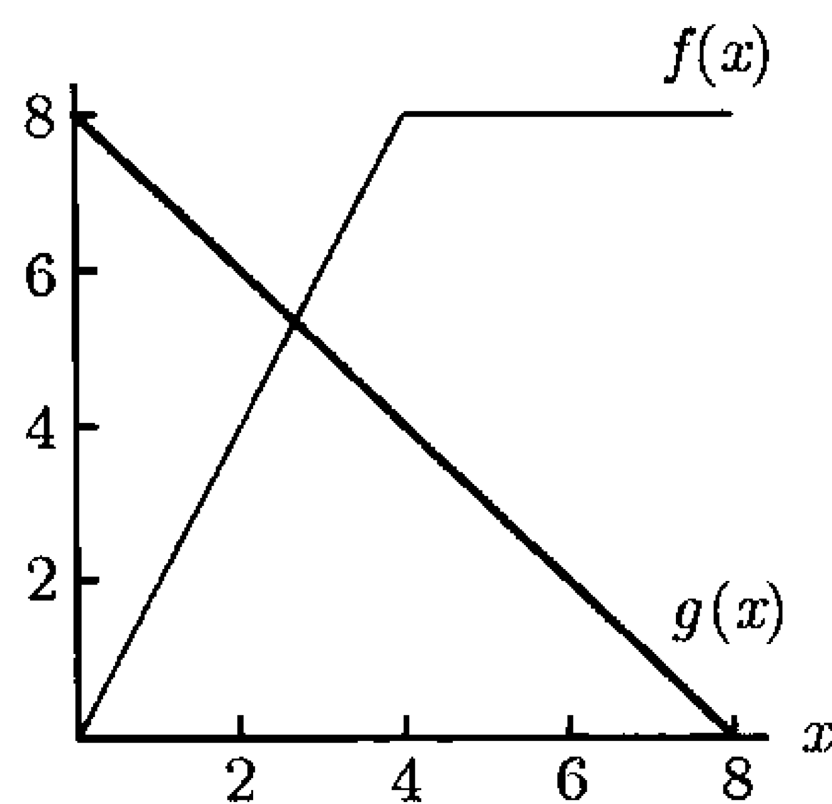


图 3-17 例 6 中 f 和 g 的图像 □

我们利用图 3-17 中直线的斜率得到 $f'(7) = 0, g'(1) = -1$.

(b) 链式法则告诉我们 $k'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$, 因此

$$k'(2) = g'(f(2))\cdot f'(2)$$
$$= g'(4)\cdot f'(2)$$
$$= (-1)\cdot 2$$
$$= -2.$$

我们利用斜率得到 $g'(4) = -1, f'(2) = 2$. □

由于经常用到形如 e^{kt} 的函数 (k 是常数), 我们现在计算一下 e^{kt} 的导数. 我们令 $z = kt$, 于是 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = k$, 因此, 如果 k 是常数, 则

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{kt}) = k\mathrm{e}^{kt}.}$$

例 7 求 $P = 5 + 3x^2 - 7\mathrm{e}^{-0.2x}$ 的导数.

解 所求导数为

$$\frac{dP}{dx}=0+3(2x)-7(-0.2e^{-0.2x})=6x+1.4e^{-0.2x}$$ □

例 8 假设把 1000 美元存入年连续复利率为 8%的银行账户.

(a) 求存入 t 年后, 账面金额 $f(t)$ 的表达式.

(b) 求 $f(10), f'(10)$, 并从货币角度解释你的答案.

解 (a) 账面金额 $f(t)=1000e^{0.08t}$.

(b) 将 $t=10$ 代入, 得

$$f(10)=1000e^{(0.08)(10)}=2225.54.$$

这表明 10 年后, 账面金额为 2225.54 美元.

为计算 $f'(10)$, 我们求出 $f'(t)=1000(0.08e^{0.08t})=80e^{0.08t}$. 因此,

$$f'(10)=80e^{(0.08)(10)}=178.04.$$

这表明 10 年后, 账面金额以每年 178 美元的速度增长. □

习题

求习题 1~34 中函数的导数.

1. $(4x^2+1)^7$

2. $f(x)=(x+1)^{99}$

3. $R=(q^2+1)^4$

4. $w=(t^2+1)^{100}$

5. $w=(t^3+1)^{100}$

6. $w=(5r-6)^3$

7. $y=\sqrt{s^3+1}$

8. $f(t)=e^{3t}$

9. $y=e^{0.7t}$

10. $y=e^{-4t}$

11. $P=e^{-0.2t}$

12. $P=50e^{-0.6t}$

13. $P=200e^{0.12t}$

14. $y=12-3x^2+2e^{3x}$

15. $C=12(3q^2-5)^3$

16. $f(x)=6e^{5x}+e^{-x^2}$

17. $y=5e^{5t+1}$

18. $w=e^{-3t^2}$

19. $w=e^{\sqrt{s}}$

20. $y=\ln(5t+1)$

21. $f(x)=\ln(1-x)$

22. $f(t)=\ln(t^2+1)$

23. $f(x)=\ln(1-e^{-x})$

24. $f(x)=\ln(e^x-1)$

25. $f(t)=5\ln(5t+1)$

26. $g(t)=\ln(4t+9)$

27. $y=5+\ln(3t+2)$

28. $Q=100(t^2+5)^{0.5}$

29. $y=5x+\ln(x+2)$

30. $y=(5+e^x)^2$

31. $P=(1+\ln x)^{0.5}$

32. $\sqrt{e^x+1}$

33. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

34. $f(\theta)=(e^\theta+e^{-\theta})^{-1}$

35. 求 $f(x)=(x-1)^3$ 在 $x=2$ 点处的切线方程.

36. 求 $y=e^{-2t}$ 在 $t=0$ 处的切线方程, 并在同一坐标系下画出 $y=e^{-2t}$ 及切线的图像进行验证.

37. 求 $f(x)=10e^{-0.2x}$ 在 $x=4$ 的点处的切线方程.

38. 某公司估计出售 q 件商品的总收益 R 为

$$R = \ln(1 + 1000q^2).$$

计算 $q = 10$ 时的边际收益.

39. 根据美国人口普查, 世界人口 P(单位: 亿) 大约为

$$P = 6.342e^{0.011t},$$

其中 t 是自 2004 年 1 月 1 日以来的年数. 世界人口在那一天的增长率是多少? 以百万人/年为单位给出你的答案.

40. 生产 q 单位某产品的成本为 $C(q) = 1000 + 30e^{0.05q}$ 美元. 求 $q = 50$ 时的成本和边际成本, 并用经济学术语进行说明.

41. 某产品的需求曲线由

$$q = f(p) = 10\ 000e^{-0.25p},$$

其中 q 是售出的产品量, p 是产品价格 (单位: 美元). 求 $f(2)$ 和 $f'(2)$, 并用经济学术语说明这些答案提供给你的信息.

42. 某药品服用 t 小时后, 体内的浓度为 $f(t) = 27e^{-0.14t}$ng/ml. 那么服用 4 小时后, 浓度是多少? 此时, 浓度的变化率是多少?

43. 5000 美元存入某银行账户 t 年后, 账面金额 B 为 $B = 5000e^{0.08t}$. 在 $t = 5$ 时, 账户金额以什么速率变化? 用金融术语解释你的答案.

44. 在 $t = 0$ 时刻放到冰箱内的一瓶水, t 分钟后的温度 H(单位: 摄氏度) 为

$$H = 4 + 16e^{-0.02t},$$

水初始冷却多快? 10 分钟后呢? 答案请带单位.

45. 鱼的数量约为 $P(t) = 10e^{0.6t}$, 其中 t 的计量单位是月. 计算下列各量, 并带单位说明它们告诉我们有关数量的信息.

(a) $P(12)$ **(b)** $P'(12)$.

46. 某移动的物体与一个固定点的距离 s 是时间的函数, $s = 20e^{t/2}$. 求物体的速度 v 关于时间 t 的函数.

47. 如果投资 P 美元到年利率为 $r\%$ 的银行账户, t 年后你将拥有 B 美元, 其中

$$B = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t.$$

(a) 假设 P 和 r 是常数, 求 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. 从钱的角度来说, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 表示什么含义?

(b) 假设 P 和 t 是常数, 求 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}r$. 从钱的角度来说, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}r$ 表示什么含义?

48. 一些经济学家认为, 每多受一年教育人的薪水平均提高约 14%. 假设在你目前的教育水平上, 你每小时挣 10 美元, 且通货膨胀使薪水以每年 3.5%的连续增长率增长.

(a) 如果你接受另外 4 年的教育, 你每小时的薪水将会是多少?

(b) 若没有这额外 4 年的教育, 你在 20 年内的薪水相差多少?

(c) 你求出的 (b) 部分的差是否随着时间的增长而变大? 如果是, 求以何种比率变大? (假定额外受教育的时间保持在 4 年).

在 49~52 题中, 利用图 3-18 计算导数.

49. $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))\right|_{x=30}$ **50.** $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x))\right|_{x=70}$

51. $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x))\right|_{x=30}$ **52.** $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(f(x))\right|_{x=70}$

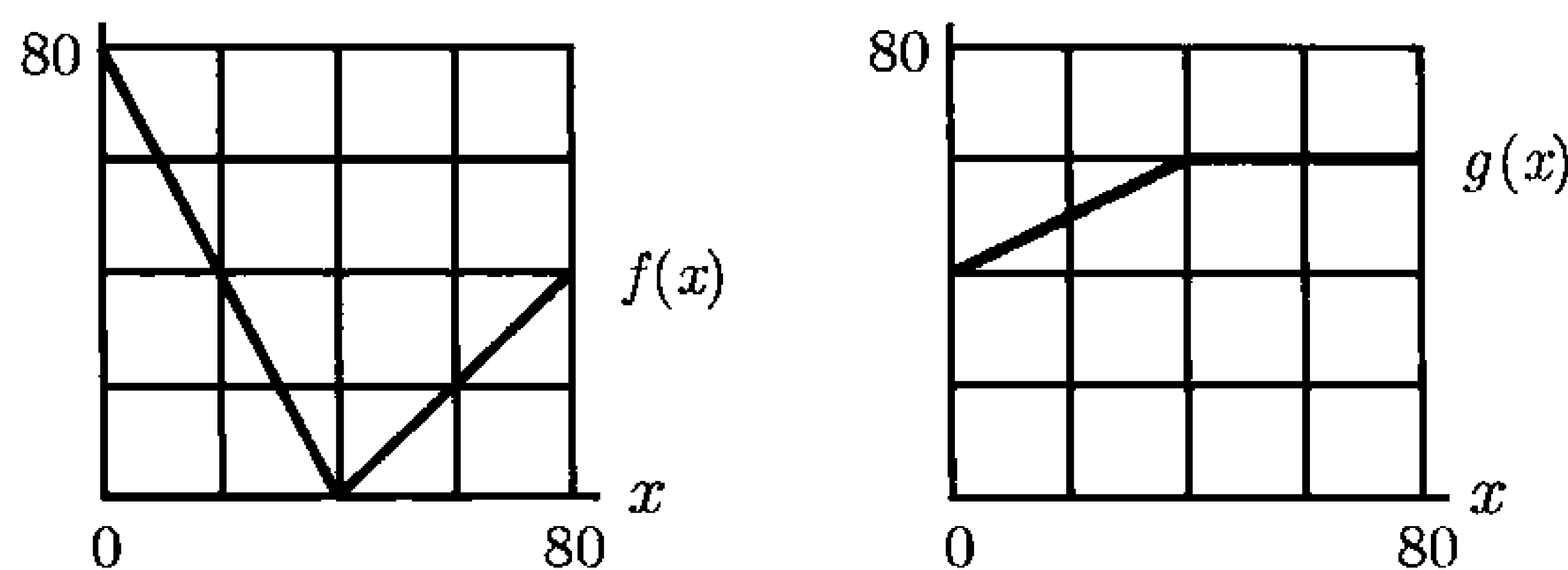


图 3-18

在习题 53~56 中, 令 $h(x) = f(g(x)), k(x) = g(f(x))$. 利用图 3-19, 计算导数.

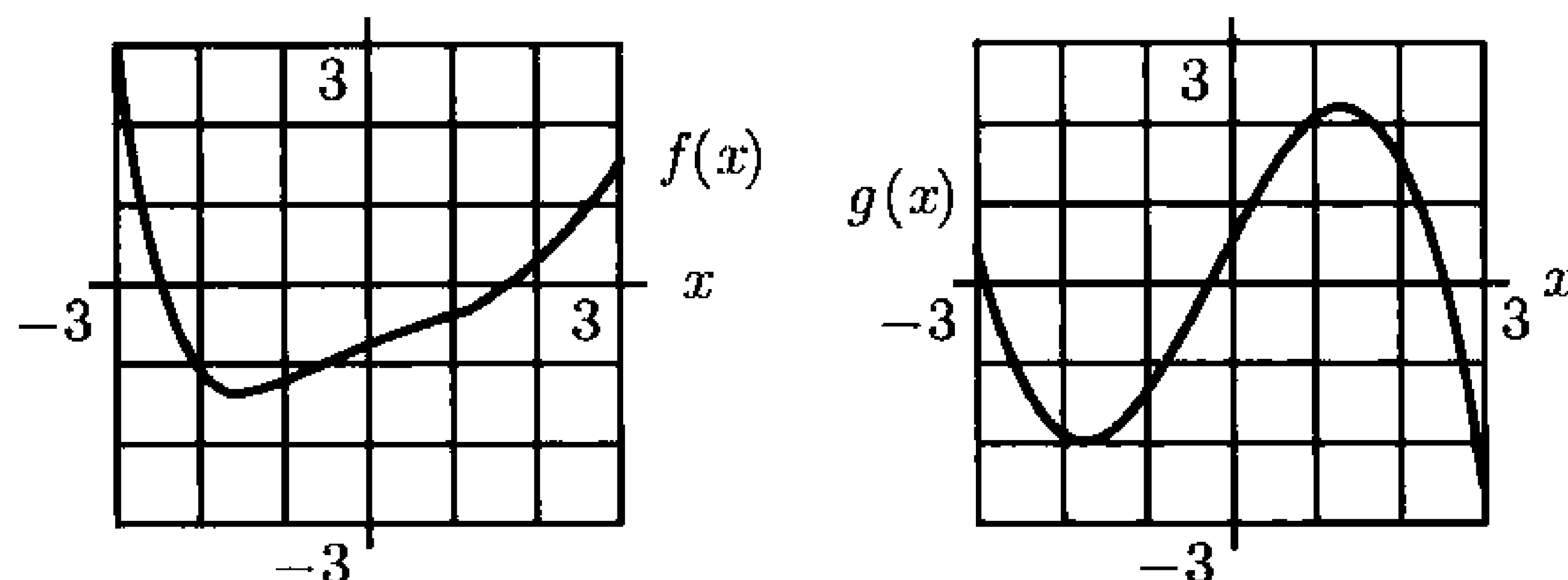


图 3-19

53. $h'(1)$

54. $k'(1)$

55. $h'(2)$

56. $k'(2)$

3.4 乘积法则和商法则

这部分介绍如何计算函数的乘积和商的导数.

3.4.1 乘积法则

假设已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导数, 计算乘积 $f(x)g(x)$ 的导数. 我们先从一个例子开始. 设 $f(x) = x, g(x) = x^2$, 则

$$f(x)g(x) = x \cdot x^2 = x^3,$$

因此乘积的导数等于 $3x^2$. 由于 $f'(x) = 1, g'(x) = 2x$, 于是 $f'(x) \cdot g'(x) = (1)(2x) = 2x$, 从而知道乘积的导数不等于导数的乘积. 一般情况下, 我们有以下法则, 在 "相关理论" 部分给出了该法则的证明.

> **乘积法则**
>
> 如果 $u = f(x)$ 和 $v = g(x)$ 都是可导函数, 则
>
> $$(fg)' = f'g + fg'.$$
>
> 乘积法则也可以写成
>
> $$\frac{\mathrm{d}(uv)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot u.$$
>
> 用文字描述为:
>
> 乘积的导数等于第一个函数的导数乘以第二个函数再加上第一个函数乘以第二个函数的导数.

我们验证得出, 该法则在 $f(x)=x, g(x)=x^2$ 情形下给出了正确答案. $f(x)\cdot g(x)$ 的导数为

$$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=1(x^2)+x(2x)=x^2+2x^2=3x^2.$$

这就是我们期望的 $f(x)g(x)=x\cdot x^2=x^3$ 的导数.

例 1 求导: (a) x^2e^{2x} (b) $t^3\ln(t+1)$ (c) $(3x^2+5x)e^x$.

解 (a) 利用乘积法则, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2e^{2x}) &= \frac{d}{dx}(x^2)\cdot e^{2x}+x^2\frac{d}{dx}(e^{2x})\\ &= (2x)e^{2x}+x^2(2e^{2x})\\ &= 2xe^{2x}+2x^2e^{2x}.\end{aligned}$$

(b) 利用乘积法则求导得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(t^3\ln(t+1)) &= \frac{d}{dt}(t^3)\cdot\ln(t+1)+t^3\frac{d}{dt}(\ln(t+1))\\ &= (3t^2)\ln(t+1)+t^3\left(\frac{1}{t+1}\right)\\ &= 3t^2\ln(t+1)+\frac{t^3}{t+1}.\end{aligned}$$

(c) 由乘积法则得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((3x^2+5x)e^x) &= \left(\frac{d}{dx}(3x^2+5x)\right)e^x+(3x^2+5x)\frac{d}{dx}(e^x)\\ &= (6x+5)e^x+(3x^2+5x)e^x\\ &= (3x^2+11x+5)e^x.\end{aligned}$$

□

例 2 求 $C=\dfrac{e^{2t}}{t}$ 的导数.

解 我们把 C 写成 $e^{2t}t^{-1}$, 并利用乘积法则:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{2t}t^{-1}) &= \frac{d}{dt}(e^{2t})\cdot t^{-1}+e^{2t}\frac{d}{dt}(t^{-1})\\ &= (2e^{2t})\cdot t^{-1}+e^{2t}(-1)t^{-2}\\ &= \frac{2e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{t^2}.\end{aligned}$$

□

例 3 某产品的需求曲线满足方程 $p=80e^{-0.003q}$, 其中 p 是价格, q 是产品数量.

(a) 把收益表示成售出的产品数量的函数.

(b) 求边际收益函数.

解 (a) 由于收益 = 价格 × 产品数量, 我们得到 $R=pq=(80e^{-0.003q})q=80qe^{-0.003q}$.

(b) 边际收益函数是收益函数关于产品数量的导数. 由乘积法则得

$$\text{边际收益}=\frac{d}{dq}(80qe^{-0.003q})$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(80q)\right)\mathrm{e}^{-0.003q} + 80q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(\mathrm{e}^{-0.003q})\right)$$
$$= (80)\mathrm{e}^{-0.003q} + 80q(-0.003\mathrm{e}^{-0.003q})$$
$$= (80 - 0.24q)\mathrm{e}^{-0.003q}. \qquad \square$$

3.4.2 商法则

假设要求形如 $Q(x) = f(x)/g(x)$ 的函数的导数. (当然, 必须避开 $g(x) = 0$ 的点.) 我们需要一个由 f' 和 g' 表示的公式. 也就是需要以下法则, 其证明见 "相关理论" 部分.

商法则

如果 $u = f(x)$ 和 $v = g(x)$ 都是可导函数, 则

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

或等价地,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot v - u\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}.$$

用文字描述为:

商的导数等于分子的导数乘以分母减去分子乘以分母的导数, 再除以分母的平方.

例 4 求导 (a) $\dfrac{5x^2}{x^3+1}$ (b) $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$.

解 (a) 利用商法则, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{5x^2}{x^3+1}\right) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2)\right)(x^3+1) - 5x^2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{10x(x^3+1) - 5x^2(3x^2)}{(x^3+1)^2}$$
$$= \frac{-5x^4 + 10x}{(x^3+1)^2}.$$

(b) 利用商法则求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\right)(1+\mathrm{e}^x) - 1\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{0(1+\mathrm{e}^x) - 1(0+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$$
$$= \frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

(c) 由商法则得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right) = \frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x)\right)x^2 - \mathrm{e}^x\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\right)}{(x^2)^2} = \frac{\mathrm{e}^x x^2 - \mathrm{e}^x(2x)}{x^4}$$

$$= e^x\left(\frac{x^2-2x}{x^4}\right) = e^x\left(\frac{x-2}{x^3}\right). \qquad \square$$

习题

1. 设 $f(x)=(2x+1)(3x-2)$, 分别用乘积法则和乘出来再求导这两种方法求 $f'(x)$. 你是否得到相同的结果?

2. 设 $f(x)=x^2(x^3+5)$, 分别用乘积法则和乘出来再求导这两种方法求 $f'(x)$. 你是否得到相同的结果? 是否一定得到相同的结果?

对习题 3~33 求导. 假定 a,b,c,k 是常数.

3. $f(x)=xe^x$

4. $f(t)=te^{-2t}$

5. $y=5xe^{x^2}$

6. $y=t^2(3t+1)^3$

7. $y=x\ln x$

8. $y=(t^2+3)e^t$

9. $z=(3t+1)(5t+2)$

10. $y=(t^3-7t^2+1)e^t$

11. $P=t^2\ln t$

12. $f(t)=\dfrac{5}{t}+\dfrac{6}{t^2}$

13. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x}$

14. $R=3qe^{-q}$

15. $y=te^{-t^2}$

16. $f(z)=\sqrt{z}e^{-z}$

17. $g(p)=p\ln(2p+1)$

18. $f(t)=te^{5-2t}$

19. $f(w)=(5w^2+3)e^{w^2}$

20. $y=x\cdot 2^x$

21. $w=(t^3+5t)(t^2-7t+2)$

22. $z=(te^{3t}+e^{5t})^9$

23. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$

24. $w=\dfrac{3z}{1+2z}$

25. $z=\dfrac{1-t}{1+t}$

26. $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

27. $w=\dfrac{3y+y^2}{5+y}$

28. $y=\dfrac{1+z}{\ln z}$

29. $f(t)=ae^{bt}$

30. $f(x)=(ax^2+b)^3$

31. $f(x)=axe^{-bx}$

32. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+k}$

33. $g(\alpha)=e^{\alpha e^{-2\alpha}}$

34. 设 $f(x)=(3x+8)(2x-5)$, 求 $f'(x), f''(x)$.

35. 求函数 $f(x)=x^2e^{-x}$ 的图像在 $x=0$ 处的切线方程. 通过在同一坐标系下画出函数和切线图像来验证.

36. 求函数 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+1}$ 的图像在 $x=0$ 处的切线方程.

37. 如果 p 是价格 (单位: 美元), q 是产量, 对某产品的需求量为 $q=5000e^{-0.08p}$.

(a) 以 10 美元的价格卖出的产品量是多少?

(b) 求需求量在价格为 10 时关于价格的导数, 并从产量角度解释你的答案.

38. 某产品的需求量由习题 37 给出. 求价格为 10 美元时的收益及收益关于价格的导数. 用经济学术语解释你的答案.

39. 某药品注射 t 小时后, 在体内的残留量 Q(单位: mg) 为

$$Q=f(t)=100te^{-0.5t}.$$

求 $f(1), f'(1)$, $f(5)$ 和 $f'(5)$. 请带单位并解释答案.

40. 某产品的需求量 q 用价格 p 表示为 $q = 1000e^{-0.02p}$.

(a) 写出收益 R 关于价格的函数.

(b) 写出收益 R 关于价格的变化率.

(c) 求价格为 10 时的收益和收益关于价格的变化率, 并用经济学术语解释你的答案.

41. 某药物的浓度曲线为 $C = f(t) = 20te^{-0.04t}$, 其中 C, t 的计量单位分别为 mg/ml 和分钟.

(a) 画图. $f'(15)$ 是正的还是负的? $f'(45)$ 是正的还是负的? 请解释.

(b) 用解析法求 $f(30), f'(30)$, 用它们说明体内的药物浓度.

42. 若 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(tf(t)) = 1 + f(t)$, 求 $f'(t)$.

43. 设 $h(x) = s(x)t(x), p(x) = t(x)/s(x)$, 其中 $t(x), s(x)$ 如图 3-20 所示. 求

(a) $h'(1)$ (b) $h'(0)$ (c) $p'(0)$

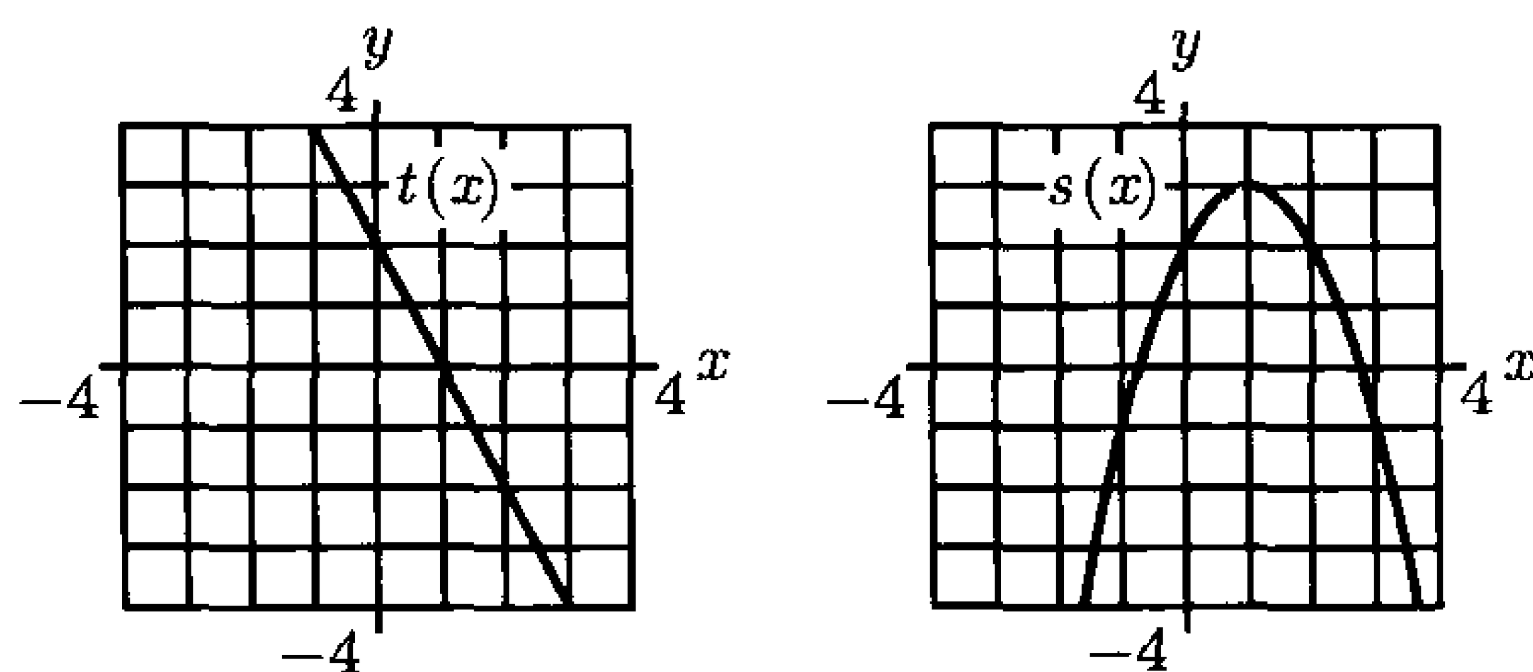


图 3-20

44. 某溜冰板的销售量 q 取决于销售价格 p (单位: 美元), 因此我们记作 $q = f(p)$. 已知 $f(140) = 15\,000, f'(140) = -100$.

(a) 关于溜冰板的销售情况, $f(140) = 15\,000, f'(140) = -100$ 告诉你些什么?

(b) 销售溜冰板的总收益 $R = pq$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=140}$.

(c) $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=140}$ 的符号是什么? 如果溜冰板现以 140 美元的价格出售, 问如果价格增加到 141 美元, 收益如何变化?

45. 导数 f' 表示量 f 的 (绝对) 变化率, 而 f'/f 表示量的相对变化率. 在本题中, 我们证明乘积法则相当于相对变化率的加法法则. 假设 $h = f \cdot g, f \neq 0, g \neq 0$.

(a) 通过两边同时乘以 h 再利用 $h = f \cdot g$, 证明以下加法法则

$$\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$$

蕴含乘积法则.

(b) 通过在乘积法则的等式两边同除以 $h = f \cdot g$, 证明乘积法则蕴含 (a) 部分的加法法则.

3.5 周期函数的导数

由于正弦函数和余弦函数都是周期函数, 它们的导数必然也是周期函数. (为

什么?) 我们观察图 3-21 中 $f(x)=\sin x$ 的图像, 并从图像上来估算导函数.

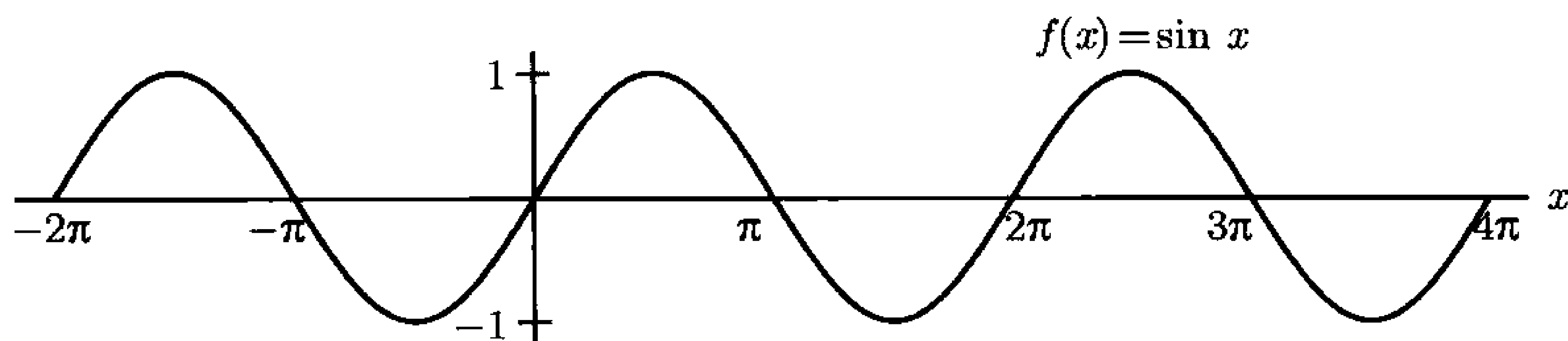


图 3-21 $f(x)=\sin x$

首先, 我们可以想想, 导数何处为零. ($x=\pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2$, 等等) 然后再想想, 何处导数为正, 何处为负. ($-\pi/2<x<\pi/2$ 时为正; $\pi/2<x<3\pi/2$ 时为负, 等等.) 由于在 $x=0, 2\pi$ 等处斜率取得最大的正值, 在 $x=\pi, 3\pi$ 等处取得最小的负值, 我们得到图 3-22 中的图像.

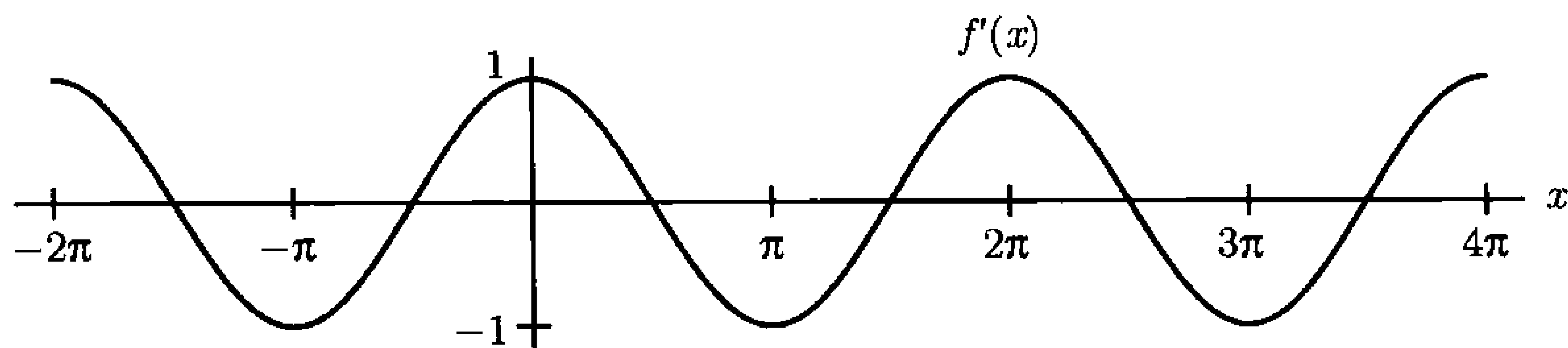


图 3-22 $f(x)=\sin x$ 的导数

图 3-22 中导数的图像看上去像余弦函数的图像. 这可以使我们得出一个相当正确的猜测, 即正弦函数的导数是余弦.

当然, 仅从图像上, 我们不能肯定正弦的导数恰是余弦. 然而, 这实际上是正确的.

我们能做的一件事情是验证图 3-22 中的导函数的振幅是 1(因为如果它是余弦函数, 就必然如此). 那就意味着我们必须让我们自己确信 $f(x)=\sin x$ 的导数在 $x=0$ 时的值为 1. 下面这个例子表明, x 的单位是弧度时, 这一点是正确的.

例 1 利用计算器, 估算 $f(x)=\sin x$ 的导数在 $x=0$ 时的值. 请确认你的计算器已经在弧度状态下.

解 我们利用 $\sin x$ 在小区间 $0\leqslant x\leqslant 0.01$ 上的平均变化率来计算

$$f'(0)\approx\frac{\sin(0.01)-\sin(0)}{0.01-0}=\frac{0.009\ 999\ 8-0}{0.01}=0.999\ 98\approx 1.0$$

$f(x)=\sin x$ 的导数在 $x=0$ 时约是 1. □

注意: 上一个例子中 x 写作弧度形式. 我们得到的有关 $\sin x$ 导数的结论只有在 x 是弧度形式下成立.

例 2 从余弦函数的图像入手, 画出它的导数图像.

解　余弦函数 $g(x)=\cos x$ 的图像参见图 3-23a. 它的导数在 $x=0,\pm\pi,\pm2\pi$ 等点处等于 0; 在 $-\pi<x<0,\pi<x<2\pi$ 等区间内为正, 在 $0<x<\pi,2\pi<x<3\pi$ 等区间内为负. 导数图像参见图 3-23b.

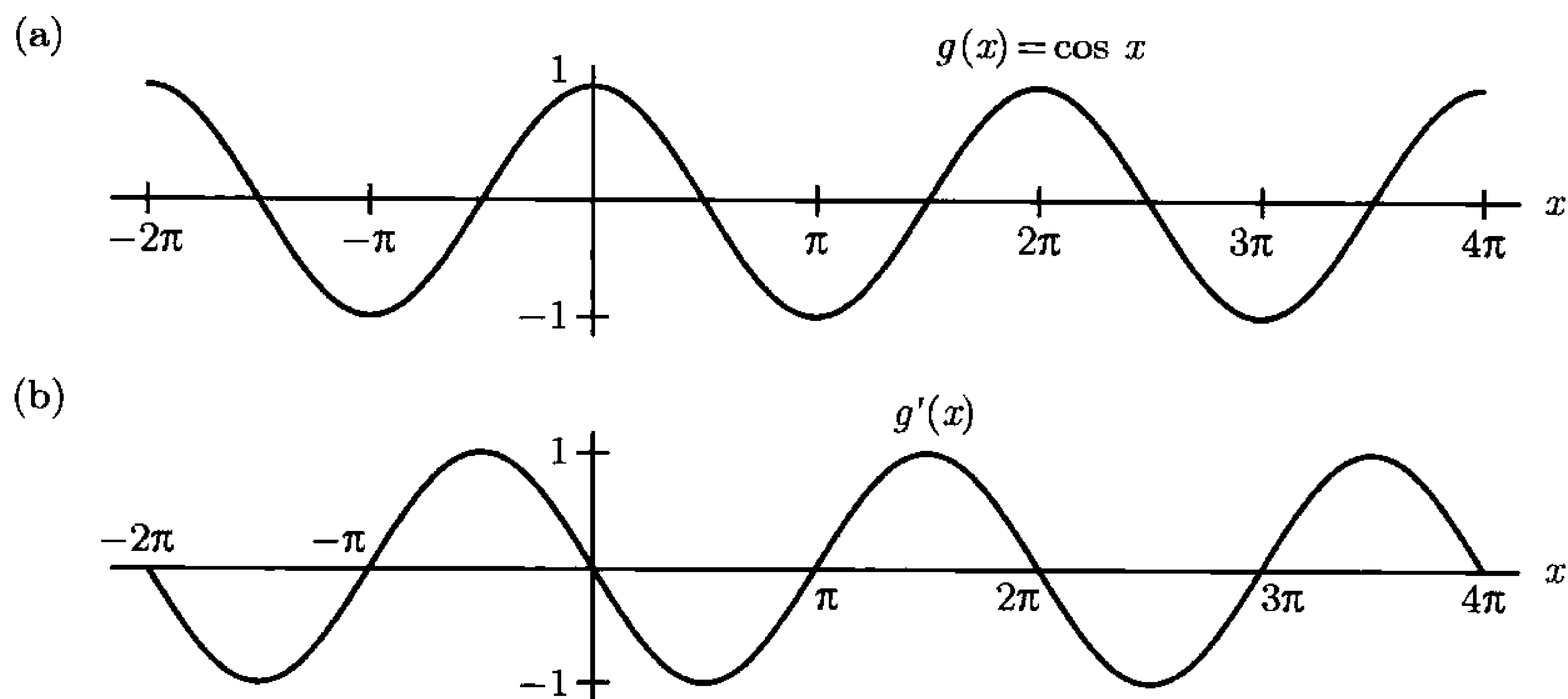


图 3-23　$g(x)=\cos x$ 和它的导数 $g'(x)$ 的图像

□

像我们处理正弦函数的方法一样, 我们将利用图像做出猜测. 图 3-23b 中的余弦函数的导数看上去好像正弦函数关于 x 轴反射的图像. 结果证明 $\cos x$ 的导数是 $-\sin x$.

> 对于弧度制的 x,
> $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)=-\sin x.$$

例 3　求导:

(a) $5\sin t-8\cos t$　　(b) $5-3\sin x+x^3$

解　(a) 求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\sin t-8\cos t)=5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)-8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)=5(\cos t)-8(-\sin t)=5\cos t+8\sin t$$

(b) 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-3\sin x+x^3)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5)-3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)=0-3(\cos x)+3x^2=-3\cos x+3x^2.$$

□

链式法则告诉我们如何求与正弦、余弦有关的复合函数的导数. 设 $y=\sin(3t)$, 于是 $y=\sin z, z=3t$, 从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\cos z\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\cos(3t)\cdot 3=3\cos(3t).$$

一般说来,

如果 z 是 t 的可导函数, 则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin z) = \cos z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos z) = -\sin z \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

在很多应用中, 对某个常数 $k, z = kt$, 我们有

如果 k 是常数, 则
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin kt) = k\cos kt, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos kt) = -k\sin kt.$$

例 4 求导:

(a) $\sin(t^2)$ (b) $5\cos(2t)$ (c) $t\sin\ t$.

解 (a) 我们有 $y = \sin z, z = t^2$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t^2)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin z) = \cos z\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \cos(t^2)\cdot 2t = 2t\cos(t^2).$$

(b) 我们有 $y = 5\cos z, z = 2t$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos(2t)) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(2t)) = 5(-2\sin(2t)) = -10\sin(2t).$$

(c) 我们利用乘积法则, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\ \sin t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t)\cdot\sin t + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = 1\cdot\sin t + t(\cos t) = \sin t + t\cos t.$$ □

习题

求习题 1~20 中函数的导数. 假设 A 和 B 是常数.

1. $y = 5\sin\ x$
2. $P = 3 + \cos\ t$
3. $y = t^2 + 5\cos\ t$
4. $y = B + A\sin\ t$
5. $R(q) = q^2 - 2\cos\ q$
6. $y = 5\sin\ x - 5x + 4$
7. $f(x) = \sin(3x)$
8. $R = \sin(5t)$
9. $W = 4\cos(t^2)$
10. $y = 2\cos(5t)$
11. $y = \sin(x^2)$
12. $y = A\sin(Bt)$
13. $z = \cos(4\theta)$
14. $y = 6\sin(2t) + \cos(4t)$
15. $f(x) = x^2\cos\ x$
16. $f(x) = 2x\sin(3x)$
17. $f(\theta) = \theta^3\cos\theta$
18. $z = \dfrac{\mathrm{e}^{t^2} + t}{\sin(2t)}$
19. $f(t) = \dfrac{t^2}{\cos\ t}$
20. $f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$
21. 求 $y = \sin x$ 的图像在 $x = \pi$ 处的切线方程. 在同一坐标系下画出函数和切线的图像.
22. 加拿大芬地湾水的深度 y(单位: m) 是时间 t(从午夜起的小时数) 的函数, 其表达式为

$$y = 10 + 7.5\cos(0.507t).$$

在下面这些时刻, 潮起潮落的速度是多少 (单位: m/h)?

(a) 上午 6 时 (b)上午 9 时

(c) 正午时 (d) 下午 6 时

23. 如果 t 是自 6 月以来的月数, 在美国俄亥俄州的森林里发现的鸟的种类 N 大约根据函数

$$N = f(t) = 19 + 9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

波动.

(a) 画出 $f(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 24$ 上的图像, 并指出它说明什么. 利用图像判断 $f'(1)$ 和 $f'(10)$ 是正是负?

(b) 求 $f'(t)$.

(c) 计算 $f(1), f'(1), f(10)$ 和 $f'(10)$ 并解释.

24. $y = \sin(x^4)$ 在 $x = 10$ 处是递增还是递减? 是上凹还是下凹?

25. 某公司的月销售额 $S(t)$ 是季节性的, 它是时间 t(单位: 月) 的函数

$$S(t) = 2000 + 600\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) 画出 $S(t)$ 从 $t = 0$ 到 $t = 12$ 时的图像. 最大的月销售额是多少? 最小月销售额是多少? 如果 1 月份是 $t = 0$, 一年中, 哪个月的销售额最大?

(b) 求 $S(2), S'(2)$, 并用它们解释销售额.

26. 在 1.10 节, 缅因州波特兰的水深 (单位: ft)y 表示成凌晨以来的 t 时的形式为

$$y = 4.9 + 4.4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

(a) 求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, 它表示水深的什么含义?

(b) 对 $0 \leqslant t \leqslant 24, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 何时为零? (图 1-101 或许有助于理解.)$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 等于零表示什么意思?

本章概要

- **初等函数的导数**
  幂函数, 多项式, 指数函数, 对数函数和周期函数
- **和, 差及数乘函数的导数**
- **链式法则**
- **乘积法则和商法则**
- **切线的逼近**

复习题

求 1~40 中函数的导数. 假设 k 是常数.

1. $f(t) = 6t^4$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$
3. $P(t) = \mathrm{e}^{2t}$
4. $W = r^3 + 5r - 12$
5. $C = \mathrm{e}^{0.08q}$
6. $y = 5\mathrm{e}^{-0.2t}$
7. $y = x\mathrm{e}^{3x}$
8. $s(t) = (t^2 + 4)(5t - 1)$

9. $g(t) = e^{(1+3t)^2}$

10. $f(x) = x^2 + 3\ln x$

11. $Q(t) = 5t + 3e^{1.2t}$

12. $g(z) = (z^2 + 5)^3$

13. $f(x) = 6(5x - 1)^3$

14. $f(z) = \ln(z^2 + 1)$

15. $h(x) = (1 + e^x)^{10}$

16. $q = 100e^{-0.05p}$

17. $y = x^2 \ln x$

18. $s(t) = t^2 + 2\ln t$

19. $P = 4t^2 + 7\sin t$

20. $R(t) = (\sin t)^5$

21. $h(t) = \ln(e^{-t} - t)$

22. $f(x) = \sin(2x)$

23. $g(x) = \dfrac{25x^2}{e^x}$

24. $h(t) = \dfrac{t+4}{t-4}$

25. $y = x^2 \cos x$

26. $h(x) = \ln(1 + e^x)$

27. $h(w) = e^{\ln w + 1}$

28. $h(x) = \ln(x^3 + x)$

29. $q(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^{-x}}$

30. $q(x) = \dfrac{x}{1+x}$

31. $f(x) = xe^x$

32. $h(x) = \sin(e^x)$

33. $h(x) = \cos(x^3)$

34. $z = \dfrac{3t+1}{5t+2}$

35. $z = \dfrac{t^2 + 5t + 2}{t+3}$

36. $h(p) = \dfrac{1 + p^2}{3 + 2p^2}$

37. $y = \dfrac{3^x}{3} + \dfrac{33}{\sqrt{x}}$

38. $f(t) = \sin\sqrt{e^t + 1}$

39. $g(y) = e^{2e^{(y^3)}}$

40. $g(t) = \dfrac{\ln(kt) + t}{\ln(kt) - t}$

41. 设 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 11$, 求 $f'(0), f'(2), f'(-1)$.

42. (a) 利用 $P(q) = 6q - q^2$ 的图像判断下列导数值 $P'(1), P'(3), P'(4)$ 哪些为正, 哪些为负, 哪些为零? 请解释.

(b) 求 $P'(q)$ 及 (a) 部分的三个导数值.

43. 求 f 的图像在点 $(1, 1)$ 处的切线方程, 其中 f 为 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 1$.

44. (a) 利用半径为 r 的圆的面积公式 $A = \pi r^2$ 计算 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}r$.

(b) (a) 部分的答案看上去应该很熟悉吧. $\mathrm{d}A/\mathrm{d}r$ 所表示的几何意义是什么?

(c) 利用差商解释你在 (b) 部分的结论.

45. 从 1960 年 1 月 1 日起, 城市 SC 的人口可以描述为:

$$P = 35\,000(0.98)^t,$$

其中 P 是自 1960 开始后 t 年城市的人口. 请问 2005 年 1 月 1 日该城市的人口变化率为多少?

46. 求 $P(t) = t\ln t$ 的图像在 $t = 2$ 处的切线方程. 在同一坐标系下画出函数 $P(t)$ 及切线 $Q(t)$ 的图像.

47. 世界人口约为 $f(t) = 6e^{0.013t}$(十亿), 其中 t 是自 1999 年以来的年数. 求 $f(0), f'(0), f(10)$ 及 $f'(10)$, 答案带单位, 并从人口角度说明你的答案.

48. 给定单摆的长度 l(单位: m), 它的周期 T(单位: s) 为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9.8}},$$

(a) 随着 l 的增大, 周期增大的速度是多少?

(b) 随着 l 的增大, 这个变化率是增大还是减小?

49. 图 3-24 给出了 $x=a$ 附近逼近 $f(x)$ 的切线.

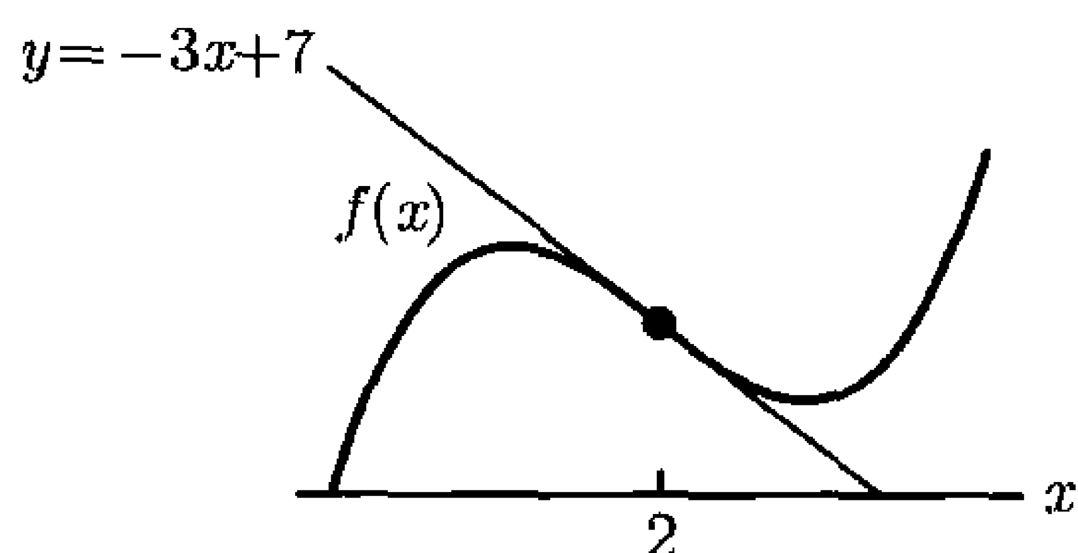


图 3-24

(a) 求 $a, f(a), f'(a)$.

(b) 估计 $f(2.1)$ 和 $f(1.98)$. 这些估计值是偏大还是偏小? 哪个估计你预期更准确, 并说明为什么?

50. 一克放射性碳 14 根据公式 $Q=\mathrm{e}^{-0.000\ 121t}$ 衰变, 其中 Q 是 t 年后碳 14 的剩余克数.

(a) 求碳 14 的衰变率 (单位: 克/年).

(b) 画出 (a) 部分的衰变率关于时间的图像.

51. 放入冰箱冷却的一罐汽水的温度 H(单位: °F) 是时间 t(单位: h) 的函数

$$H=40+30\mathrm{e}^{-2t}.$$

(a) 求汽水速度的变化率 (单位: °F/h).

(b) $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ 的符号是什么? 请解释.

(c) 对 $t\geqslant 0, \mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ 的值何时最大? 为什么会是这样?

52. 对 $a>0, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x)=(\ln a)a^x$, 说明 a 为何值时 a^x 递增, 为何值时 a^x 递减?

53. 2005 年某款已购汽车的价值可由函数 $V(t)=25(0.85)^t$ 近似, 其中 t 是自购买日起的年数, V 是价值 (单位: 千美元).

(a) 计算 $V(4)$, 并作说明.

(b) 求 $V'(t)$ 的表达式, 要求带单位.

(c) 计算 $V'(4)$, 并作说明.

(d) 利用 $V(t), V'(t)$ 及你认为相关的因素写一篇短文, 论证或反驳下述陈述: 从货币的观点来看, 尽可能长时间地拥有该汽车是最好的.

54. 一艘停泊的船在海面上上下晃动. 海底和船之间的垂直距离 y (单位: ft) 是时间 t (单位: 分钟) 的函数, 其表达式为

$$y=15+\sin(2\pi t).$$

(a) 求船在 t 时刻的垂直速度 v.

(b) 作 y 和 v 关于时间 t 的草图.

55. 假设 $r(2)=4, s(2)=1, s(4)=2, r'(2)=-1, s'(2)=3, s'(4)=3$. 计算以下的导数, 或说明为了计算这些导数还需要别的什么条件.

(a) $H'(2)$, 其中 $H(x)=r(x)+s(x)$.

(b) $H'(2)$, 其中 $H(x)=5s(x)$.

(c) $H'(2)$, 其中 $H(x)=r(x)\cdot s(x)$.

(d) $H'(2)$, 其中 $H(x)=\sqrt{r(x)}$.

56. 假设 $F(2)=1, F'(2)=5, F(4)=3, F'(4)=7, G(4)=2, G'(4)=6, G(3)=4, G'(3)=8$, 求:

(a) $H(4)$, 其中 $H(x)=F(G(x))$.

(b) $H'(4)$, 其中 $H(x)=F(G(x))$.
(c) $H(4)$, 其中 $H(x)=G(F(x))$.
(d) $H'(4)$, 其中 $H(x)=G(F(x))$.
(e) $H'(4)$, 其中 $H(x)=F(x)/G(x)$.

57. 求 $f(x)=\sin x$ 的图像在 $x=0$ 和 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程. 分别利用这两条切线近似 $\sin(\pi/6)$. 既然这两个点与 $x=\pi/6$ 的距离相等但不在同侧, 那么两个结果是否具有同等的准确性? 如果准确性不同, 你能解释不同的原因吗?

在习题 58~63 中, $h(x)=f(x)\cdot g(x), k(x)=f(x)/g(x), l(x)=g(x)/f(x)$. 利用图 3-25 估算导数.

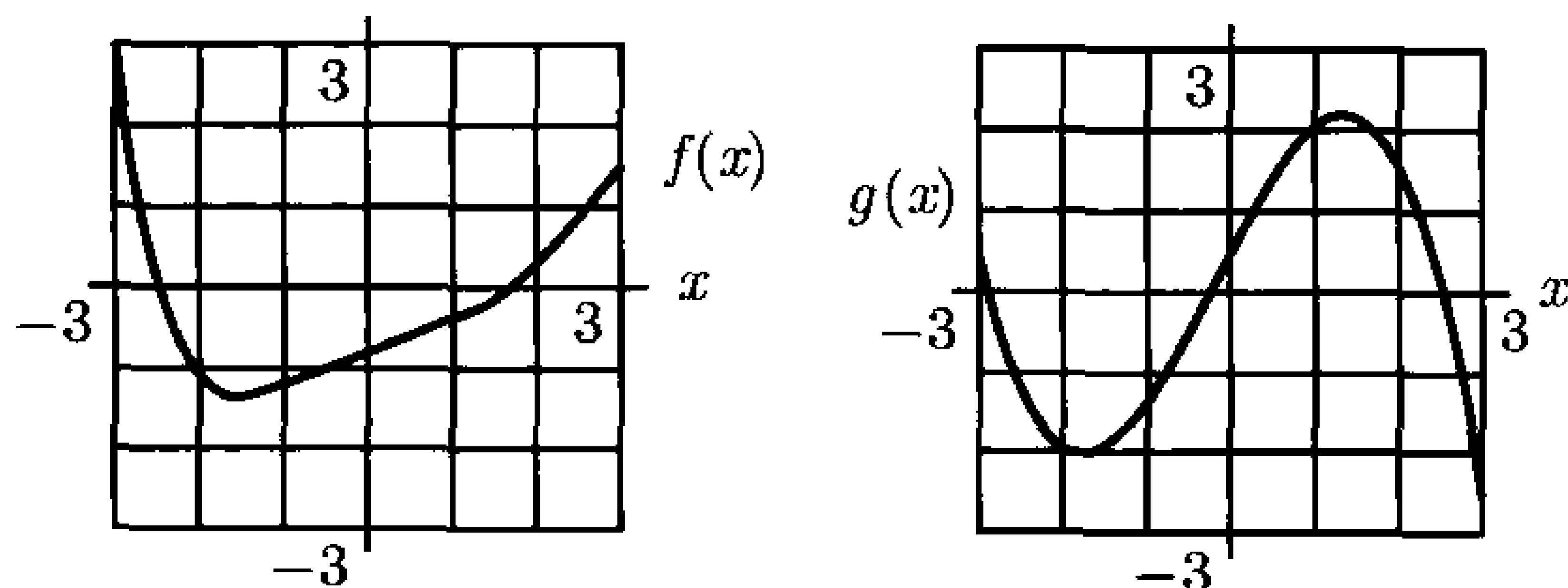


图 3-25

58. $h'(1)$ **59.** $k'(1)$
60. $h'(2)$ **61.** $k'(2)$
62. $l'(1)$ **63.** $l'(2)$

64. 函数 $f(x)=x^4-4x^3$ 在哪个区间上是单调递减且上凹的?

65. 假设 $p(x)=x^n-x$, 当

(a) $n=2$ (b) $n=1/2$ (c) $n=-1$

时, 求 p 的单调递减区间.

66. 利用图像帮助, 求抛物线 $y=x^2-2x+4$ 所有经过原点的切线方程. 在图像上画出这些直线.

67. 一家博物馆决定出售它的一幅油画, 并把所得用于投资. 如果这幅画在 2000~2020 年出售, 并且售画所得的钱投资到年复利率为 5%的银行账户, 那么 2020 年的账户金额 $B(t)$ 取决于油画出售的年份 t 以及出售价格 $P(t)$. 如果 t 是自 2000 年算起, 则 $0<t<20$, 从而

$$B(t)=P(t)(1.05)^{20-t}.$$

(a) 说明 $B(t)$ 由上述式子给出的理由.
(b) 证明 $B(t)$ 的上述表达式相当于证明

$$B(t)=(1.05)^{20}\frac{P(t)}{(1.05)^t}.$$

(c) 如果 $P(10)=150\ 000, P'(10)=5000$, 求 $B'(10)$.

68. 利用 (a) 和 (b) 部分的信息及 $m(t)=\mathrm{e}^{\mu t+\sigma^2t^2/2}$, 求统计学中正态分布的均值和方差.

(a) 均值 $=m'(0)$. (b) 方差 $=m''(0)-(m'(0))^2$

69. 如果你放大下列函数在原点附近的图像：

$y = x$　　$y = \sqrt{x}$　　$y = x^2$

$y = x^3 + \frac{1}{2}x^2$　　$x = x^3$　　$y = \ln(x+1)$

$y = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$　　$y = \sqrt{2x - x^2}$

这些函数当中的哪些看起来是一样的？把原点附近难以区分的函数放在一组，并写出它们相像的直线方程.

70. 给定形如 $f(x) = ax^n$ 的幂函数，$f'(2) = 3, f'(4) = 24$，求 a 与 n.

71. 一个洋芋放在温度保持在 200°C 的热烤箱内. 在 $t = 30$ 分钟时，洋芋的温度 T 为 120°C，且以 2°C/ 分钟的 (瞬时) 速率上升. 牛顿冷却定律 (在我们的情况下，应称其为升温定律) 表明 t 时刻的温度为

$$T(t) = 200 - ae^{-bt}.$$

求 a 与 b.

72. 给定数 $a > 1$，方程 $a^x = 1 + x$ 有解 $x = 0$. 是否存在其他解？你的答案是如何依赖于 a 的值的？[提示：画出方程两边的函数的图像.]

73. 一放入热烤箱 t 分钟后的洋芋的温度 Y(°F) 为

$$Y(t) = 350(1 - 0.7e^{-0.008t}).$$

(a) 放入到烤箱时洋芋的温度是多少？

(b) 烤箱的温度是多少？

(c) 洋芋何时达到 175°F？

(d) 估算 t = 20 时洋芋温度的上升速率.

74. 对正常数 c 和 k，Monod 生长曲线 $P = \dfrac{cr}{k+r}$ 把一个物种的增长表示成可获得的某种资源的量 r 的函数. 如果该资源随着时间周期性地变化，$r = 10\sin(\pi t/6) + 10$，求 dP/dt.

75. 某种药物的剂量 D 会引起病人的体温变化 T. 对正常数 C, T 可表示为

$$T = \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)D^3.$$

(a) 体温变化关于剂量的改变率是多少？

(b) 剂量多大时，体温变化随着剂量的增加而增加？

76. 图 3-26 给出了 M(mile) 的旅途中汽油的消耗量 G(gal).

(a) 在 $0 < M < 70$ 和 $70 < M < 100$ 这两个区间上，函数 f 是线性的. 这些直线的斜率是多少？这些斜率的单位是什么？

(b) 这次旅途的前 70 mile 中，汽油消耗是多少 (单位：mile/gal)？后 30 mile 呢？

(c) 图 3-27 把行驶的距离 M(单位：mile) 表示成旅行开始以来的时间 t(单位：h) 的函数. 用语言表述这次旅行. 尽可能说明旅行开始 1 小时后的状况. 你对 (b) 部分的答案说明什么？

(d) 如果令 $G = k(t) = f(h(t))$，计算 $k(0.5)$，并利用你的答案描述旅行.

(e) 求 $k'(0.5)$ 和 $k'(1.5)$. 请带单位并解释你的答案.

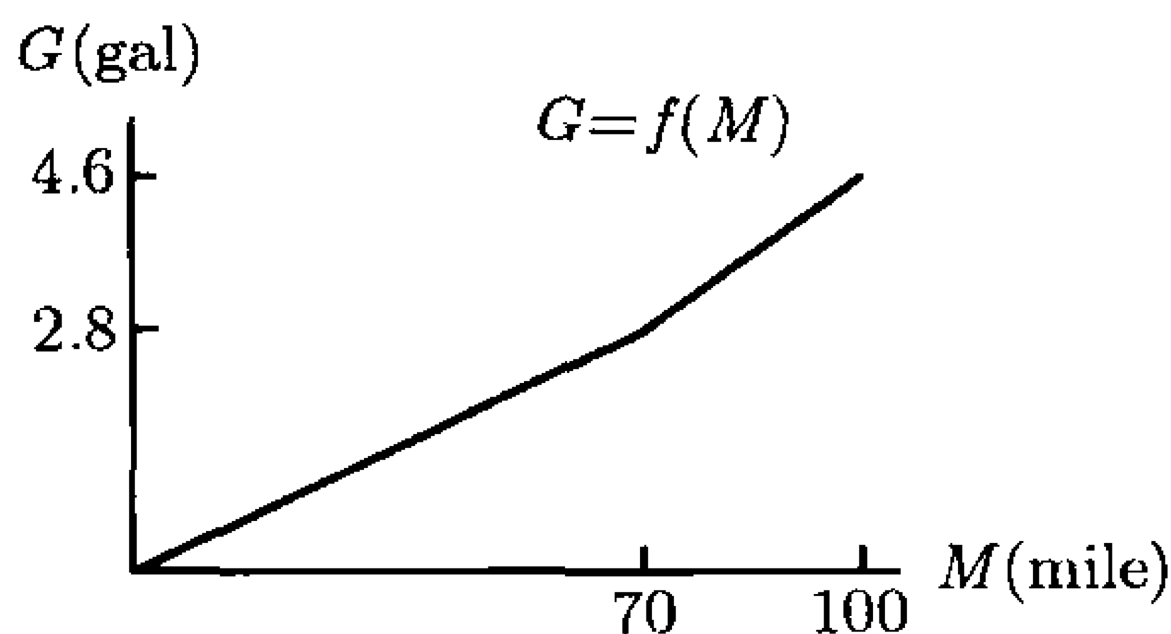


图 3-26

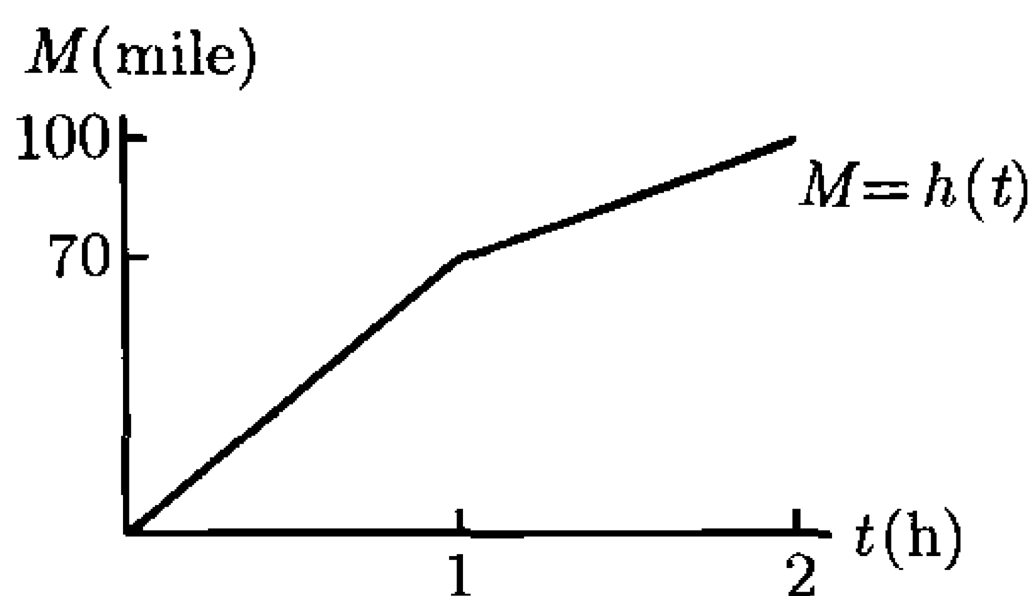


图 3-27

课外自修项目

1. **验尸官的经验法则**

验尸官利用这样一条经验法则估计死亡时间：死亡后 1 小时, 尸体温度下降 2°F, 以后每小时下降 1°F. 假设气温为 68°F, 活人温度 98.6°F, 死亡 t 小时后, 尸体的温度 $T(t)$°F 为

$$T(t) = 68 + 30.6e^{-kt}.$$

(a) k 取何值时, 尸体温度在第 1 小时内下降 2°F?

(b) 利用 (a) 求出的 k, 多少小时后, 尸体温度将以每小时 1°F 的速率下降?

(c) 利用 (a) 求出的 k, 证明死亡 24 小时后, 验尸官的经验法则与由公式所确定的温度大致相同.

2. **气压和海拔**

海平面的气压是 30 英寸汞柱. 在海拔 h(ft) 的高度上, 气压 P(单位：英寸汞柱) 为

$$P = 30e^{-3.23\times10^{-5}h}.$$

(a) 画 P 关于 h 的草图.

(b) 求在 $h = 0$ 的切线方程.

(c) 旅游者们的一条经验法则是海拔高度每上升 1000 ft, 气压下降 1in. 请写出这条经验法则所确定的气压公式.

(d) (b) 部分和 (c) 部分的答案之间有何联系? 请说明经验法则为什么有效.

(e) 经验法则所做的预测是过大还是过小? 为什么?

相关理论

导数公式的建立

$f(x)=x^2$ 的图像表明 x^2 的导数是 $f'(x)=2x$. 然而, 正如我们在第 2 章中的"相关理论"部分所学习的, 为确保这个公式成立, 我们必须利用定义:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

与第 2 章一样, 我们对差商进行化简, 然后取 h 趋于零时的极限.

例 1 确定 $g(x)=x^3$ 的导数是 $g'(x)=3x^2$.

解 我们利用定义计算 $g'(x)$:

$$\begin{aligned}g'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ \text{乘出来}\rightarrow&=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ \text{化简}\rightarrow&=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.\end{aligned}$$

求$h\to 0$时的极限

于是 $g'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)=3x^2$. □

例 2 请给出 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 的导数是 $f'(x)=\mathrm{e}^x$ 的非正式的证明.

解 由 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h-\mathrm{e}^x}{h}=\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^x\left(\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\right).\end{aligned}$$

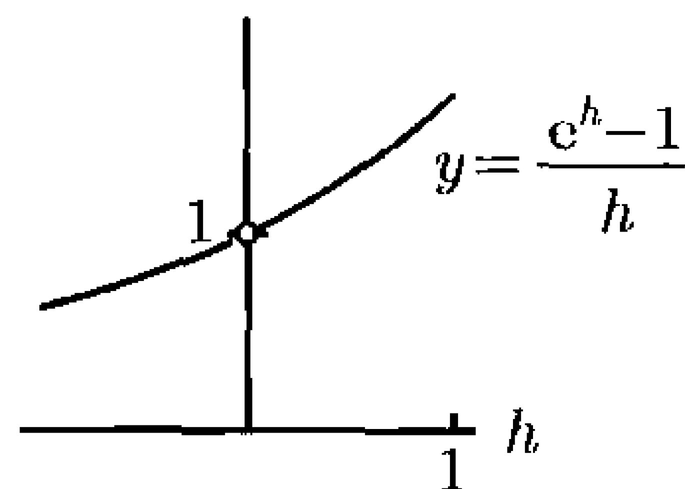


图 3-28 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ 等于多少

$\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ 在 $h\to 0$ 时的极限是多少? 图 3-28 中 $\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ 的图像表明在 $h\to 0$ 时, $\dfrac{\mathrm{e}^h-1}{h}$ 趋近于 1. 事实上, 可以证明该极限等于 1, 于是

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^x\left(\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}\right)=\mathrm{e}^x\cdot 1=\mathrm{e}^x.$$ □

例 3 证明: 如果 $f(x)=2x^2+1$, 则 $f'(x)=4x$.

解 我们对 $f(x)=2x^2+1$ 应用导数的定义:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(2(x+h)^2+1)-(2x^2+1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{2(x^2+2xh+h^2)+1-2x^2-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+1-2x^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{4xh+2h^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(4x+2h)}{h}$$

为求极限, 观察 h 趋于 0 但 $h\neq0$ 的情况. 通过化简, 我们得到

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{h(4x+2h)}{h}=\lim_{h\to0}(4x+2h)=4x$$

这是因为随着 h 接近 0, 我们知道 $4x+2h$ 接近 $4x$. □

利用链式法则建立导数公式

我们利用链式法则证明 $\ln x$ 和 a^x 的导数公式.

$\ln x$ 的导数

我们将对与 $\ln x$ 相关的等式求导. 在 1.6 节, 我们有 $e^{\ln x}=x$. 求导得

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln x})=\frac{d}{dx}(x)=1.$$

在等式左侧, 由于 e^x 是外函数, $\ln x$ 是内函数, 由链式法则得

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln x})=e^{\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x).$$

因此, 正如我们在 3.2 节所说的,

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}.$$

a^x 的导数

图像分析表明 a^x 的导数与 a^x 成比例. 现在我们要说明比例常数是 $\ln a$. 对 $a>0$, 我们利用 1.6 节的恒等式

$$\ln(a^x)=x\ln a.$$

在等式左侧, 利用 $\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$ 和链式法则得

$$\frac{d}{dx}(\ln a^x)=\frac{1}{a^x}\cdot\frac{d}{dx}(a^x).$$

由于 $\ln a$ 是常数, 对等式左边求导得

$$\frac{d}{dx}(x\ln a)=\ln a.$$

既然两边相等, 我们有

$$\frac{1}{a^x}\frac{d}{dx}(a^x)=\ln a.$$

解出 $\frac{d}{dx}(a^x)$ 得到 3.2 节的结果. 对 $a>0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = (\ln a)a^x.$$

乘积法则

假设我们要利用导数的定义计算可导函数的乘积 $f(x)g(x)$ 的导数. 注意, 在下面的第二步, 我们加减同一项: $f(x)g(x+h)$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}[f(x)g(x)]}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\end{aligned}$$

在 $h\to 0$ 时取极限, 得到乘积法则:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

商法则

令 $Q(x) = f(x)/g(x)$ 是可导函数的商. 假设 $Q(x)$ 是可导的, 我们对 $f(x) = Q(x)g(x)$ 应用乘积法则:

$$f'(x) = Q'(x)g(x) + Q(x)g'(x).$$

代入 $Q(x)$ 得

$$f'(x) = Q'(x)g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x).$$

解出 $Q'(x)$ 得

$$Q'(x) = \frac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)}.$$

分子分母同乘以 $g(x)$ 并化简得到商法则:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

习题

对习题 1~7, 利用导数的定义得到以下结果.

1. 如果 $f(x) = 2x+1$, 则 $f'(x) = 2$.

2. 如果 $f(x) = 5x^2$, 则 $f'(x) = 10x$.

3. 如果 $f(x) = 2x^2+3$, 则 $f'(x) = 4x$.

4. 如果 $f(x) = x^2+x$, 则 $f'(x) = 2x+1$.

5. 如果 $f(x) = 4x^2+1$, 则 $f'(x) = 8x$.

6. 如果 $f(x) = x^4$, 则 $f'(x) = 4x^3$. (提示: $(x+h)^4 = x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4$.)

7. 如果 $f(x) = x^5$, 则 $f'(x) = 5x^4$.

(提示: $(x+h)^5 = x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^4 + h^5$.)

8. **(a)** 利用 $g(h) = \dfrac{2^h - 1}{h}$ 的图像说明为什么我们认为 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \approx 0.6931$.

(b) 利用导数的定义及 (a) 部分的结果说明: 若 $f(x) = 2^x$, 我们相信 $f'(x) \approx (0.6931)2^x$.

9. 利用导数的定义证明如果 $f(x) = C$(C 为常数), 则 $f'(x) = 0$.

10. 利用导数的定义证明若 $f(x) = b + mx$(b, m 为常数), 则 $f'(x) = m$.

11. 利用导数的定义证明如果 $f(x) = ku(x)$, 其中 k 为常数, $u(x)$ 是一个函数, 则 $f'(x) = ku'(x)$.

12. 设 $u(x), v(x)$ 为函数, 利用导数的定义证明若 $f(x) = u(x)+v(x)$, 则 $f'(x) = u'(x)+v'(x)$.

集中练习

假设 a, b, c, k 是常数, 求习题 1~63 中函数的导数.

1. $f(t) = t^2 + t^4$

2. $g(x) = 5x^4$

3. $y = 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$

4. $s(t) = 6t^{-2} + 3t^3 - 4t^{1/2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 5\sqrt{x} - 7$

6. $P(t) = 100e^{0.05t}$

7. $f(x) = 5e^{2x} - 2 \cdot 3^x$

8. $P(t) = 1\ 000 \times (1.07)^t$

9. $D(p) = e^{p^2} + 5p^2$

10. $y = t^2e^{5t}$

11. $y = x^2\sqrt{x^2+1}$

12. $f(x) = \ln(x^2+1)$

13. $s(t) = 8\ln(2t+1)$

14. $g(w) = w^2\ln(w)$

15. $f(x) = 2^x + x^2 + 1$

16. $P(t) = \sqrt{t^2+4}$

17. $C(q) = (2q+1)^3$

18. $g(x) = 5x(x+3)^2$

19. $P(t) = be^{kt}$

20. $f(x) = ax^2 + bx + c$

21. $y = x^2\ln(2x+1)$

22. $f(t) = (e^t + 4)^3$

23. $f(x) = 5\sin(2x)$

24. $W(r) = r^2\cos\ r$

25. $g(t) = 3\sin(5t) + 4$

26. $y = e^{3t}\sin(2t)$

27. $y = 2e^x + 3\sin\ x + 5$

28. $f(t) = 3t^2 - 4t + 1$

29. $y = 17x + 24x^{1/2}$

30. $g(x) = -\dfrac{1}{2}(x^5 + 2x - 9)$

31. $f(x) = 5x^4 + \dfrac{1}{x^2}$

32. $y = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$

33. $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

34. $y = \left(\dfrac{x^2+2}{3}\right)^2$

35. $g(x) = \sin(2-3x)$

36. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{3z}$

37. $q(r) = \dfrac{3r}{5r+2}$

38. $y = x\ln\ x - x + 2$

39. $j(x) = \ln(e^{ax} + b)$

40. $g(t) = \dfrac{t-4}{t+4}$

41. $h(w) = (w^4 - 2w)^5$

42. $h(w) = w^3\ln(10w)$

43. $f(x) = \ln(\sin\ x + \cos\ x)$

44. $w(r) = \sqrt{r^4+1}$

45. $h(w) = -2w^{-3} + 3\sqrt{w}$

46. $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+9}{x+3}}$

47. $v(t)=t^2\mathrm{e}^{-ct}$

48. $f(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

49. $g(\theta)=\mathrm{e}^{\sin\theta}$

50. $p(t)=\mathrm{e}^{4t+2}$

51. $j(x)=\dfrac{x^3}{a}+\dfrac{a}{b}x^2-cx$

52. $f(z)=\dfrac{z^2+1}{\sqrt{z}}$

53. $h(r)=\dfrac{r^2}{2r+1}$

54. $g(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+3^x-\mathrm{e}$

55. $f(t)=2t\mathrm{e}^t-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$

56. $w=\dfrac{5-3z}{5+3z}$

57. $f(x)=\dfrac{x^3}{9}(3\ln x-1)$

58. $g(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^{3/2}}$

59. $y=(x^2+5)^3(3x^3-2)^2$

60. $f(x)=\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

61. $w(r)=\dfrac{ar^2}{b+r^3}$

62. $H(t)=(at^2+b)\mathrm{e}^{-ct}$

63. $g(w)=\dfrac{5}{(a^2-w^2)^2}$

第 4 章　导数的应用

在这一章, 我们用导数理解函数的性质. 研究如何确定它的局部最大值、局部最小值和拐点, 以及如何分析平均成本和边际成本之间的关系.

我们在第 2 章了解到, 一个函数的导数和函数本身之间以如下方式相互联系:

- 如果在某区间上 $f' > 0$, 那么 f 在该区间递增;
- 如果在某区间上 $f' < 0$, 那么 f 在该区间递减;
- 如果在某区间上 $f'' > 0$, 那么 f 的图像在该区间上凹;
- 如果在某区间上 $f'' < 0$, 那么 f 的图像在该区间下凹.

由于有了初等函数的导数公式, 现在我们能利用这些原理处理比第 2 章更复杂的问题.

4.1　局部最大值和局部最小值

4.1.1　关于一个函数及它的图像, 导数告诉我们些什么

在计算机或计算器上画一个函数的图像时, 我们经常只看到其图像的一部分. 由一阶导数和二阶导数给出的信息能帮助我们确定具有有趣性质的区间.

例 1　利用计算机或计算器画函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ 的有用的略图.

解　由于 f 是三次多项式, 我们期望其图像是 "S" 形. 在 $-10 \leqslant x \leqslant 10, -10 \leqslant y \leqslant 10$ 内画这个函数的图像, 却只给出了图 4-1 中的两条垂直线. 我们清楚图形不只如此, 但如何确定图形的具体位置呢?

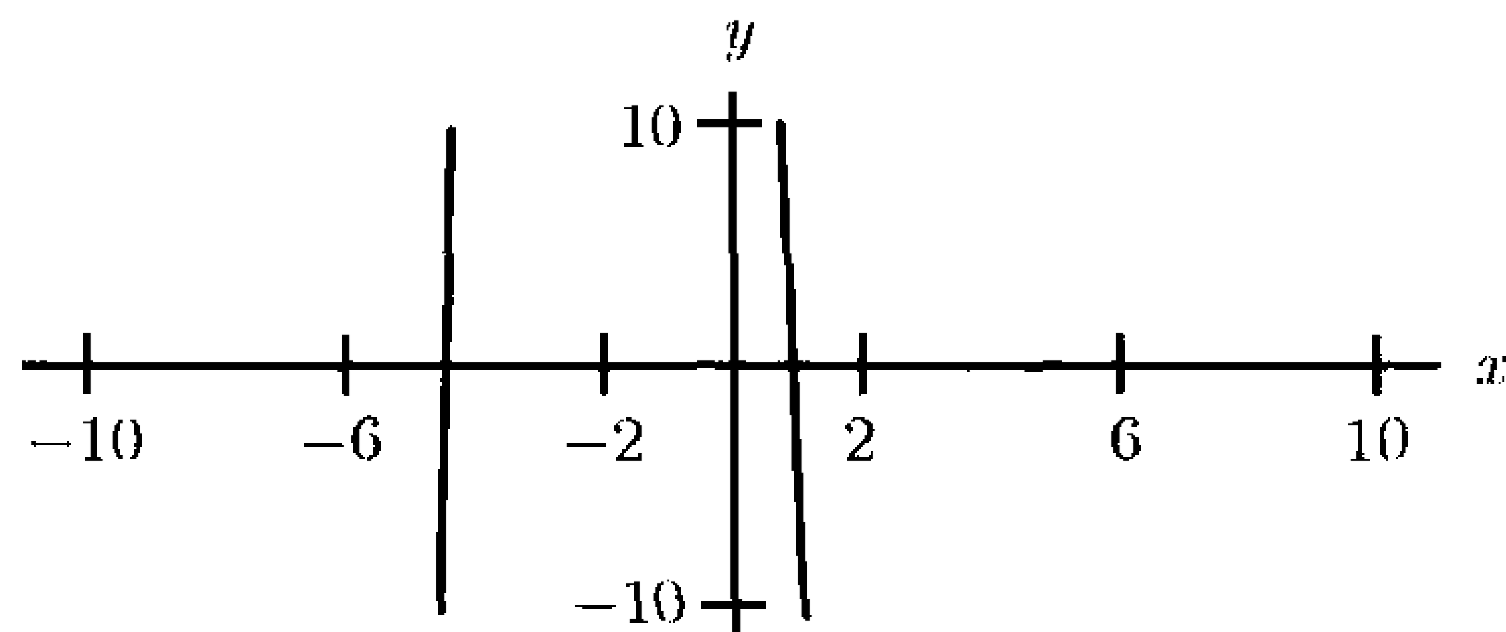
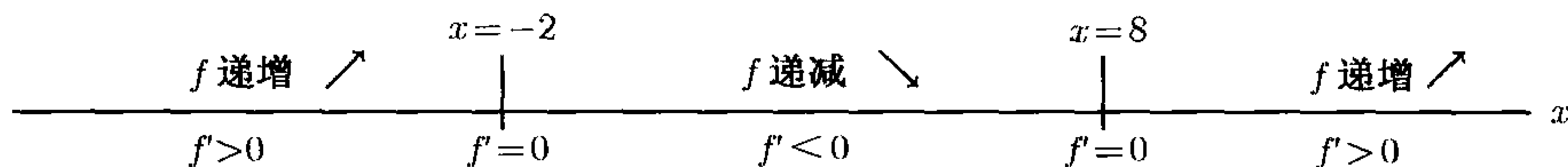


图 4-1　函数 $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ 无用的图像

我们利用导数确定函数的递增区间和递减区间. f 的导数为 $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$. 为解不等式 $f' > 0$ 或 $f' < 0$, 我们首先解 $f' = 0$, 即求解 $3x^2 - 18x - 48 = 0$. 分

解因式得 $3(x-8)(x+2)=0$, 于是 $x=-2$ 或 $x=8$. 由于 f' 仅在 $x=-2$ 和 $x=8$ 处为零, 而且 f' 是连续函数, 所以 f' 在 $x<-2, -2<x<8, x>8$ 这三个区间内都不改变符号. 那么我们如何确定 f' 在这三个区间内的符号呢? 最简单的方法就是挑一个点, 然后代入 f'. 例如, 由于 $f'(-3)=33>0$, 我们知道 f' 在 $x<-2$ 内为正, 因此 f 在 $x<-2$ 上递增. 类似地, 由于 $f'(0)=-48, f'(10)=72$, 我们知道 f' 在 $x=-2$ 和 $x=8$ 之间递减, 在 $x>8$ 上递增. 总结得到:



我们求得 $f(-2)=104, f(8)=-396$. 因此, 该函数在 $-2<x<8$ 内从 104 的高点递减到 -396 的低点. (现在我们清楚了为什么在我们计算器作出的第一个图像上什么也没有.) 容易得到图像上的另一个点: y 截距, $f(0)=52$. 只利用这三个点, 我们可以得到一个更有用的图像. 把画图区域设置为 $-10 \leqslant x \leqslant 20, -400 \leqslant y \leqslant 400$, 我们得到图 4-2, 这提供了比图 4-1 更多的有关 $f(x)$ 性质的信息.

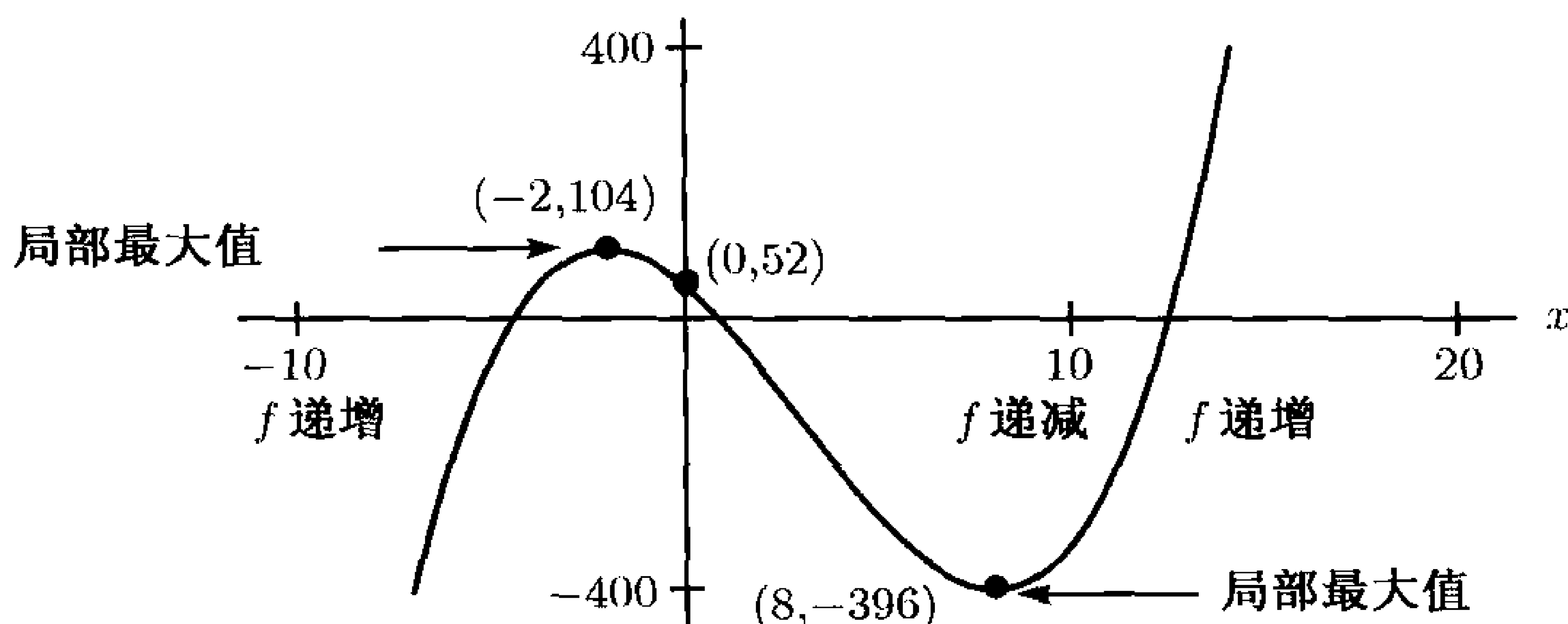


图 4-2 函数 $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$ 有用的图像. 注意 x 轴和 y 轴上的标尺不同 □

4.1.2 局部最大值和局部最小值

我们通常对如图 4-2 中标记的局部最大值和局部最小值这样的点感兴趣. 有如下的定义.

> 假设 p 是 f 定义域内的一个点:
> - 如果 $f(p)$ 小于或等于 p 附近的点的函数值, f 在 p 点有**局部最小值**.
> - 如果 $f(p)$ 大于或等于 p 附近的点的函数值, f 在 p 点有**局部最大值**.

因为我们仅描述 p 附近发生的情况, 所以我们用局部.

4.1.3 我们如何确定局部最大值或局部最小值

在前面的例子中, 导数为零的点 $x=-2$ 和 $x=8$ 在我们求局部最大值和局部最小值过程中起着重要的作用. 我们把这样的点命名如下.

> 对任何函数 f, f 定义域内满足 $f'(p)=0$ 或导数不存在的点 p 被称作函数的临界点. 另外, f 的图像上的点 $(p, f(p))$ 也被称作**临界点**. f 的**临界值**就是函数在临界点 p 的函数值 $f(p)$.

注意, "f 的临界点" 可以指 f 的定义域内的点或 f 的图像上的点. 你能从上下文确定它的具体所指.

几何上来说, 在 $f'(p)=0$ 的临界点处, f 的图像在 p 点处的切线是水平线. 在导数不存在的点 p 处, 没有水平线与图像相切——也没有垂直线相切或根本没有切线. (例如, $x=0$ 是绝对值函数 $f(x)=|x|$ 的临界点.) 然而, 我们要处理的函数基本都是处处可导的, 因此大部分我们的临界点是 $f'(p)=0$ 型的.

临界点把 f 的定义域分成一些区间, 在这些区间上, 导数的符号相同, 要么为正, 要么为负. 因此如果 f 定义在两个连续的临界点间, 那么它的图像在该区间上不改变方向; 它或者向上或者朝下. 我们有如下的结果.

> 如果在某区间 (它的定义域) 内连续的函数在 p 点处有局部最大值或局部最小值, 那么 p 是临界点或该区间的端点.

一个函数可以有任意数量的临界点或没有临界点. (参见图 4-3~ 图 4-5.)

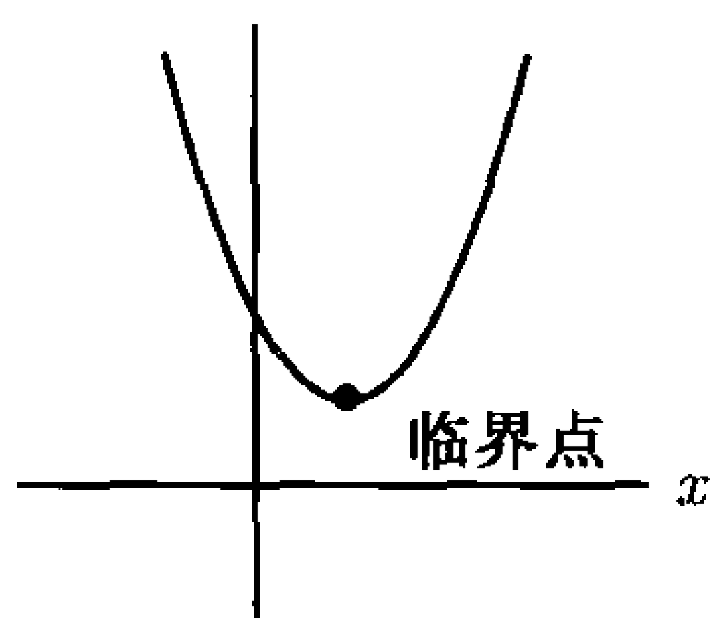


图 4-3 二次多项式: 一个临界点

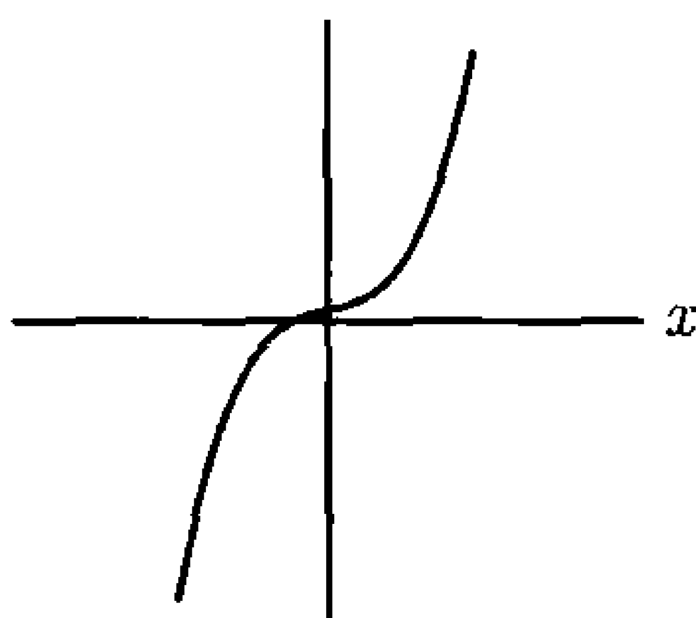


图 4-4 $f(x)=x^3+x+1$: 没有临界点

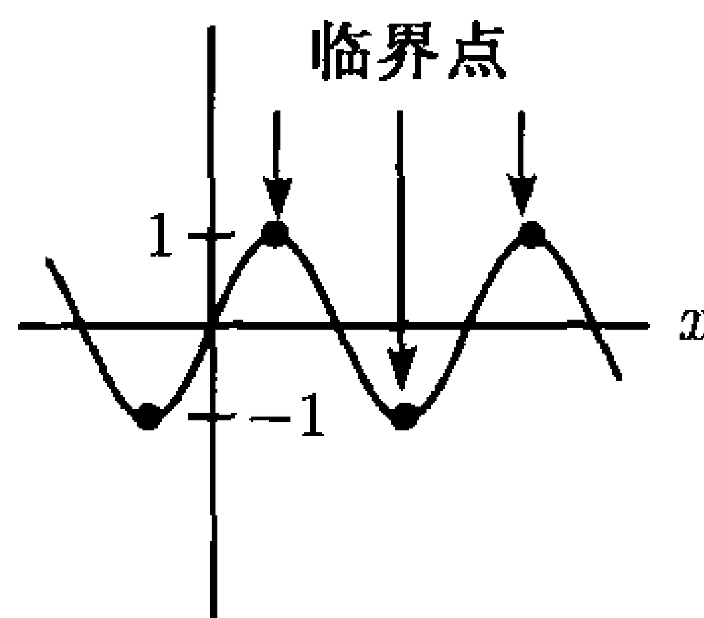


图 4-5 很多临界点

4.1.4 局部最大值和局部最小值的判定

如果 f' 在导数为零的临界点 p 的两侧有不同的符号, 图像在 p 处改变方向, 并且看起来像图 4-6 中的某一个图形. 我们有如下的判定准则:

局部最大值和局部最小值的第一判定准则

假设 p 是连续函数 f 的一个临界点.

- 如果 f 在 p 点由递减变为递增, 那么 f 在 p 点有局部最小值.
- 如果 f 在 p 点由递增变为递减, 那么 f 在 p 点有局部最大值.

另外, f 的图像的凹凸性提供了另一种区分局部最大值和局部最小值的方法.

局部最大值和局部最小值的第二判定准则

假设 p 是连续函数 f 的一个临界点, 并且 $f'(p)=0$.

- 如果 f 在 p 点上凹, 那么 f 在 p 点有局部最小值.
- 如果 f 在 p 点下凹, 那么 f 在 p 点有局部最大值.

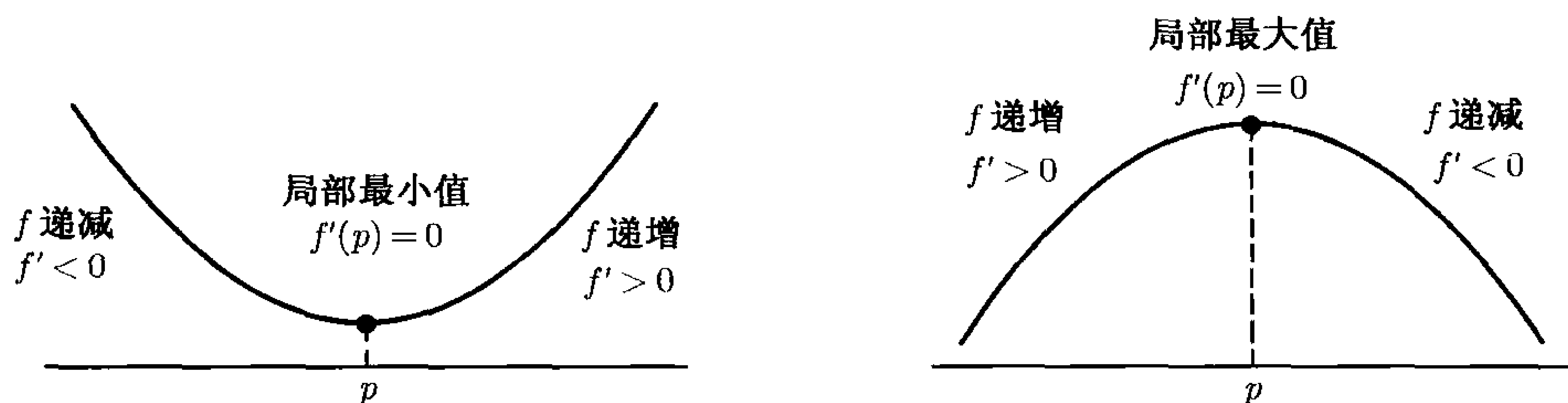


图 4-6　方向在临界点 p 处的改变: 局部最大值和局部最小值

例 2　利用二阶导数的判定准则证明 $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$ 在 $x=-2$ 处有局部最大值, 在 $x=8$ 处有局部最小值.

解　在例 1 中, 我们计算得到 $f'(x)=3x^2-18x-48=3(x-8)(x+2)$, 于是 $f'(8)=f'(-2)=0$. 再求导得到 $f''(x)=6x-18$. 由于 $f''(8)=6\cdot 8-18=30$, $f''(-2)=6\cdot(-2)-18=-30$, 二阶导数的判定准则证明 $x=8$ 是局部最小值点, $x=-2$ 是局部最大值点. □

例 3　(a) 画出具有如下性质的一个函数的图像:

- $f(x)$ 有临界点 $x=2$ 和 $x=5$.
- $f'(x)$ 在 2 的左侧为正, 在 5 的右侧为正.
- $f'(x)$ 在 2 和 5 之间为负.

(b) 判断临界点是局部最大值点, 局部最小值点还是既不是局部最大值点也不是局部最小值点.

解　(a) 我们知道, 当 $f'(x)$ 为正时, f 递增; 当 $f'(x)$ 为负时, f 递减. 函数 f 在 2 的左侧递增, 在 5 的右侧递增, 在 2 和 5 之间递减. 图 4-7 给出了可能的略图.

(b) 我们看到函数在 $x=2$ 有局部最大值, 在 $x=5$ 有局部最小值.

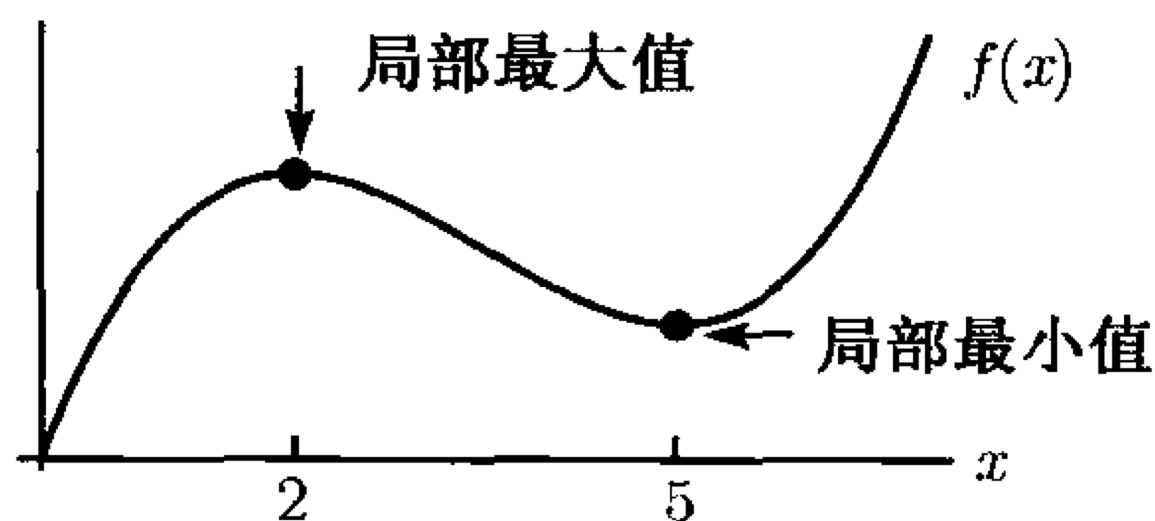


图 4-7 具有临界点 $x=2$ 和 $x=5$ 的一个函数 □

注意：

并不是函数的每个临界点都是局部最大值点或局部最小值点. 例如, 考虑函数 $f(x)=x^3$, 其图像参见图 4-8. 它的导数为 $f'(x)=3x^2$, 于是 $x=0$ 是临界点. 但 $f'(x)=3x^2$ 在 $x=0$ 的两侧都是正的, 因此 f 在 $x=0$ 的两侧递增. $f(x)$ 在 $x=0$ 点既没有局部最大值, 也没有局部最小值.

例 4 一项投资在 t 时的价值由 $S(t)$ 给出. 投资价值的变化率 $S'(t)$ 由图 4-9 给出.

(a) 函数 S(t) 的临界点是什么?

(b) 确定哪个临界点是局部最大值点, 局部最小值点或既不是局部最大值点也不是局部最小值点.

(c) 说明每个临界点的金融意义.

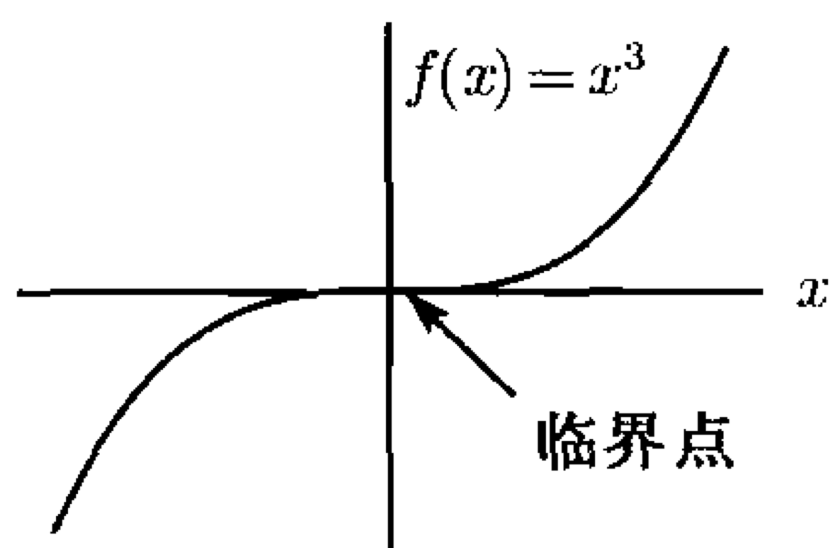


图 4-8 既不是局部最大值点也不是局部最小值点的临界点

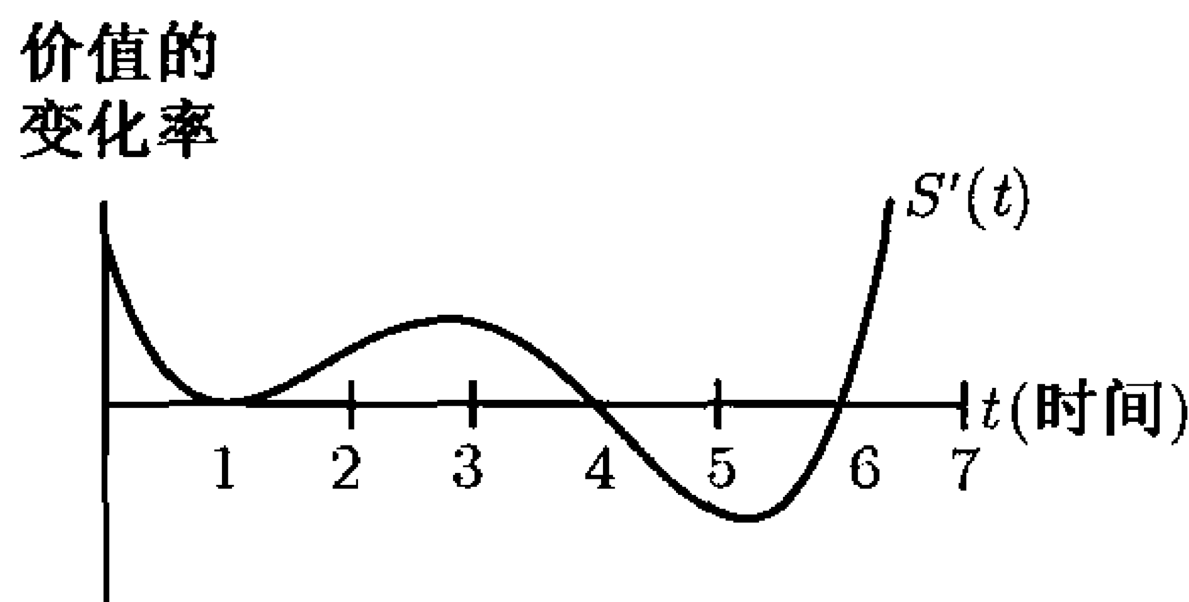


图 4-9 投资价值的变化率 $S'(t)$ 的图像

解 (a) S 的临界点在 $S'(t)=0$ 的 t 时发生. 由图 4-9, 我们看到在 $t=1,4,6$ 时, $S'(t)=0$. 于是临界点为 $t=1,4$ 和 6.

(b) 由图 4-9 我们看到, $S'(t)$ 在 1 的左侧及 1 和 4 之间都为正, 在 4 和 6 之间为负, 在 6 的右侧为正. 因此 $S(t)$ 在 1 的左侧及 1 和 4 之间都是递增的, 而在 4 和 6 之间递减, 在 6 的右侧又变为递增. 图 4-10 给出了 $S(t)$ 可能的草图. 我们看到 S 在临界点 $t=1$ 既没有局部最大值也没有局部最小值, 但它在 $t=4$ 时有局部最大值, $t=6$ 时有局部最小值.

(c) 价值在 $t=1$ 时刻停止增长, 尽管它在此之后马上开始增长. 价值在 $t=4$ 时达到最大, 然后开始下跌. 在 $t=6$ 时, 又开始增长. □

例 5　求函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 的临界点, 它在图像上的意义如何?

解　由于 $f'(x) = 2x + b$, 临界点 x 满足方程 $2x + b = 0$. 因此, 临界点为 $x = -b/2$. f 的图像是抛物线, 临界点是它的顶点. 参见图 4-11.

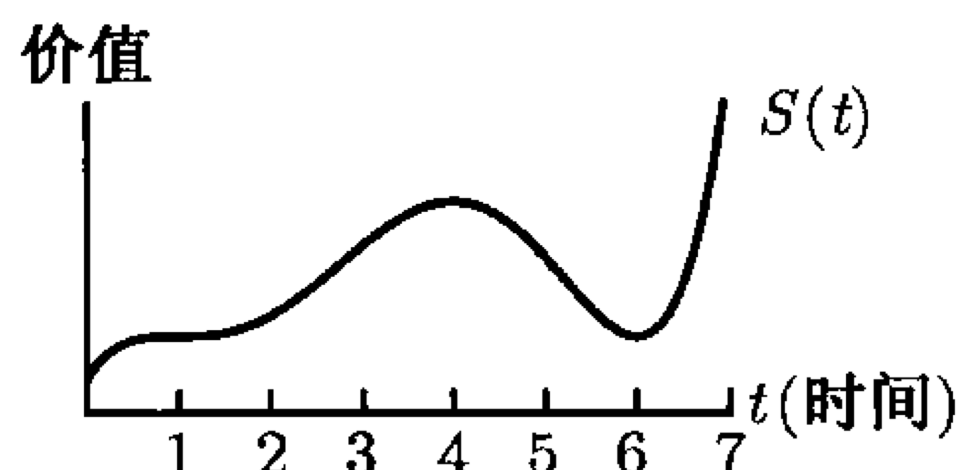


图 4-10　表示 t 时刻投资价值的函数的可能的图像

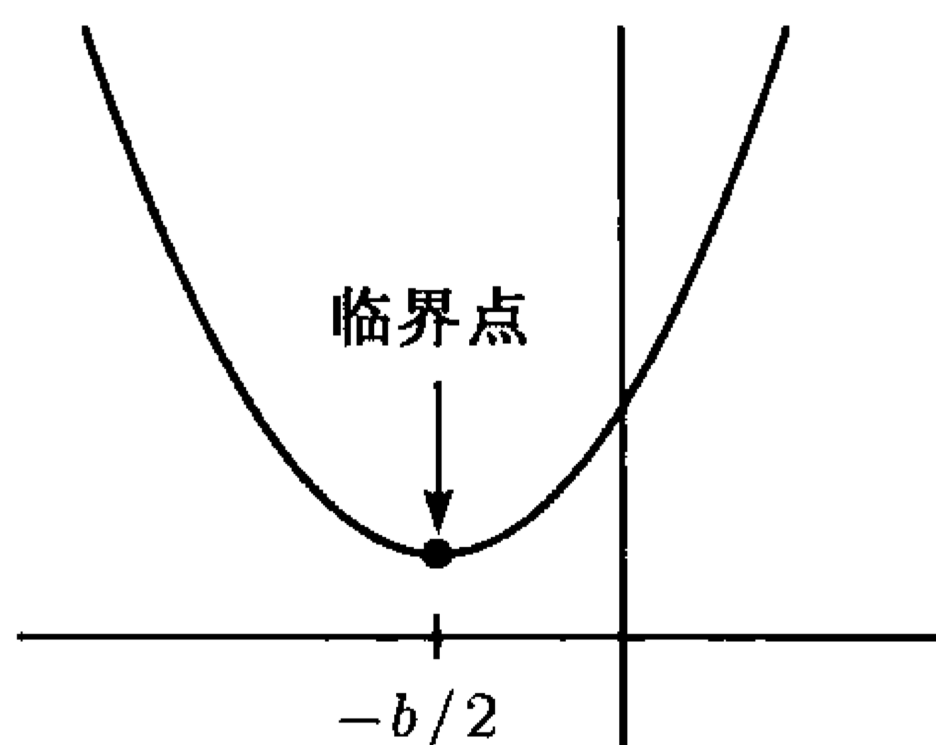
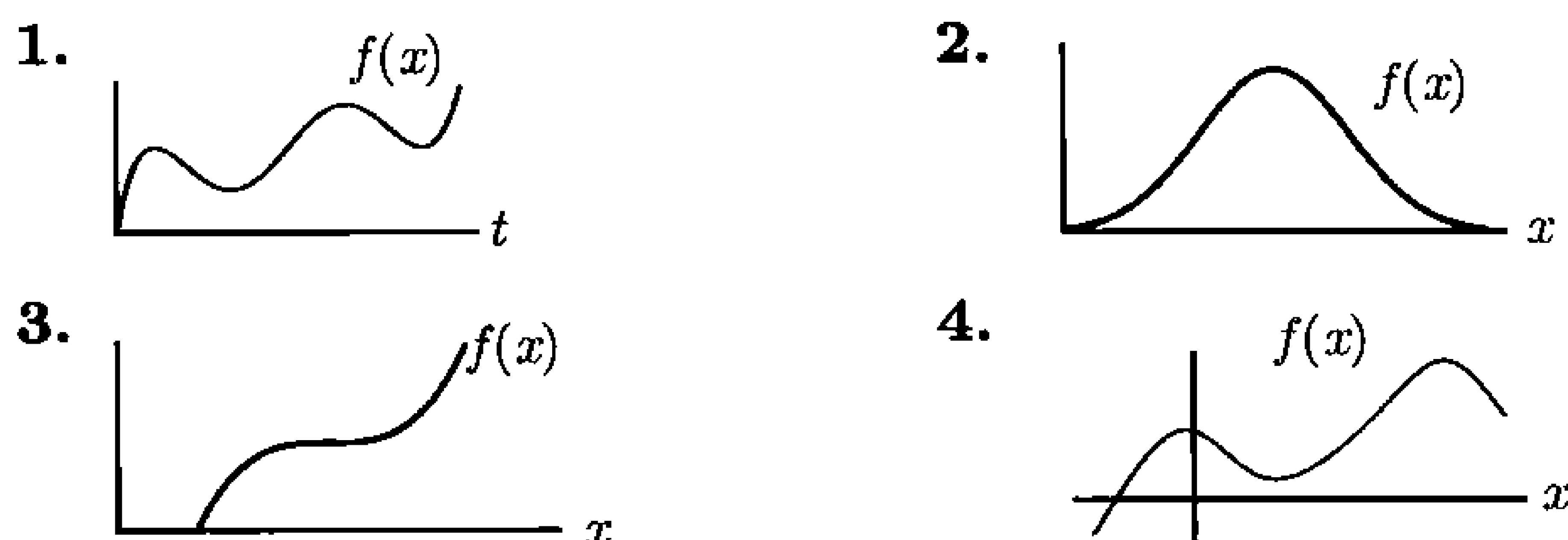


图 4-11　抛物线 $f(x) = x^2 + bx + c$ 的临界点 $(b, c > 0)$　□

习题

在习题 1~4 中, 指出函数 f 的临界点. 有多少临界点? 并指出每个临界点是局部最大值点, 局部最小值点或既不是局部最大值点也不是局部最小值点.



5. 一个人在生病时发烧了. 他的体温在前 18 小时稳定上升, 在后 20 小时内稳定下降. 如果把他的体温作为时间的函数, 何时是临界点?

6. **(a)** 画一个具有两个局部最小值和一个局部最大值的函数图像.

(b) 画一个有两个临界点的函数的略图, 在这两个临界点当中的一个是局部最小值点, 而另一个既不能是局部最大值点也不能是局部最小值点.

7. 画两个连续函数 f 和 g 的图像, 它们都恰好以图 4-12 中的 5 个点 A-E 为临界点, 而且分别满足如下的条件:

(a) $f(x) \to \infty, (x \to -\infty)$ 及 $f(x) \to \infty, (x \to \infty)$.

(b) $g(x) \to -\infty, (x \to -\infty)$ 及 $g(x) \to 0, (x \to \infty)$.

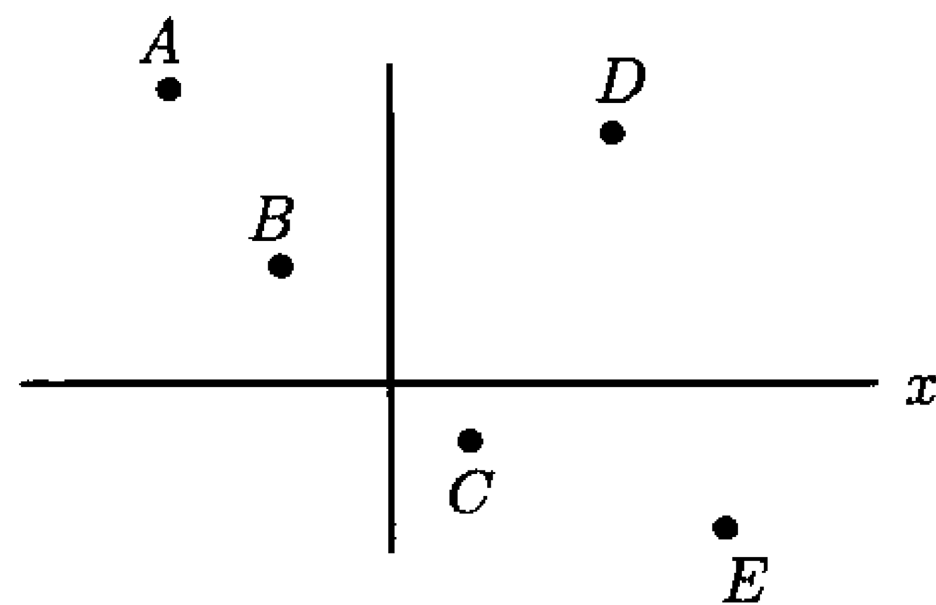


图　4-12

利用计算器或计算机, 画习题 8~13 中的函数的图像. 用语言描述图像的有趣特征, 包括临界点的位置及函数在何处递增/递减. 然后利用导数和代数知识解释图像的形状.

8. $f(x) = x^3 - 6x + 1$

9. $f(x) = x^3 + 6x + 1$

10. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

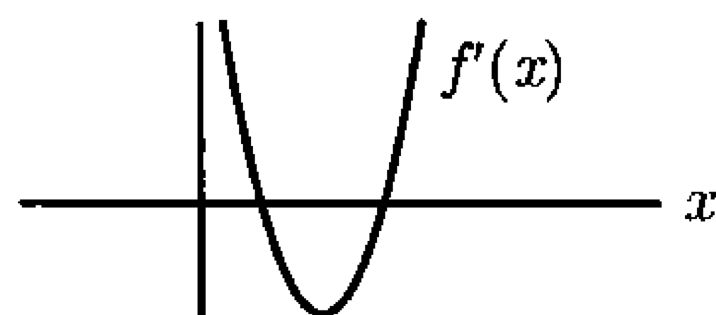
11. $f(x) = \mathrm{e}^x - 10x$

12. $f(x) = x\ln x,\ x > 0$

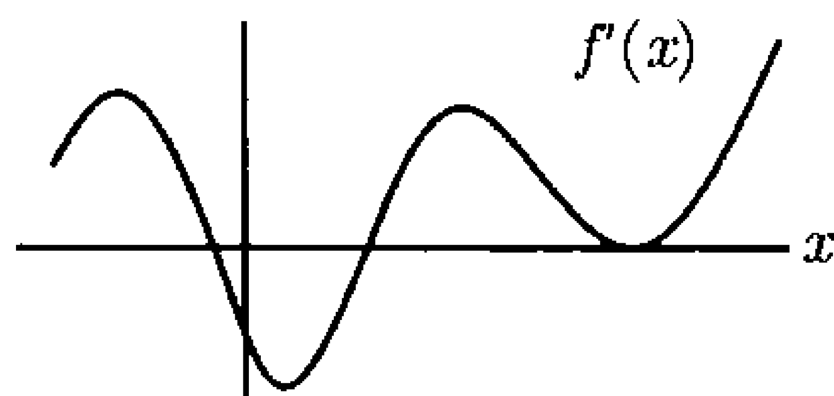
13. $f(x) = x + 2\sin x$

习题 14~15 给出了导函数 f' 的图像. 从草图指出函数 f 的临界点的 x 值. 并指出哪个临界点是局部最大值点, 局部最小值点或既不是局部最大值点也不是局部最小值点.

14.



15.



16. 图 4-13 是 f' 的图像. x 取何值时, f 有局部最大值, 有局部最小值?

17. 在图 4-14 的 f' 的图像中, 指出是函数 f 的临界点的 x 的值. 它们是局部最大值点, 局部最小值点还是既不是局部最大值点也不是局部最小值点?

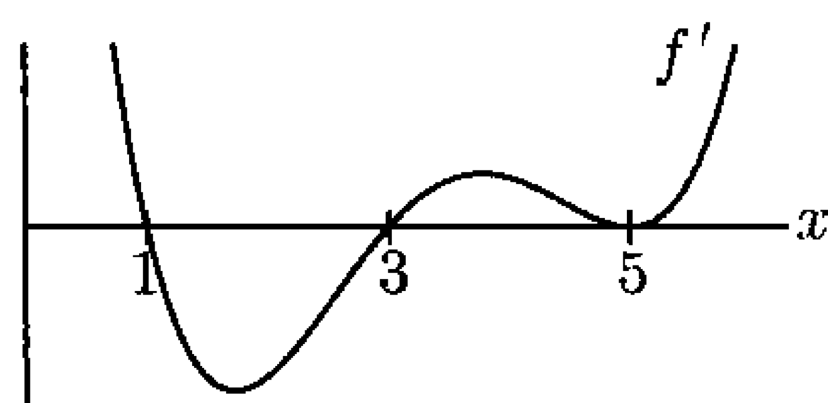


图 4-13 f'(不是 f) 的图像

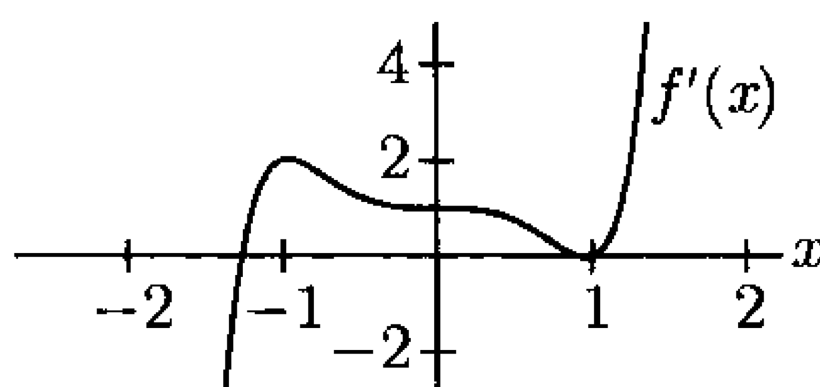


图 4-14 f'(不是 f) 的图像

18. $f(t)$ 的导数为 $f'(t) = t^3 - 6t^2 + 8t, 0 \leqslant t \leqslant 5$. 画 $f'(t)$ 的图像, 并说明函数 $f(t)$ 在区间 $(0, 5)$ 上是如何变化的. $f(t)$ 何时递增, 何时递减? $f(t)$ 在何处有局部最大值, 何处有局部最小值?

19. 消费者对某种产品的需求量随着时间的变化而变化, 而且这种需求的变化率 $f'(t)$(单位: 单位/周) 由周数 t 表示, 参见下表.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f'(t)$	12	10	4	−2	−3	−1	3	7	11	15	10

(a) 对这种产品的需求量何时增加? 何时减少?

(b) 需求量大概在何时达到局部最大值? 何时达到局部最小值?

20. 假设 f 具有连续导数, 其导数值参见下表.

(a) 估计 f 在 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 内的临界点的 x 的坐标值.

(b) 对每个临界点, 指明它是局部最大值点、局部最小值点, 还是既不是局部最大值点也不是局部最小值点.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f'(x)$	5	2	1	−2	−5	−3	−1	2	3	1	−1

21. 函数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$ 有一个临界点 $x = 1$. 利用二阶导数的判别准则指明它是局部最大值点还是局部最小值点.

22. 求函数 $f(x) = x^3(1 - x)^4$ 的临界点, 并根据局部最大值点和局部最小值点进行分类.

在习题 23~24 中, 求常数 a, b 的值, 使得抛物线 $f(x) = x^2 + ax + b$ 在给定点取整体最小值. [提示: 由求用 a 表示的临界点出发]

23. $(3,5)$　　**24.** $(-2,-3)$

25. 在同一坐标系下画函数族 $y = x^3 - ax^2$ 中一些函数的略图. 讨论参数 a 对图像的影响, 并求这个函数的所有临界点.

26. a, b 取何值时, $f(x) = a(x - b\ln x)$ 在点 $(2,5)$ 处取局部最小值? 图 4-15 给出了 $a = 1, b = 1$ 时 $f(x)$ 的图像.

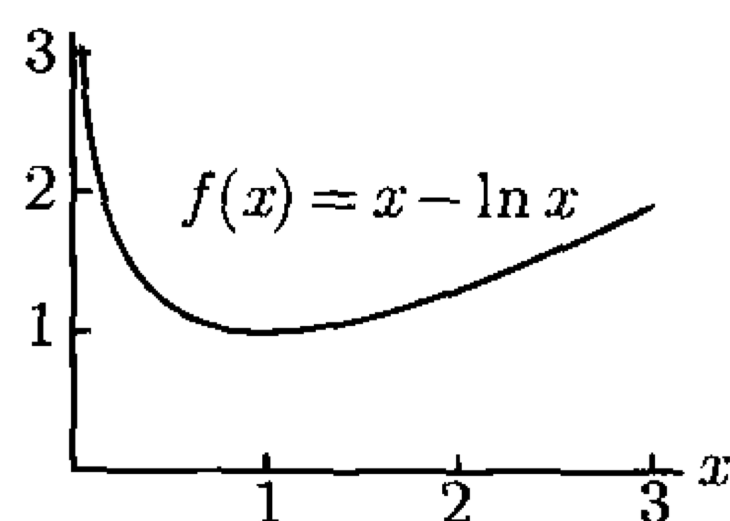


图　4-15

27. 求 a 的值, 使函数 $f(x) = xe^{ax}$ 有临界点 $x = 3$.

28. 假设 f 处处有导数, 并且只有一个临界点 $x = 3$. (a)~(d) 为你给出了另外的条件. 在每个条件下, 判断 $x = 3$ 是局部最大值点、局部最小值点还是既不是局部最大值点也不是局部最小值点. 请解释你的推断. 为所有的情形画出可能的图像.

(a) $f'(1) = 3,\ f'(5) = -1$

(b) $f(x) \to \infty$ 当 $x \to \infty$ 或 $x \to -\infty$

(c) $f(1) = 1, f(2) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5$

(d) $f'(2) = -1, f(3) = 1, f(x) \to 3$ 当 $x \to \infty$

29. (a) 在计算器或计算机上, 画 $f(\theta) = \theta - \sin\theta$ 的略图. 你能指出该函数在区间 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 上是否有零点吗?

(b) 求 f'. 关于 f 在区间 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 上的零点, f' 的符号告诉你些什么?

4.2　拐　　点

凹性和拐点

对一个函数的图像上斜率符号改变的点的研究引导我们得到临界点的概念. 现在我们来研究图像上凹性改变的点, 即从上凹到下凹或从下凹到上凹.

> 函数 f 的图像上改变凹性的点叫 f 的**拐点**.

"f 的拐点" 这个术语既可指 f 定义域内的点也可指 f 图像上的点. 问题的上下文将告诉你它的具体所指.

你怎么确定拐点

既然函数 f 的图像的凹性在拐点处改变, f'' 的符号在该处改变: 它在拐点的一侧为正, 而在另一侧为负. 因此, f'' 在拐点处或者为零或者不存在. (参见图 4-16)

例 1　求 $f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ 的拐点.

解　图 4-17 中, f 图像的一部分上凹, 一部分下凹, 因此它的函数必有一个拐点. 然而, 通过图像准确确定拐点的位置是很困难的. 为准确地确定拐点, 求二阶导数

为零的点.① 由于 $f'(x) = 3x^2 - 18x - 48$,

$$f''(x) = 6x - 18,$$

于是当 $x = 3$ 时, $f''(x) = 0$.

$f(x)$ 的图像在 $x = 3$ 处改变凹性, 因此 $x = 3$ 是拐点.

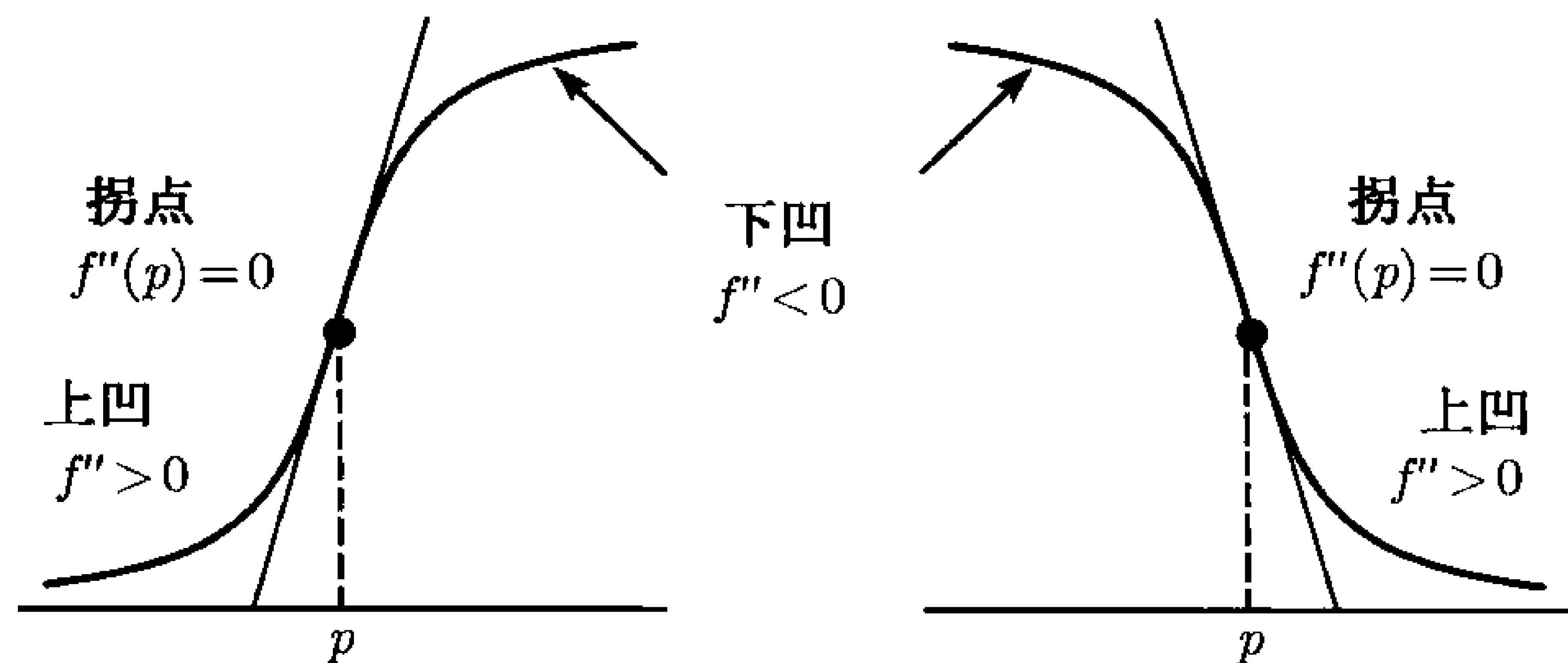


图 4-16　p 点处凹性的改变 (从正到负或反之)

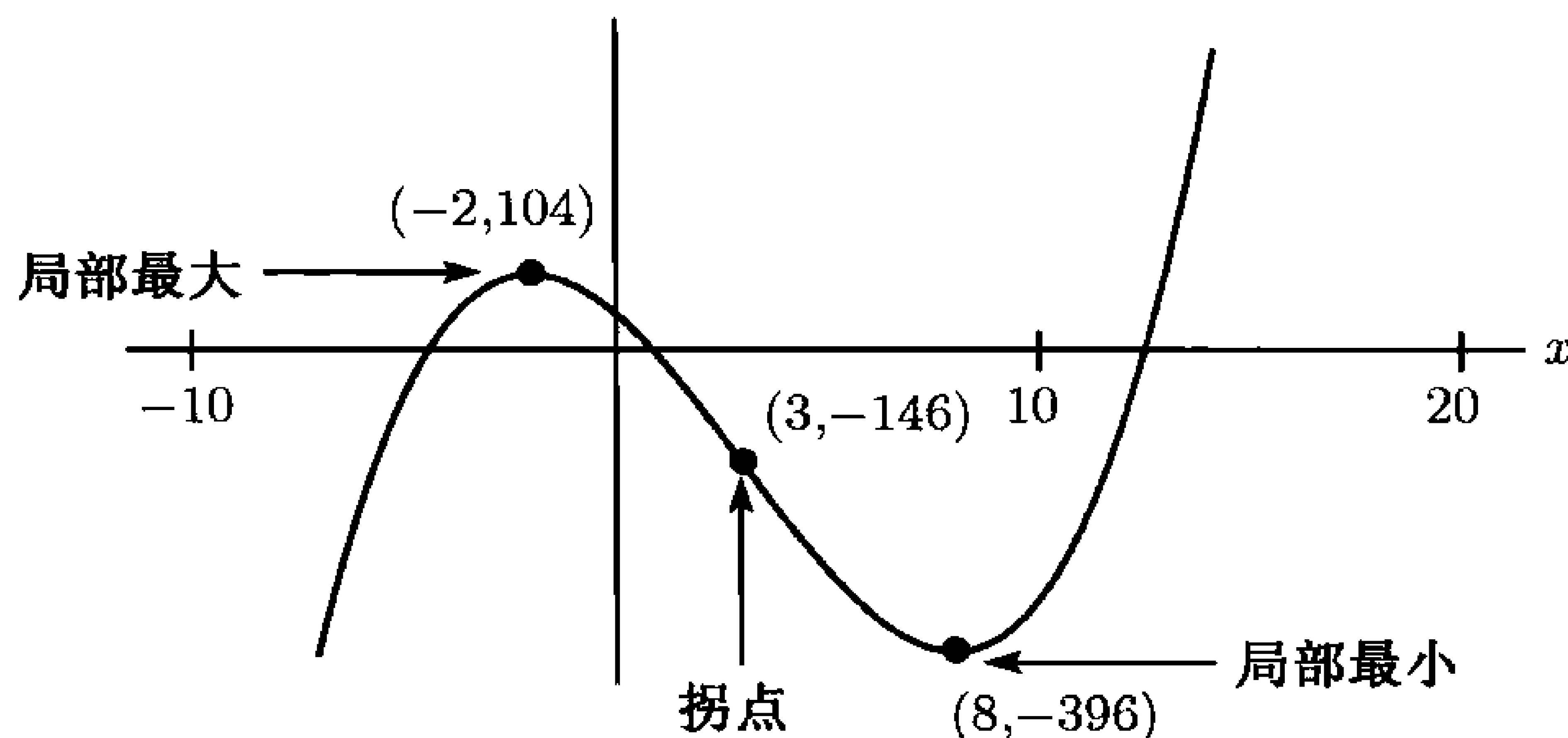


图 4-17　$f(x) = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$ 在 $x = 3$ 处拐点的图像 □

例 2　画具有下列性质的一个函数 f 的图像: f 有临界点 $x = 4$, 拐点 $x = 8$; f' 的值在 4 的左侧为负, 在 4 的右侧为正; f'' 的值在 8 的左侧为正, 右侧为负.

解　由于 f' 在 4 的左侧为负、在 4 的右侧为正, 所以 $f(x)$ 的值在 4 的左侧递减, 在 4 的右侧递增. f'' 的值告诉我们 $f(x)$ 的图像在 8 的左侧上凹, 右侧下凹. 可能的图像参见图 4-18. □

例 3　图 4-19 表明某个种群向极限人口 L 增长. 人口达到 $L/2$ 的点为图像的拐点. 拐点说明人口的什么特征?

解　在拐点出现之前的时间, 人口以逐年递增的速度增长. 在拐点出现之后的时间, 人口以逐年递减的速度增长. 在拐点处, 人口增长最快. □

① 对多项式来说, 二阶导数是处处存在的.

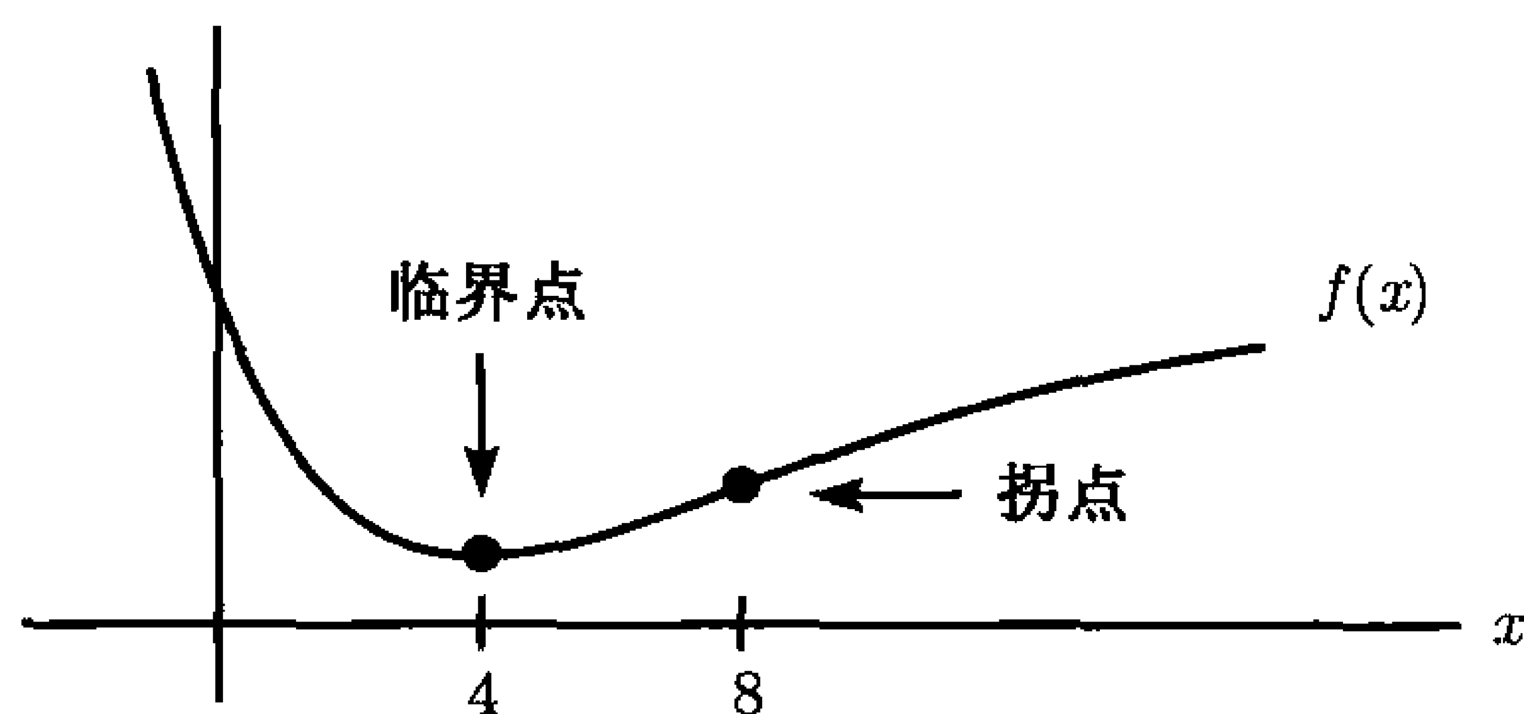


图 4-18 以 $x=4$ 为临界点和 $x=8$ 为拐点的一个函数

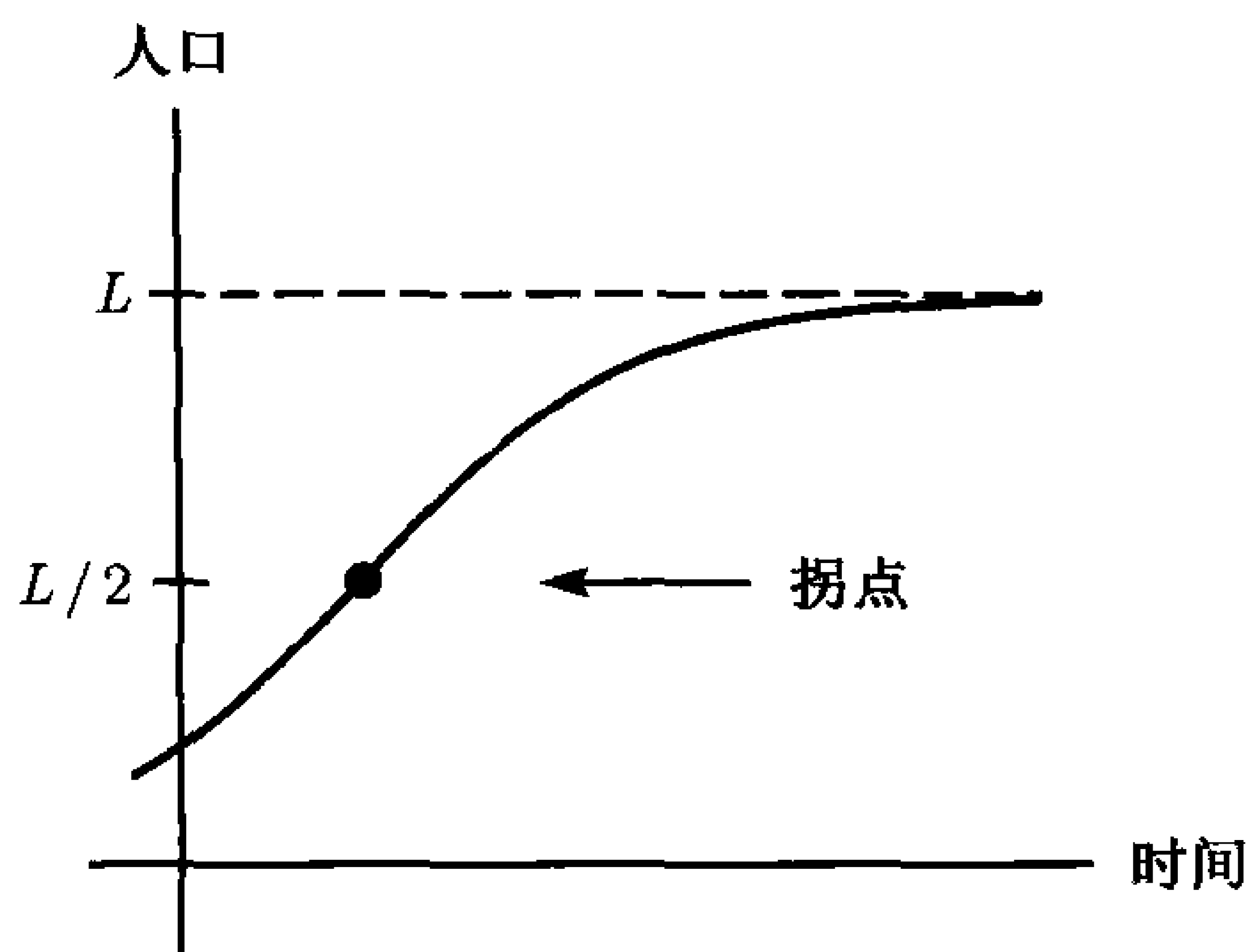


图 4-19 向极限人口 L 增长的某种群的图像上的拐点

例 4 (a) 函数 $f(x)=xe^{-x}$ 有多少临界点, 有多少拐点?

(b) 利用导数准确地求出临界点和拐点.

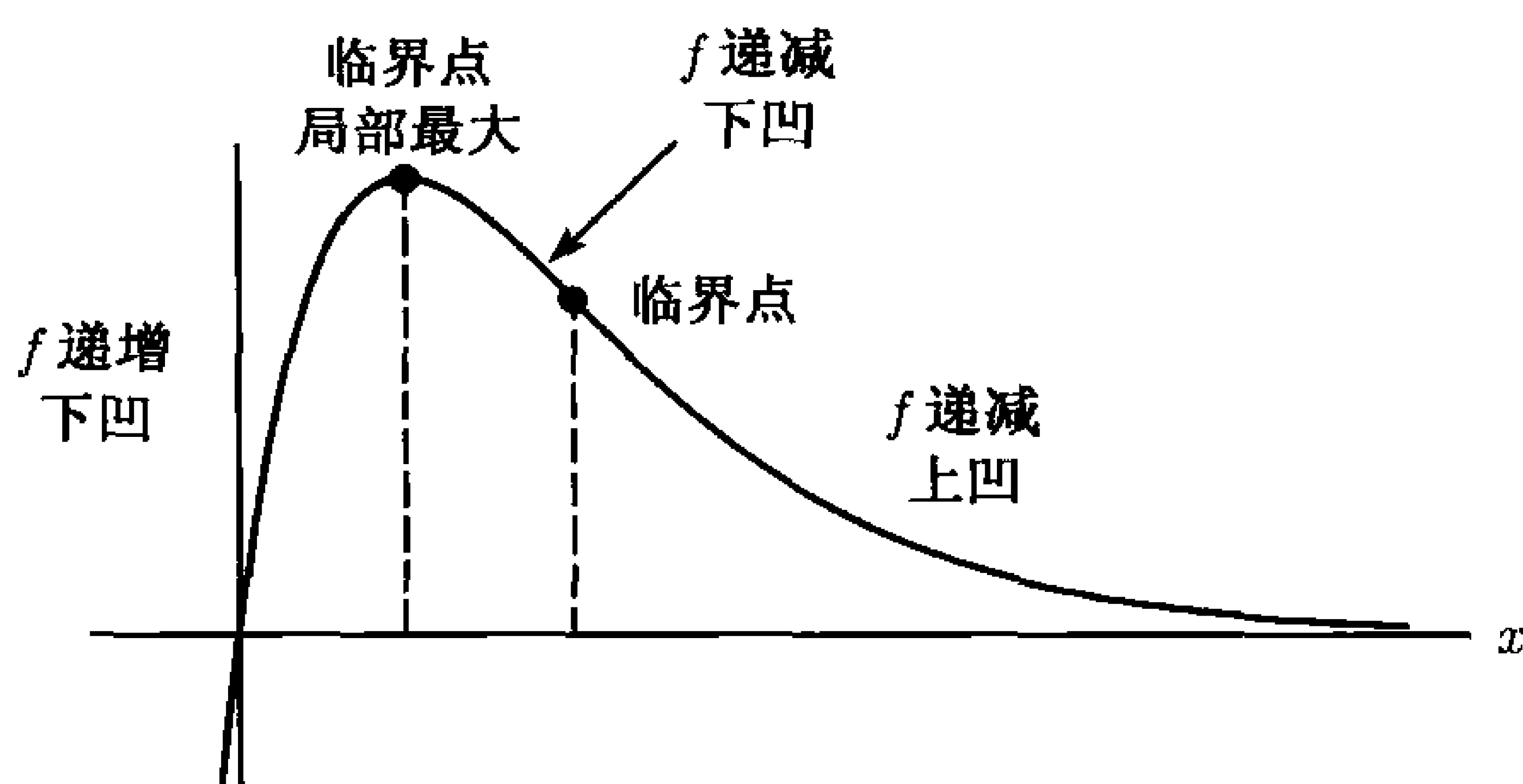


图 4-20 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像

解 (a) 图 4-20 是 $f(x)=xe^{-x}$ 的图像. $f(x)$ 从图像上看有一个为局部最大值点的临界点. 那么它有拐点吗? 由于函数在临界点处下凹, 在足够大的 x 处上凹, 函数图像的凹性改变, 因此在临界点的右侧必然有一个拐点.

(b) 为求临界点, 求 f 的一阶导数为零或不存在的点. 由乘法法则得,

$$f'(x)=x(-e^{-x})+(1)(e^{-x})=(1-x)e^{-x}.$$

当 $x=1$ 时, $f'(x)=0$, 因此在 $x=1$ 处有临界点. 为求拐点, 我们求二阶导数改变符号的点. 对一阶导数利用乘法法则, 我们有

$$f''(x)=(1-x)(-\mathrm{e}^{-x})+(-1)(\mathrm{e}^{-x})=(x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

在 $x=2$ 时我们有 $f''(x)=0$. 由于 $x>2$ 时, $f''(x)>0$; $x<2$ 时, $f''(x)<0$, 凹性在 $x=2$ 处改变. 因此拐点在 $x=2$ 处. □

注意: *并不是每个满足 $f''(x)=0$(或 f'' 不存在) 的点 x 就是拐点* (正如并不是每个满足 $f'(x)=0$ 的点就是局部最大值点或局部最小值点一样). 例如, $f(x)=x^4$ 的二阶导数 $f''(x)=12x^2$, 因此 $f''(0)=0$, 但 $x>0$ 及 $x<0$ 时, $f''>0$, 从而 f 的图像在 $x=0$ 的两侧都是上凹的. 在 $x=0$ 处凹性没有改变 (参见图 4-21).

例 5 假设以稳定的速率 (单位: l/min) 把水倒入图 4-22 的花瓶中. 画水的深度与时间 t 的函数 $y=f(t)$ 的图像. 说明它的凹性, 并指出拐点.

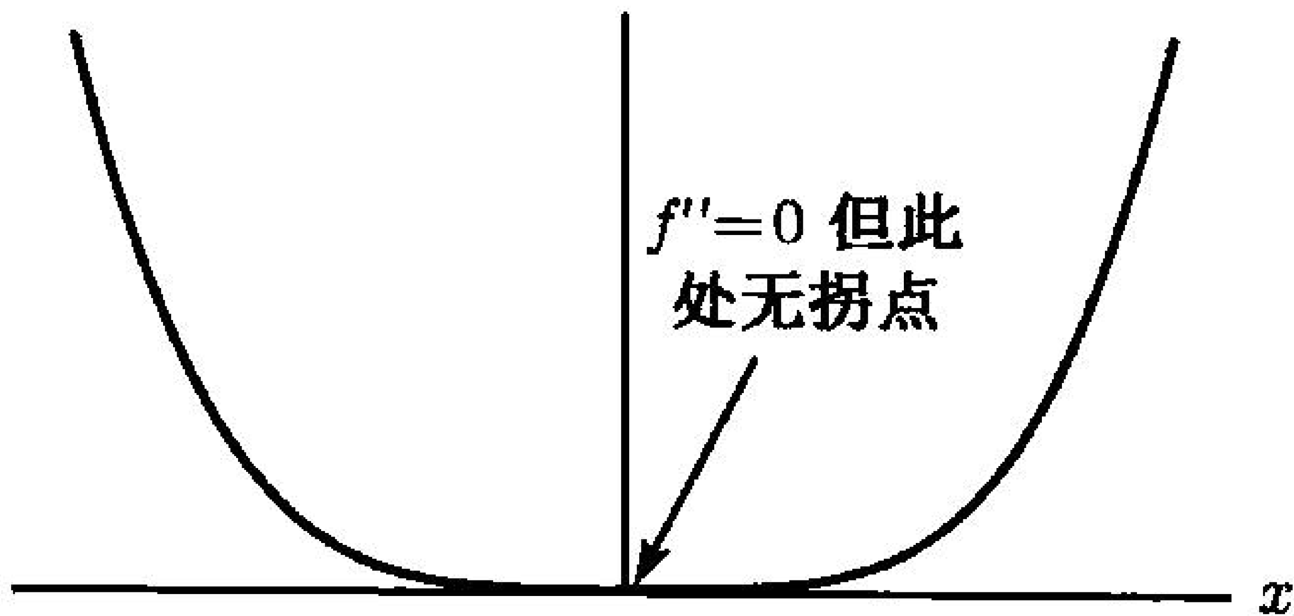


图 4-21 $f(x)=x^4$ 的图像

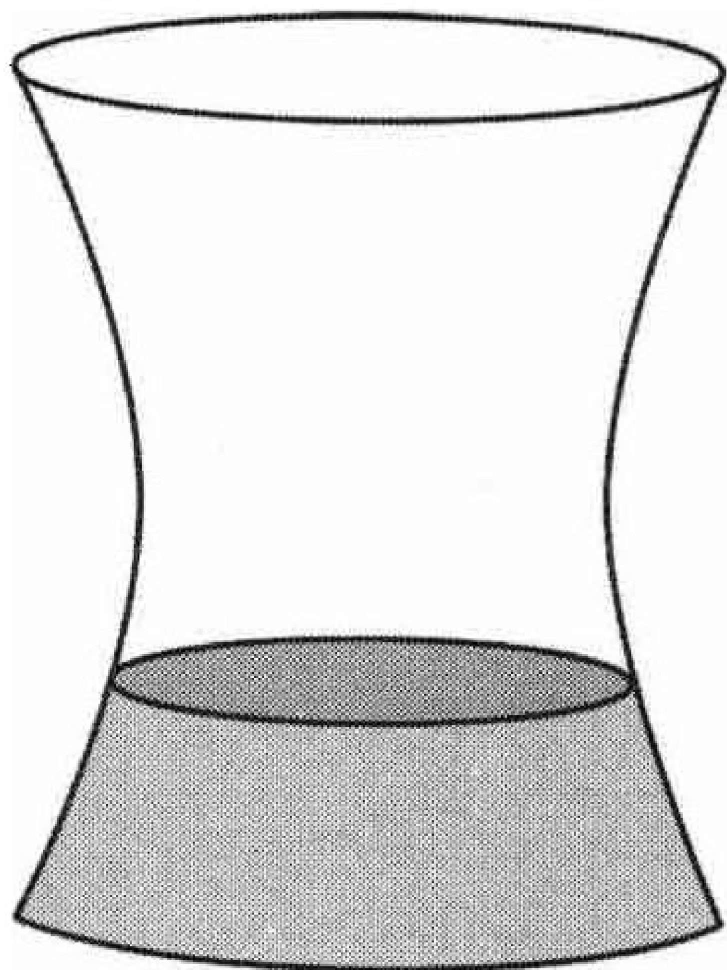


图 4-22 花瓶

解 注意, 花瓶中水的体积以稳定的速率增加.

水的深度 y 最初增长得非常缓慢, 因为花瓶的底部宽, 因此需要很多水来提高水的深度. 然而, 随着花瓶越来越窄, 水的深度增高的速率加快, 这意味着 y 开始以逐渐加快的速率增加, 图像是上凹的. 当水到达直径最小的花瓶的中部时, 水的深度增长最快, 因此水的深度 y 的变化率达到最大, 这是一个拐点 (参见图 4-23). 此后, 水上升的速率开

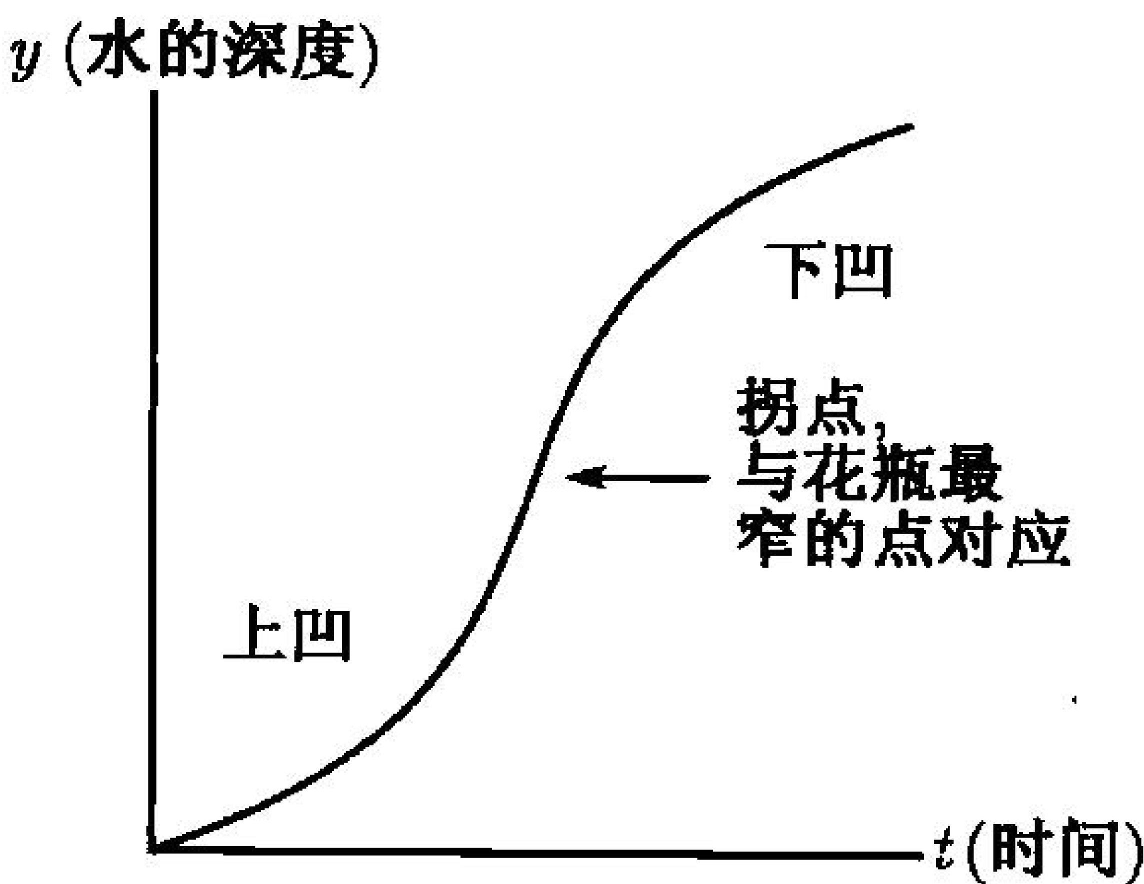


图 4-23 花瓶中的水深 y 关于时间 t 的函数的图像

始减小, 因此图像是下凹的. □

例 6　$f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像的凹性如何?

解　我们有 $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$. 它的二阶导数与 a 具有相同的符号. 如果 $a > 0$, 图像处处上凹, 是开口向上的抛物线. 如果 $a < 0$, 图像处处下凹, 是开口向下的抛物线. (参见图 4-24).

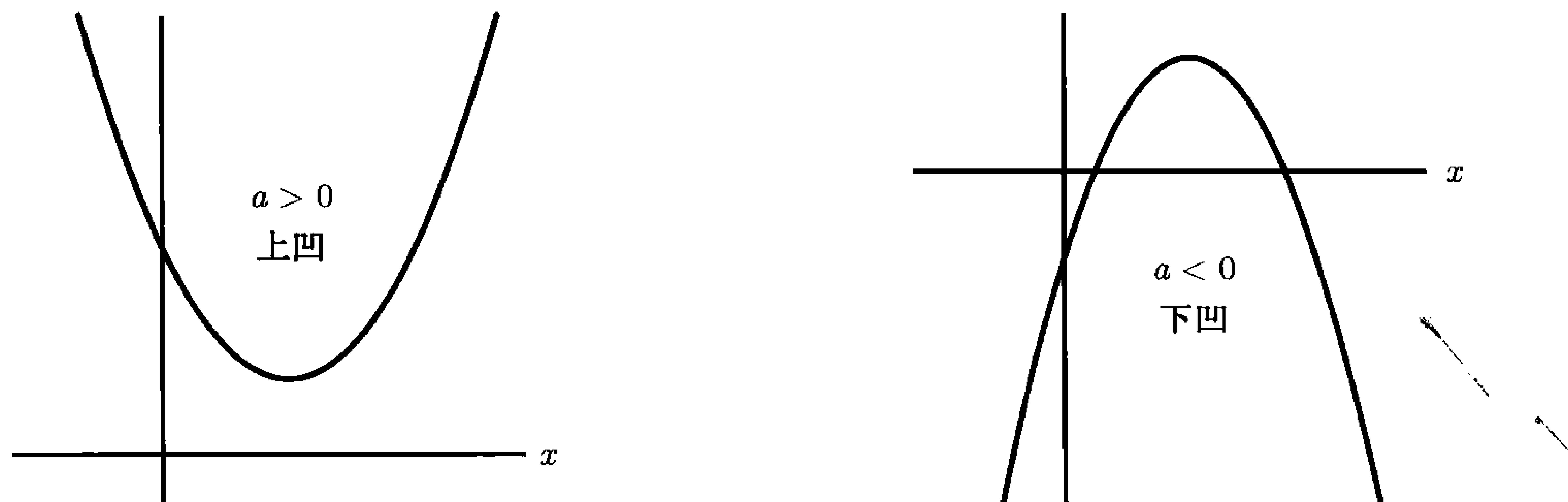
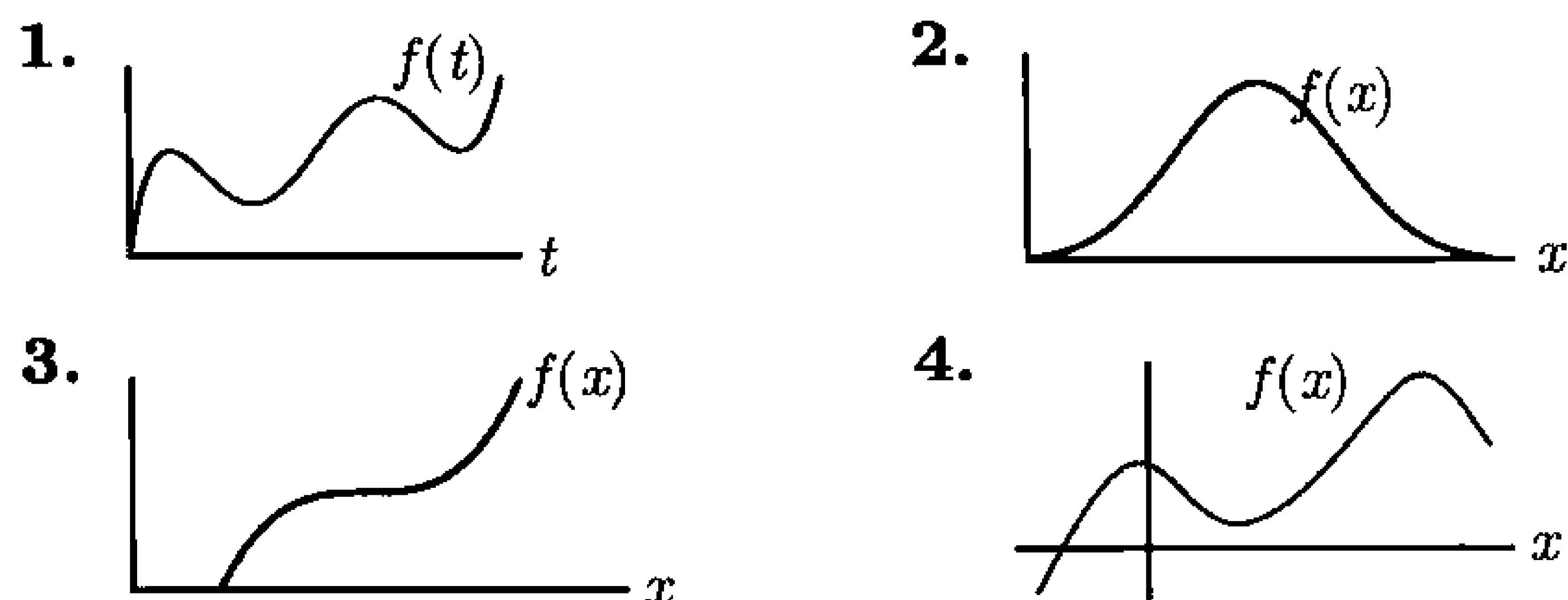


图 4-24　$f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图像的凹性 □

习题

在习题 1~4 中, 指出所有拐点的大概位置. 有多少拐点?



5. 画出只有一个临界点 $x = 5$ 及一个拐点 $x = 10$ 的一个函数的图像, 并在图像上标明临界点和拐点.

6. **(a)** 画有两个局部最大值和局部最小值的多项式的图像.

(b) 这个函数至少有几个拐点? 请标出拐点.

7. 画一个临界点和拐点为同一点的函数图像.

8. 虽然气温在下降, 但早上起床时, 我只穿了一件薄夹克衫, 因为气温看起来不会下降得更低. 但是我错了. 大约中午时, 刮起了北风, 气温也下降得越来越低. 气温最低的时间是在下午 6 点, 幸亏此后温度开始上升.

(a) 气温作为时间的函数图像何时有临界点?

(b) 气温作为时间的函数图像何时有拐点?

9. 在一次洪水中, 河中水的深度最先涨得越来越快, 而后涨速越来越小直到达到最高水位, 接下来退回到洪水前的水位. 把水的深度看成时间的函数.

(a) 达到最高水位的时刻是该函数的临界点还是拐点?

(b) 水的涨速最先慢下来的时刻是临界点还是拐点?

10. 用代数方法求函数 $f(x)=x^3-18x^2-10x+6$ 的拐点. 用计算器或计算机画出该函数的略图并验证你的答案.

对习题 11~20 用一阶导数求所有临界点, 用二阶导数求所有的拐点, 并利用图像判断每个临界点是局部最大值点、局部最小值点还是两者都不是.

11. $f(x)=x^2-5x+3$

12. $f(x)=x^3-3x+10$

13. $f(x)=2x^3+3x^2-36x+5$

14. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2}{4}-x+2$

15. $f(x)=x^4-2x^2$

16. $f(x)=3x^4-4x^3+6$

17. $f(x)=x^4-8x^2+5$

18. $f(x)=x^4-4x^3+10$

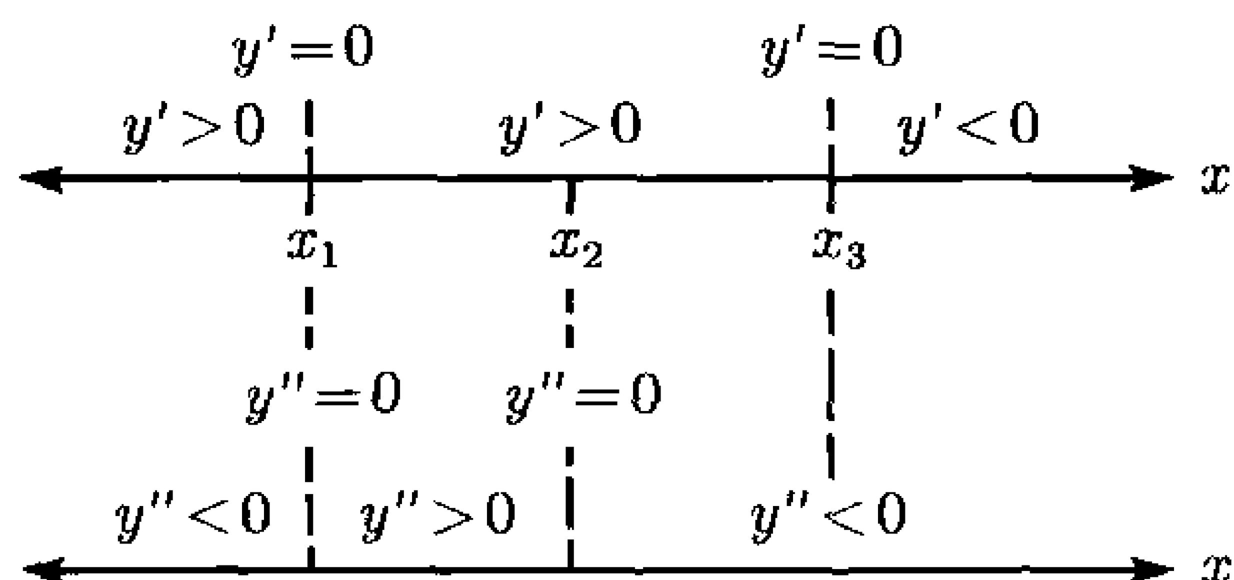
19. $f(x)=x^5-5x^4+35$

20. $f(x)=3x^5-5x^3$

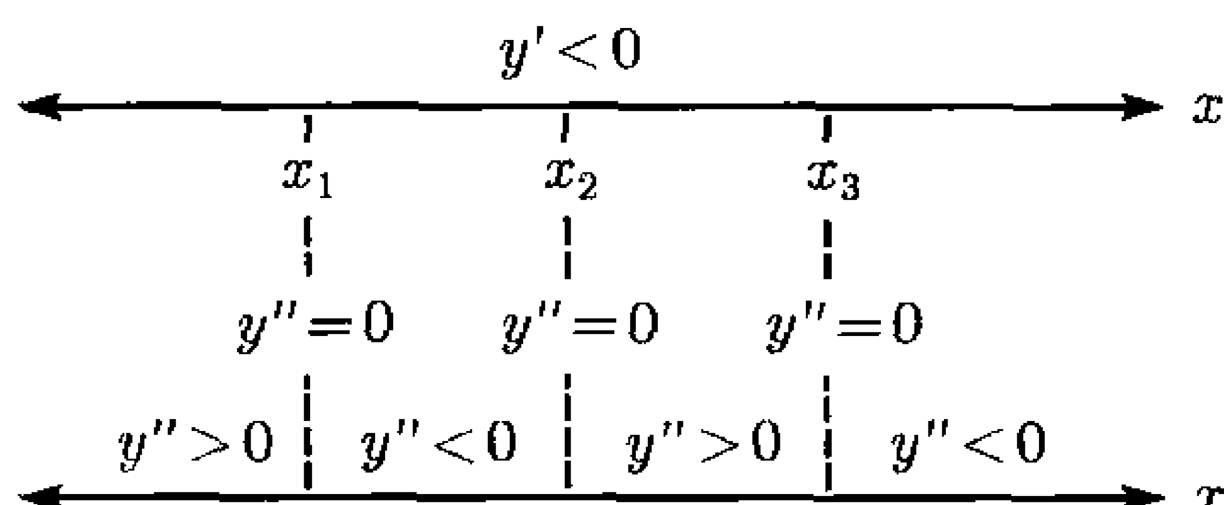
21. 求函数 $f(x)=x^4+x^3-3x^2+2$ 的拐点.

利用所给的有关导数 $y'=f'(x)$ 及 $y''=f''(x)$ 的信息画出习题 22~25 所给函数 $y=f(x)$ 的草图. 假设函数在所有的实数 x 有定义并连续.

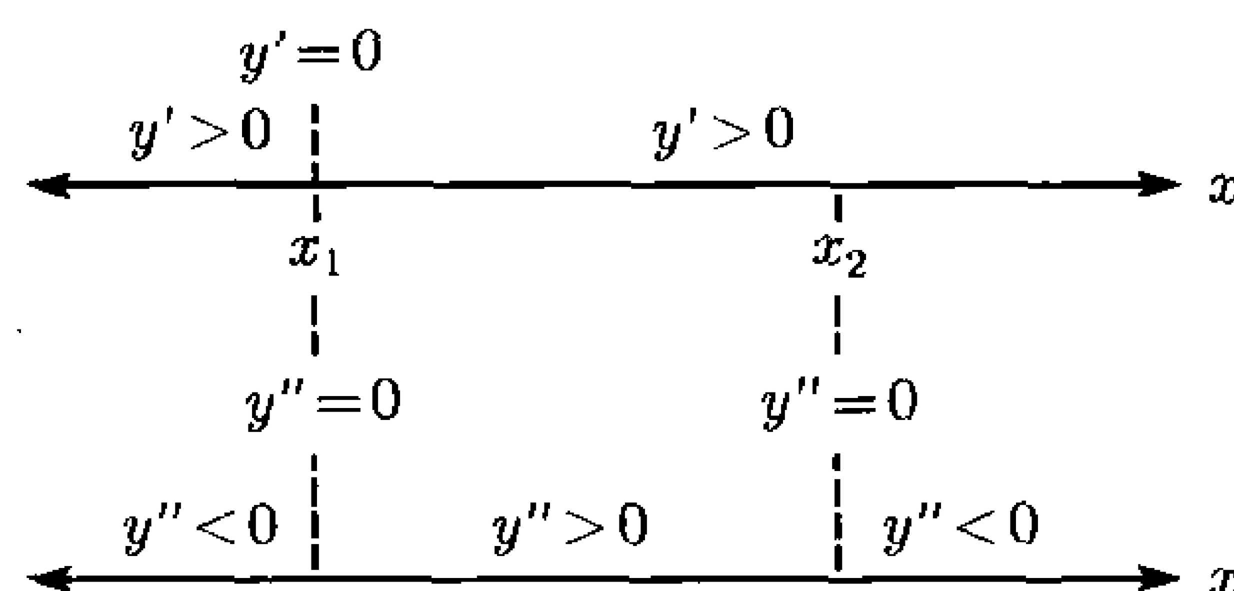
22.



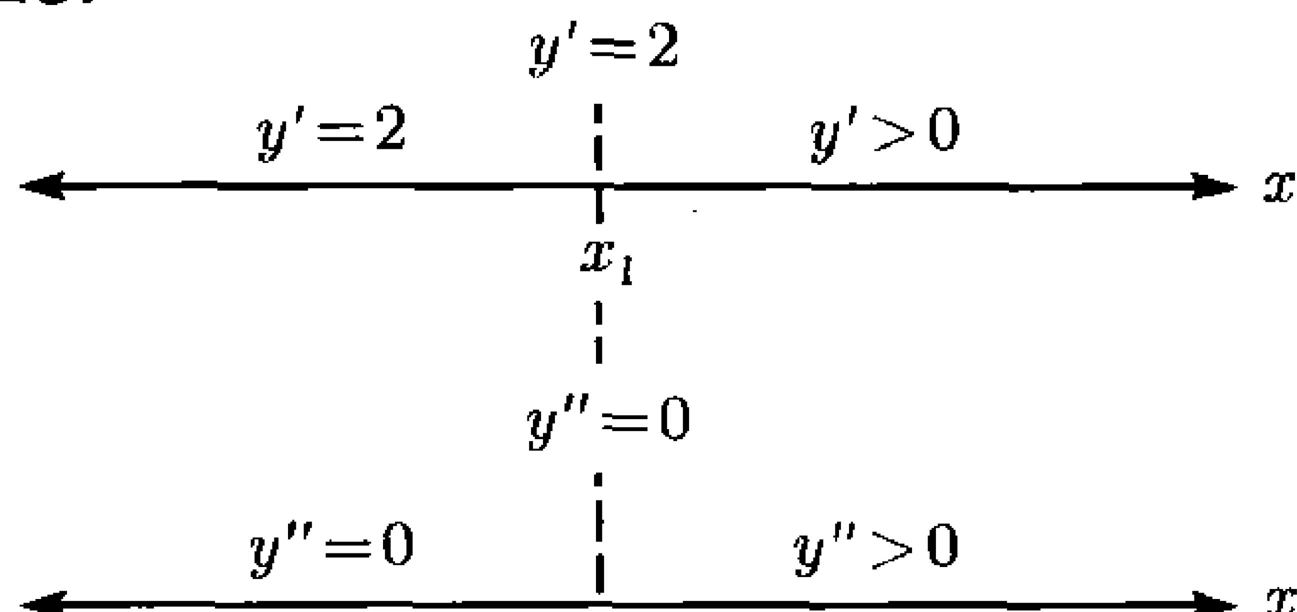
23.



24.



25.



26. 1774 年, 詹姆斯 · 库克船长把 10 只兔子留在了太平洋的一座岛上. 兔子的数量大约为

$$P(t)=\frac{2000}{1+e^{5.3-0.4t}},$$

其中 t 是自 1774 年以来的年数. 利用计算器或计算机:

(a) 画 P 的略图. 兔子的数量会稳定下来吗?

(b) 估计何时兔子的数量增长最快. 此时, 兔子的数量是多少.

(c) 找出图像上的拐点, 并说明它对兔子数量的意义.

(d) 是什么自然的因素导致 P 的图像如此?

27. (a) 水以稳定的速率 (即每单位时间相同的体积) 流入垂直放置的圆筒状容器. 画一草图, 说明水的高度是关于时间的函数.

(b) 水以稳定的速率流入倒置的圆锥型容器. 画一草图, 说明水的高度是关于时间的

函数.

28. 如果水以稳定的速率 (即每单位时间相同的体积) 流入如图 4-25 的希腊古瓮中, 请画出水的高度关于时间的函数的略图, 并在图像上标出水达到古瓮最宽点处的时刻.

29. 如果水以稳定的速率 (即每单位时间相同的体积) 流入如图 4-26 的花瓶中, 请画出水的高度关于时间的函数的略图, 并在图像上标出水达到花瓶尖角处的时刻.

30. 水以稳定的速率流入如图 4-27 的 W 型容器内. 请画容器左侧水的高度关于时间 t 的函数的略图. 容器开始是空的.

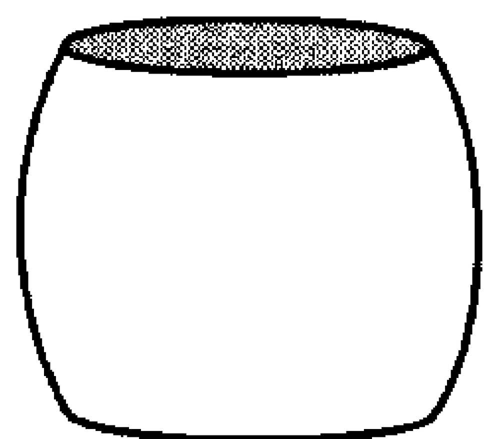


图 4-25

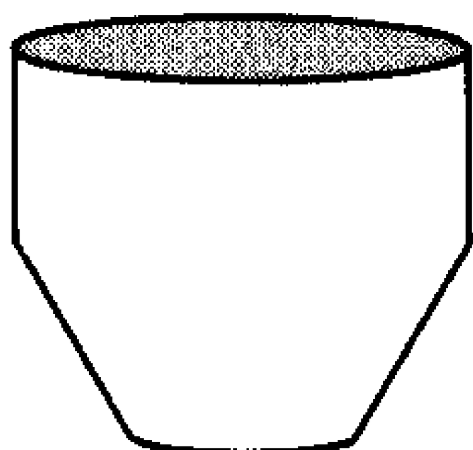


图 4-26

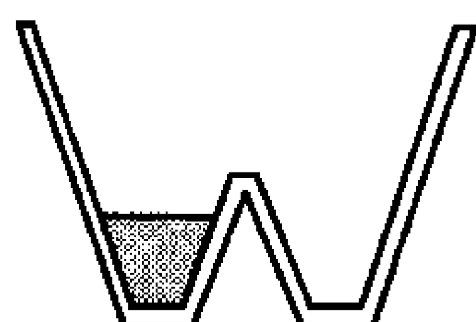


图 4-27

31. 以稳定的速率 (即每单位时间相同的体积) 把水注入到如图 4-28 的花瓶中.

(a) 画水的深度关于时间 t 的函数 $y = f(t)$ 的略图. 在你的图像上注明凹性改变的点.

(b) 水深多少时, $y = f(t)$ 增长最快? 最慢? 估计这两个深度时的增长率之比.

32. 假设多项式 f 恰有两个局部最大值点和一个局部最小值点, 并且这些点就是 f 的所有临界点.

(a) 画出 f 的一个可能的图像.

(b) f 最多有几个零点?

(c) f 至少有几个零点?

(d) f 至少有几个拐点?

(e) f 的最少次数是多少?

(f) 求 $f(x)$ 的一个可能表达式.

33. 指出图 4-29 中 $f(x)$ 的拐点的大致位置, 如果该图像是

(a) 函数 $f(x)$

(b) 导数 $f'(x)$

(c) 二阶导数 $f''(x)$

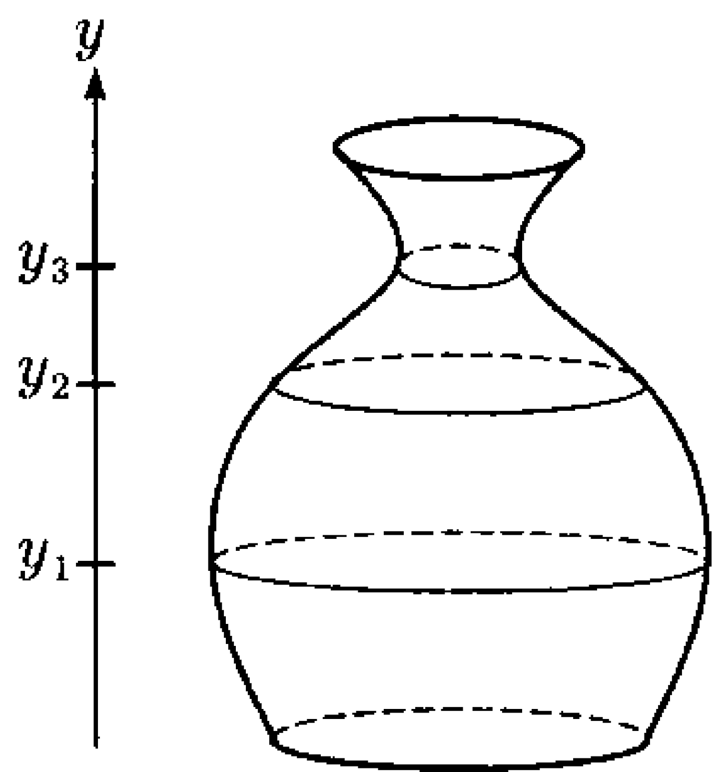


图 4-28

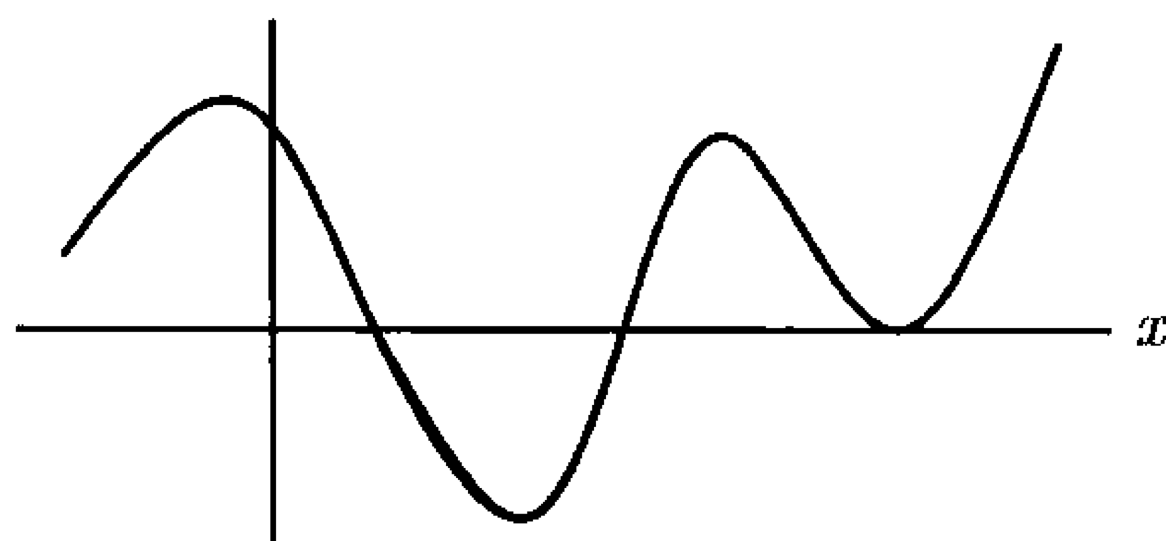


图 4-29

4.3 整体最大值与整体最小值

4.3.1 整体最大值与整体最小值

求整体最大值与整体最小值的方法形成了*最优化理论*. 一个函数在局部最大值点和局部最小值点处的取值大于或小于其附近的点的函数值. 然而, 我们通常感兴趣于这样的点, 即这个函数在该点的取值比所有其他点大或小. 比如, 一个公司将通过成本最小化使其利润达到最大. 我们给出如下的定义.

> 对任何函数 f:
> - 如果 $f(p)$ 小于或等于 f 的所有值, f 在 p 点有**整体最小值**.
> - 如果 $f(p)$ 大于或等于 f 的所有值, f 在 p 点有**整体最大值**.

如何求整体最大值与整体最小值

如果 f 是定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ (包括它的端点) 上的连续函数, 图 4-30 表明 f 的整体最大值或整体最小值分别在局部最大值点或局部最小值点, 或在区间的两个端点 $x=a$ 和 $x=b$ 处取到.

> **求包括端点的区间上连续函数的整体最大值和整体最小值**: 比较区间内的所有临界点及端点处的函数值.

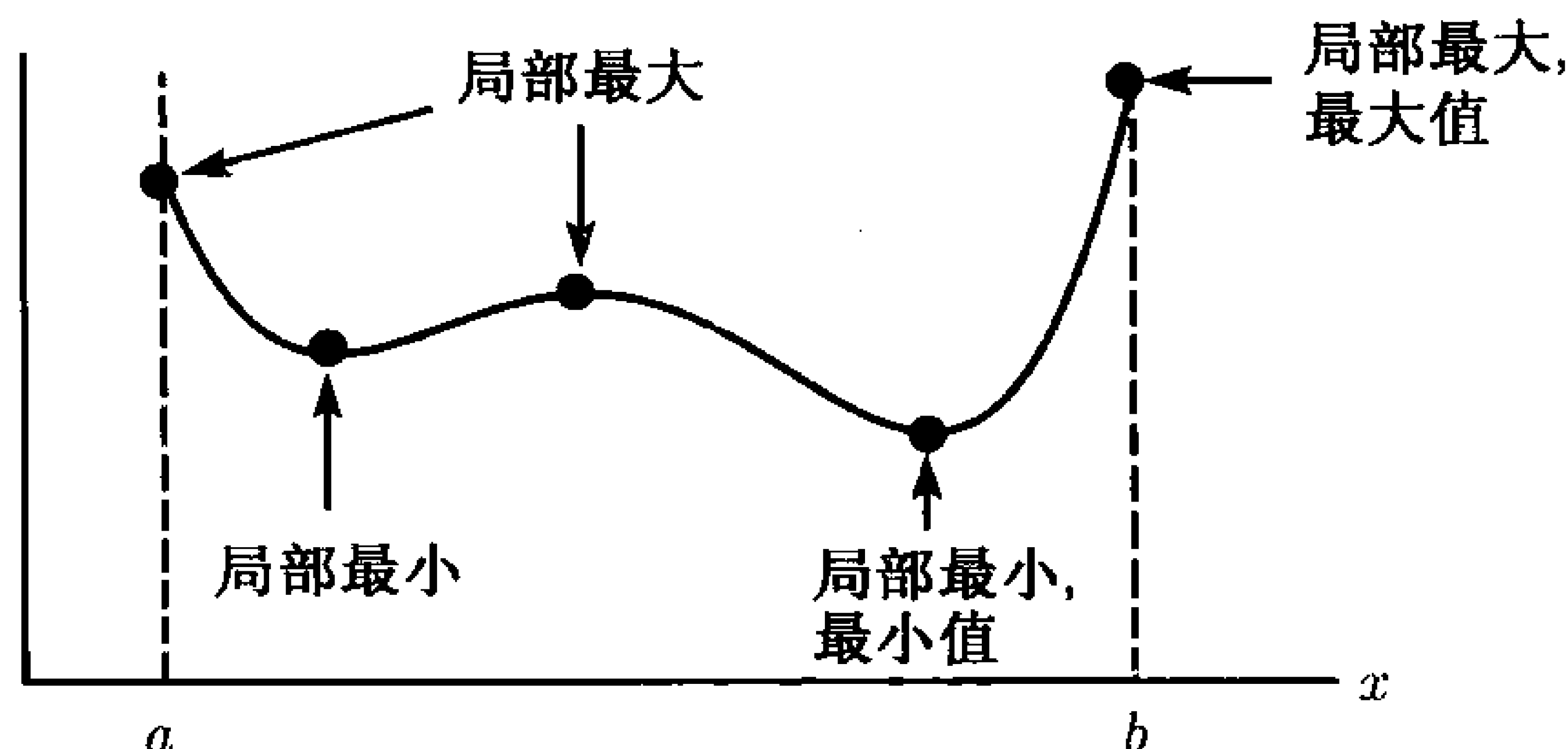


图 4-30 区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的整体最大值和整体最小值

如果连续函数定义在区间 $a<x<b$ (不包括端点) 或没有端点的整个实直线上, 情况怎么样? 图像为图 4-31 的函数没有整体最大值, 因为函数没有最大的值. 该函数的整体最小值与局部最小值中的一个相同, 并在图中标出. 定义在整个实直线上或不包括端点在内的区间上的函数可能有也可能没有整体最大值或整体最小值.

> **求不包括端点的区间或整个实直线上的连续函数的整体最大值和整体最小值**: 求所有临界点的函数值, 并画略图.

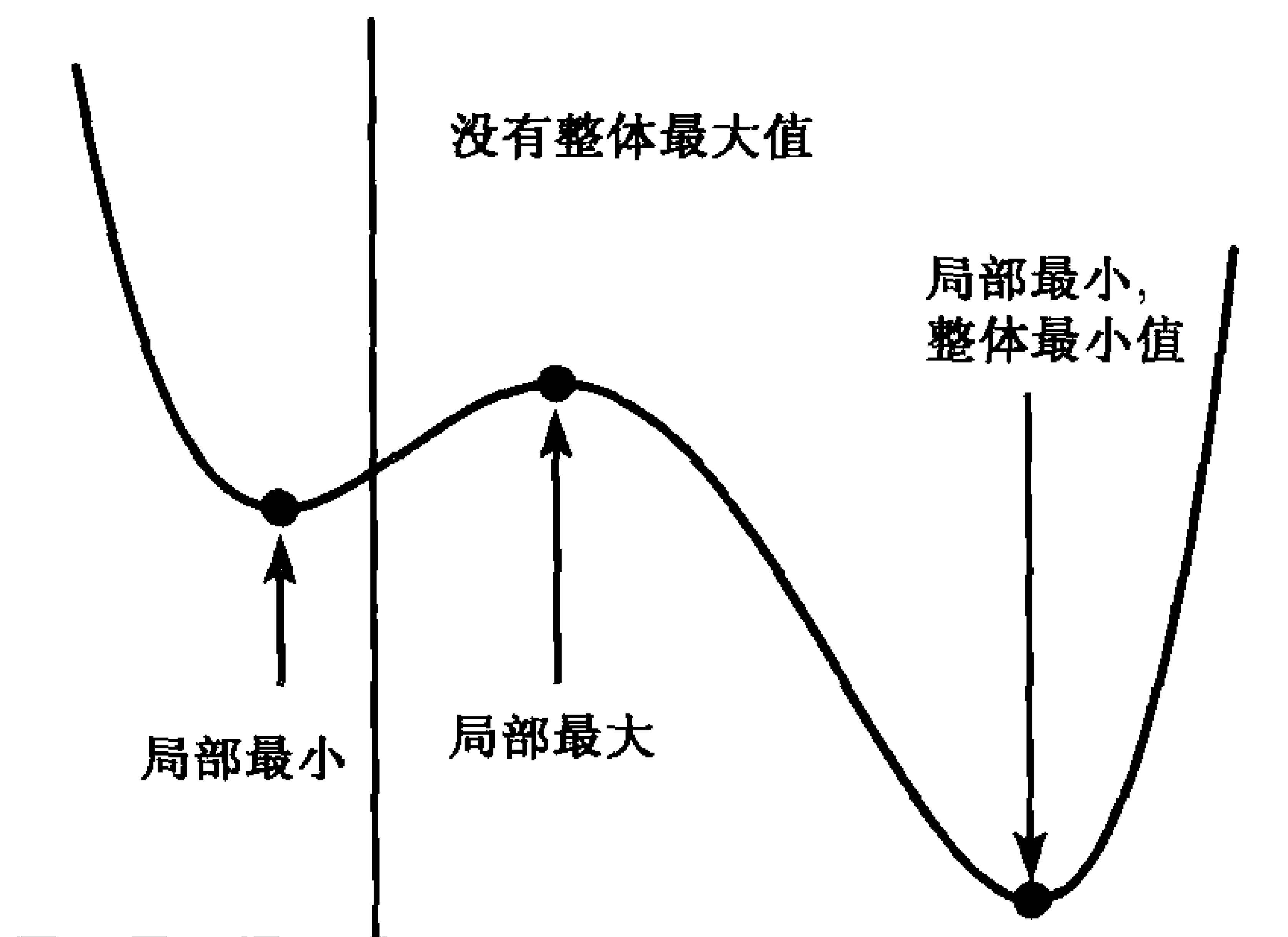


图 4-31 实直线上的整体最大值和整体最小值

例 1 求 $f(x)=x^3-9x^2-48x+52$ 在区间 $-5\leqslant x\leqslant 14$ 上的整体最大值和整体最小值.

解 我们首先利用 $f'(x)=3x^2-18x-48=3(x+2)(x-8)$ 求该函数的临界点, 从而得到 $x=-2$ 和 $x=8$ 是临界点. 由于整体最大值在临界点或区间的端点取得, 所以我们计算这四个点的函数值:

$$f(-5)=-58, f(-2)=104, f(8)=-396, f(14)=360.$$

比较这四个值, 我们知道整体最大值在 $x=14$ 时取得, 为 360; 整体最小值在 $x=8$ 时取得, 为 -396. (参见图 4-32)

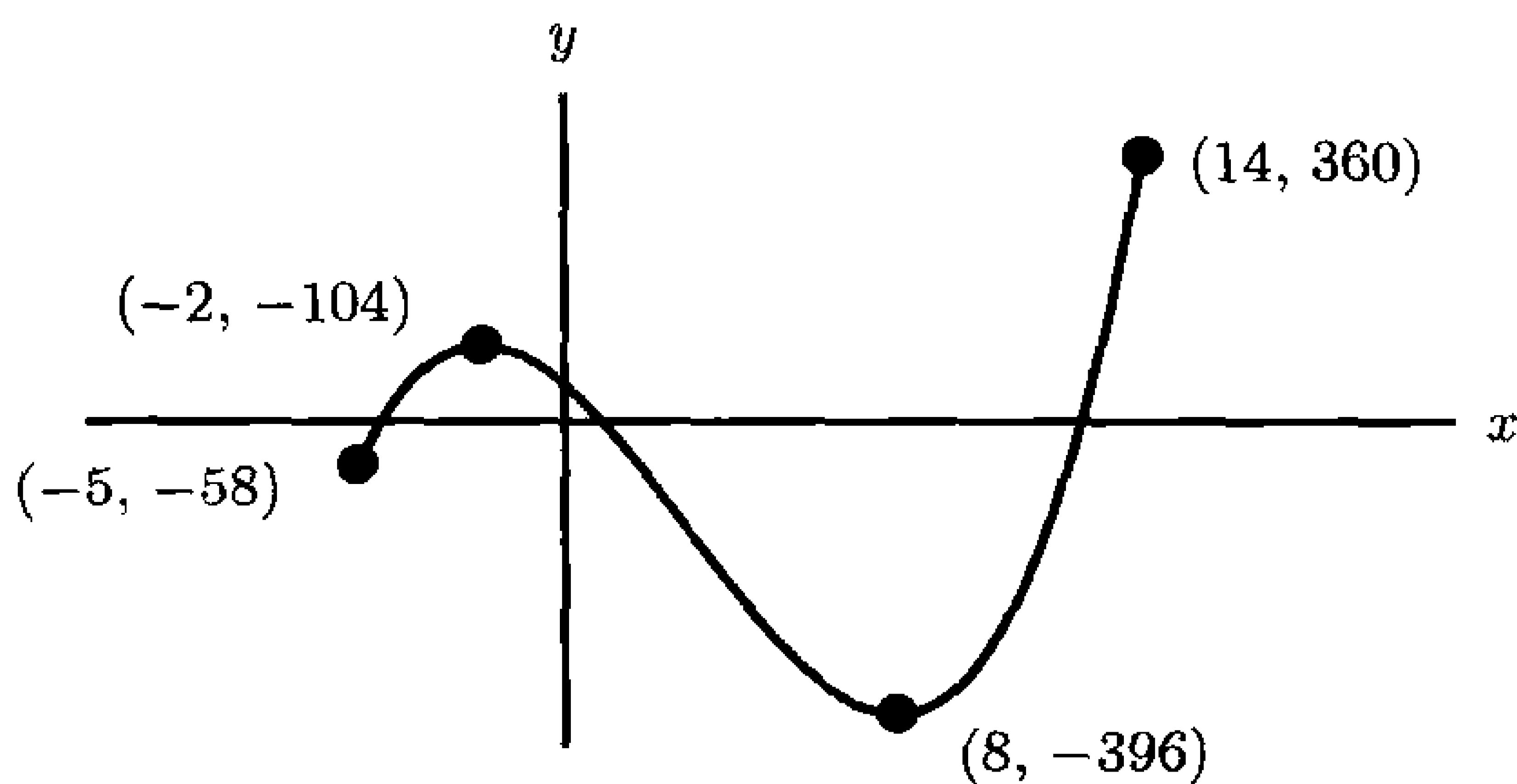


图 4-32 在区间 $-5\leqslant x\leqslant 14$ 上的整体最大值与整体最小值 □

例 2 对时间 $t\geqslant 0$(单位: 天), 某植物的叶子发生光合作用的速度, 用生成氧气的速度来衡量, 其表达式大致为[①]

$$p(t)=100(\mathrm{e}^{-0.02t}-\mathrm{e}^{-0.1t}).$$

---

① 例子摘自 Rodney Gentry, *Introduction to Calculus for the Biological and Health Science*, (Reading: Addison Wesley, l1978).

光合作用何时发生的最快? 最大速度是多少?

解 为求 $p(t)$ 的整体最大值, 我们首先求临界点. 我们先求导并令其为零, 再求解 t:

$$
\begin{aligned}
p'(t) = 100(-0.02\mathrm{e}^{-0.02t} + 0.1\mathrm{e}^{-0.1t}) &= 0 \\
-0.02\mathrm{e}^{-0.02t} &= -0.1\mathrm{e}^{-0.1t} \\
\frac{\mathrm{e}^{-0.02t}}{\mathrm{e}^{-0.1t}} &= \frac{0.1}{0.02} \\
\mathrm{e}^{-0.02t+0.1t} &= 5 \\
\mathrm{e}^{0.08t} &= 5 \\
0.08t &= \ln 5 \\
t &= \frac{\ln 5}{0.08} = 20.12 \text{ 天}
\end{aligned}
$$

再次求导得

$$p''(t)=100(0.0004\mathrm{e}^{-0.02t}-0.01\mathrm{e}^{-0.1t})$$

并将 $t = 20.12$ 代入得 $p''(20.12) = -0.107$, 于是 $t = 20.12$ 是局部最大值点. 由于这是唯一的临界点, 因此这个局部最大值点就是整体最大值点. (参见图 4-33.)

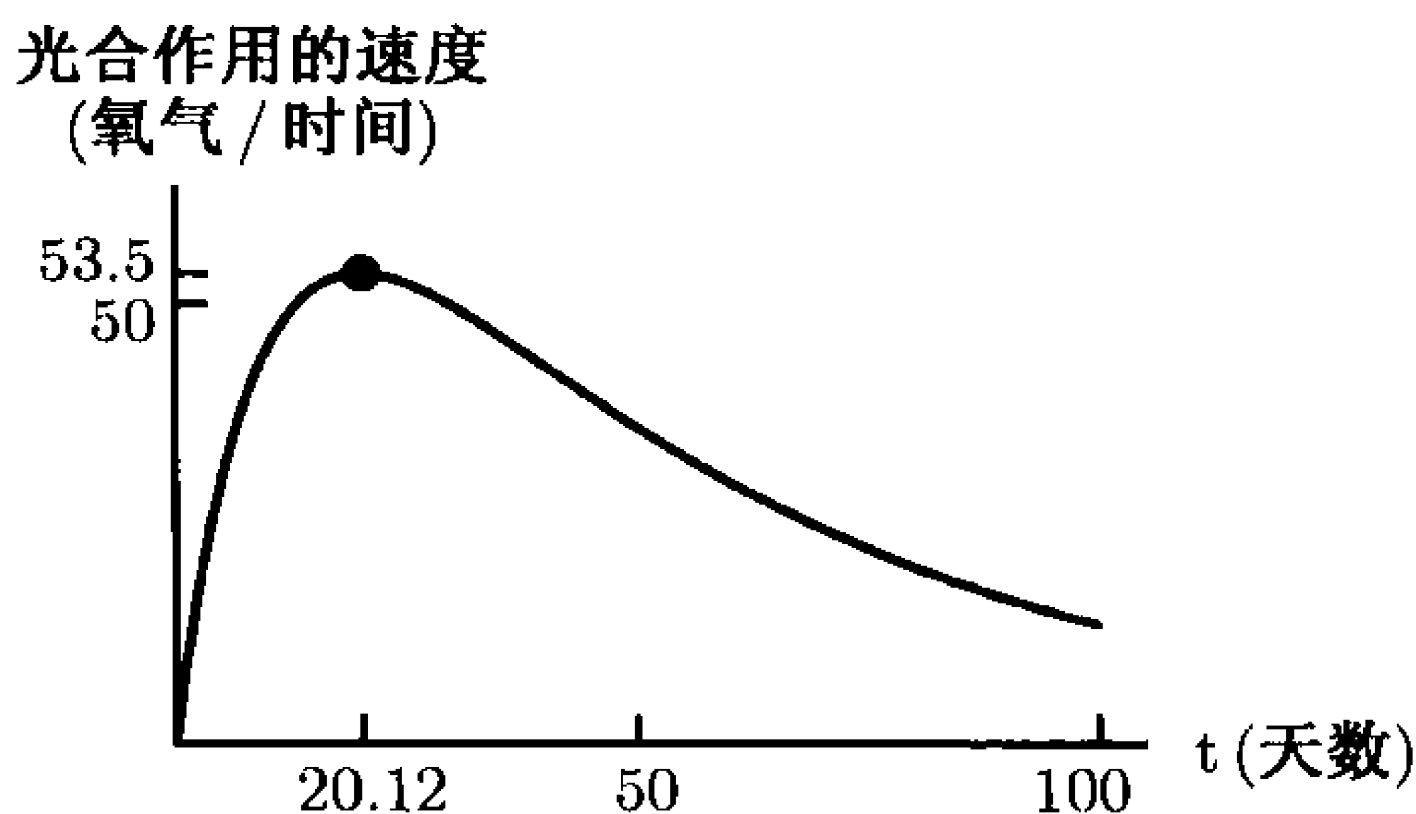


图 4-33

当 $t = 20.12$ 天时, 速度 (单位: 氧气/天) 为

$$p(20.12) = 100(\mathrm{e}^{-0.02(20.12)} - \mathrm{e}^{-0.1(20.12)}) = 53.50.$$ □

4.3.2 一个绘图的例子: 汽油消耗量最小化

下面我们看一个例子. 在这个例子中, 函数由它的图像给出, 并且最优值从图像中读出. 你已经弄懂了如何从 $f(x)$ 的图像估算 $f(x)$ 的最优值, 即读出最高值和最低值. 在这个例子中, 我们将明白如何从 $f(x)$ 关于 x 的图像中估算 $f(x)/x$ 的最优值.

我们研究的问题是如何设置驾驶速度使燃料的利用率最大.[①]我们假设为速度 v(单位: mile/h) 的函数的汽油消耗 g(单位: gal/h) 如图 4-34 所示. 我们要最小化每英里的汽油消耗, 而不是每小时的汽油消耗. 令 $G = g/v$ 表示每英里的平均汽油消耗. (G 的单位是 gal/mile).

例 3 利用图 4-34, 估计使 $G = g/v$ 最小的速度.

① 摘自 Peter D. Taylor, 《微积分: 函数分析》(多伦多: Wall & Emerson, 1992).

解 我们要求 $G = g/v$ 的最小值, 其中 g 和 v 的关系由图 4-34 中的图像确定. 我们能利用图 4-34 画 G 关于 v 的略图并估计临界点. 但有更简单的方法. 图 4-35 表明 g/v 是连接原点和点 P 的直线的斜率. P 位于曲线上何处时, 使得斜率最小?

由图 4-35 显示的直线的可能位置, 我们知道: 与曲线相切的直线的斜率既是局部最小值也是最小值. 由图 4-36, 我们能够看出在该点的速度大约为 50 mile/h. 因此为使每英里的汽油消耗最小, 我们需以 50 mile/h 的速度行驶.

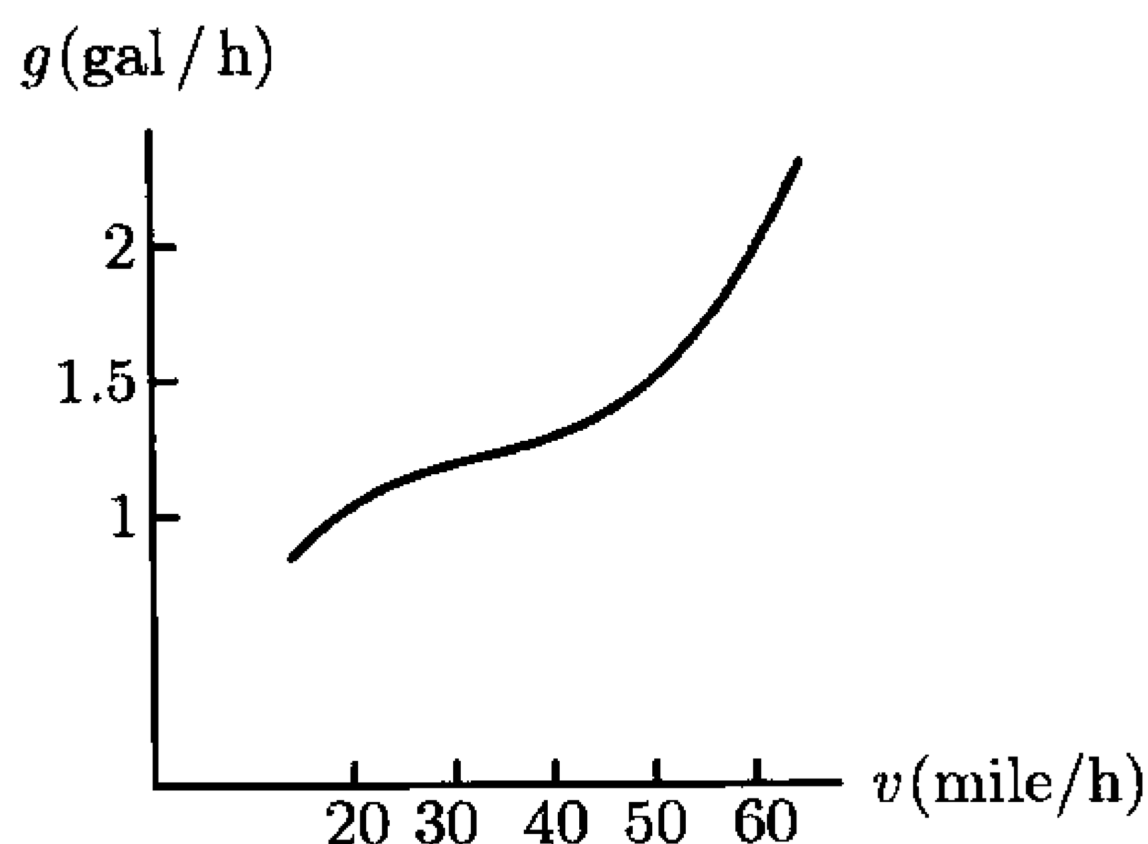


图 4-34 相对于速度的汽油消耗

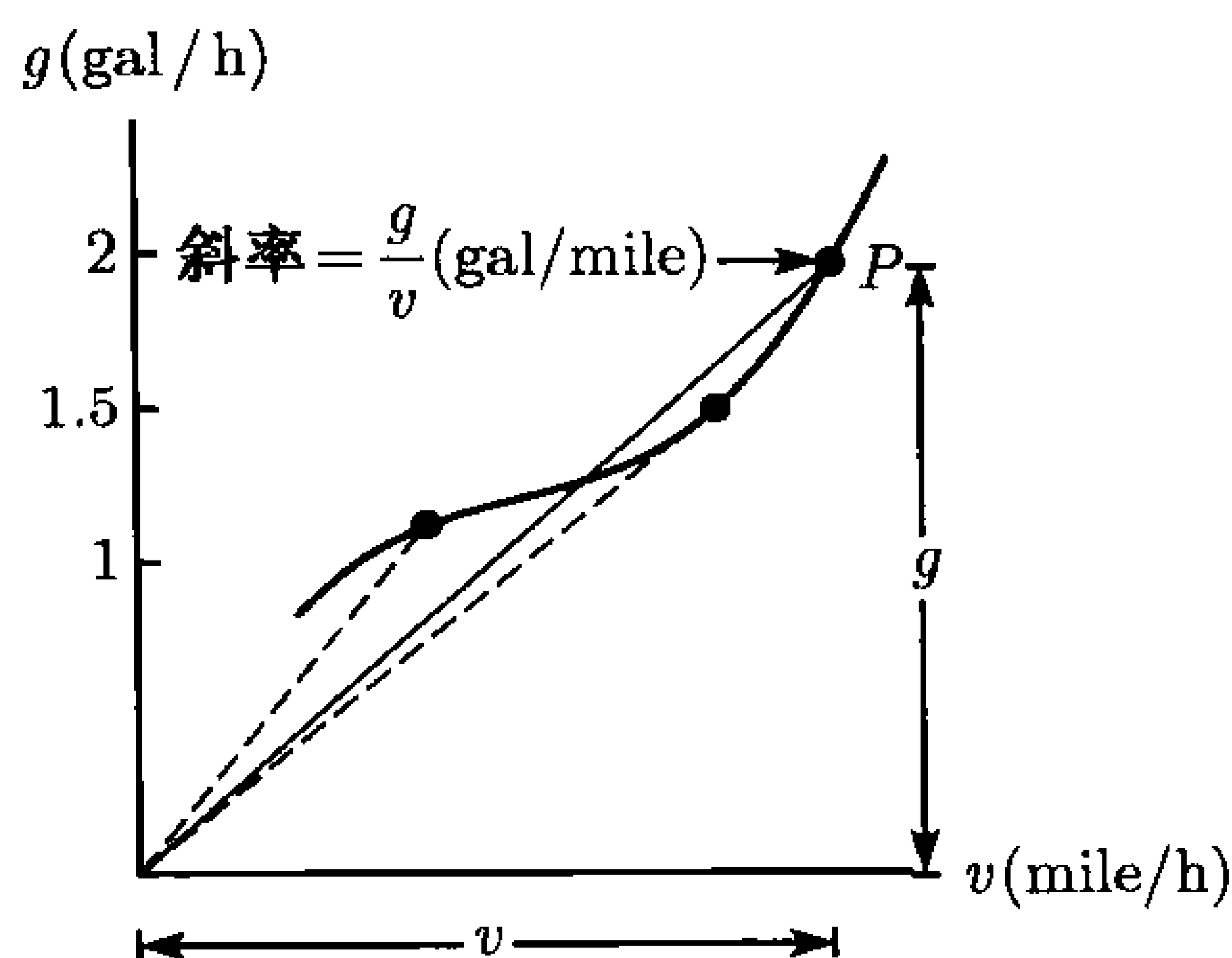


图 4-35 每英里的汽油消耗 g/v 的图像表示

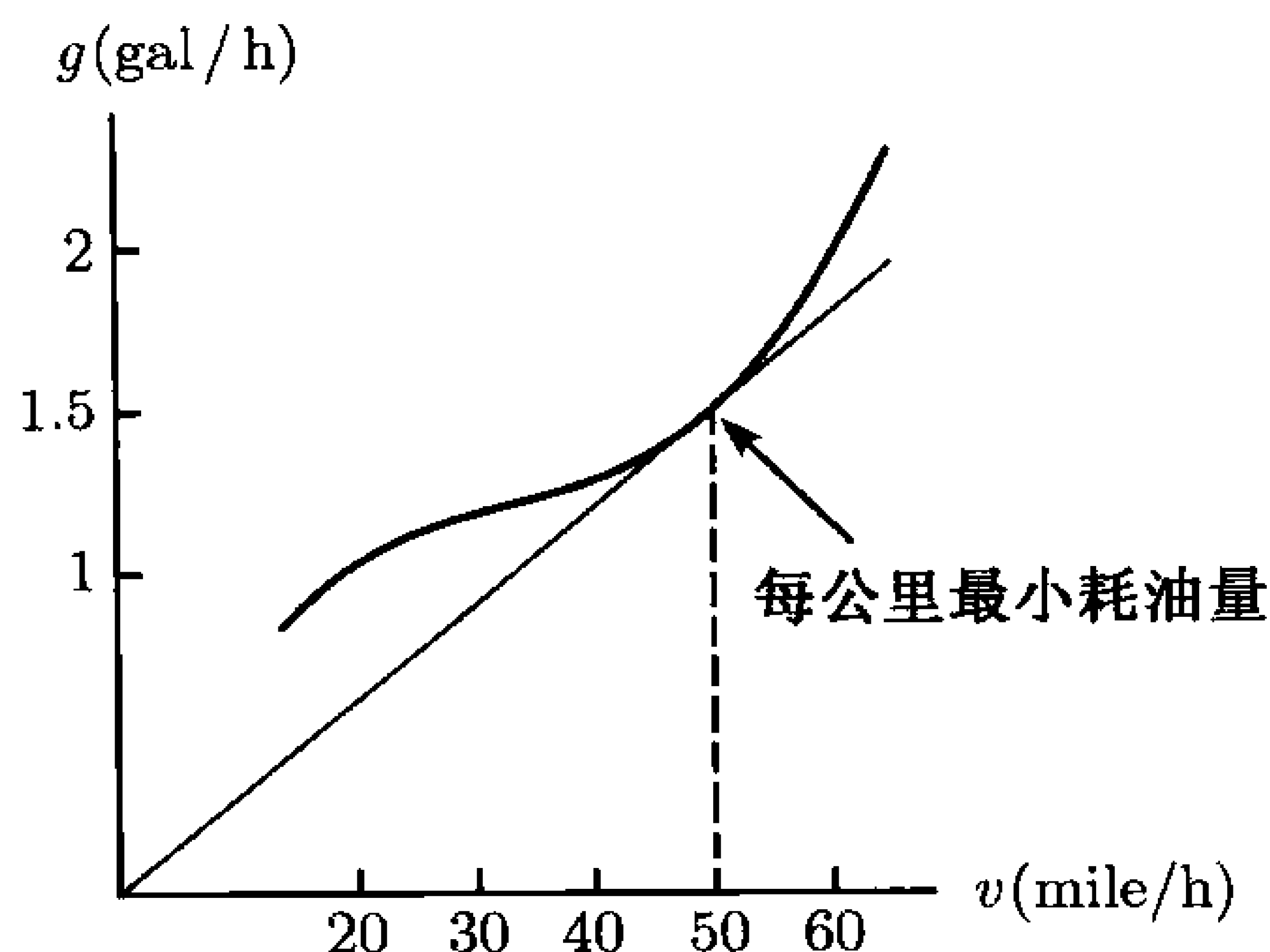


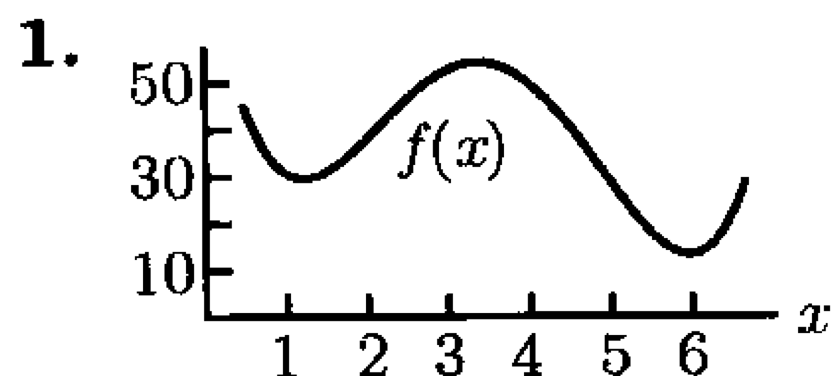
图 4-36 使燃料效率最大的速度

□

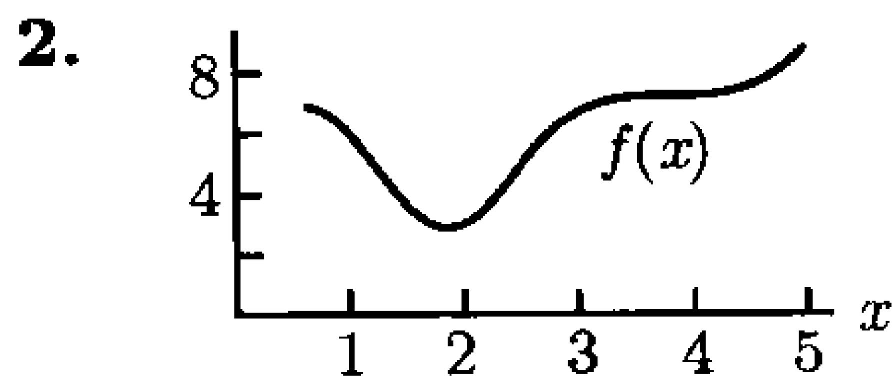
习题

对习题 1~2, 在给定的图像上指出所有的临界点. 哪些对应于局部最小值点、局部最大值点、整体最大值点或整体最小值点, 或都不是? (注意图像在闭区间上)

1.



2.



3. 把一颗柚子以初始速度 50 ft/h 向上抛. 上抛时柚子离地面 5 ft. 它在 t 时刻离地面的高度为

$$y = -16t^2 + 50t + 5.$$

在它返回地面前，它离地面的最大高度是多少？

4. 对下列每个区间，利用图 4-37 选择给出指明 f 在该区间上的整体最大值和整体最小值的位置的命题.

(a) $4 \leqslant x \leqslant 12$　　(b) $11 \leqslant x \leqslant 16$

(c) $4 \leqslant x \leqslant 9$　　(d) $8 \leqslant x \leqslant 18$

(I) 右端点取整体最大值，左端点取整体最小值；

(II) 右端点取整体最大值，整体最小值在临界点取得；

(III) 左端点取整体最大值，右端点取整体最小值；

(IV) 左端点取整体最大值，整体最小值在临界点取得；

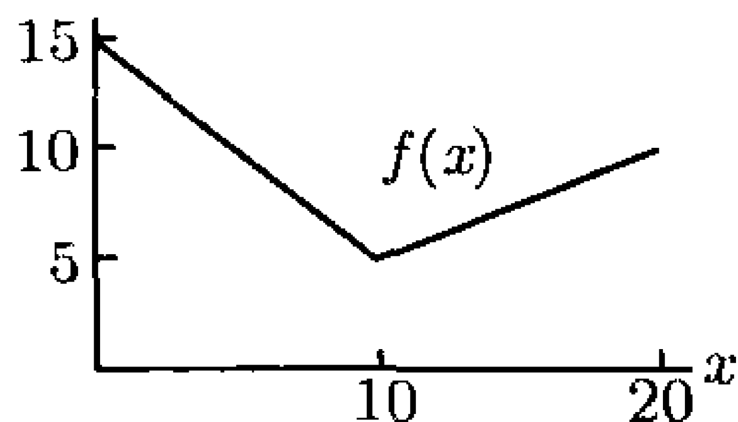


图 4-37

在习题 5~8 中，画具有给定性质的函数图像.

5. 在 $x = 3$ 取局部最小值和整体最小值，但没有局部最大值和整体最大值.

6. 在 $x = 3$ 取局部最小值，在 $x = 8$ 取局部最大值，但没有整体最大值和整体最小值.

7. 在 $x = 3$ 取局部最小值和整体最小值，在 $x = 8$ 取局部最大值和整体最大值.

8. 没有局部和整体最值.

9. 下面的命题是否正确，并对你的答案作出解释.

$f(x) = x^2$ 在任意闭区间上的整体最大值在区间端点中的一个取得.

在习题 10~13 中，画区间 $0 \leqslant x \leqslant 10$ 上具有给定性质的一个函数的图像.

10. 在 $x = 3$ 取局部最小值，在 $x = 8$ 取局部最大值，但整体最大值和整体最小值都在区间的端点取到.

11. 在 $x = 3$ 取局部最大值和整体最大值，在 $x = 10$ 取局部最小值和整体最小值.

12. 在 $x = 3$ 取局部最小值和整体最小值，在 $x = 8$ 取局部最大值和整体最大值.

13. 在 $x = 0$ 取整体最大值，在 $x = 10$ 取整体最小值，没有其他局部最大值或局部最小值.

14. 利用作图计算器或计算机作函数 $f(x) = x^3 - e^x$ 的图像，并分别找出它在下列区间上所有的局部和整体最值：

(a) $-1 \leqslant x \leqslant 4$　　(b) $-3 \leqslant x \leqslant 2$

15. 设 C 是正常数. 某病人的体温 T 随着一种药物的剂量 D 变化，其关系式为

$$T = \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)D^2.$$

(a) 多大剂量的药物使体温变化最大？

(b) 身体对药物的敏感度定义为 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}D$. 多大剂量的药物使敏感度最大？

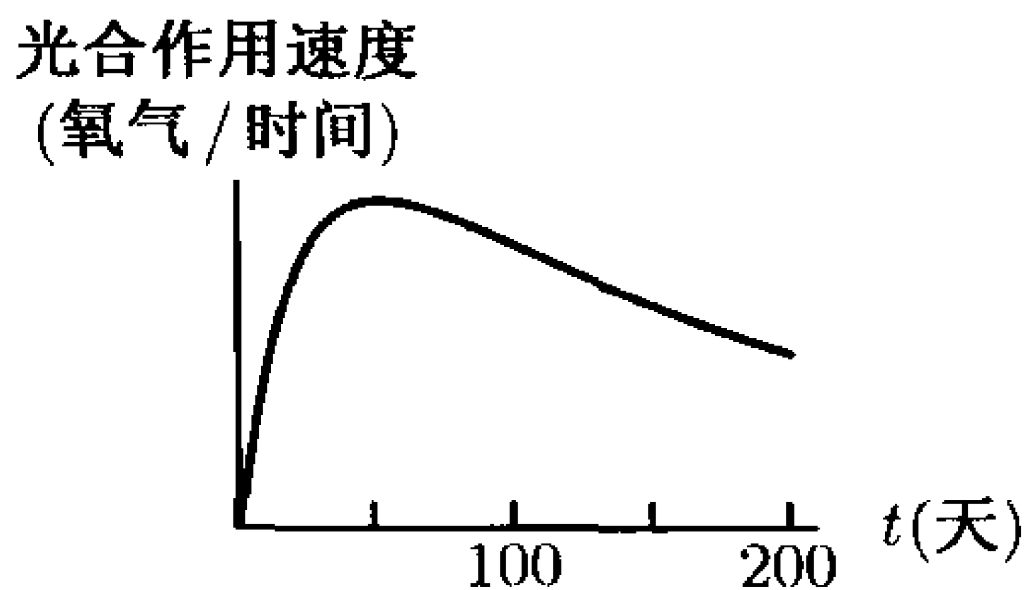


图 4-38

16. 图 4-38 给出了叶子发生光合作用的速度.

(a) 对 $t \geqslant 0$，大约何时光合作用进行得最快？

(b) 如果叶子的生长速度与光合作用的速度成比例，那么区间 $0 \leqslant t \leqslant 200$ 的哪部分叶子在生长？何时生长速度最快？

对习题 17~21 中的每个函数，完成以下任务：

(a) 求 f' 和 f''.

(b) 求 f 的临界点.

(c) 求 f 的任意一个拐点.

(d) 估算 f 在它的临界点及给定区间上的端点的函数值. 求 f 在该区间内的局部最值和整体最值.

(e) 画 f 的略图.

17. $f(x)=x^3-3x^2 \quad (-1\leqslant x\leqslant 3)$

18. $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1(-0.5\leqslant x\leqslant 3)$

19. $f(x)=x^3-3x^2-9x+15 \quad (-5\leqslant x\leqslant 4)$

20. $f(x)=x+\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

21. $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

在习题 22~27 中, 求函数的精确整体最大值和整体最小值. 除非特别指出, 定义域为全体实数.

22. $g(x)=4x-x^2-5$

23. $f(x)=x+1/x,\ x>0$

24. $g(t)=t\mathrm{e}^{-t},\ t>0$

25. $f(x)=x-\ln x,\ x>0$

26. $f(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$

27. $f(t)=(\sin^2 t+2)\cos t$

28. 图 4-39 是函数 $g(x)$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的导数.

(a) 用几句话描述 $g(x)$ 在该区间上的特性.

(b) $g(x)$ 的图像有拐点吗? 如果有, 给出各拐点的大概位置的 x 坐标, 并说明你的推理.

(c) $g(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的整体最大值和整体最小值.

(d) 如果 $g(-2)=5$, 你对 $g(0), g(2)$ 了解多少? 请解释.

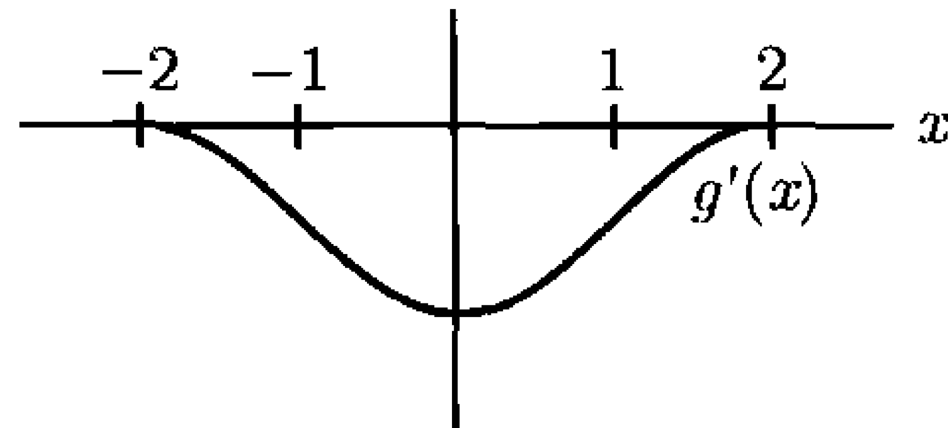


图 4-39

29. 咳嗽时, 气管收缩. 呼出气体的速度 v 依赖于气管的半径 r. 如果 R 是气管的正常 (休息时) 半径, 那么对于 $r\leqslant R$, 速度为:

$$v=a(R-r)r^2, \text{其中 } a \text{ 是正常数.}$$

r 取何值时, 速度达到最大?

30. 一只鸟每天消耗的能量 E 依赖于它每天寻找食物花费的时间 F 小时. 寻找食物的时间较短就需要比较好的地盘, 这就需要较多的能量抵御外敌[①]. 如果 $E=0.25F+\dfrac{1.7}{F^2}$, 求使消耗的能量最小的寻找食物的时间.

31. 求周长为 200 m 的长方形的长与宽, 使其的面积最大.

32. 如果你有 100 ft 的栅栏, 并想把它靠一面长直墙围成一个矩形区域. 你能围成的最大面积是多少?

33. 一风景建筑师计划在植物园围一个 3000 平方英尺的矩形区域. 她利用每英尺 25 美元

① 摘自 Grahan Pyke,《行为生态学导论》(牛津: Blackwell, 1987).

的灌木围其中的三面, 而第四面的围栏每英尺成本为 10 美元. 求最小总成本.

34. 一封闭盒子的表面积为 A, 其正方形的底面边长为 x.

(a) 求 V 关于 x 的函数的表达式.

(b) 画 V 关于 x 的图像.

(c) 求 V 的整体最大值.

35. 以正方形为底的有盖盒子有固定的体积 V, 该盒子的长宽高各为多少可使它的表面积最小?

36. 在加拿大西岸, 乌鸦以海螺 (一种甲壳类动物) 为食. 为打开海螺, 乌鸦从空中把海螺扔向岩石. 如果贝壳没破, 乌鸦会接着扔①. 从空中 x 米高处扔贝壳的平均次数 n 大致为

$$n(x) = 1 + \frac{27}{x^2}.$$

(a) 把乌鸦扔海螺直到打开海螺向上所飞行的垂直距离表示成抛掷高度 x 的函数.

(b) 观察到乌鸦从使得总向上飞行的垂直距离最小的高度扔海螺. 这个高度等于多少?

37. 在一所有 763 个孩子的学校暴发的流感中, 被感染的孩子数量 I 用易感染的 (但仍然健康) 孩子数量 S 表示为②

$$I = 192\ln\left(\frac{S}{762}\right) - S + 763.$$

那么可能被感染的孩子的最大数为多少?

38. (a) 求 $p(1-p)^4$ 的临界点.

(b) 把临界点分类为局部最大值点、局部最小值点及两者不都是的点.

(c) $p(1-p)^4$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 的整体最大值和整体最小值.

39. 一棵苹果树平均每季生产 400kg 苹果. 然而, 如果每平方公里种植 200 棵以上的苹果树, 由于过分的拥挤, 超出 200 的每棵树会使每棵树减产 1 kg.

(a) 把一平方公里苹果树的总产量表示成苹果树数的函数, 并画该函数的图像.

(b) 农民应在一平方公里地上种多少树使总产量最大?

40. 某种群的后代的数量可能不是成体数量的线性函数. 用来模拟鱼的数量的里克 (Ricker) 曲线断言 $y = axe^{-bx}$, 其中 x 是成鱼数量, y 是幼鱼数量, a, b 是正常数.

(a) 求里克曲线的所有临界点并把它们分类.

(b) 是否有最大值? 这表明鱼群的什么性质?

41. 某化学反应把物质 A 转化为物质 Y; Y 的产生促进反应的进行. 反应开始时, A 的质量为 a (g), t (s) 后, Y 的质量为 y (g). 反应的速度 (单位: g/s) 为

$$\text{速度} = ky(a-y), \text{其中 } k \text{ 是正常数}.$$

(a) y 为何值时, 速度为负? 画出速度关于 y 的函数图像.

(b) y 为何值时, 速度最大?

42. 在一次化学反应中, 物质 A 结合物质 B 生成物质 Y. 反应开始时, A 的质量为 a (g), B 的质量为 b (g). 假设 $a < b$. 反应开始 t (s) 后, Y 的质量为 y (g). 对某些反应类型, 反应的速度 (单位: g/s) 为

---

① 摘自 Reto Zach,《行为生态学导论》(牛津: Blackwell, 1987).

② 数据来自 Communicable Disease Surveillance Centre (UK), "Influenza in a Boarding School", *British Medical Journal.* 1978 年 3 月 4 日.

$$\text{速度} = k(a-y)(b-y), \text{其中 } k \text{ 是正常数.}$$

(a) y 为何值时, 速度非负? 画出速度关于 y 的函数图像.

(b) 利用你的图像求使反应速度最快的 y 值.

43. 血液中氧气的供应量 S 依赖于血液中红细胞的百分比, 即血球密度 H:

$$S = aHe^{-bH}, \text{其中 } a, b \text{ 是正常数.}$$

(a) H 为何值时, 血液中的氧气供应量最大? 最大氧气供应量是多少?

(b) 若增大常数 a 与 b, S 的最大值如何变化?

44. 某药片服用 t 小时后, 药物在血流中的质量 (单位: mg) 为 $q(t) = 20(e^{-t} - e^{-2t})$.

(a) $t = 0$ 时, 血流中药物含量为多少?

(b) 血流中药物的质量何时最大? 最大值是多少?

(c) 最后的质量如何?

45. 鸟生蛋总是一次生一窝. 蛋孵化时, 每窝蛋能孵出一窝幼鸟. 我们要确定一窝蛋的数量, 使每窝幼鸟存活到成年的数量最大. 如果一窝蛋少, 每窝幼鸟的数量小; 如果一窝蛋多, 所以需要喂食的幼鸟就多, 因此大多数死于饥饿. 每窝幼鸟存活鸟的数量作为一窝蛋数量的函数图像参见图 4-40 的效益曲线.①

(a) 估计使每窝幼鸟存活数量最大的蛋的数量.

(b) 假设生一大窝蛋也有生物学成本: 雌性的存活率由于一次生蛋太多而降低. 该成本由图 4-40 中的虚线表示. 如果我们把成本纳入考虑, 即假设一窝蛋的最优数量就是使两条曲线的垂直距离最短, 那么一窝蛋的最优数量是多少?

46. 设 $f(v)$(单位: J/s, 焦耳是一种能量单位) 表示飞翔中的鸟消耗的能量, 它是速度 (单位: m/s) 的函数. 设 $a(v)$(单位: J/m) 是同一只鸟消耗的能量.

(a) 指出 $f(v)$ 的图像形状如图 4-41 的一个原因 (用鸟飞行的方式).

(b) $f(v)$ 和 $a(v)$ 之间的关系如何?

(c) $a(v)$ 在何处取最小值?

(d) 鸟飞行时是否尽量使 $f(v)$ 或 $a(v)$ 最小? 为什么?

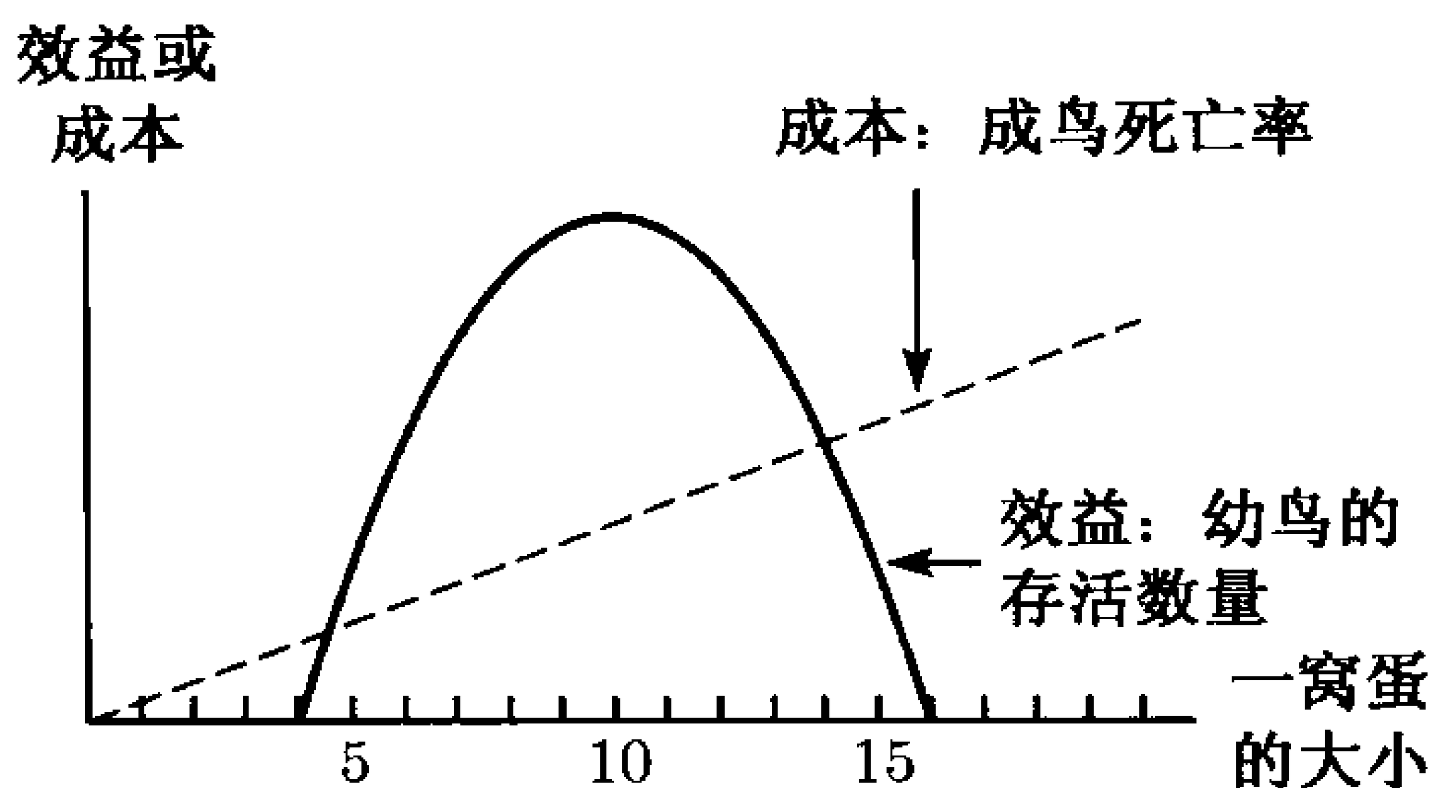


图 4-40

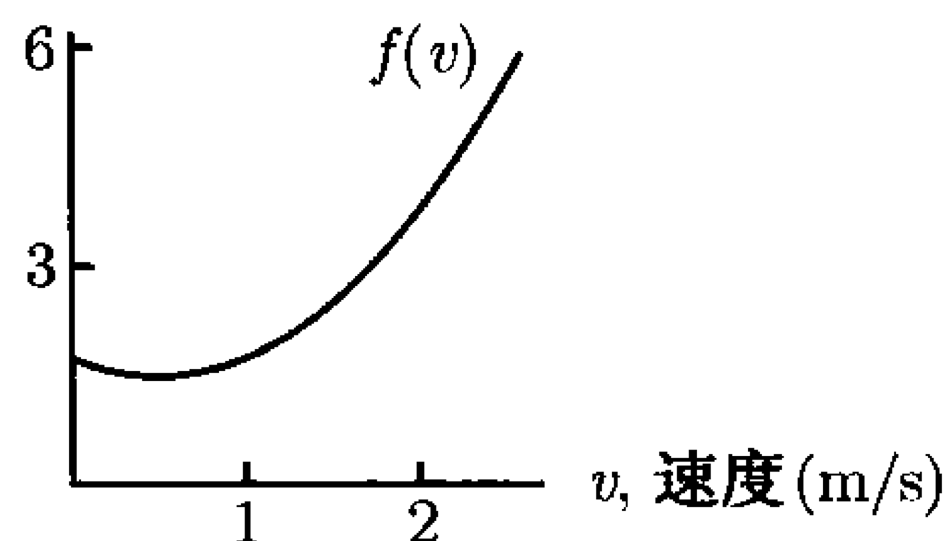


图 4-41

47. 传染病在人群中传播时, 感染人群的人数 I 表示成易感染人数的函数为

$$I = k\ln\left(\frac{S}{S_0}\right) - S + S_0 + I_0, \quad k, S_0, I_0 > 0.$$

① 数据来自 C. M. Perrins and D. Lack《行为生态学导论》(牛津: Blackwell, 1987).

(a) 求易感染人群的最大人数.

(b) 常数 k 是特殊疾病的一个特性; 常数 S_0 和 I_0 分别是疾病发作时 S 和 I 的值. 以下哪些影响 I 的最大可能值. 请解释.

- 特殊疾病但不知道它如何发作.
- 知道它如何发作, 但不是特殊疾病.
- 既是特殊疾病又知道它如何发作.

48. 一直角三角形斜边有一端点在原点, 另一端点在曲线 $y = x^2e^{-3x}(x \geqslant 0)$ 上. 另两边中的一边在 x 轴上, 另一边与 y 轴平行. 求这样的三角形的最大面积. 这种情形在 x 取何值时发生?

49. 一直角三角形有一顶点在原点, 一顶点在曲线 $y = e^{-x/3}(1 \leqslant x \leqslant 5)$ 上. 两条直角边中的一条在 x 轴上, 另一条与 y 轴平行. 求这样的三角形的最大面积和最小面积.

50. 一个人在 t 秒内的血压 p(单位: 毫米汞柱) 为

$$p = 100 + 20\sin(2.5\pi t).$$

(a) 血压的最大值和最小值是多少?

(b) 连续两个最大值之间的时间间隔是多少?

(c) 把你的答案用血压关于时间的图像表示出来.

51. 从漂在湖上的一艘小船 (图 4-42 中的点 B) 上放飞一只鸽子. 由于寒冷的水面上飘落的空气, 在湖面上飞一米需要的能量是在岸上飞行所需能量 e 的两倍 (e =3 J/m). 为使从 B 飞到阁楼 L 耗费的能量最小, 鸽子朝岸上的 P 点飞行, 然后沿着湖岸飞向 L. A, L 的距离 $\overline{\mathrm{AL}}$ 是 2000 m, A, B 的距离 $\overline{AB}$ 是 500 m. 角 A 是直角.

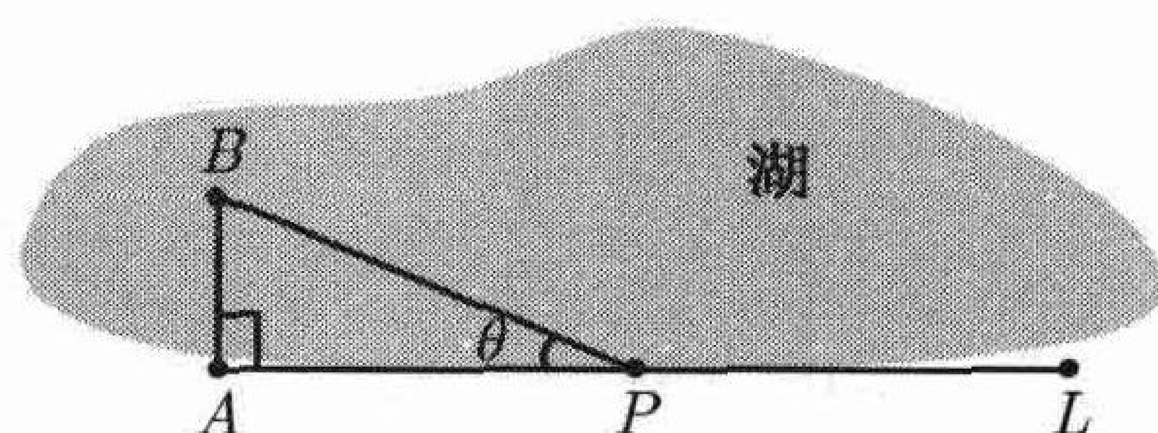


图 4-42

(a) 把从 B 经过 P 飞向 L 所需要的能量表示成角 θ(角 BPA) 的函数.

(b) 最优角 θ 等于多少?

(c) 如果 $\overline{\mathrm{AL}}$, $\overline{AB}$ 和 e 取不同的数值, 你的答案是否改变?

52. 统计学中的钟形曲线的表达式为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$

其中 μ 是均值, σ 是标准差.

(a) $p(x)$ 在何处有最大值?

(b) $p(x)$ 有拐点吗? 如果有, 在哪里?

4.4 利润、成本和收益

4.4.1 利润最大化

商品制造商面临的最基本问题是如何获得最大利润. 对于产量 q, 利润 $\pi(q)$ 是供应该产量的收益 $R(q)$ 与成本 $C(q)$ 之差. 因此, $\pi(q) = R(q) - C(q)$. 边际成本

$MC = C'$ 是 C 的导数, 边际收益是 $MR = R'$.

现在我们看看若给定收益和成本, 如何使总利润最大. 下面的例子为确定最优生产水平提供了一个准则.

例 1 如果收益和成本分别是图 4-43 中的曲线 R 和 C, 估计最大利润.

解 由于利润是收益减去成本, 利润等于成本曲线和收益曲线的垂直距离, 在图 4-43 中用垂直的箭头标出. 收益曲线在成本曲线之下时, 公司亏损; 收益曲线在成本曲线之上时, 公司盈利. 最大利润必然在公司盈利的区间, 即 $q = 70$ 和 $q = 200$ 之间获得. 当两条曲线之间的垂直距离 (收益曲线在成本曲线之上) 最大时获得最大利润. 这大概在 $q = 140z$ 时发生.

$q = 140$ 所获利润是两条曲线之间的垂直距离, 因此

$$\text{利润} = 80\,000\ \text{美元} - 60\,000\ \text{美元} = 20\,000\ \text{美元}.$$

最大利润可能在 $MR = MC$ 时获得.

我们现在分析在最优点附近的边际成本和边际收益. 放大图 4-43 在 $q = 140$ 附近的图得到图 4-44.

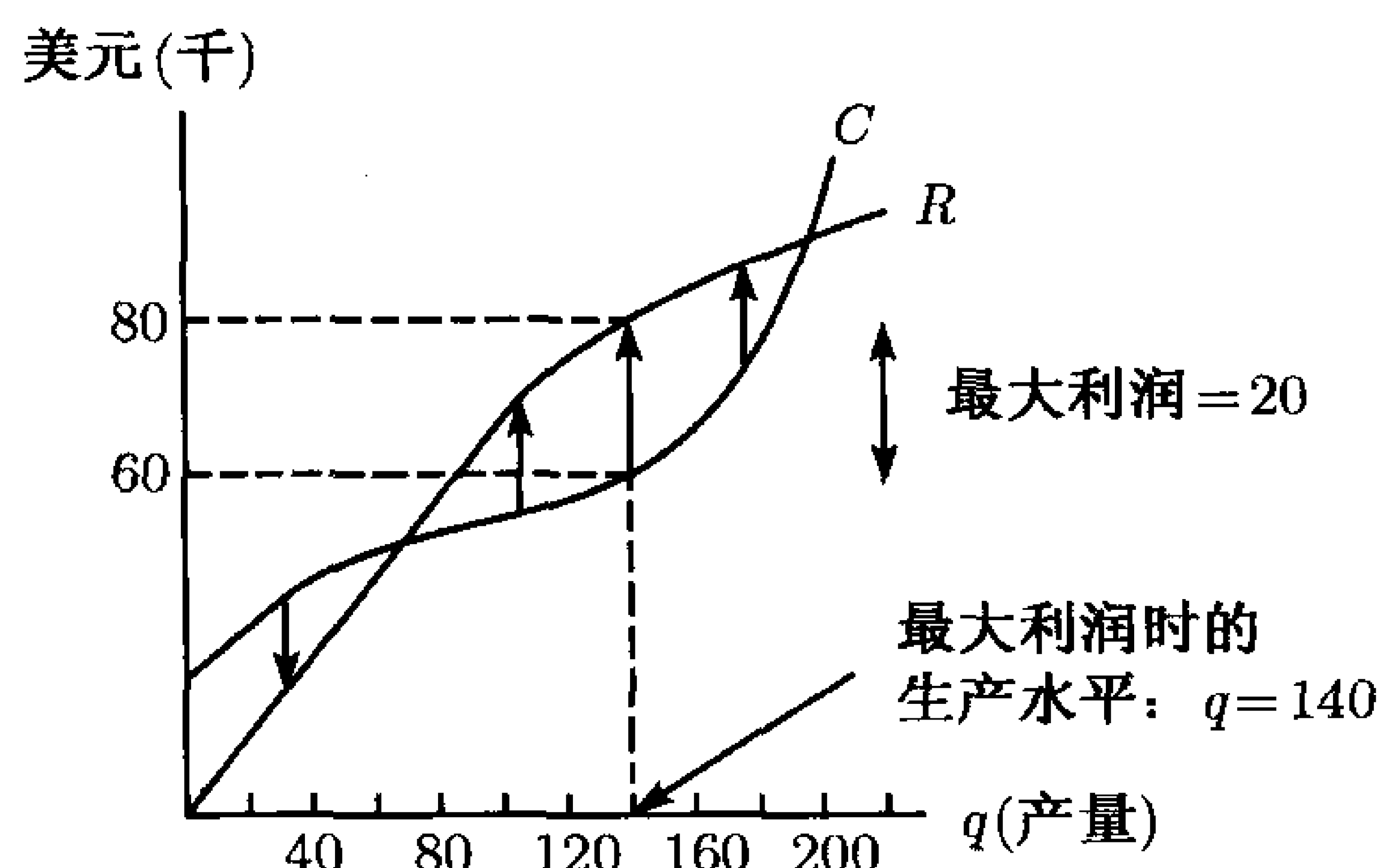


图 4-43 在 $q = 140$ 的最大利润

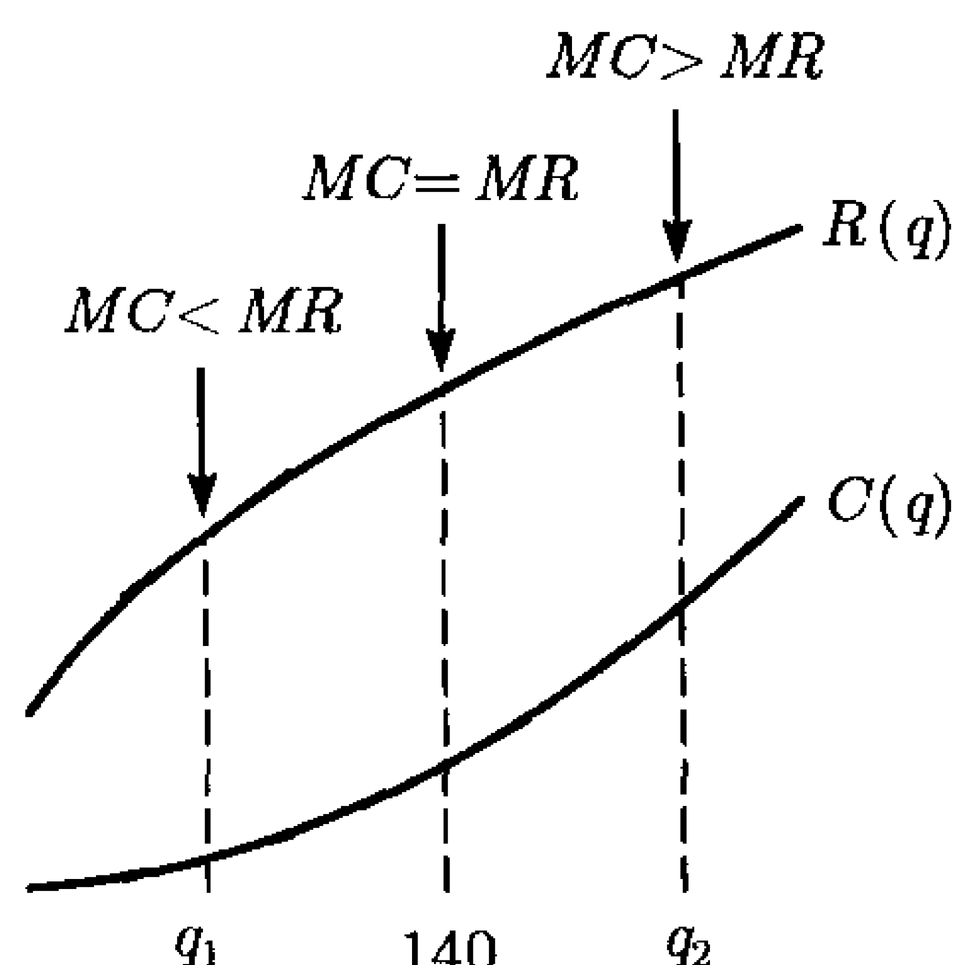


图 4-44 例 1: 最大利润在 $MC = MR$ 时获得 □

在图中 140 左边的生产水平 q_1 处, 边际成本小于边际收益. 公司生产更多的产品将获更大的收益, 因此应该增加产量 (朝生产水平 140 调整). 在 140 右边的任何生产水平 q_2 处, 边际成本大于边际收益, 公司生产更多的产品将使利润受损, 降低产量将获得更大的利润. 必须降低产量朝 140 调整.

在 $q = 140$ 处的边际收益和边际成本怎样? 由于在 140 的左边 $MC < MR$, 而在 140 的右边 $MC > MR$, 我们期望在 140 处 $MC = MR$. 在本例中, 最大利润在成本曲线与收益曲线的斜率相等的点处获得.

通过分析的方法, 我们可得到同样的结果. 一个函数的最大值和最小值只能在函数的临界点或区间的端点处取到. 为求 π 的临界点, 求它导数的零点:

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 0,$$

因此,

$$R'(q) = C'(q),$$

即 $R(q), C(q)$ 的图像在 q 处的斜率相等. 用经济学术语表示为如下.

最大 (或最小) 利润在边际收益 =0, 即边际收益 = 边际成本时获得.

当然, 最大利润或最小利润不一定在 $MR = MC$ 时获得, 任何一个都可能在端点发生. 例 2 说明如何从边际收益和边际成本的图像上找出利润的最大值和最小值.

例 2 某产品的总收益和总成本曲线参见图 4-45.

(a) 在同一坐标轴下画边际收益 MR 和边际成本 MC 的草图. 标出边际收益等于边际成本处的两个产量. 这两个产量表示什么含义? 在哪个产量下利润最大?

(b) 画利润函数的略图.

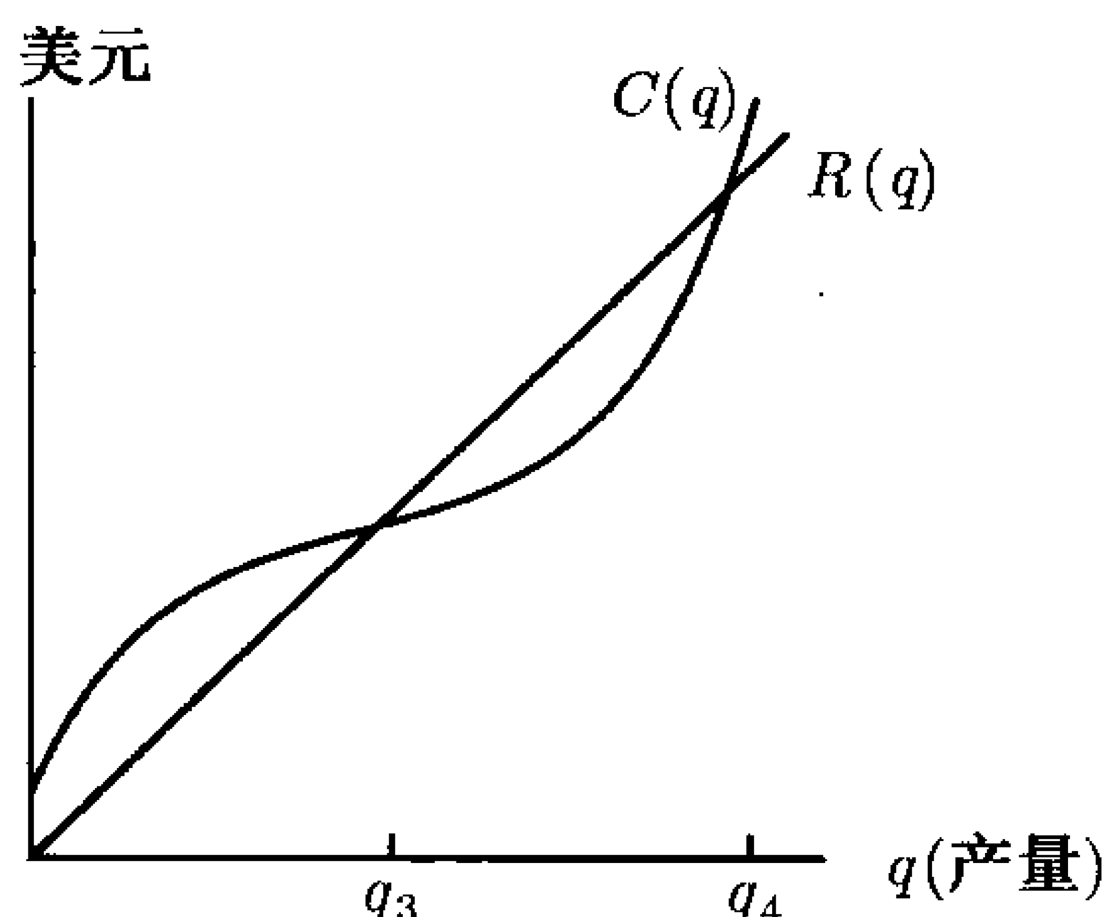


图 4-45 总收益和总成本

解 (a) 由于 $R(q)$ 是斜率大于零的直线, 所以它的导数 MR 的图像是一条水平线 (参见图 4-46). 由于成本 $C(q)$ 总是增加的, 所以它的导数 MC 总大于零. 随着 q 的变大, 成本曲线由下凹变为上凹, 因此成本函数的导数 MC 由递减变为递增 (参见图 4-46). 边际成本曲线上的局部最小值点对应着 $C(q)$ 的拐点. □

最大利润在何处获得呢? 我们知道最大利润可能在边际收益等于边际成本, 即在图 4-46 中两曲线的交点 q_1, q_2 处发生. 那么这些点是否使利润最大呢?

我们首先考虑 q_1. 在 q_1 左边, 我们有 $MR < MC$, 因此 $\pi' = MR - MC$ 为负, 利润函数递减. 在 q_1 右边, 我们有 $MR > MC$, 因此 π' 为正, 利润函数递增. 这个先递减再递增的特点说明利润函数在 q_1 处有局部最小值. 这当然不是我们所需要的生产水平.

那么 q_2 处的情况怎样呢? 在 q_2 左边, 我们有 $MR > MC$, 因此 π' 为正, 利润函数递增. 在 q_2 右边, 我们有 $MR < MC$, 因此 π' 为负, 利润函数递减. 这个先递增再递减的特点说明利润函数在 q_2 处有局部最大值. 最大利润要么在生产水平 q_2, 要么在端点 (最大可能生产水平和最小可能生产水平) 处获得. 由于利润在两个端点处为负 (参见图 4-45), 因此整体最大值在 q_2 处达到.

(b) 利润函数图像参见图 4-47. 在局部最大值点与局部最小值点处, 利润曲线的斜率等于零:

$$\pi'(q_1) = \pi'(q_2) = 0.$$

注意 $R(0) = 0, C(0)$ 表示生产的固定成本, 我们有

$$\pi(0) = R(0) - C(0) = -C(0).$$

因此, 利润函数在纵轴上的截距为负, 在量值上与固定成本的大小相等.

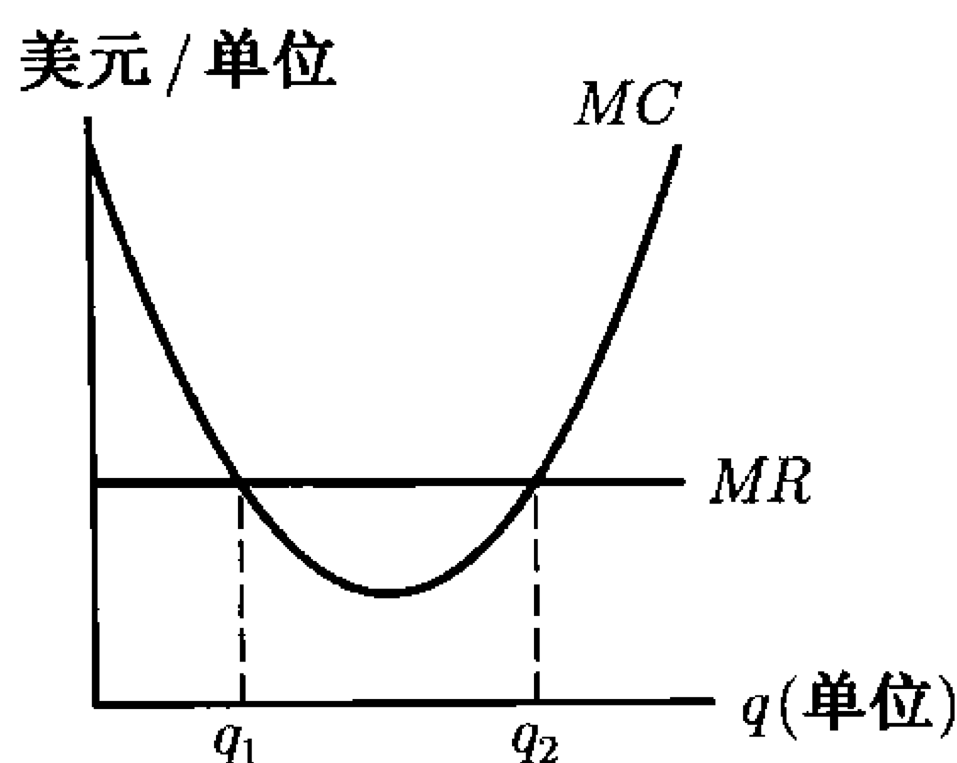


图 4-46　边际收益和边际成本

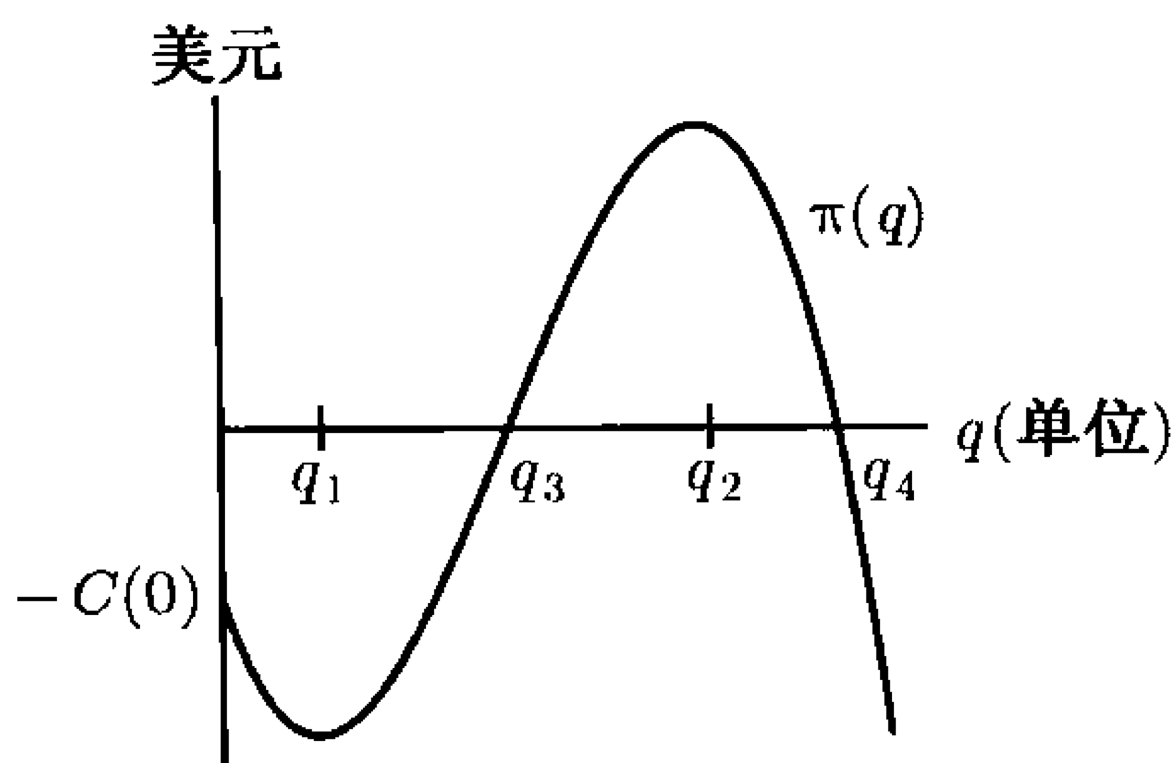


图 4-47　利润函数

□

例 3　如果总收益和总成本 (单位: 美元) 分别为

$$R(q) = 5q - 0.003q^2, \quad C(q) = 300 + 1.1q,$$

其中 q 是产量且 $0 \leqslant q \leqslant 1000$ 个单位, 求使利润最大化的产量. 什么样的生产水平使利润最少?

解　我们首先求使边际收益等于边际成本的生产水平. 由于

$$MR = R'(q) = 5 - 0.006q$$
$$MC = C'(q) = 1.1,$$

所以由 $MR = MC$ 得

$$5 - 0.006q = 1.1,$$
$$q = \frac{3.9}{0.006} = 650 \text{ 个单位}.$$

这是利润函数 π 的一个局部最大值点或局部最小值点吗? 为做出判断, 观察 650 个单位的左右两边.

$q = 649$ 时, 我们有 $MR = 1.106$ 美元/单位, 这大于 $MC = 1.10$ 美元/单位, 因此再生产一个单位产品 (第 650 个) 带来的收益比成本大, 所以利润增加.

$q = 651$ 时, 我们有 $MR = 1.094$ 美元/单位, 这小于 $MC = 1.10$ 美元/单位, 因此第 651 个产品是不合算的. 我们得出结论: $q = 650$ 给出了利润函数的局部最大值.

为判断在 $q = 650$ 处是否取到整体最大值, 我们比较利润在端点 $q = 0, q = 1000$ 及 $q = 650$ 处的值.

在 $q = 0$ 时, 唯一的成本是 300 美元 (固定成本) 且没有收益, 因此 $\pi(0) = -300$ 美元.

在 $q = 1000$ 时, 我们有 $R(1000) = 2000$ 美元, $C(1000) = 1400$ 美元, 因此 $\pi(1000) = 600$ 美元.

在 $q = 650$ 时, 我们有 $R(650) = 1982.50$ 美元, $C(650) = 1015$ 美元, 因此 $\pi(650) = 967.50$ 美元.

所以最大利润在生产水平 $q = 650$ 个单位下获得. 最小利润 (亏损) 在 $q = 0$ 时发生, 且此时没有生产. □

4.4.2 收益最大化

对某些公司, 成本不依赖于出售的产品数量. 比如, 有固定日程的公交车公司不管乘车的人有多少, 都具有相同的成本. 在这样一种情况下, 通过收益最大化可使利润最大化.

例 4 急流漂筏公司以价格 80 美元的半日游招揽到 300 名游客. 价格每下降 5 美元就能多招揽 30 名游客.

(a) 写出需求方程.

(b) 把收益表示成价格的函数.

(c) 为使收益最大, 该公司对每个行程该如何收费?

解 (a) 我们首先求价格和需求的关系式方程. 如果价格 p 为 80, 则售出的行程数量为 $q = 300$. 如果价格 p 为 75, 则 $q = 330$, 如此类推. 请参见表 4-1. 由于需求每降价 5 美元而改变一个常数 (30 人), q 是 p 的线性函数. 由于

表 4-1 漂流旅行的需求量

价格,p	售出的旅游数, q
80	300
75	330
70	360
65	390
...	...

$$\text{斜率} = \frac{300 - 330}{80 - 75} = -\frac{30}{5} = -6 \text{ 人/美元},$$

因此需求方程为 $q = -6p + b$. 由于 $q = 300$ 时, $p = 80$, 我们有

$$300 = -6 \cdot 80 + b,$$
$$b = 300 + 6 \cdot 80 = 780.$$

所以需求方程为 $q=-6p+780$.

(b) 由于收益 $R=p\cdot q$, 所以把它表示成价格的函数为

$$R(p)=p(-6p+780)=-6p^2+780p.$$

(c) 图 4-48 表明该收益函数有最大值. 为求最大值, 我们求导得:

$$R'(q)=-12p+780=0$$

$$p=\frac{780}{12}=65.$$

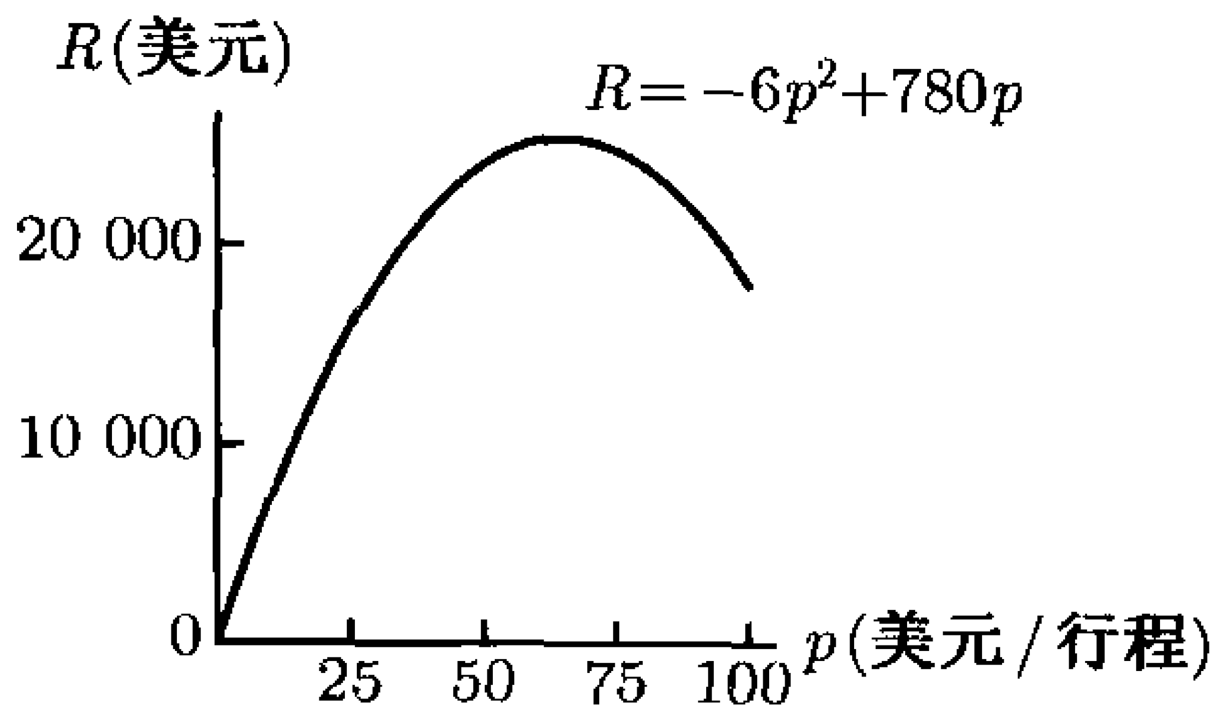


图 4-48　把某急流漂筏公司的收益表示为价格的函数

价格为 65 美元时获得最大收益. □

习题

1. 下表给出了成本 $C(q)$ 和收益 $R(q)$.

(a) 大约在何生产水平 q 下, 利润最大? 说明你的理由.

(b) 该产品的价格是多少?

(c) 固定成本为多少?

q	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
$R(q)$	0	1500	3000	4500	6000	7500	9000
$C(q)$	3000	3800	4200	4500	4800	5500	7400

2. 图 4-49 给出了收益和成本. 在何生产水平下, 利润函数为正? 为负? 估计使利润最大的产量.

3. 利用图 4-50 中的成本和收益曲线, 画下列函数的略图, 并在图像中标明 q_1 和 q_2.

(a) 总利润　　**(b)** 边际成本　　**(c)** 边际收益

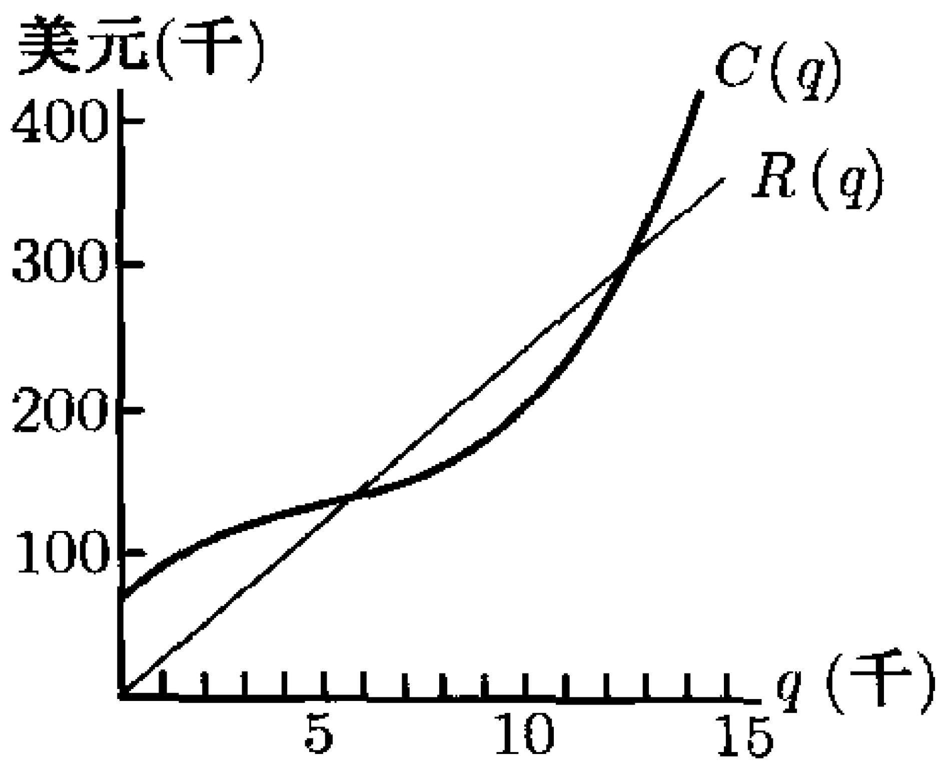


图　4-49

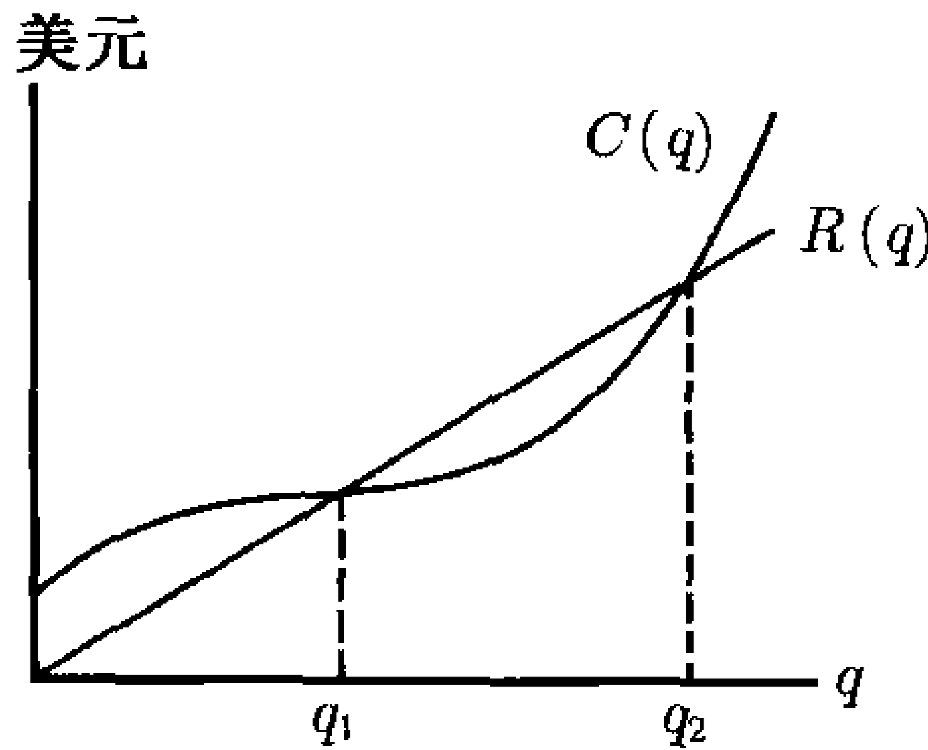


图　4-50

4. 一需求函数为 $p=400-2q$, 其中 q 是以价格 p 美元售出的商品数.

(a) 求用 q 表示的总收益 R 的表达式.

(b) 通过求 R 关于 q 的导数来求边际收益 MR, 并求 $q=10$ 时的边际收益.

(c) 当产量从 $q=10$ 增加到 $q=11$ 单位时, 计算总收益的变化量. 验证一单位产量的增加是 (b) 部分获得的 MR 的精确值的准确的近似.

5. 令 $C(q), R(q), \pi(q)$ 分别表示生产 q 单位产品的成本, 收益及总利润.

(a) 如果 $C'(50)=75, R'(50)=84$, 那么第 51 单位产品大概获得多少利润?

(b) 如果 $C'(90)=71, R'(90)=68$, 那么第 91 单位产品大概获得多少利润?

(c) 如果 $q=78$ 时 $\pi(q)$ 有最大值, 你认为 $C'(78), R'(78)$ 的大小关系如何? 请解释.

6. 图 4-46 标出了边际收益等于边际成本的点 q_1, q_2.

(a) 请在图 4-51 中相应的总成本和总收益函数的图像上标出 q_1, q_2. 利用斜率说明这些点的重要意义.

(b) 用利润说明为什么其中一点是局部最小值点, 而另一点是局部最大值点.

7. 下表给出了边际成本 MC 和边际收益 MR.

(a) 利用在产量 $q=5000$ 下的边际成本和边际收益判断产量是否应该增加或减少?

(b) 估计使利润最大的生产水平.

q	5000	6000	7000	8000	9000	10000
MR	60	58	56	55	54	53
MC	48	52	54	55	58	63

8. 边际收益和边际成本参见下表. 估算使利润最大化的生产水平, 并解释.

q	1000	2000	3000	4000	5000	6000
MR	78	76	74	72	70	68
MC	100	80	70	65	75	90

9. 图 4-52 给出了某产品的成本和收益.

(a) 估算使利润最大化的生产水平.

(b) 在同一坐标系下, 画该产品的边际收益和边际成本的草图, 并在图像上标出使利润最大的生产水平.

10. 图 4-53 给出了边际成本和边际收益的图像. 估算使利润最大的生产水平, 并说明你的理由.

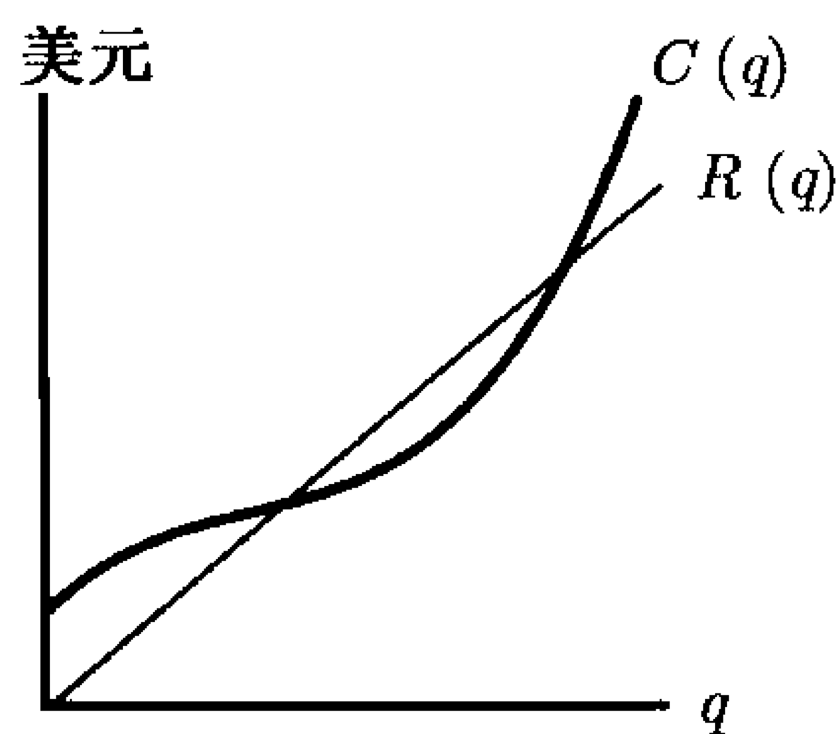


图 4-51

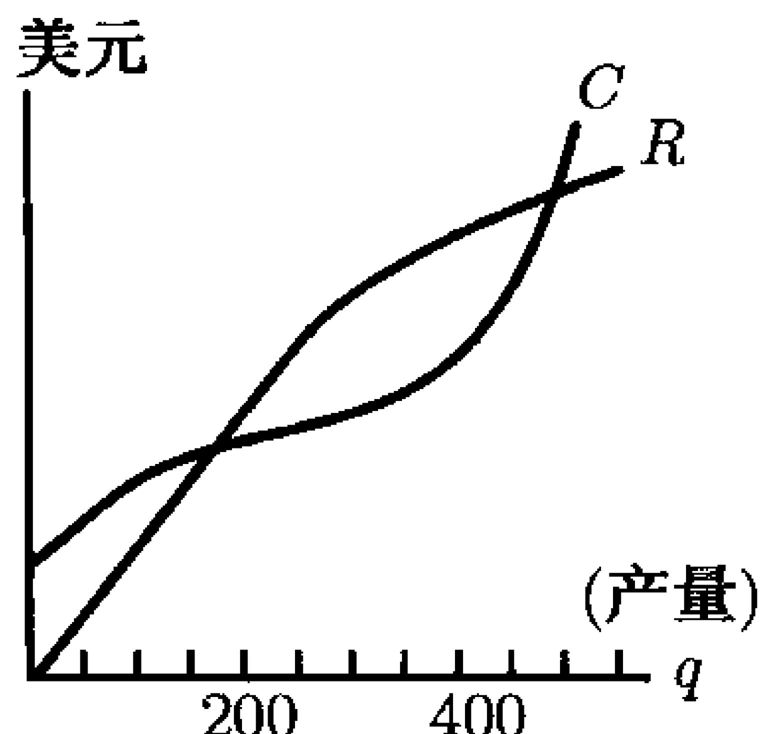


图 4-52

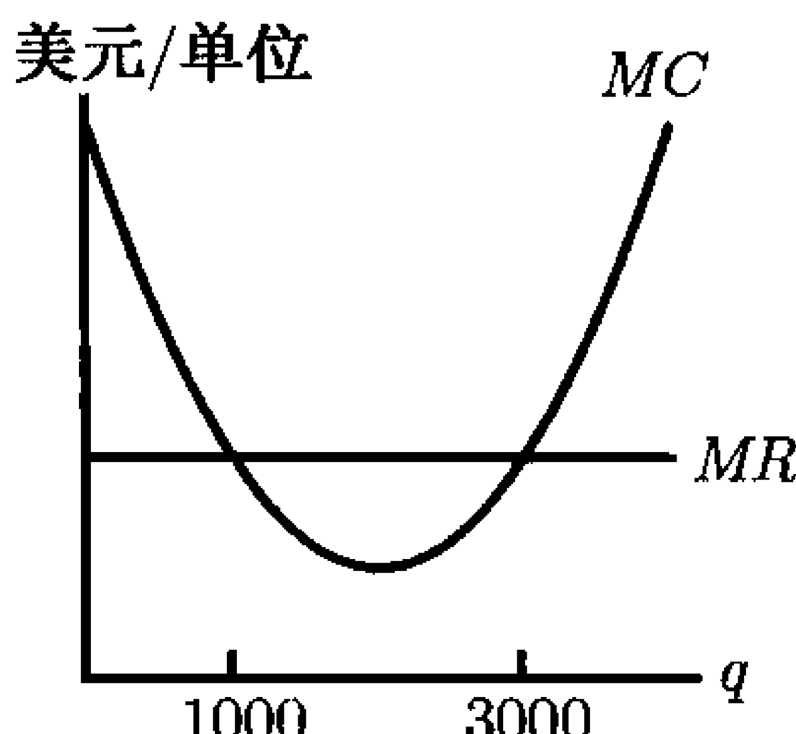


图 4-53

11. 一公司的边际成本和边际收益分别为 $MC(q) = 0.03q^2 - 1.4q + 34, MR(q) = 30$, 其中 q 是生产的产品单位数量. 为增长利润, 该公司在以下的生产水平下应该增加产量还是减少产量?

(a) 25 单位 (b) 50 单位 (c) 80 单位

12. 一生产过程的边际成本参见下表, 该产品每单位的出售价格为 30 美元. 产量 q 为多少时, 利润最大? 这些量介于哪个区间?

q	0	10	20	30	40	50	60
MC(美元/单位)	34	23	18	19	26	39	58

13. 成本函数和收益函数参见图 4-54. 大约多少产量可使利润最大?

14. 成本函数和收益函数参见图 4-54.

(a) 在生产水平 $q = 3000$ 下, 边际成本和边际收益哪个大? 以此说明产量应该增加还是减少.

(b) 对 $q = 5000$ 回答同样的问题.

15. 产量为 2000 时, 边际收益为每单位 4 美元, 边际成本为每单位 3.25 美元. 你预期最大利润在生产水平 2000 以上还是以下获得? 说明理由.

16. 收益为 $R(q) = 450q$, 成本为 $C(q) = 10\,000 + 3q^2$. 产量多少时, 利润最大? 在该生产水平下, 总利润是多少?

17. 某产品的需求方程为 $p = 45 - 0.01q$. 把收益表示成 q 的函数, 并求使利润最大的产量. 该产量对应的价格是多少? 在该价格下, 总利润是多少?

18. 一公司的收益函数与成本函数参见图 4-55.

(a) 估计在 $q = 400$ 时的边际成本.

(b) 该公司是否应该生产第 500 个产品? 为什么?

(c) 估计使利润最大的产量.

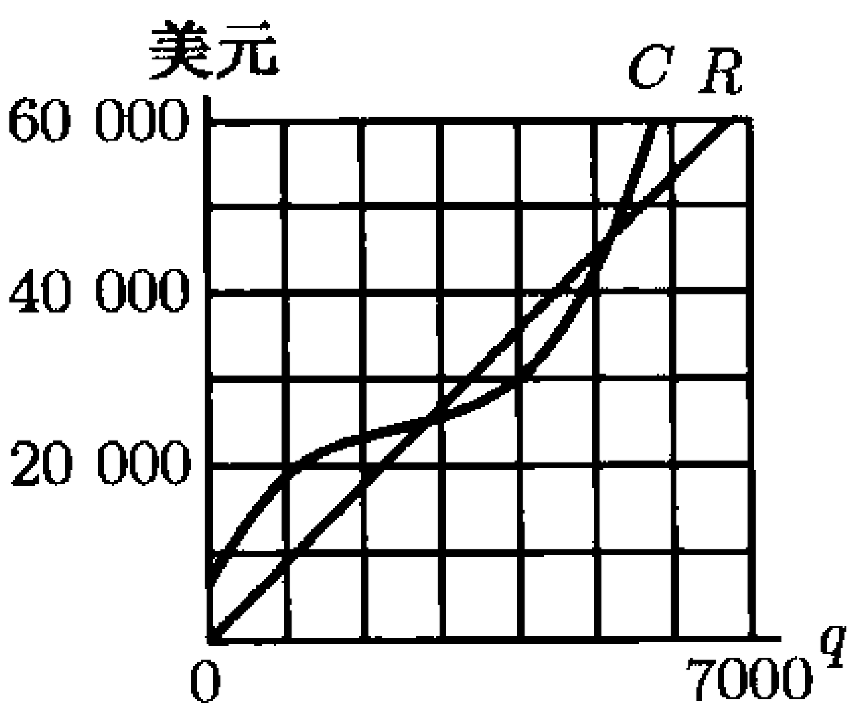


图 4-54

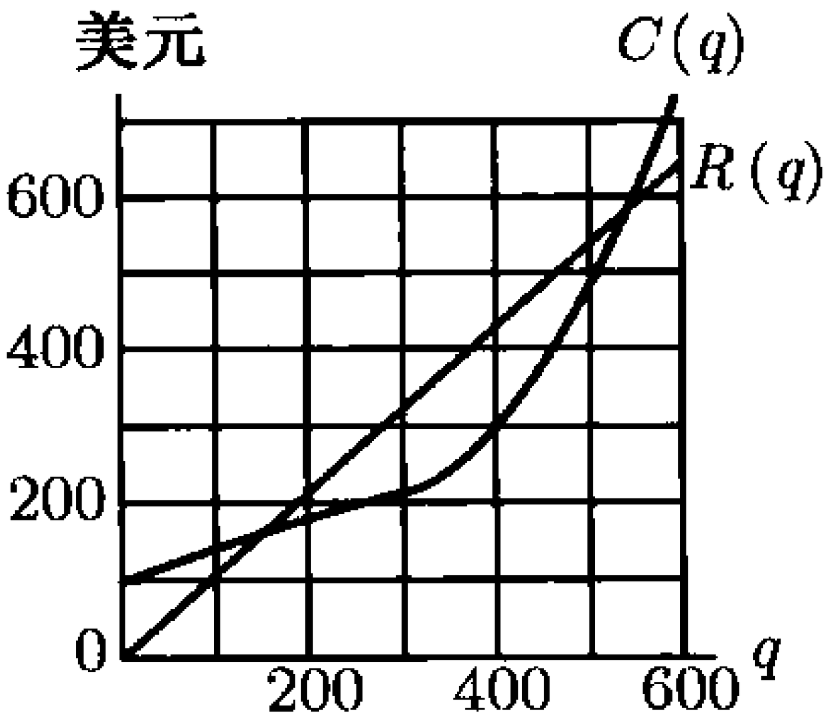


图 4-55

19. 下表给出了不同生产水平 q 下的成本和收益 (单位: 美元).

q	0	100	200	300	400	500
$R(q)$	0	500	1000	1500	2000	2500
$C(q)$	700	900	1000	1100	1300	1900

(a) 大约在何生产水平下, 利润最大?

(b) 每单位该产品的价格是多少?

(c) 生产的固定成本是多少?

20. 某冰激凌公司发现价格为 4 美元时的需求量是 4000 单位. 价格每下跌 0.25 美元, 需求量增加 200 单位. 求利润最大时的售出价格和产量.

21. 一音乐剧场以每张票 8 美元的价格出售时, 可以卖出全部的 1500 张票. 收费每增加 1 美元, 买票的人数减少 75. 票价多少时, 收益最大?

22. 一娱乐公园的门票需求为 $p = 70 - 0.02q$, 其中 p 是票价 (单位: 美元), q 是以该票价入场的人数.

(a) 票价多少时, 有 3000 人入场? 在该价格下, 总收益是多少? 价格为 20 美元时, 收益又是多少?

(b) 把收益表示成进入娱乐公园人数 q 的函数.

(c) 入场的人数是多少时, 收益最大?

(d) 为使收益最大, 应该收费多少?

(e) 最大收益是多少? 我们能求出相应的利润吗?

23. 一产品在价格 p(单位: 美元) 时的需求方程为 $p = -5q + 4000$. 生产该产品的公司报告说生产产量 q 的成本为 $C = 6q + 5$ 美元.

(a) 把公司的利润 (单位: 美元) 表示成 q 的函数.

(b) 何生产水平为公司赚得最大利润?

(c) 最大可能利润是多少?

24. (a) 生产某产品的固定成本为 10 000 美元, 可变成本是每单位 2 美元. 写出生产 q 单位产品的成本.

(b) 价格 p 和需求量 q 满足线性关系. 市场调查表明, 价格为 5 美元时, 卖出 10 100 单位产品; 价格为 4.5 美元时, 卖出 12 872 单位产品. 请把 q 表示成价格 p 的函数.

(c) 把利润表示成 q 的函数.

(d) 该公司应生产多少产品使利润最大? (用最接近的整数给出你的答案) 该生产水平下的利润是多少?

25. 你管理一家小型的家具企业. 你与一顾客签订了最多交付 400 把椅子的合约, 需要的确切数目由该顾客最后决定. 300 把以下的椅子价格为 90 美元一把, 而在椅子数超过 300 时, 每超过一把, 价格降低 0.25 美元. 你的公司在该合约下能获得的最大收益和最小收益各是多少?

26. 一出售水泥的货栈需要确定再次订购水泥的数量及时间间隔. 总体上来说, 订购较大量的水泥比较便宜, 因为这样做能降低每单位的订购成本. 但另一方面, 较大的订货单却意味着较高的储存成本. 货栈每次订购水泥的量都为 q. 每周订购和储存的总成本 C 为

$$C = \frac{a}{q} + bq, \text{ 其中 } a, b \text{ 是正常数}.$$

(a) 这两个表达式 $a/q, bq$ 哪个表示储存成本, 哪个表示订购成本?

(b) q 为何值时, 使总成本最小?

27. 某商行以每个月 r 单位的速度出售某产品. 它再订购一批 q 单位产品的成本为 $a + bq$ 美元. 每单位产品每月的储藏成本为 k 美元, 而且平均有 $q/2$ 单位产品在仓库里待售. [假设 r, a, b, k 都是正常数.]

(a) 商行隔多久再订购?
(b) 再订购的月平均成本是多少?
(c) 订购和储藏的月总成本是多少?
(d) 获得威尔逊的批量公式, 即使成本最小的最优批量.

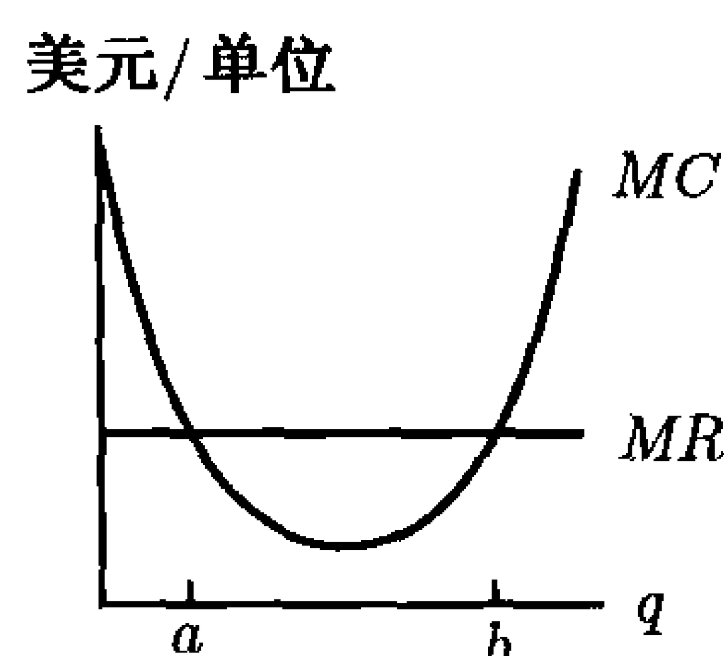


图 4-56

28. 某产品的边际收益和边际成本参见图 4-56. 下面的量是否使公司利润最大? 对你的答案作出解释.
(a) $q = a$　　(b) $q = b$

29. 某公司只生产一种产品. 这种产品每月的产量取决于投资的资本量 K (比如, 公司拥有机器的数量、厂房的大小等) 和每月可获得的劳动力 L. 我们假设 q 可由 Cobb-Douglas 生产函数 $q = cK^\alpha L^\beta$ 表示, 其中 c, α, β 是正常数且 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$. 在本习题中, 我们将了解俄罗斯政府如何利用 Cobb-Douglas 函数估计一个新兴的私营行业可能雇佣多少人. 该行业中的一家公司只有少量的可获得资本而且需要完全利用这笔资金, 因此 K 固定下来. 假设 L 以人–小时/月为单位, 且公司每人–小时的成本是 w 卢布 (卢布是俄罗斯的货币单位). 假设公司除了劳动力外不需要其他成本, 且每单位该产品能以 p 卢布的固定价格出售. 为获得最大利润, 公司每月需要利用多少人–小时?

4.5 平均成本

为使利润最大化, 公司决定生产使边际成本等于边际收益的产量. 但我们如何得知公司是否盈利? 结果表明, 最大利润是正是负, 由公司的平均生产成本决定. 平均成本也告诉我们同行业中相似公司的运营状况. 如果平均成本低, 更多的公司愿意进入市场; 如果平均成本高, 公司离开市场.

在这一节中, 我们要学会如何计算平均成本, 使平均成本可视化及建立平均成本和边际成本之间的关系.

4.5.1 什么是平均成本

平均成本指生产一定量的产品中每单位产品的成本; 它等于总成本除以生产产品的单位数.

> 如果生产 q 单位产品的成本为 $C(q)$, 那么生产 q 单位产品的**平均成本** $a(q)$ 为
> $$a(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

尽管边际成本 (生产下一产品的成本) 和平均成本的计量单位一样, 比如美元/单位, 但请注意不要把它们混淆起来.

例 1 某生产番茄辣酱的公司成本函数为 $C(q)=0.01q^3-0.6q^2+13q+1000$ 美元, 其中 q 是生产辣酱的箱数. 如果生产 100 箱辣酱, 求每箱辣酱的平均成本.

解 生产 100 箱辣酱的总成本为

$$C(100)=0.01(100)^3-0.6(100)^2+13(100)+1000=6300\text{美元}.$$

用生产数量 100 除得每箱的平均成本为

$$\text{平均成本}=\frac{6300}{100}=63\ \text{美元/箱}.$$

如果生产 100 箱辣酱, 平均成本为每箱 63 美元. □

在总成本曲线上可视化平均成本

我们知道平均成本 $a(q)=C(q)/q$. 由于一个数减去零值不改变, 我们记

$$a(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C(q)-0}{q-0}.$$

这个表达式是连接 (0,0) 和成本曲线上的点 $(q,C(q))$ 的直线的斜率. 参见图 4-57.

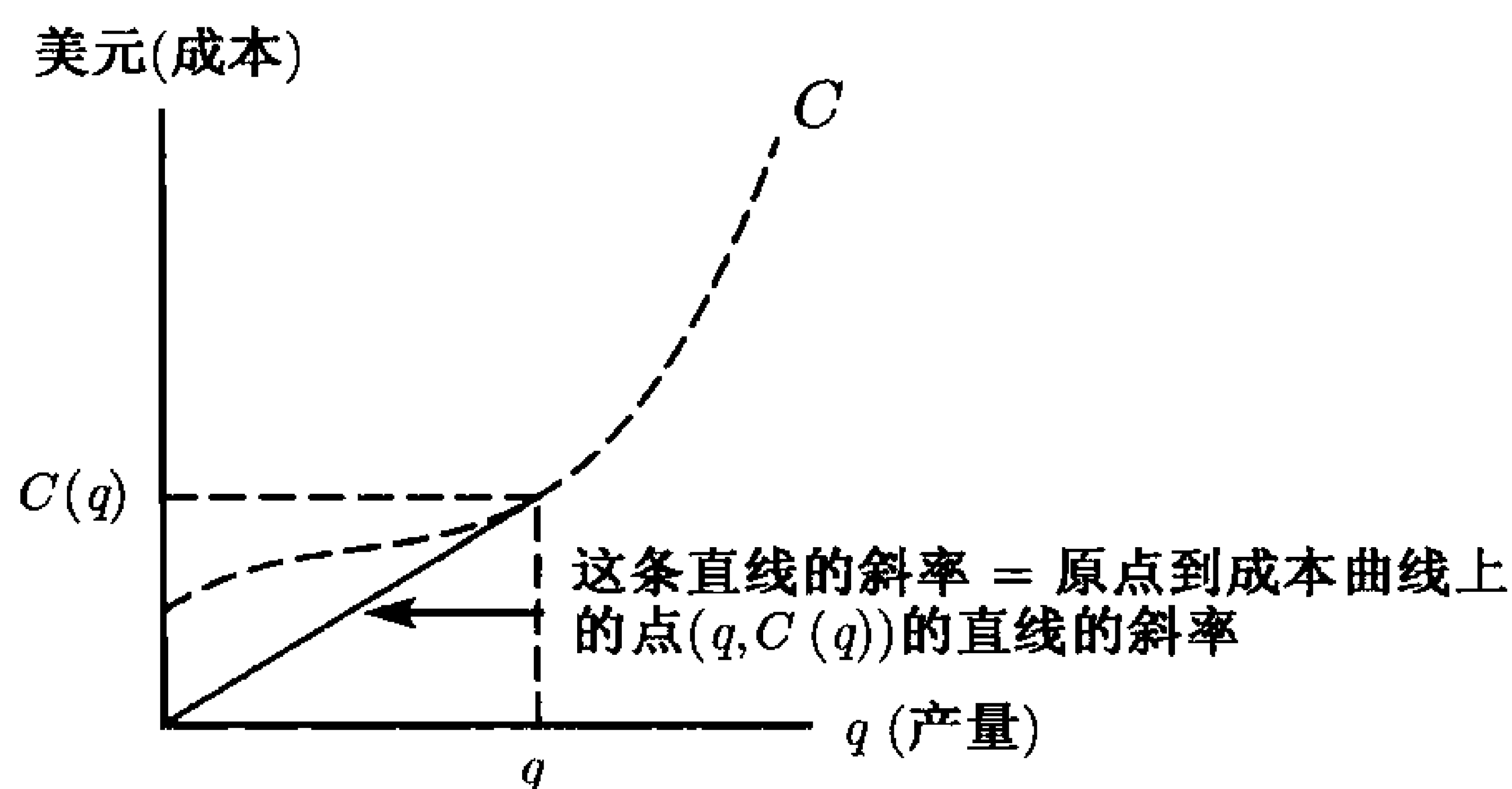


图 4-57 平均成本是连接原点和成本曲线上的点 $(q,C(q))$ 的直线的斜率

> 生产 q 单位产品的平均成本 $=\dfrac{C(q)}{q}=$ 连接原点和成本曲线上的点 $(q,C(q))$ 的直线的斜率.

4.5.2 平均成本最小化

我们利用平均成本的图形表示来研究平均成本和边际成本之间的关系及确定使平均成本最小的生产水平.

例 2 成本函数为 $C(q)=1000+20q$ 美元, 其中 q 生产的产品单位数. 求生产第 100 单位产品的边际成本和生产 100 单位产品的平均成本, 并进行比较. 在图像上描述你的答案.

解　成本函数是线性函数, 其中固定成本为 1000 美元, 可变成本为每单位 20 美元. 因此,

$$\text{边际成本} = C'(q) = 20 \text{ 美元/单位}.$$

这表示, 生产 99 单位产品后, 再生产下一单位产品的成本为 20 美元.

另一方面,

$$\text{生产 100 单位产品的平均成本} = a(100) = \frac{C(100)}{100} = \frac{3000}{100} = 30 \text{ 美元/单位}$$

注意, 平均成本包括均分到所有产品的固定成本 1000 美元, 而边际成本则不然. 因此在这个例子中, 平均成本大于边际成本. 参见图 4-58.

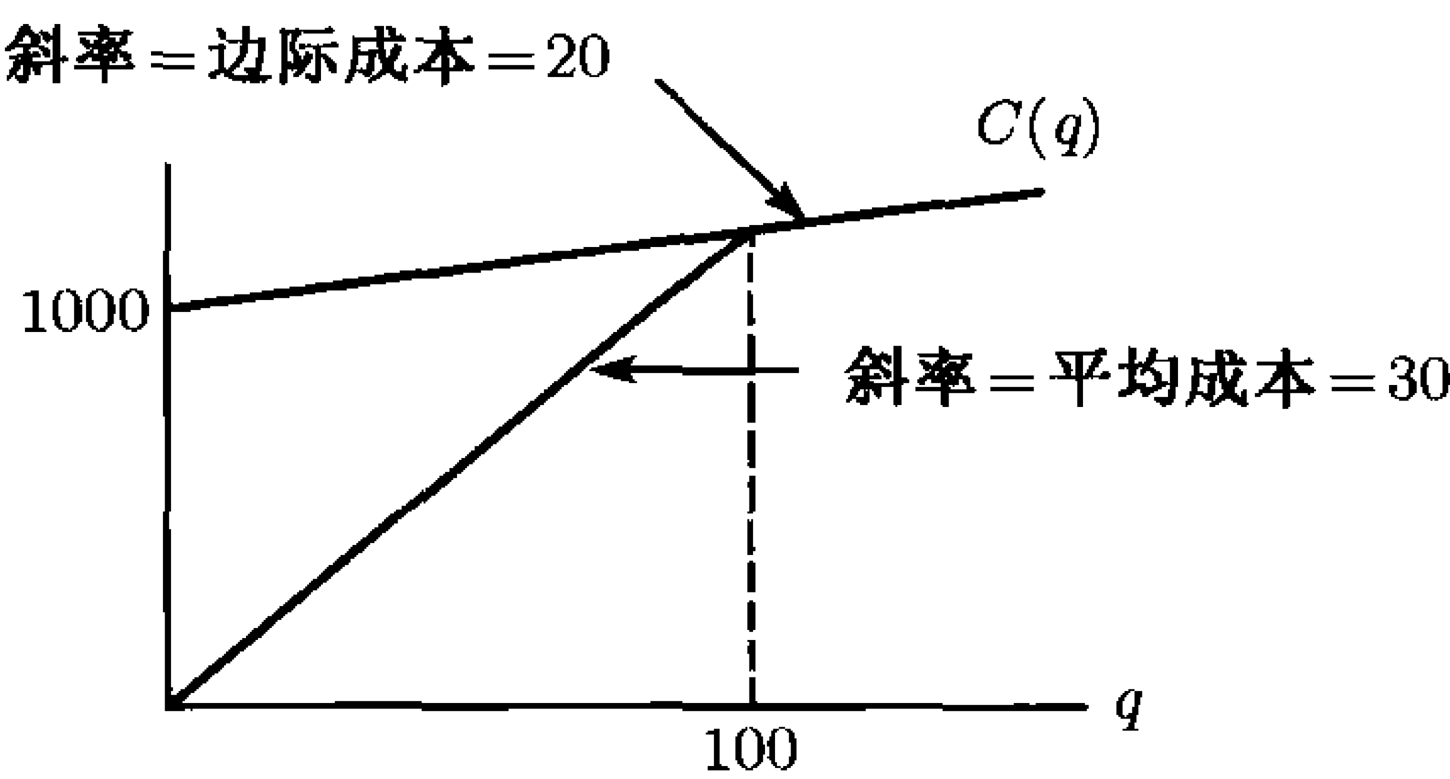


图 4-58　平均成本 > 边际成本　□

例 3　在图 4-59 的成本函数图像上标记使平均成本最小的产量.

解　图 4-60 中, 在 q_1, q_2, q_3 和 q_4 处的平均成本是从原点到曲线上点的直线的斜率. 这些斜率在小 q 处大, 随着 q 增大而减小, 然后再次变大. 因此, 随着 q 的增大, 平均成本先递增再递减, 所以有最小值. 最小值在图 4-60 中过原点与成本曲线相切的切点 q_0 处取得.

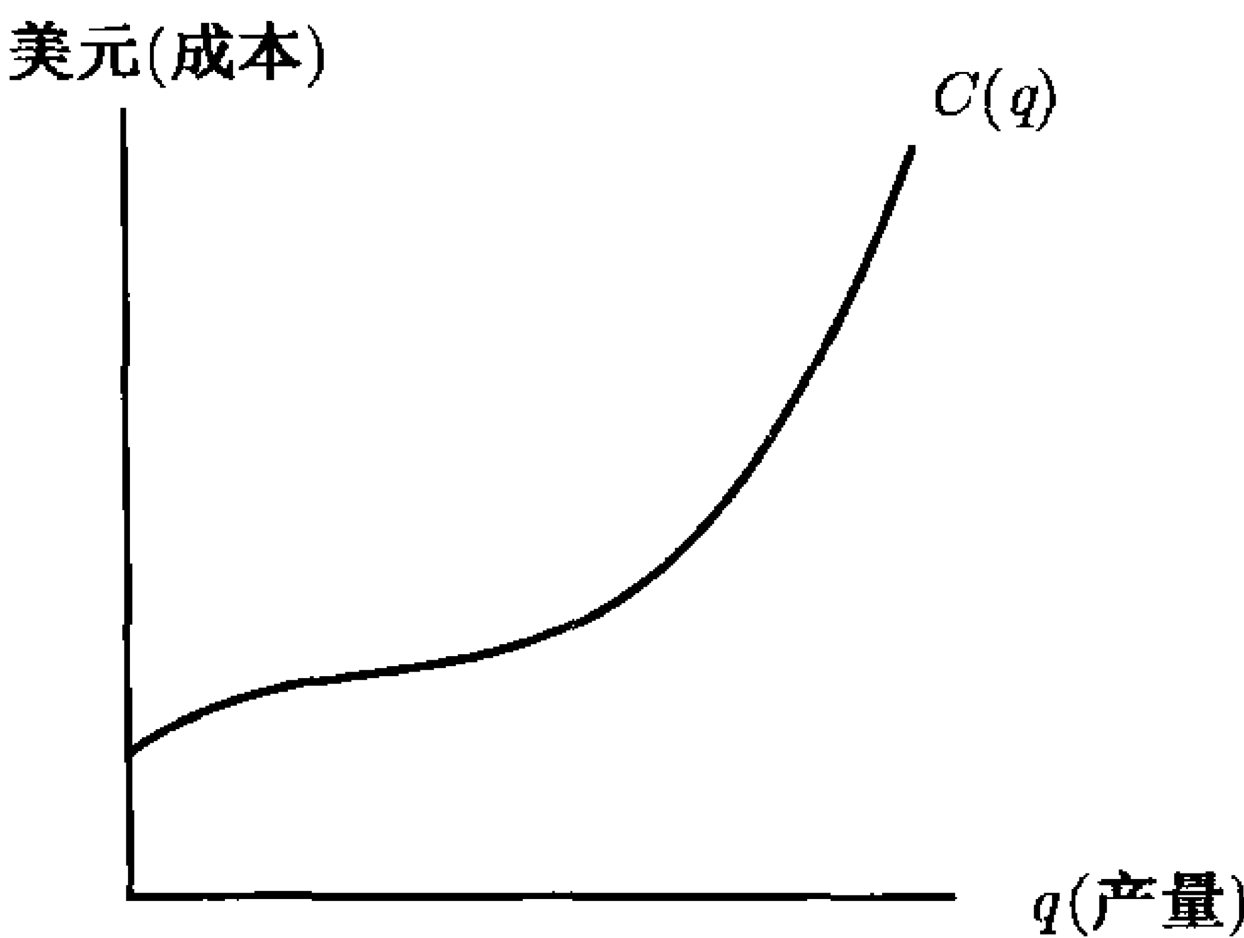


图 4-59　成本函数

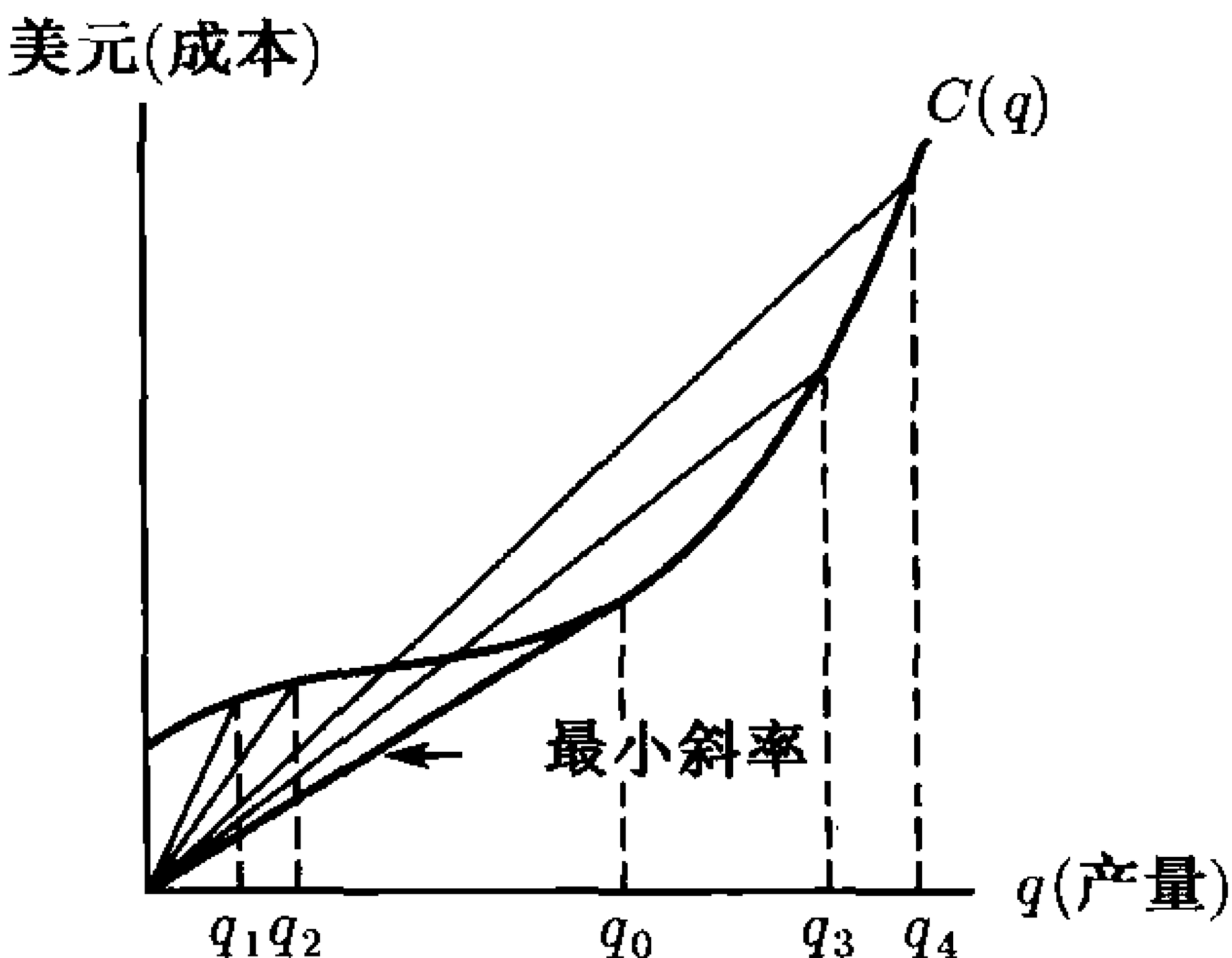


图 4-60　最小平均成本在过原点与成本曲线相切的切点 q_0 达到　□

从图 4-60 我们看到, 当平均成本与边际成本相等时, 平均成本达到最小值 (q_0 处取到). 下一个例子指出了边际成本和平均成本不相等时的情形.

例 4 假设生产 100 单位产品的平均成本为每单位 2 美元. 如果生产第 101 单位产品的边际成本为

(a) 1 美元 (b) 3 美元,

求生产 101 单位产品的平均成本.

解 如果生产 100 单位产品的平均成本为每单位 2 美元, 那么生产的总成本为 $100 \cdot 2$ 美元 $= 200$ 美元.

(a) 由于生产第 101 单位产品的边际成本为 1 美元, 生产 101 单位产品的总成本为 200 美元 +1 美元 = 201 美元, 因此生产这些产品的平均成本为每单位 201/101 或 1.99 美元. 平均成本变小.

(b) 在这个条件下, 生产第 101 单位产品的边际成本为 3 美元. 生产 101 单位产品的总成本为 203 美元, 因此平均成本为每单位 203/101 或 2.01 美元. 平均成本变大. □

注意在例 4(a) 中, 多生产一单位产品的成本小于平均成本, 平均成本随着产量的增加而减小; 在例 4(b) 中, 多生产一单位产品的成本大于平均成本, 平均成本随着产量的增加而增大. 我们总结如下.

平均成本与边际成本的关系

- 如果边际成本小于平均成本, 那么增加产量降低平均成本.
- 如果边际成本大于平均成本, 那么增加产量提高平均成本.
- 边际成本与平均成本在平均成本的临界点处相等.

例 5 用分析方法证明: 边际成本等于平均成本的点是平均成本的临界点.

解 由于 $a(q) = C(q)/q = C(q)q^{-1}$, 我们利用乘积法则求 $a'(q)$:

$$a'(q) = C'(q)(q^{-1}) + C(q)(-q^{-2}) = \frac{C'(q)}{q} + \frac{-C(q)}{q^2}$$
$$= \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$$

在临界点处有 $a'(q) = 0$, 因此

$$\frac{qC'(q) - C(q)}{q^2} = 0$$

因此我们有

$$qC'(q) - C(q) = 0$$
$$qC'(q) = C(q)$$
$$C'(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

换句话讲, 在临界点处:

$$\text{边际成本} = \text{平均成本}.$$ □

例 6 总成本函数 $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$ 千美元, 其中 q 以千计量且 $0 \leqslant q \leqslant 5$.

(a) 画 $C(q)$ 的略图. 看图估计使平均成本最小的产量.

(b) 画平均成本函数的略图, 并利用它估计最小平均成本.

(c) 用分析方法确定使平均成本最小的 q 的确切值.

(d) 在平均成本图像所在的坐标系下画边际成本函数的略图.

(e) 证明在取得最小平均成本处, 边际成本 = 平均成本. 说明你如何才能从平均成本和边际成本的图像上看出这个结果.

解 (a) $C(q)$ 的图像参见图 4-61. 在连接原点与曲线上的点的直线有最小斜率处, 平均成本达到最小. 这发生在直线与曲线相切的点处, 此处大约 $q = 3$, 它对应于 3000 单位的产量.

(b) 由于平均成本等于总成本除以产量, 我们有

$$a(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{q^3 - 6q^2 + 15q}{q} = q^2 - 6q + 15.$$

图 4-62 表明最小平均成本在 $q = 3$ 达到.

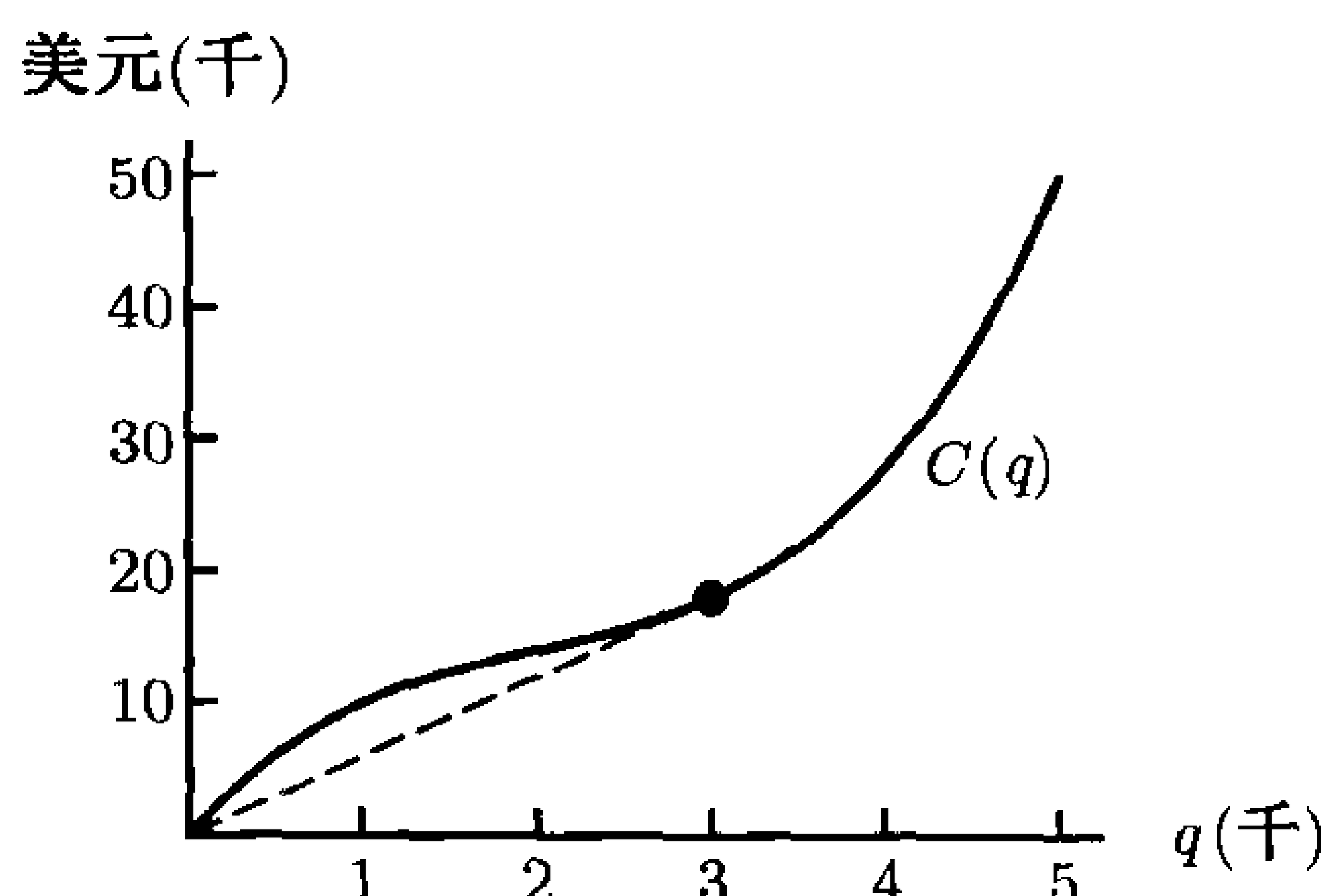


图 4-61 用成本函数显示最小平均成本

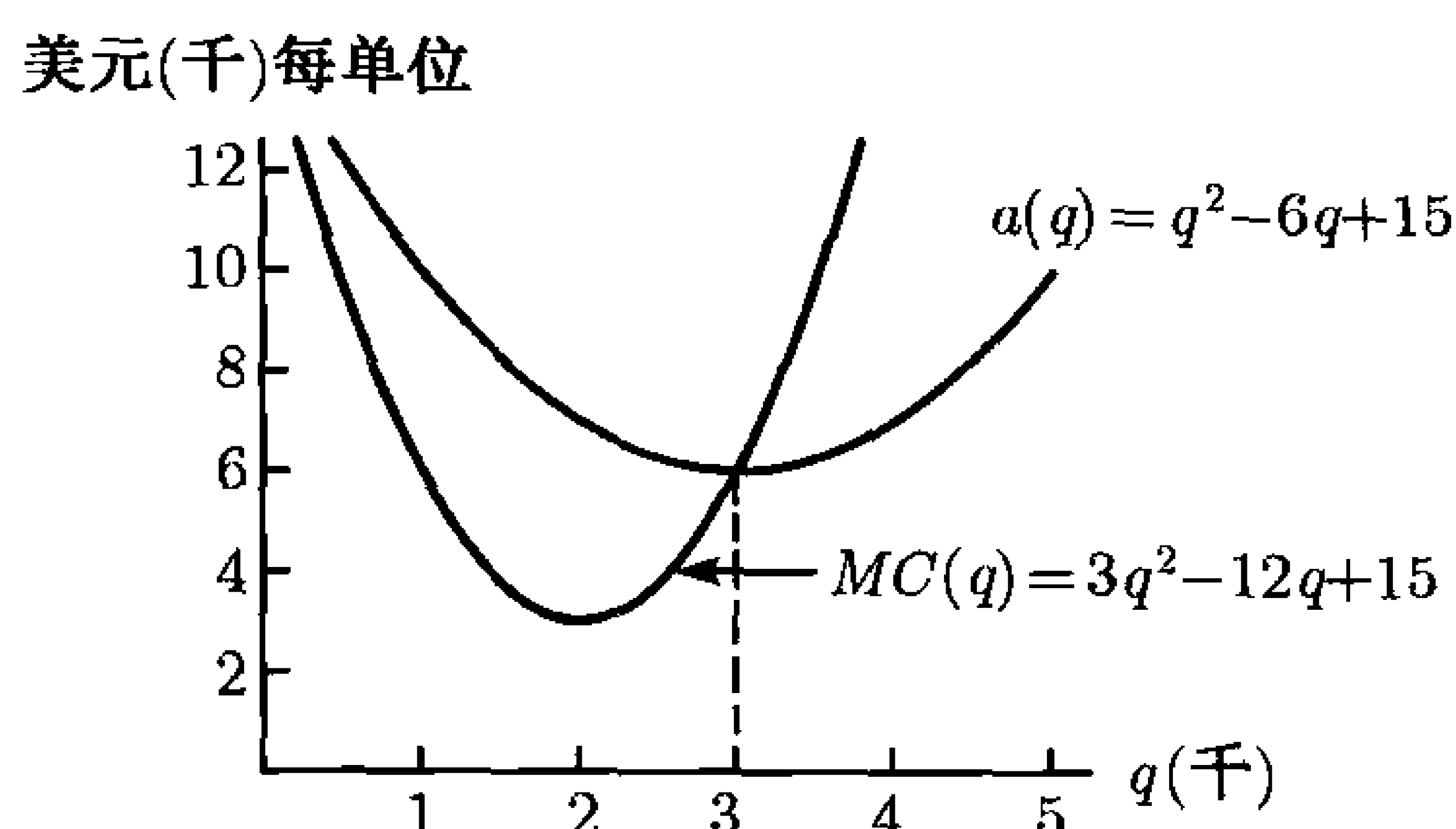


图 4-62 用平均成本和边际成本函数显示最小平均成本

(c) 平均成本在 $a(q) = q^2 - 6q + 15$ 的临界点处达到最小. 求导得

$$a'(q) = 2q - 6 = 0$$
$$q = 3,$$

最小值在 $q = 3$ 取得.

(d) 参见图 4-62. 边际成本是 $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$ 的导数, 故

$$MC(q) = 3q^2 - 12q + 15.$$

(e) $q = 3$ 时, 我们有

$$\text{边际成本} = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 15 = 6,$$
$$\text{平均成本} = 3^2 - 6 \cdot 3 + 15 = 6,$$

因此边际成本与平均成本在 $q = 3$ 时相等. 这个结果可以从图 4-62 看出, 因为边际成本曲线与平均成本曲线在最小平均成本处相交. □

习题

1. 图 4-63 给出了成本, 其中 $q = 10\ 000$ 已经标出.

(a) 求生产水平 10 000 单位下的平均成本, 并作出解释.

(b) 用图形表示 (a) 的答案.

(c) 大约在何生产水平下, 平均成本最小?

2. 生产 q 单位产品的成本为 $C(q) = 2500 + 12q$ 美元.

(a) 生产第 100 单位产品的边际成本是多少? 第 1000 单位的呢?

(b) 生产 100 单位产品的平均成本是多少? 1000 单位的呢?

3. 成本函数为 $C(q) = 1000 + 20q$. 求生产第 200 单位产品的边际成本和生产 200 单位产品的平均成本.

4. 图 4-64 是成本函数的图像.

(a) 估计 $q = 25$ 时的下列各量, 并用图形表示你的答案.

(i) 平均成本　　(ii) 边际成本

(b) q 大约为何值时, 平均成本最小?

5. 根据图 4-65 所示的总成本函数画平均成本函数的略图.

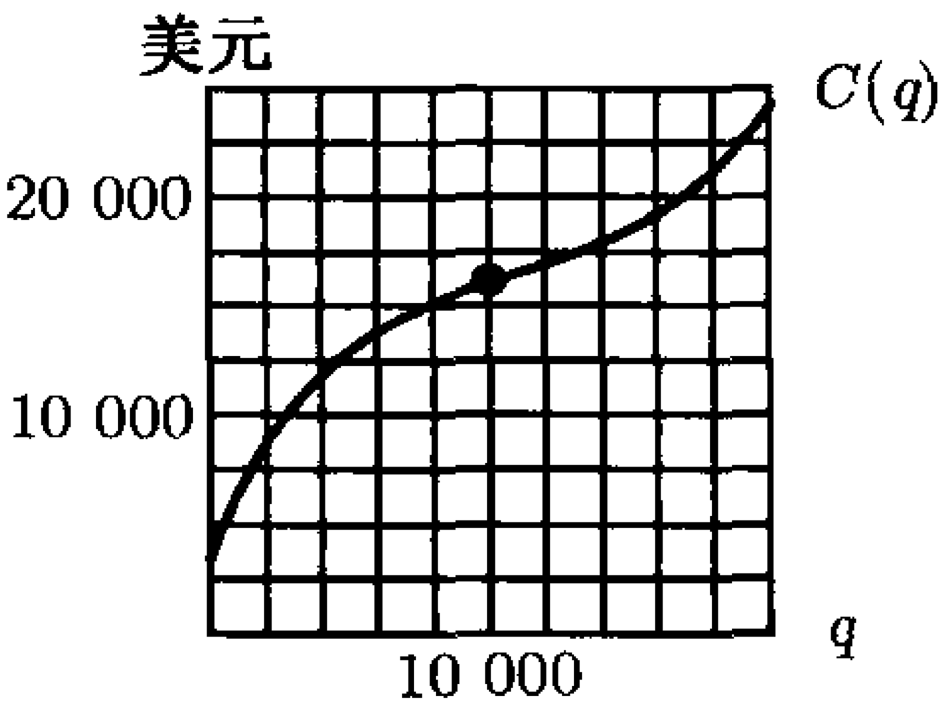


图 4-63

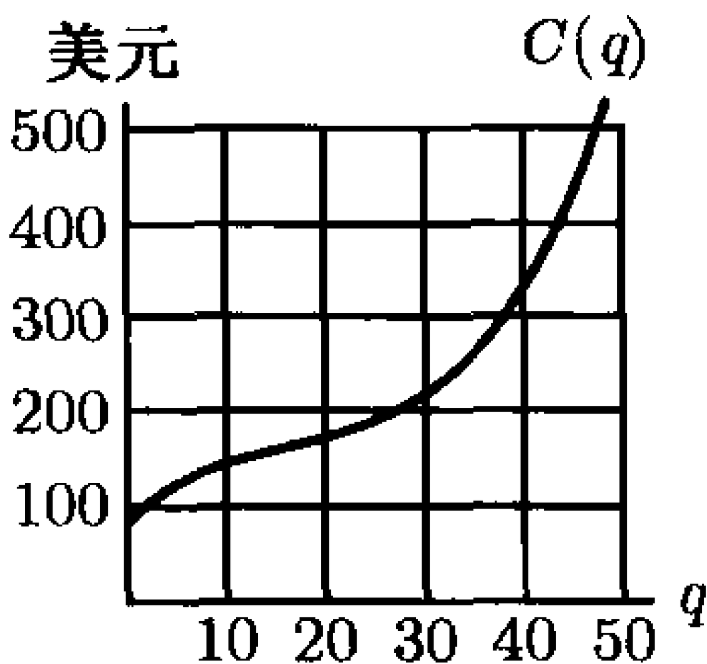


图 4-64

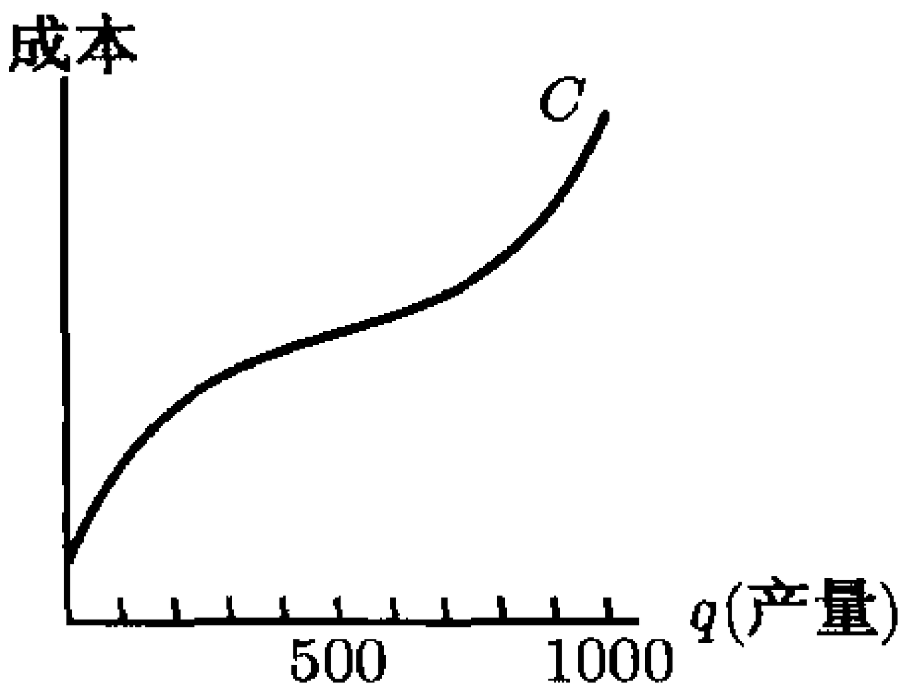


图 4-65

6. 图 4-66 中的各成本函数是否有 q 值, 使平均成本最小? 如果有, 大概是何值? 解释你的答案.

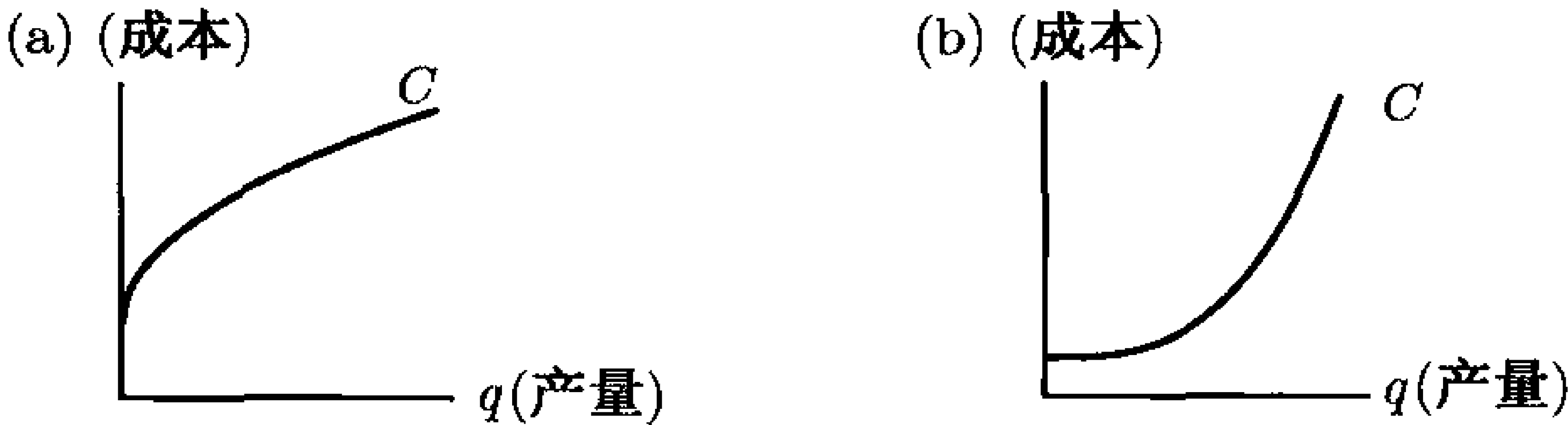


图 4-66

7. 你是生产售价 20 美元的拖鞋厂的经理. 你每月生产 1200 双拖鞋, 其平均成本为每双 2 美元. 生产水平为 1200 时的边际成本为每双 3 美元.

(a) 你是盈利还是亏损?

(b) 提高产量将提高还是降低平均成本? 你的利润是提高还是降低?

(c) 你将建议提高产量还是降低产量?

8. 设总成本函数为 $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q$ 千美元, 其中 q 的单位是千且 $0 \leqslant q \leqslant 8$.

(a) 画 $C(q)$ 的略图. 看图估计使平均成本最小的产量.

(b) 用分析的方法确定使平均成本最小的 q 值.

9. 生产 q 单位产品的平均成本为

$$a(q) = 0.01q^2 - 0.6q + 13, q > 0.$$

(a) 生产 q 单位的总成本是多少?

(b) 最小边际成本是多少? 这个结果的实际意义如何?

(c) 在何生产水平下, 平均成本最小? 最小平均成本是多少?

(d) 计算 $q = 30$ 处的边际成本. 它与 (c) 的答案有何联系? 分别用分析方法和文字解释这个关系.

10. 某产品在生产水平 2000 单位时的边际成本为每单位 10 美元, 生产 2000 单位的平均成本为每单位 15 美元. 如果稍微提高产量到 2000 单位以上, 下面的量是增大或下降, 还是无法判断?

(a) 平均成本　　　　(b) 利润

11. 为提高在该地区筑巢的蜜蜂的数量, 乌干达的一个农场工人种植三叶草. 最初该地区有 100 只蜜蜂. 每多种一亩三叶草, 该地区就多出 20 只蜜蜂.

(a) 画蜜蜂总数量 $N(x)$ 关于种植三叶草的亩数 x 的函数图形.

(b) 分别用几何与分析的方法说明

(i) 蜜蜂数关于三叶草亩数的边际增长率 $N'(x)$

(ii) 蜜蜂的平均数 $N(x)/x$

的图形形状.

12. 开发商最近买了一家自助洗衣店和它附近的工厂. 自助洗衣店多年来花了很大力气防止工厂的烟污染干衣机用的空气. 既然开发商拥有了自助洗衣店和工厂, 她能够在工厂的烟窗安装过滤器减少烟的排放量而不是单纯地防止自助洗衣店受污染. 工厂过滤器的成本和防止自助洗衣店受污染的成本依赖使用过滤器的数量, 如下表所示.

过滤器的数量	过滤器的总成本	防止洗衣店受污染的总成本
0	0 美元	127 美元
1	5 美元	63 美元
2	11 美元	31 美元
3	18 美元	15 美元
4	26 美元	6 美元
5	35 美元	3 美元
6	45 美元	0 美元
7	56 美元	0 美元

(a) 对每个可能的过滤器数 (从 0 到 7), 列表指出过滤器的边际成本, 过滤器的边际成

本和保护自助洗衣店免收烟污染所得的边际补偿.

(b) 由于开发商希望降低她两家生意的总成本, 她该如何做? 利用 (a) 部分所列表格解释你的答案.

(c) 如果除了过滤器的成本外, 还需要安装成本为 100 美元的架子, 开发商该如何做?

(d) 如果架子费用为 50 美元, 开发商该怎么办?

13. 图 4-67 是平均成本 $a(q) = b + mq$.

(a) 证明 $C'(q) = b + 2mq$.

(b) 画边际成本 $C'(q)$ 的略图.

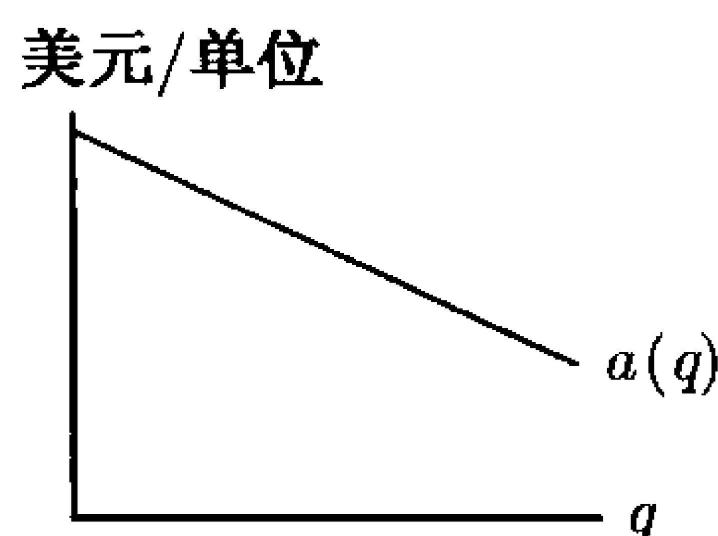


图 4-67

14. 用分析的方法证明如果边际成本小于平均成本, 平均成本关于产量的导数满足 $a'(q) < 0$.

15. 用分析的方法证明如果边际成本大于平均成本, 平均成本关于产量的导数满足 $a'(q) > 0$.

16. 短期 Cobb-Douglas 成本曲线

$$C(q) = Kq^{1/a} + F$$

是一个非常符合实际的公司的成本模型, 其中 a 是正常数, F 是固定成本, K 衡量公司可获得的技术.

(a) 如果 $a > 1$, 证明 C 是下凹的.

(b) 假设 $a < 1$, 求使平均成本最小的 q 值.

4.6 需求弹性

需求对价格变化的敏感度与产品有关. 比如, 灯泡价格的变化可能不影响需求量, 因为不管灯泡的价格如何, 人们都需要灯泡. 然而, 某特定款式的汽车的价格变化可能对需求量有重大的影响, 因为人们可以转向别的款式.

4.6.1 需求弹性

我们需要一种方法来衡量需求对价格变化的敏感度. 我们的衡量方法应该对从灯泡到汽车这些多样化的产品都行之有效. 这两个产品的价格差别太大, 因此讨论价格的绝对变化是毫无道理的: 灯泡的价格变化 1 美元是一个很大的变化, 但汽车的价格变化 1 美元则不是. 我们改为讨论价格的变化百分比. 比如, 价格 1%的变化是如何影响产品的需求量的?

设 Δp 是某产品价格 p 的变化量, Δq 是相应需求量 q 的变化量. 价格的变化百分比为 $\Delta p/p$, 需求量的变化百分比为 $\Delta q/q$. 注意到 Δp 和 Δq 通常有相反的符号 (因为提高价格将降低需求量). 价格变化对需求量的影响就由比率

$$\left|\frac{\text{需求的变化百分比}}{\text{价格的变化百分比}}\right| = \left|\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}\right| = \left|\frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{p}{\Delta p}\right| = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p}\right|$$

的绝对值衡量.

对 p 的较小变化, 我们用导数 $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}$ 近似 $\frac{\Delta q}{\Delta p}$. 我们定义

产品的**需求弹性**[1] E 由 $E \approx \left|\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}\right|$ 近似 或 $E = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right|$ 精确给出.

商品价格提高 1%导致商品需求量大约下降 E%. 对价格的小变化量 Δq, 有

$$\frac{\Delta q}{q} \approx -E \cdot \frac{\Delta p}{p}.$$

如果 $E > 1$, 价格上涨 1%导致需求量下降超过 1%, 我们称需求是*弹性的*. 如果 $0 \leqslant E < 1$, 价格上涨 1%导致需求量下降小于 1%, 我们称需求是*非弹性的*. 一般说来, 对给定的价格变化百分比, 较大的弹性将导致较大的需求变化百分比.

例 1 如果把宾馆房间价格从每晚 75 美元提高为 80 美元使周住房数从 100 个房间降低为 90 个房间.

(a) 近似房子在价格为 75 美元时的需求弹性.

(b) 房主是否应该提高价格?

解 (a) 价格变化百分比是

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{5}{75} = 0.067 = 6.7\%,$$

需求变化百分比是

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{-10}{100} = -0.1 = -10\%.$$

需求弹性大约为比率

$$E \approx \left|\frac{\Delta q/q}{\Delta p/p}\right| = \frac{0.10}{0.067} = 1.5.$$

弹性大于 1 因为需求变化百分比大于价格变化百分比.

(b) 每个房间价格是 75 美元时,

$$\text{收益} = (100 \text{ 个房间})(75\text{美元/房间}) = 7500 \text{ 美元/周}.$$

每个房间价格是 80 美元时,

$$\text{收益} = (90 \text{ 个房间})(80 \text{ 美元/房间}) = 7200 \text{ 美元/周}.$$

价格上涨降低收益, 因此不应提高价格. □

例 2 某产品的需求曲线为 $q = 1000 - 2p^2$, 其中 p 是价格. 求 $p = 10$ 和 $p = 15$ 时的弹性, 并解释你的答案.

---

① 如果需要和其他弹性作区分, 那么这个量称作需求关于价格的弹性或需求的价格弹性.

解 首先我们求得导数 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p = -4p$. 在价格 $p = 10$ 时, 我们有 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p = -4 \cdot 10 = -40$, 需求量为 $q = 1000 - 2 \cdot 10^2 = 800$. 在这个价格水平下, 弹性为

$$E = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right| = \left|\frac{10}{800} \cdot (-40)\right| = 0.5.$$

在价格 $p = 10$ 时, 需求是非弹性的：价格 1%的上涨导致需求量大约降低 0.5%.

在价格 $p = 15$ 时, 我们有需求量 $q = 550$ 和 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p = -60$. 弹性为

$$E = \left|\frac{p}{q} \cdot \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right| = \left|\frac{15}{550} \cdot (-60)\right| = 1.64.$$

需求是弹性的：价格 1%的上涨导致需求量大约降低 1.64%. □

4.6.2 收益和需求弹性

弹性使我们能分析价格变化对收益的影响. 价格的上涨通常会导致需求量的降低. 然而, 收益可能增加或减少. 收益 $R = pq$ 是两个量的乘积, 而且若一个量增加, 则另一个量减少. 弹性衡量这两个相互制约的量的相对重要性.

例 3 某物品价格为 10 美元时, 卖出 300 单位. 当该物品价格提高 1 美元时, 如果售出量降低

(a) 10 单位　　　(b) 100 单位

对收益有何影响?

解 由于收益 = 价格 × 售出量, 当价格为 10 美元时, 我们有

$$\text{收益} = 10 \cdot 300 = 3000 \text{ 美元}$$

(a) 价格为 11 美元时, 售出量为 $300 - 10 = 290$, 因此

$$\text{收益} = 11 \cdot 290 = 3190 \text{ 美元}$$

所以, 提高价格增加收益.

(b) 价格为 11 美元时, 售出量为 $300 - 100 = 200$, 因此

$$\text{收益} = 11 \cdot 200 = 2200 \text{ 美元}$$

所以, 提高价格降低收益. □

弹性允许我们预测价格的上涨是增加还是降低收益.

例 4 例 3(a) 中的物品是毛织品, 其需求方程是 $q = 400 - 10p$. 例 3(b) 中的物品是室内植物, 其需求方程是 $q = 1300 - 100p$. 求毛织品和室内植物的弹性.

解 对毛织品而言, $q = 400 - 10p$, 因此 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p = -10$. 所以

$$E_{\text{毛织品}} = \left|\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right| = \left|\frac{10}{300}(-10)\right| = \frac{1}{3}.$$

对室内植物而言, $q = 1300 - 100p$, 因此 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}p = -100$. 所以

$$E_{\text{室内植物}} = \left|\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right| = \left|\frac{10}{300}(-100)\right| = \frac{10}{3}.$$ □

注意到 $E_{\text{毛织品}} < 1$ 且收益随着价格的上涨而增加; $E_{\text{室内植物}} > 1$ 且收益随着价格的上涨而降低. 在下例中我们将看到弹性和最大收益的关系.

例 5　表 4-2 是例 2 中的产品在不同价格的需求量 q, 收益 R 和弹性 E. 什么价格带来最大收益? 在该价格时的弹性等于多少?

表 4-2

价格 p	10	11	12	13	14	15
需求量 q	800	758	712	662	608	550
收益 R	8000	8338	8544	8606	8512	8250
弹性 E	0.5	0.64	0.81	1.02	1.29	1.64
	非弹性的	非弹性的	非弹性的	弹性的	弹性的	弹性的

解　表 4-2 表明最大收益在价格大约为 13 美元时获得, 而且在该价格水平上, E 大约为 1. 价格低于 13 美元时, 我们有 $E < 1$, 因此价格的上涨引起的需求量下跌是较小的, 从而提高价格增加收益. 价格高于 13 美元时, 我们有 $E > 1$, 因此价格的下跌引起的需求量增加相对较大, 从而降低价格增加收益. □

例 6 证明了收益确实在 $E = 1$ 时有局部局部最大值. 我们总结如下.

弹性和收益的关系

- 如果 $E < 1$, 需求是非弹性的, 通过提高价格可以增加收益.
- 如果 $E > 1$, 需求是弹性的, 通过降低价格可以增加收益.
- 收益函数的临界点处 $E = 1$.

例 6　用分析的方法证明在收益函数的临界点处 $E = 1$.

解　我们把收益看成价格的函数. 利用乘积法则求 $R = pq$ 的导数, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(pq) = p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p}q = p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} + q.$$

导数 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}q$ 在临界点处等于零, 因此我们有

$$p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} + q = 0$$

$$p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = -q$$

$$\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = -1$$

$$E = 1.$$ □

4.6.3 不同产品的需求弹性

不同的产品一般有不同的弹性, 见表 4-3. 如果某产品有替代品或者是奢侈品而不是必需品, 价格的变化通常对需求有很大的影响, 产品的需求是弹性的. 另一方面, 如果产品没有相近的替代品或产品是必需品, 价格的变化对需求的影响相对小, 需求是非弹性的. 比如, 盐、青霉素、眼镜和灯泡在这些产品的通常价格范围内是非弹性的.

表 4-3 某些农产品的需求 (关于价格的) 弹性①

卷心菜	0.25	橘子	0.62
马铃薯	0.27	奶油	0.69
羊毛	0.33	苹果	1.27
花生	0.38	桃子	1.49
鸡蛋	0.43	新鲜西红柿	2.22
牛奶	0.49	生菜	2.58
黄油	0.62	新鲜豌豆	2.83

习题

1. 某商品的弹性 $E = 0.5$.
(a) 3%的价格增长 (b) 3%的价格下调
对需求有何影响?

2. 某商品的弹性 $E = 2$.
(a) 3%的价格增长 (b) 3%的价格下调
对需求有何影响?

3. 表 4-3 中桃子的弹性等于多少? 说明这个数值告诉你有关价格增长对桃子需求量的影响. 桃子的需求是弹性的还是非弹性的? 它是否如你所料? 请解释.

4. 表 4-3 中马铃薯的弹性等于多少? 说明这个数值告诉你有关价格增长对桃子需求量的影响. 桃子的需求是弹性的还是非弹性的? 它是否如你所料? 请解释.

5. 你认为高清晰度电视机是弹性的还是非弹性的? 说明理由.

6. 洗衣粉有很多牌子. 你认为任一特定牌子的洗衣粉的需求弹性是高还是低? 说明理由.

7. 某小镇只有一家公司提供本地电话服务. 你认为电话服务的需求弹性是高还是低? 说明理由.

8. 某产品的需求曲线为 $q = 200 - 2p^2$. 求价格为 5 美元时的需求弹性. 需求是非弹性或弹性的, 还是两者不是?

---

① 由美国农业部估计, 并发布在 W. Adams & J. Brock,《美国工业结构 (第 10 版)》(Engelwood Cliffs: Prentice Hall, 2000).

9. 某产品的需求曲线为 $p = 90 - 10q$. 求 p =50 时的需求弹性. 如果这个价格上涨 2%, 计算相应的需求变化百分比.

10. 学校通过组织上门出售糖果筹钱. 下表给出糖果的价格 p 及以该价格卖出的数量.

p	1.00 美元	1.25 美元	1.50 美元	1.75 美元	2.00 美元	2.25 美元	2.50 美元
q	2765	2440	1980	1660	1175	800	430

(a) 估计价格为 1 美元时的需求弹性. 需求在该价格是弹性的还是非弹性的?

(b) 估计所给各个价格时的需求弹性. 你注意到什么? 说明为什么是这样.

(c) 弹性大约在何价格时等于 1?

(d) 估计所给各个价格对应的总收益. 验证总收益在 $E = 1$ 时的价格最大.

11. 如果

(a) 价格单位为美元, 需求量 q 的单位是吨, 弹性的单位是什么?

(b) 价格单位为日元, 需求量 q 的单位是升, 弹性的单位是什么?

(c) 一般你能得出什么结论?

12. 山药的需求量为 $q = 5000 - 10p^2$, 其中 q 是山药的重量 (单位: 磅), p 是一磅山药的价格.

(a) 如果山药的当前价格是每磅 2 美元, 能卖出多少磅?

(b) 价格 2 美元时的需求是弹性还是非弹性的? "人们需要山药, 不管什么价格都会购买它们" 或 "山药是奢侈品, 如果价格太高人们将不再购买", 哪个说法更准确?

13. 山药的需求量如习题 12.

(a) 价格为每磅 2 美元时, 山药种植者的总收益是多少?

(b) 把收益表示成价格的函数, 然后求使收益最大的价格.

(c) 以你 (b) 部分求出的价格出售, 能卖出多少山药?

(d) 证明在你 (b) 部分求出的价格处, $E = 1$.

14. 据估计, 美国内战前美国南部奴隶的需求弹性在城市为 0.86(相当高), 在农村为 0.05(非常低)①.

(a) 为什么会是这样?

(b) 你认为对奴隶制度最坚定的抵制者是来自城市还是农村?

15. 求使由出售例 2 中的产品而获得的收益最大的确切价格.

16. 如果对所有的价格都有 $E = 2$, 你如何获得最大收益?

17. 如果对所有的价格都有 $E = 0.5$, 你如何获得最大收益?

18. **(a)** 如果对某个正常数 k, $pq = k$, 计算需求弹性.

(b) 用收益函数解释 (a) 部分的答案.

19. 证明: 需求函数 $q = k/p^r$ 给出了常弹性 $E = r$, 其中 r 是正常数.

20. 线性需求函数参见图 4-68. 经济学家利用公式 $E = d_1/d_2$, 计算任何需求量 q_0 处的需求弹性 E, 其中 d_1, d_2 是图 4-68 所示的垂直距离.

(a) 说明这个公式正确的理由.

---

① Donald McCloskey, 《价格应用理论》, 第 134 页 (纽约: Macmillan, 1982).

(b) 确定使

(i)$E>1$ (ii) $E<1$ (iii) $E=1$

的价格 p.

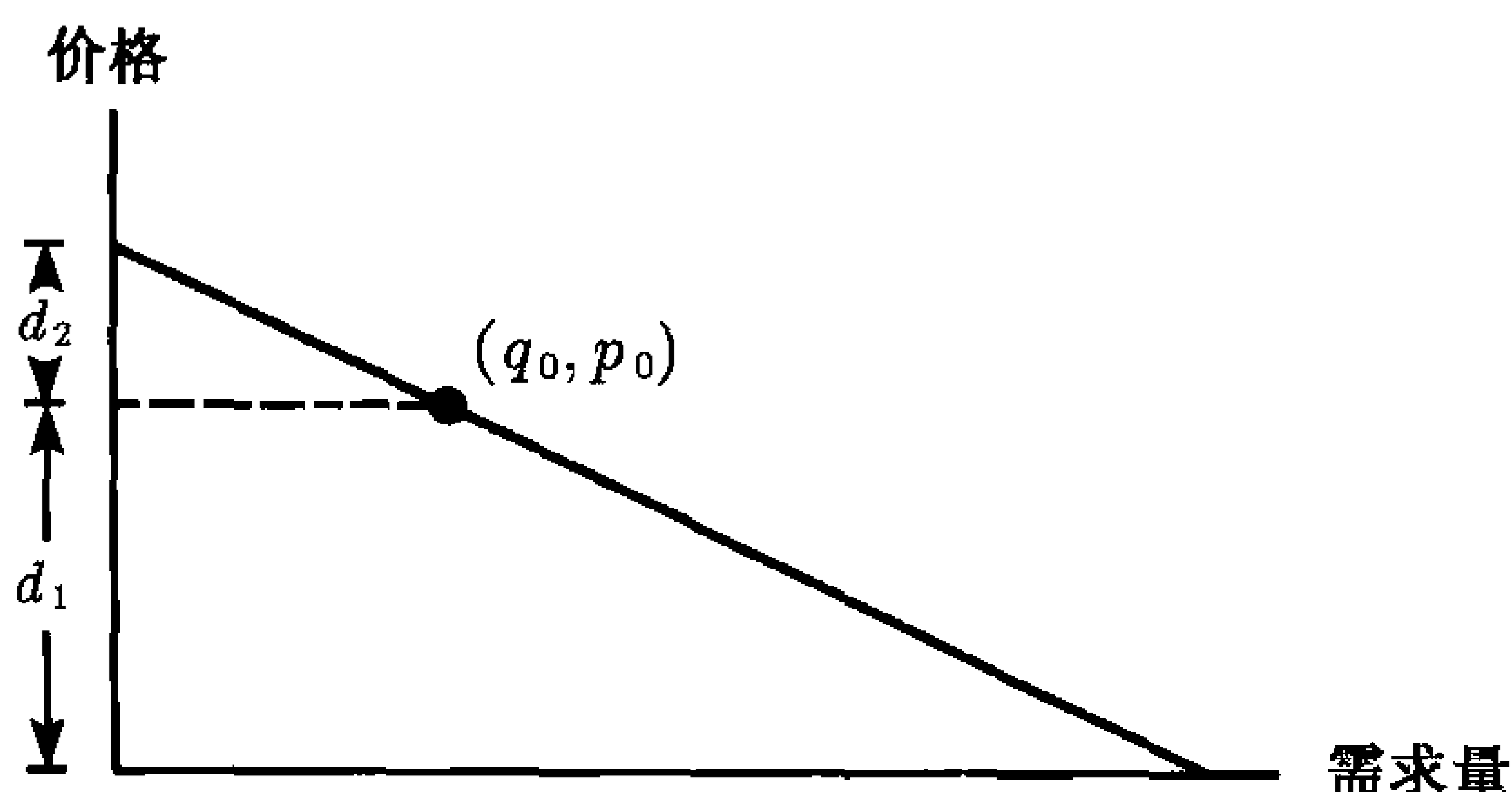


图 4-68

21. 如果 p 是价格, E 是某商品的需求弹性, 用分析方法证明:

$$\text{边际收益} = p(1-1/E).$$

22. 假设成本与产量成比例, 即 $C(q)=kq$. 证明在

$$\frac{\text{利润}}{\text{收益}}=\frac{1}{E}$$

时公司获得最大利润.

[提示: 利用习题 21 的结果及利润在 $MR=MC$ 时达到最大这一事实.]

23. 成本关于产量的弹性定义为 $E_{C,q}=q/C\cdot \mathrm{d}C/\mathrm{d}q$.

(a) 关于成本对生产产量的敏感度, 这个弹性告诉你些什么?

(b) 证明 $E_{C,q}=$ 边际成本/平均成本.

24. 如果 q 是鸡肉的需求量, 并且是牛肉价格 p 的函数, 鸡肉需求量关于牛肉价格的需求交叉价格弹性定义为 $E_{\text{交叉}}=|p/q\cdot \mathrm{d}q/\mathrm{d}p|$. 对鸡肉购买量关于牛肉价格的敏感度, $E_{\text{交叉}}$ 告诉你些什么?

25. 产品的需求收入弹性定义为 $E_{\text{收入}}=|I/q\cdot \mathrm{d}q/\mathrm{d}I|$, 其中 q 是需求量, 并把它看成消费者收入的函数. 关于产品的购买量对消费者收入变化的敏感度, $E_{\text{收入}}$ 告诉你些什么?

4.7 Logistic 模型

澳大利亚海峡边上的袋鼠岛 1923 年引进了 18 只树袋熊.①树袋熊在岛上繁衍起来, 1997 年它们的数量增长到大约 5000 只. 预计树袋熊的数量将持续指数增长是否合理呢? 由于岛上只有有限的空间, 树袋熊的数量不可能永远无限制地增长. 相反我们预料存在岛能够容纳的最大量. 可以用 Logistic 或抑制增长模型模拟具有上界的量的增长.

① *Watertown Daily Times*, 4 月 18 日, 1997.

4.7.1 模拟美国人口

人口预测对 18 世纪末的政治家开始变得重要. 随着对稀缺资源的关注, 对准确的人口预测的兴趣产生. 美国每 10 年通过人口普查记录人口. 最初这样的普查是在 1790 年. 表 4-4 包括 1790~2000 年人口普查的数据.

表 4-4 1790~2000 年的美国人口[①] (单位: 百万)

年	人口	年	人口	年	人口	年	人口
1790	3.9	1850	23.1	1910	92.0	1960	179.3
1800	5.3	1860	31.4	1920	105.7	1970	203.3
1810	7.2	1870	38.6	1930	122.8	1980	226.5
1820	9.6	1880	50.2	1940	131.7	1990	248.7
1830	12.9	1890	62.9	1950	150.7	2000	281.4
1840	17.1	1900	76.0				

图 4-69 表明人口在 1790~1860 年指数增长. 然而增长率在 1860 年后开始减小. 参见图 4-70.

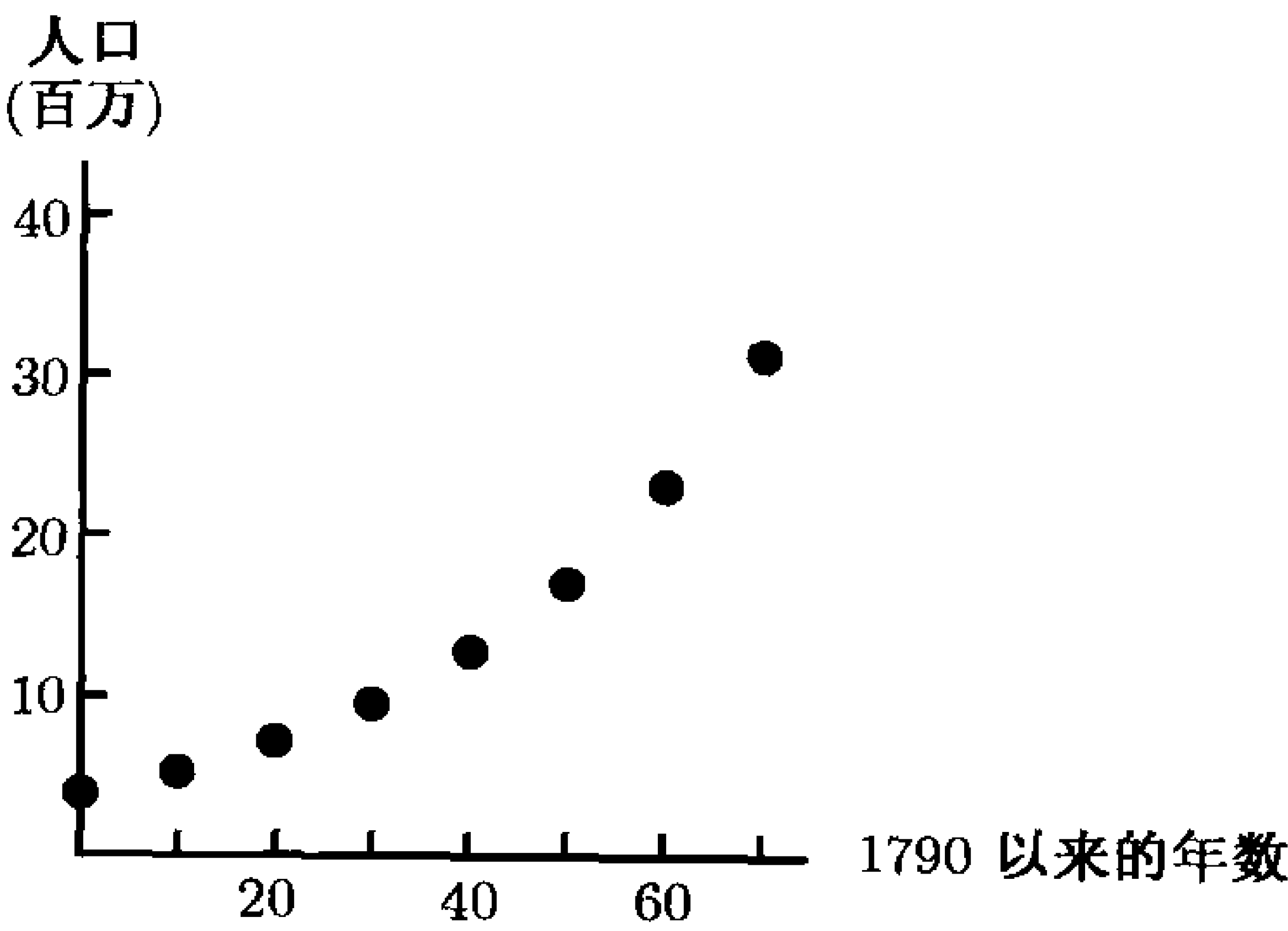


图 4-69 1790~1860 年的美国人口

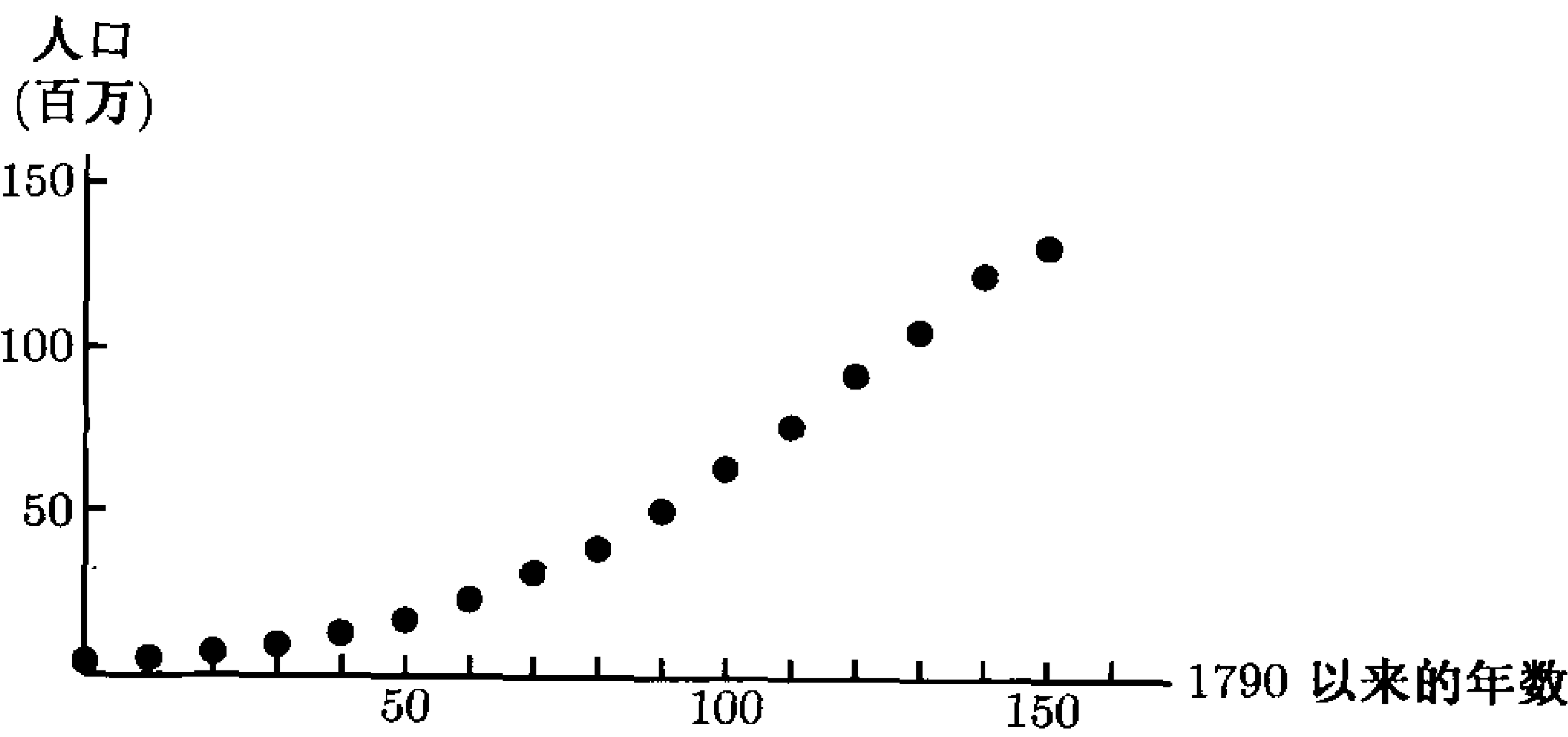


图 4-70 1860~1940 年的美国人口

① 《2005 世界年鉴》, 622-623 页 (New York).

1790～1860 年：指数模型

我们开始用指数函数模拟 1790～1860 年的美国人口. 如果 t 是自 1790 年以来的年数, P 是人口 (单位：百万), 回归分析表明拟合数据的指数函数大概为

$$P = 3.9(1.03)^t.$$ ①

因此美国人口在 1790～1860 年以每年大约 3%的比率增长.

函数 $P = 3.9(1.03)^t$ 和数据在图 4-71 描点给出; 它与数据相当吻合. 由于我们采用来自整个 70 年的数据, 我们当然希望在整个那段时期都一致. 令人吃惊地是, 如果我们只采用 1790 和 1800 年的人口建立我们的指数函数, 预测将仍然非常准确. 1800 年的一个人能如此准确地预测 60 年后的人口, 这真令人大吃一惊, 尤其是想到发生在 1800～1860 年的战争、经济衰退、传染病、新的领土的增加和移民.

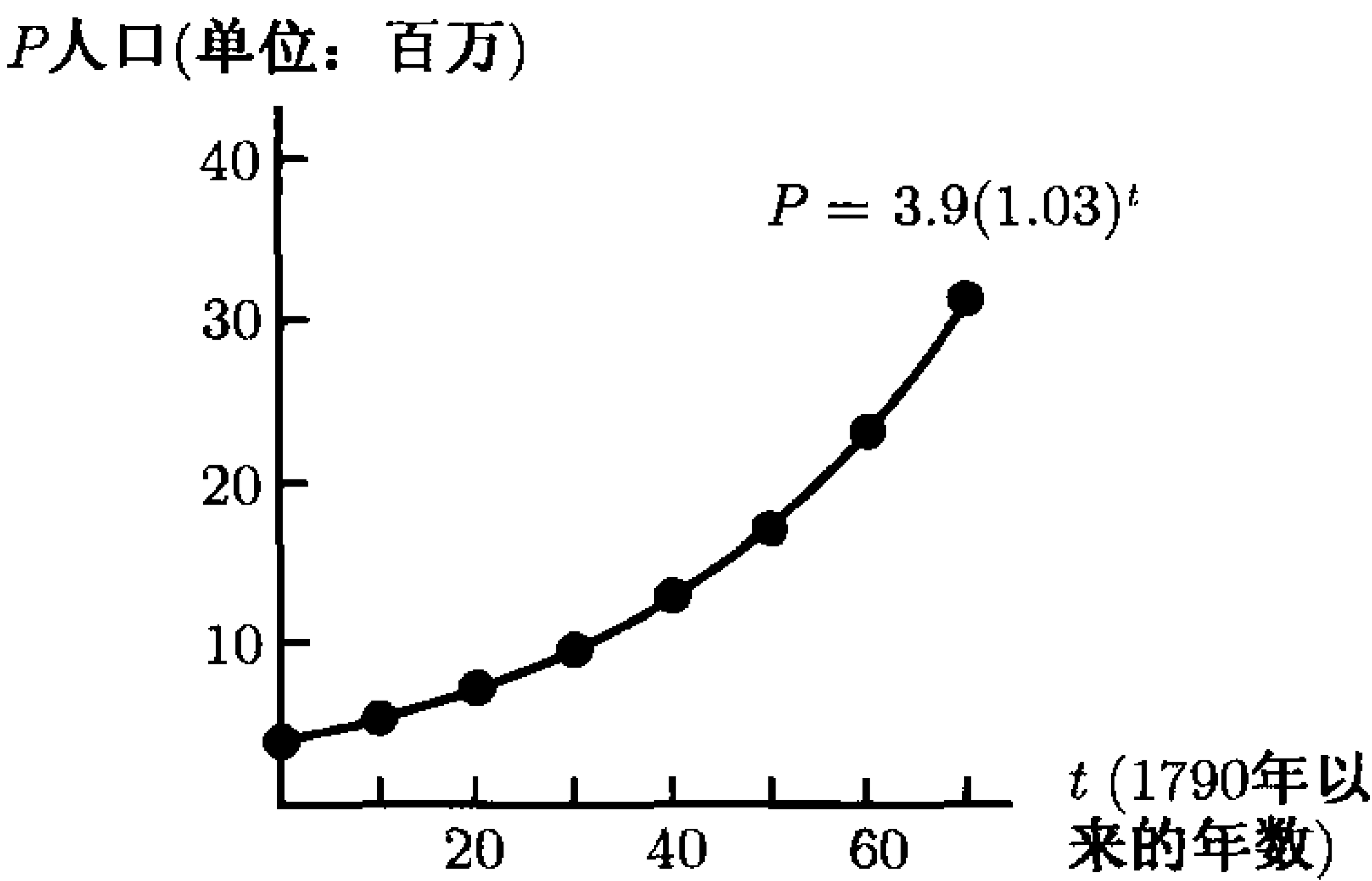


图 4-71　1790～1860 年美国人口的指数模型

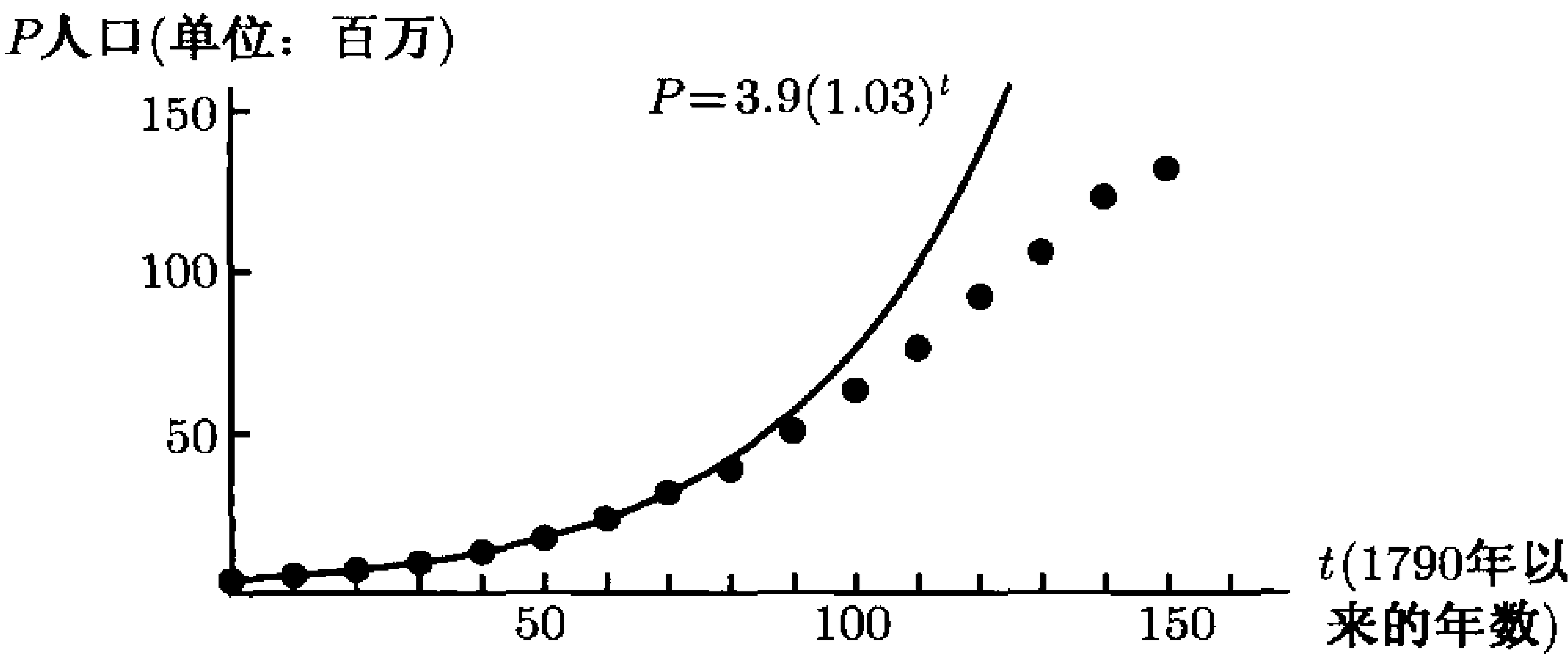


图 4-72　1790～1940 年的美国人口和指数模型. 1860 年后拟合得不是很好

1790～1940 年：Logistic 模型

指数函数与 1860 年后的美国人口拟合得情况如何呢? 图 4-72 是 1790～1940 年的美国人口与指数函数 $P = 3.9(1.03)^t$ 的图形. 能与 1790～1860 年的数据拟合得如此之好的指数函数, 与 1860 年后的数据并不是拟合得很好. 我们必须寻找别的

① 参阅第 1 章相关模型那部分. 不同的算法可能得到不同的表达式.

方法模拟这个数据.

由数据给出的函数图形 (参见图 4-70) 对小的 t 值上凹, 但是看上去接着变得下凹和平坦. 这种类型的增长用Logistic 函数模拟. 如果 t 是自 1790 年以来的年数, 函数

$$P=\frac{187}{1+47\mathrm{e}^{-0.0318t}},$$

与直到 1940 年的数据拟合得很好, 其图形见图 4-73. 这样一个公式由在计算器或计算机上进行 Logistic 回归得到[1]

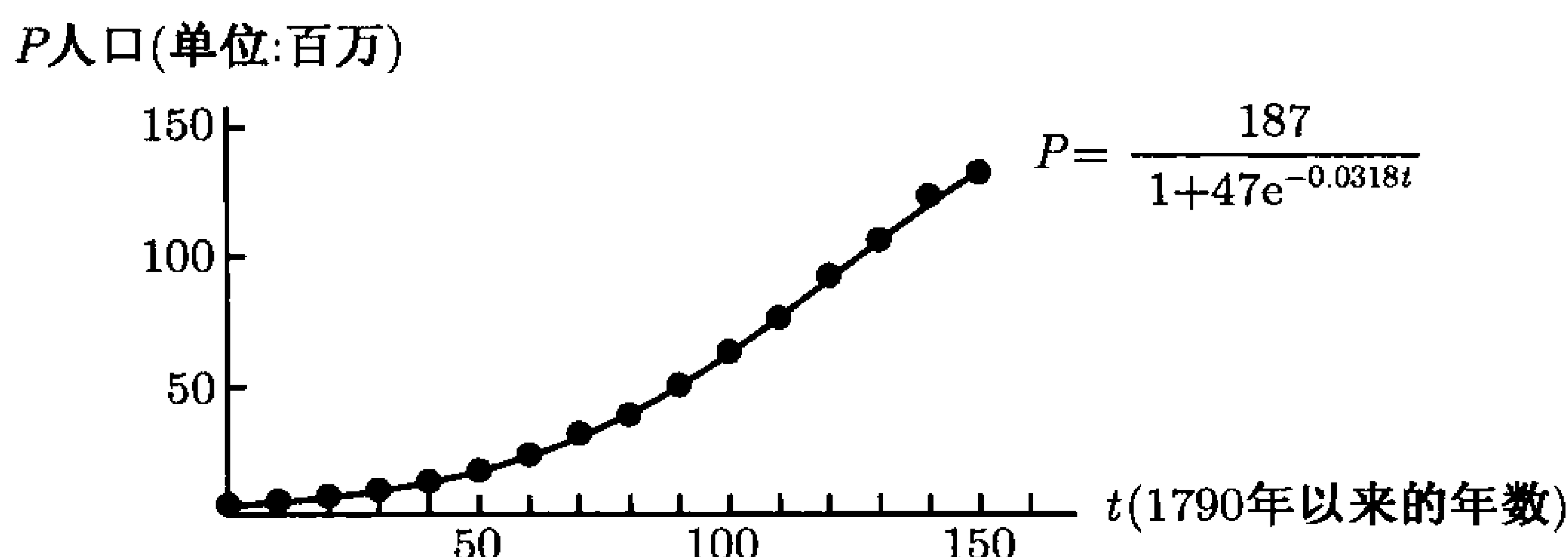


图 4-73　1790~1940 年美国人口的 Logistic 模型

4.7.2 Logistic 函数

Logistic 函数, 比如用来模拟美国人口的函数, 是处处递增的. 它的图形最初是上凹的, 然后变成下凹, 最后在一条水平渐近线处变平. 正如我们从美国人口的模型注意到的, Logistic 函数在小[2] t 处大约是指数的. Logistic 函数可用来模拟新产品的出售量和病毒的传播.

> **Logistic 函数**具有形式
>
> $$P=f(t)=\frac{L}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$$
>
> L,C 和 K 是正常数.

一般的 Logistic 函数有 3 个参数 L,C 和 K. 我们在例 1 中研究这些参数中的两个对图形的影响. 本节的习题 6 考虑第三个参数.

例 1　考虑 Logistic 函数 $P=\dfrac{L}{1+100\mathrm{e}^{-kt}}$.

(a) 令 $k=1$. 取 L 的几个值, 画 P 的图形. 说明参数 L 的影响.

(b) 现在令 $L=1$. 取 k 的几个值, 画 P 的图形. 说明参数 k 的影响.

---

① 参阅第 1 章相关模型部分.

② 多小才是充分小取决于参数 C 和 K 的值.

解 (a) 参见图 4-74. 注意到图形在 L 处变平. 参数 L 决定了水平渐近线和 P 的上界.

(b) 参见图 4-75. 注意到 k 越大, 曲线趋近渐近线越快. 参数 k 影响曲线的坡度. □

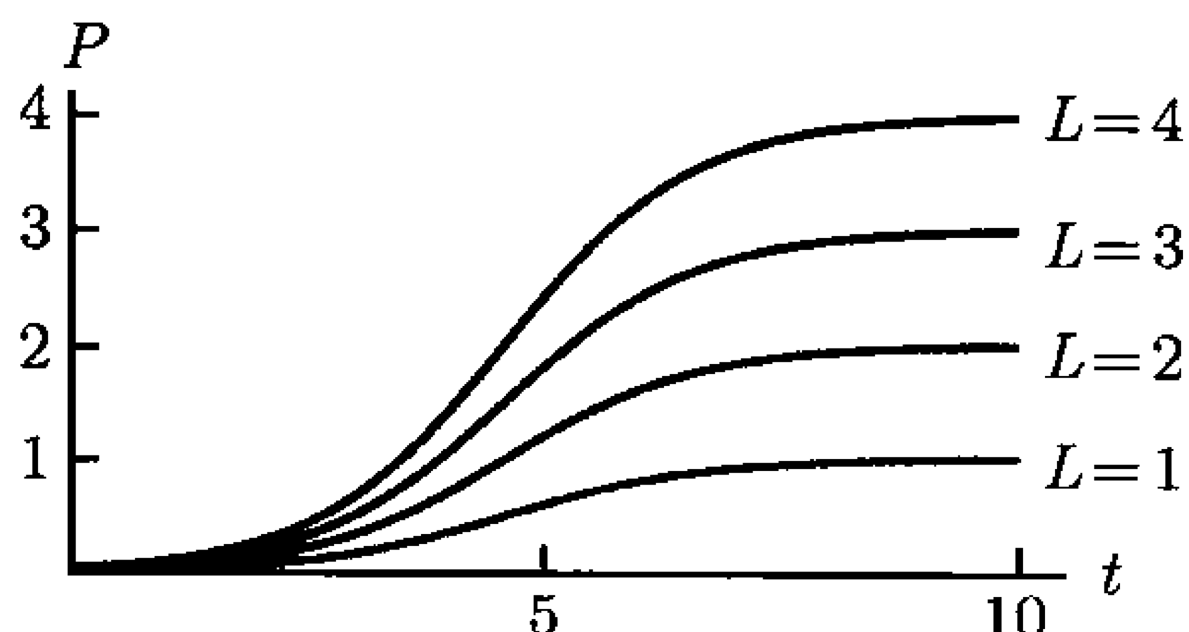


图 4-74 不同 L 值的 $P=\dfrac{L}{1+100\mathrm{e}^{-kt}}$ 的图形

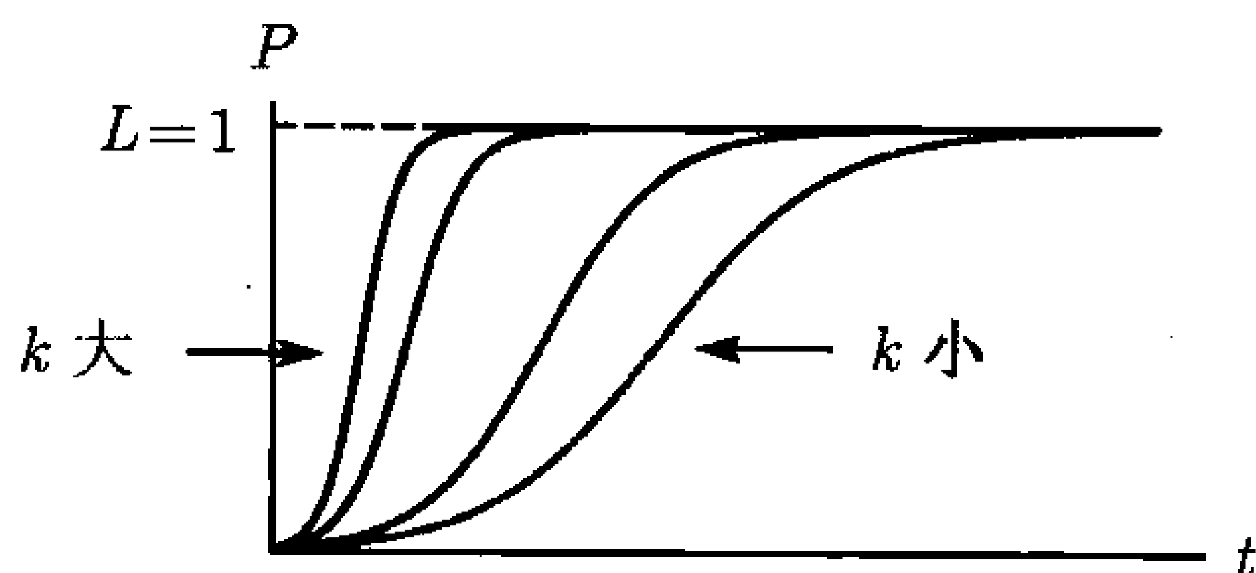


图 4-75 不同 k 值的 $P=\dfrac{L}{1+100\mathrm{e}^{-kt}}$ 的图形

承载容量和报酬递减点

例 1 表明 Logistic 函数的参数 L 的值是 P 稳定处的值, 其中 $P=\dfrac{L}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$. 这个值 L 叫做承载容量, 表示环境能供养的最大人口.

估计承载容量的一种方法是求拐点. Logistic 函数的图形最初上凹, 然后下凹. 凹性改变的拐点处斜率最大. 在这个点的左侧, 图形上凹, 增长率递增; 在这个点的右侧, 图形下凹, 增长率减小. 拐点称作**报酬递减点**. 本章复习题的习题 39 表明这个点处 $P=L/2$. 参见图 4-76. 公司有时候在新产品的销售中观察凹性的改变, 利用它估计最大可能销售量.

> Logistic 函数 $P=\dfrac{L}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ 的性质
>
> - 极限值 L 是 P 的承载容量.
> - 报酬递减点是拐点, P 在这一点增长最快且 $P=L/2$.
> - Logistic 函数在小 t 处近似增长率为 k 的指数函数.

1790~2000 年: 再看美国人口

我们用 Logistic 函数模拟 1790~1940 年的美国人口. 这个模型与 1940 年以来的美国人口拟合得怎么样呢? 现在我们看 1790~2000 年的所有人口数据.

例 2 如果 t 是自 1790 年以来的年数, P 的单位是百万, 我们用下面的 Logistic 函数模拟 1790~1940 年的美国人口:

$$P=\frac{187}{1+47\mathrm{e}^{-0.0318t}}.$$

根据这个函数, 美国人口最大值是多少? 这个预测准确吗? 这个 Logistic 模型与

1940 后的美国人口增长拟合的情况如何?

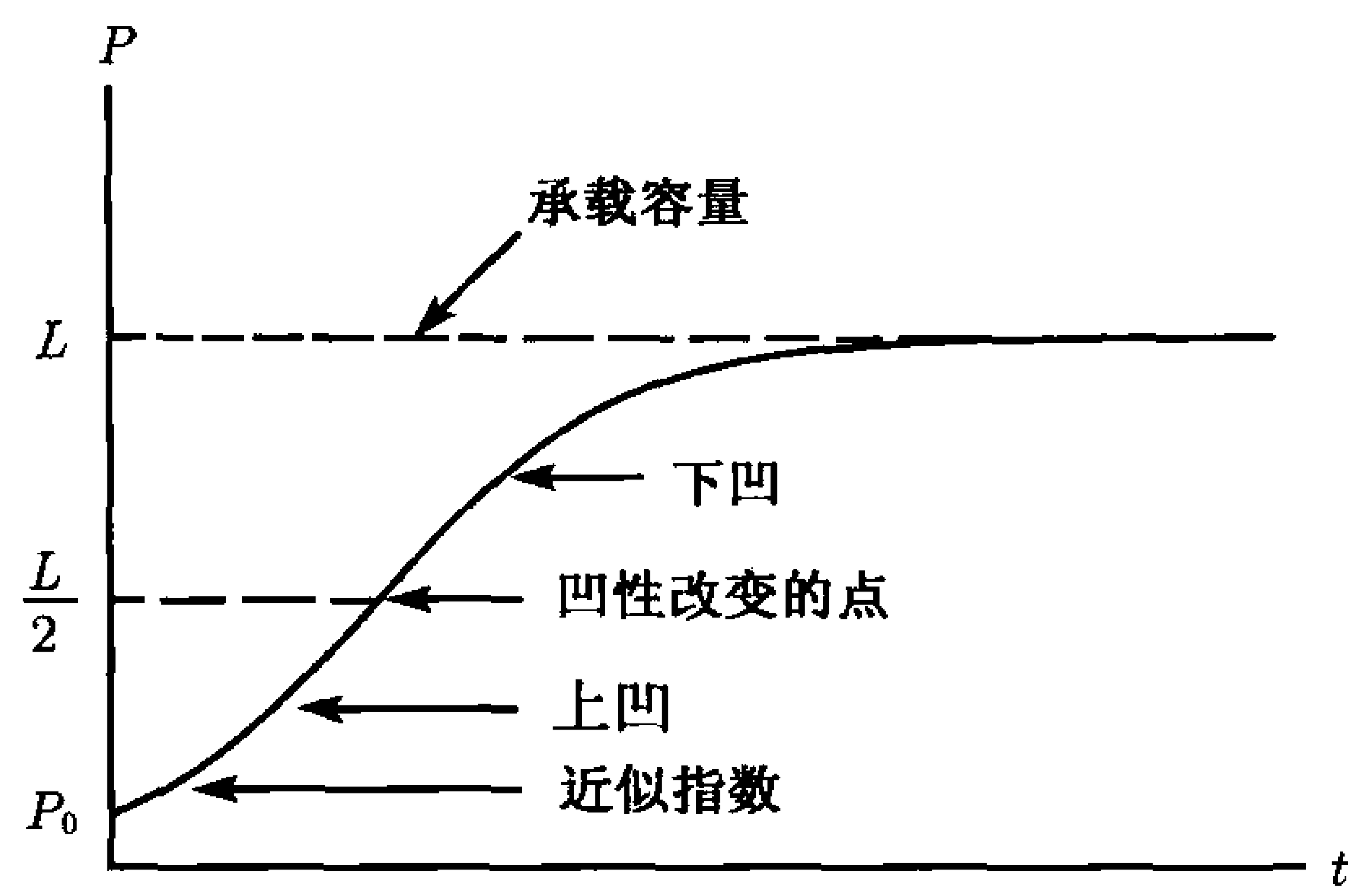


图 4-76 Logistic 增长

解 表 4-5 列出了 1940~2000 年美国人口的实际数据与利用这个 Logistic 模型所得的预测数据. 根据 Logistic 函数的表达式, 人口的上界为 $L = 187$ 百万. 然而表 4-5 表明 1970 年美国人口的实际数据超过这个数. 1940 年后, Logistic 函数和实际人口的拟合不好. 参见图 4-77. □

表 4-5 1940~2000 年美国人口 (单位: 百万) 的预测数据与实际数据的对比

年份	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
实际	131.7	150.7	179.3	203.3	226.5	248.7	281.4
预测	133.7	145.0	154.4	162.1	168.2	172.9	176.6

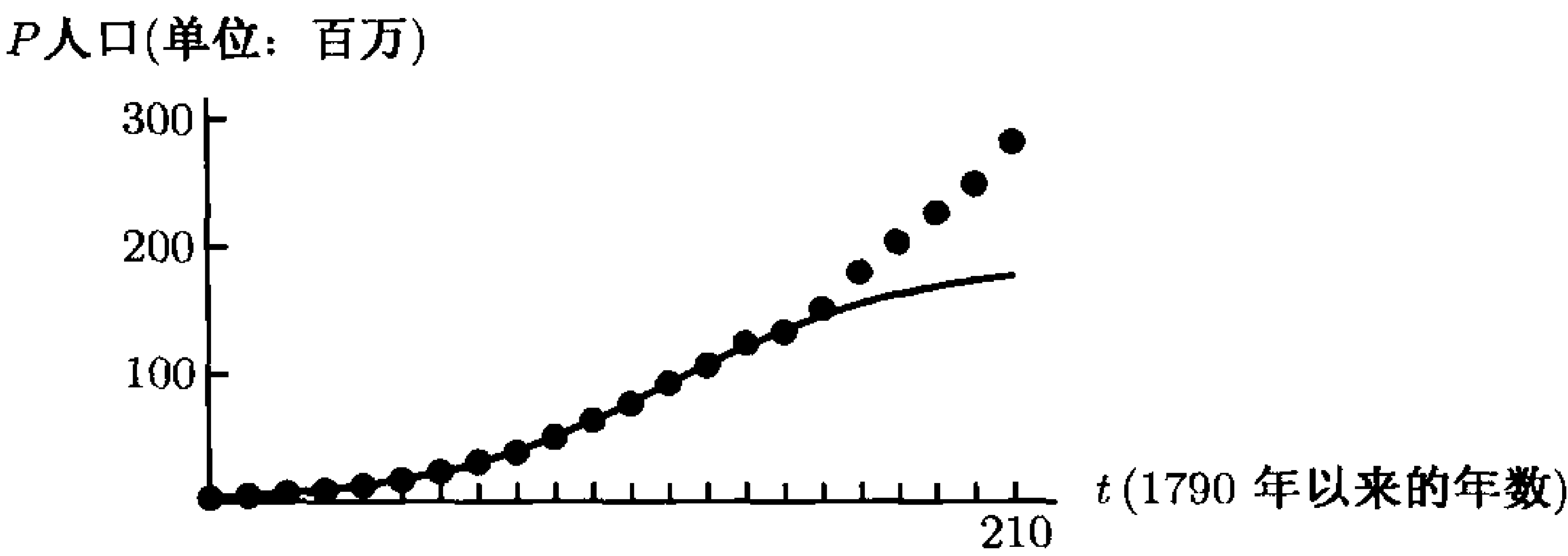


图 4-77 Logistic 模型和美国人口, 1790~2000

尽管第二次世界大战抑制了 1942~1945 年的美国人口增长, 但是美国人口在 20 世纪 50 年代后几年大爆炸. 20 世纪 60 年代人口增长 28 百万, 这使我们的 Logistic 模型失效. 这次人口爆炸是由于新生儿大量出生导致的.

我们再次碰到了我们的模型不再适用的场合. 这与其说是让你认为不能找到合理的模型; 倒不如说它指出没有模型是完美的, 当一个模型无效时, 我们要寻找一个更好的. 就像对美国人口我们舍弃指数模型而采用 Logistic 模型一样, 我们可以更进一步地研究.

4.7.3 销售量预测

新产品的销售量通常适合 Logistic 模型. 比如, 当某新 CD 出现在市面上, 销售量最初因为 CD 发行消息的传播迅速增长. 最后, 大多数需要这个 CD 的人已经买到, 销售量降下去. 销售量关于时间的图形最先是上凹的, 然后下凹, 并以上界 L 为最大销售量.

例 3 表 4-6 是某新 CD 自上市后的总销售量 (单位: 千).

(a) 求这个函数凹性改变的点. 利用它估计最大可能销售量.

(b) 利用 Logistic 回归, 用一个 Logistic 函数拟合这个数据. 这个函数预测的最大可能销售量是多少?

表 4-6 某 CD 自入市后的总销售量

t 月	0	1	2	3	4	5	6	7
总销售量 (单位: 千)	0.5	2	8	33	95	258	403	496

解 (a) 总销售量的变化率一直增长到 $t=5$, 自此后减小, 因此拐点大约为 $t=5$, 此时 $P=258$. 因此 $L/2=258, L=516$. 这 CD 的最大可能销售量估计为 516 000.

(b) Logistic 回归得到下面的函数:

$$P=\frac{532}{1+869\mathrm{e}^{-1.33t}}.$$

这个函数预测的最大可能销售量是 $L=532$ 或大约 532 000 张 CD. 参见图 4-78.

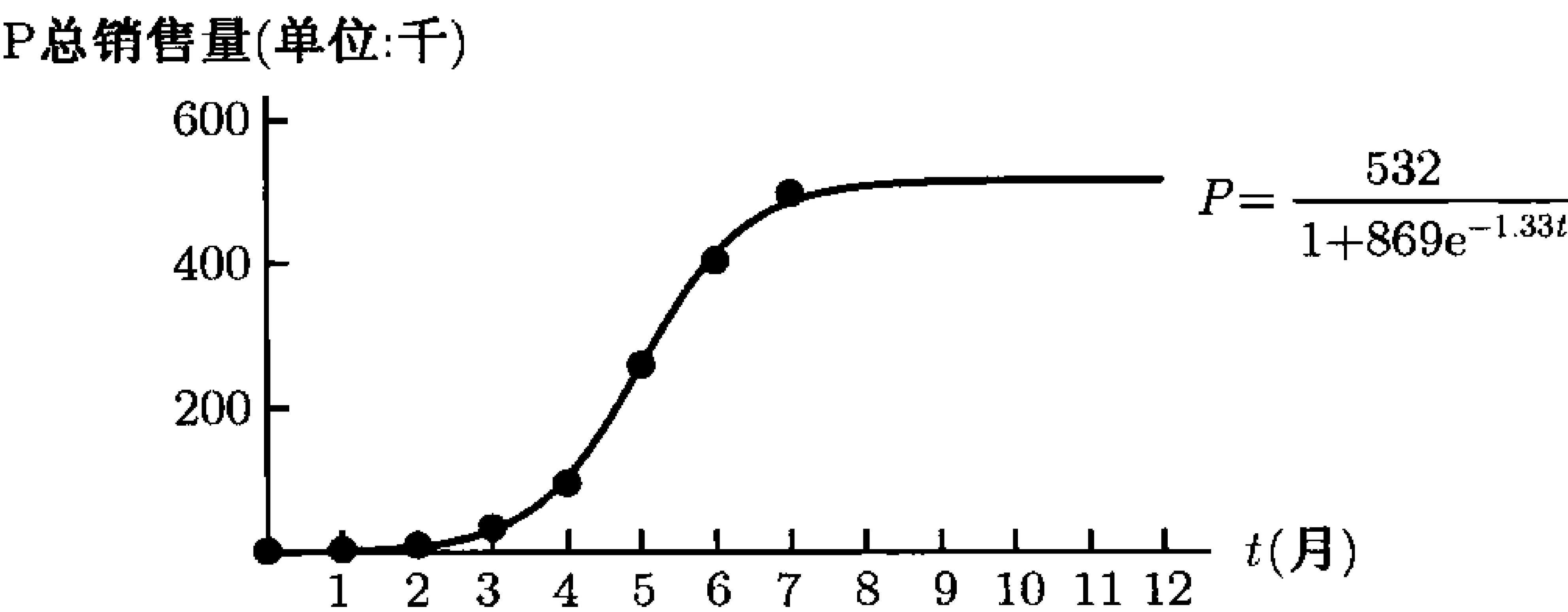


图 4-78 Logistic 增长: 某 CD 的总销售量 □

4.7.4 剂量反应曲线

*剂量反应曲线*是指对某药物的生理反应强度关于施药量的函数图形. 随着药量的增加, 反应强度增大, 因此剂量反应函数是增函数. 反应强度通常用最大反应的百分比衡量. 曲线不可能超过最大反应 (或 100%), 因此曲线在一条水平渐近线处变平. 剂量反应曲线通常在小剂量处上凹, 在大剂量处下凹. 剂量反应曲线可以用自变量为施药量而不是时间的 Logistic 函数模拟.

剂量反应曲线指出达到预期效果所需要的药量、最大可能达到的效果和达到最好效果需要的药量. 它的斜率提供了有关药剂的治疗完全边界.

一剂药需要的用药量应保证大得足够有效但不能太大而导致危险. 图 4-79 给出了两条不同的剂量反应曲线: 一条斜率小, 另一条斜率大. 图 4-79a 中, 药物有一个大的安全且有效的剂量变化范围. 图 4-79b 中的曲线坡度大, 药物既安全又有效的剂量变化范围小. 如果剂量反应曲线的坡度大, 那么用药的一个小错误可能导致危险的后果. 施用这样药物很困难.

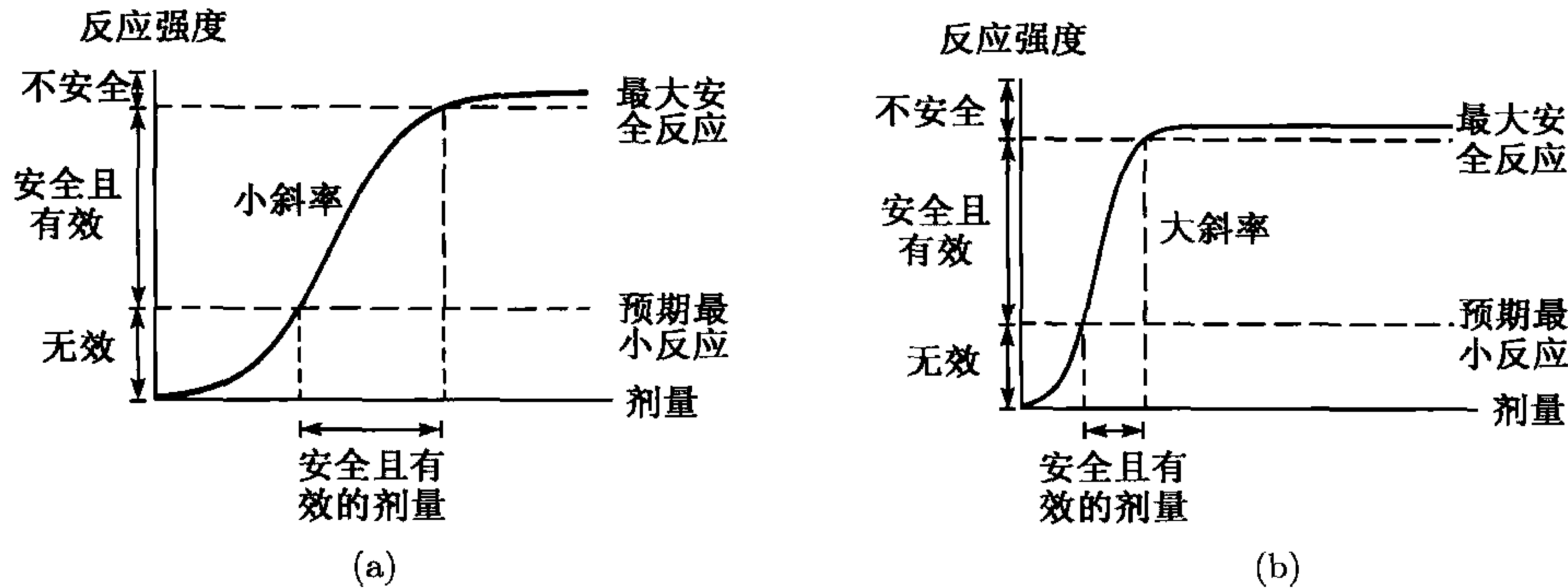


图 4-79 剂量反应曲线的斜率告诉我们什么

例 4 图 4-80 提供了出于同一目的施用三种不同药物的剂量反应曲线. 讨论这三种药物的优缺点.

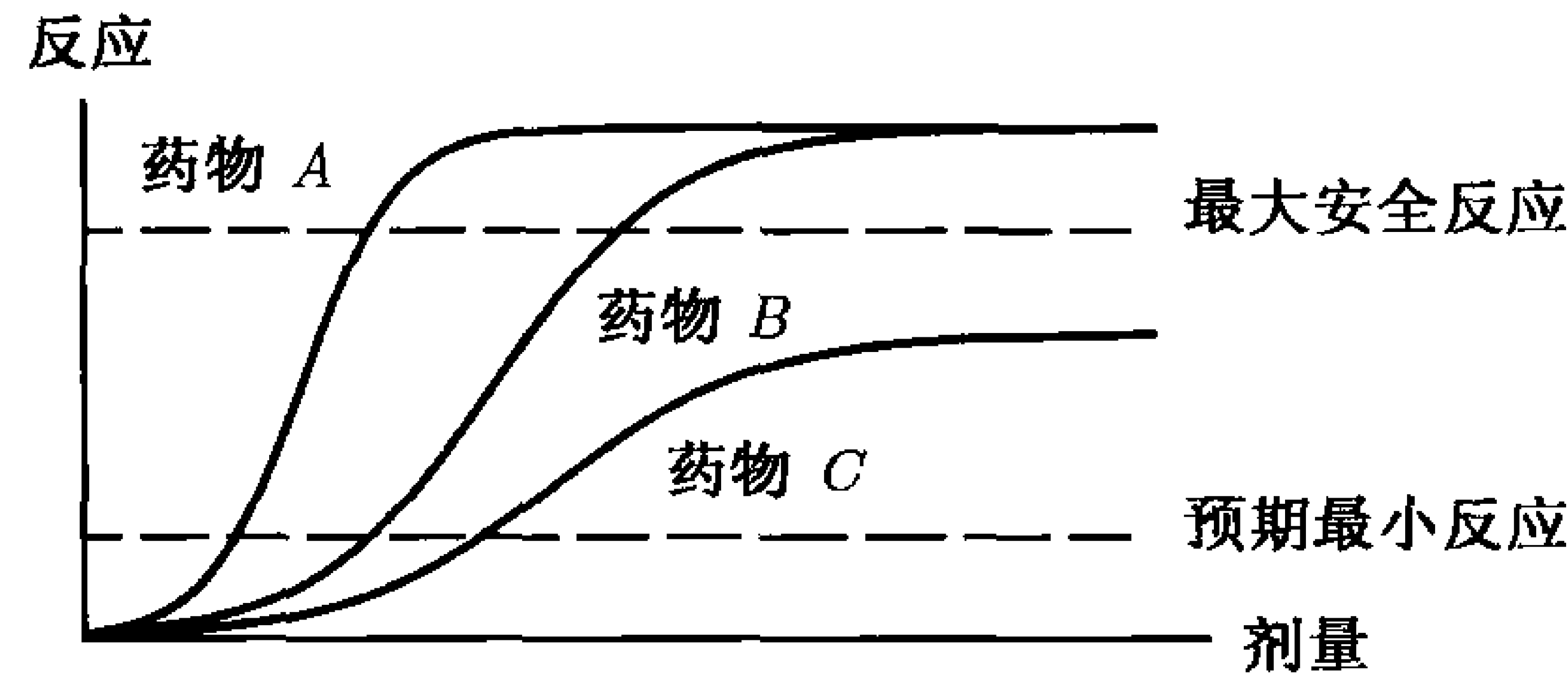


图 4-80 这三种药物各自的优缺点是什么

解 药物 A 和药物 B 表现相同的最大反应, 而药物 C 的最大反应相当小; 然而这三种药物达到相同的预期最小反应. 药物 B 和药物 C 的效用 (达到预期效果需要的剂量) 比药物 A 的效用小很多. (然而, 效用是药物相对来说不重要的特性, 因为较小效用的药物可以简单地增大剂量来达到治疗效果.) 药物 A 的斜率比其他两种的大. 药物 A 和药物 B 都可能超过最大安全反应. 因此, 尽管药物 C 的最大效果小, 但因为它是最安全施用的, 它还是最优先考虑的. □

习题

1. 如果 t 是 1990 年来的年数, 世界人口 (单位: 10 亿) 的其中一个模型是

$$P=\frac{40}{1+11\mathrm{e}^{-0.08t}}.$$

(a) 这个模型预计的足可供养的最大世界人口是多少?

(b) 画 P 关于 t 的图形.

(c) 根据这个模型, 世界人口何时达到 200 亿? 399 亿?

2. 一个谣言在有 400 人的人群中传布. 谣言开始传布的 t 小时后已经听到谣言的人数 $N(t)$ 可以由形如

$$N(t)=\frac{400}{1+399e^{-0.4t}}$$

的函数近似.

(a) 求 $N(0)$, 并说明它的含义.

(b) 2 小时后又多少人会听到这个谣言? 10 小时后呢?

(c) 画 $N(t)$ 的略图.

(d) 大约过多长时间, 有一半人听说这个谣言? 所有人都听说呢?

(e) 大约何时谣言传布最快?

3. 汽车反盗设备的销售率参见下表.

(a) 报酬递减点何时达到?

(b) 这时的总销售量是多少?

(c) 假设销售量是 Logistic 增长, 利用 (b) 部分答案估计该设备的最大可能销售量.

月份	1	2	3	4	5	6
月销售量	140	520	680	750	700	550

4. 一款新游戏进入市场后的总销售量 (单位: 千) 列在下表中.

(a) 绘制这个数据的图, 并在图上标出报酬递减点.

(b) 利用报酬递减点预计这款游戏的可能总销售量.

月份	0	2	4	6	8	10	12	14
销售量	0	2.3	5.5	9.6	18.2	31.8	42.0	50.8

5. 写篇短文说明新产品的销售量为什么通常遵从 Logistic 曲线. 说明公司注意报酬递减点的好处.

6. 研究参数 C 对 Logistic 曲线 $P=\dfrac{10}{1+Ce^{-t}}$ 的影响. 代入少数几个 C 的值, 并用语言和图形说明 C 对图形的影响.

7. 图 4-81 显示计算机红色代码病毒 2001 年 7 月的传播状况. 大部分病毒在 7 月 19 日凌晨开始发作; 7 月 20 日, 病毒攻击政府网站, 试图 (未成功) 使其断线. 感染该病毒的计算机台数是时间的 Logistic 函数.

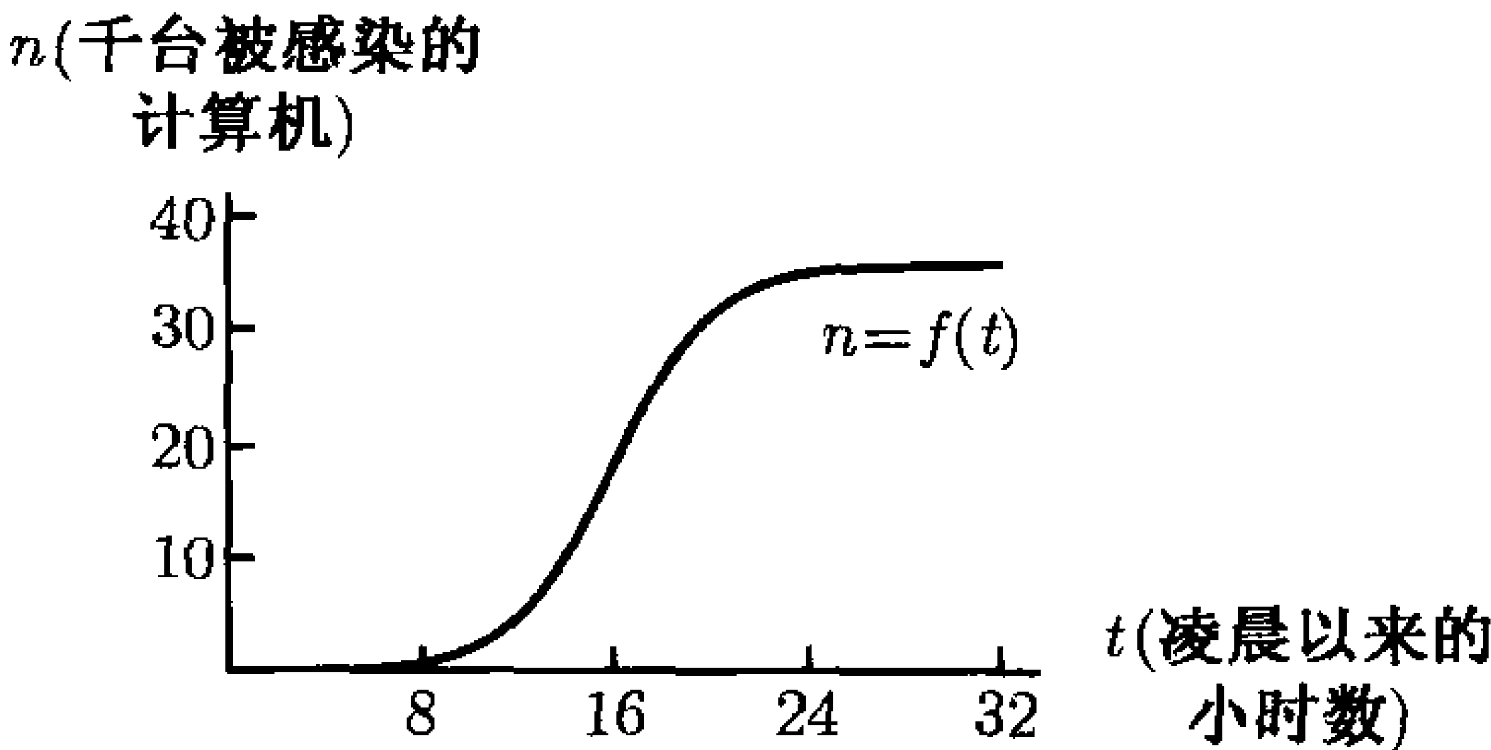


图 4-81

(a) 估计 $\lim_{t\to\infty} f(t)$. 对红色代码病毒来说, 这个极限代表什么?
(b) 估计使 $f''(t)=0$ 的 t 值. 估计此时 n 的值.
(c) 有关红色代码, (b) 部分的答案告诉我们什么?
(d) (a) 和 (b) 的答案有何联系?

8. (a) 画一条 Logistic 曲线, 并标出承载容量 L 和报酬递减点 t_0.
(b) 画 Logistic 曲线的导数的图形, 并在水平轴上标出 t_0.
(c) 某公司记录销售率 (比如, 每周销售量) 而不是总销售量. 说明公司在销售率的图形上如何指出报酬递减点.

9. 墨西哥南部的托霍拉瓦尔玛雅和印第安社区有固定的土地[①]. 自 1935 年起 t 年后用于农业的土地比例用 Logistic 函数

$$P=\frac{1}{1+3\mathrm{e}^{-0.0275t}}$$

模拟.
(a) 1935 年用于农业的土地比例是多少?
(b) 这个模型的长期预测是什么?
(c) 用于农业的土地何时占一半?
(d) 用于农业的土地比例何时增长最快?

10. 2003 年 SARS(severe acute respiratory syndrome) 在少数亚洲国家和加拿大迅速传染. 下表列出香港[②]报导的第 t 天 SARS 病例总数 P, 其中 $t=0$ 代表 2003 年 3 月 17 日.
(a) 求下表中所有时间区间内的 P 的平均变化率.
(b) 2003 年 4 月初, 人们曾担心疾病将在很长时期内以一直递增的比率传染. 传染病专家有证据指出新增病例比率开始减小的最早日期是什么?
(c) 说明指数模型不恰当的理由.
(d) 结果证明 Logistic 模型与数据拟合得很好. 估计拐点处的 t 值. 该点预测 P 的极限值是多少?
(e) 结果证明与这个数据拟合得最好的 Logistic 函数为

$$P=\frac{1760}{1+17.53\mathrm{e}^{-0.1408t}}.$$

这个函数预测 P 的极限值是多少?

第 t 天后香港的 SARS 病例总数 P, 其中 $t=0$ 代表 2003 年 3 月 17 日

t	P	t	P	t	P	t	P
0	95	26	1108	54	1674	75	1739
5	222	33	1358	61	1710	81	1750
12	470	40	1527	68	1724	87	1755
19	800	47	1621				

① 摘自 J. S. Thomas and M. C. Robins, "The Limits to Growth in a Tojolobal Maya Ejido," *Geoscience and Man* 26, 第 9-16 页 (Baton Rouge: Geoscience Publications , 1988).
② www.who.int/csr/country/en, 访问日期 2003 年 7 月 13 日.

11. 将 $t = 0, 10, 20, \cdots, 70$ 代入本节用于模拟 1790~1860 年美国人口的指数函数, 对比预测人口值与实际值.

12. 本节用一个 Logistic 函数模拟美国人口, 用这个函数预测 1790~1940 年每个普查年的美国人口. 比较预测值和实际值.

13. 表示感染某病毒的总人数 P 的曲线通常具有形如

$$P = \frac{L}{1 + Ce^{-kt}}$$

的 Logistic 函数的形状, 其中 t(单位: 周) 是时间. 假设最初有 10 人感染该病毒, 并且感染人数在初期大致以 1.78 的连续增长率指数增长. 据估计, 最后大约有 5000 人将受到感染.

(a) 我们应该采用什么样的参数 k 和 L?

(b) 利用 $t = 0$ 我们有 $P = 10$, 求 C.

(c) 现在你已经估计出了 L, k 和 C, 你用来模拟这个数据的 Logistic 函数是什么? 画它的图形.

(d) 估计到人们受感染的比率开始减小需要多长时间. 此时 P 的值是多少?

14. 如果 R 表示最大反应的百分比, x 是剂量 (单位: mg), 某药物的剂量反应曲线为

$$R = \frac{100}{1 + 100e^{-0.1x}}.$$

(a) 画这个函数的图形.

(b) 最大反应的 50%与何值对应? 这个点是拐点, 反应在该点增长最快.

(c) 这种药物的最小预期反应是 20%, 最大安全反应是 70%, 该药物既安全又有效的剂量范围是什么?

15. 图 4-82 给出三种不同产品的剂量反应曲线.

(a) 为达到预期反应, 哪种药物需要的剂量最大? 哪种需要的剂量最小?

(b) 哪种药物的最大反应最大? 哪种最小呢?

(c) 用哪种药物最安全? 请解释.

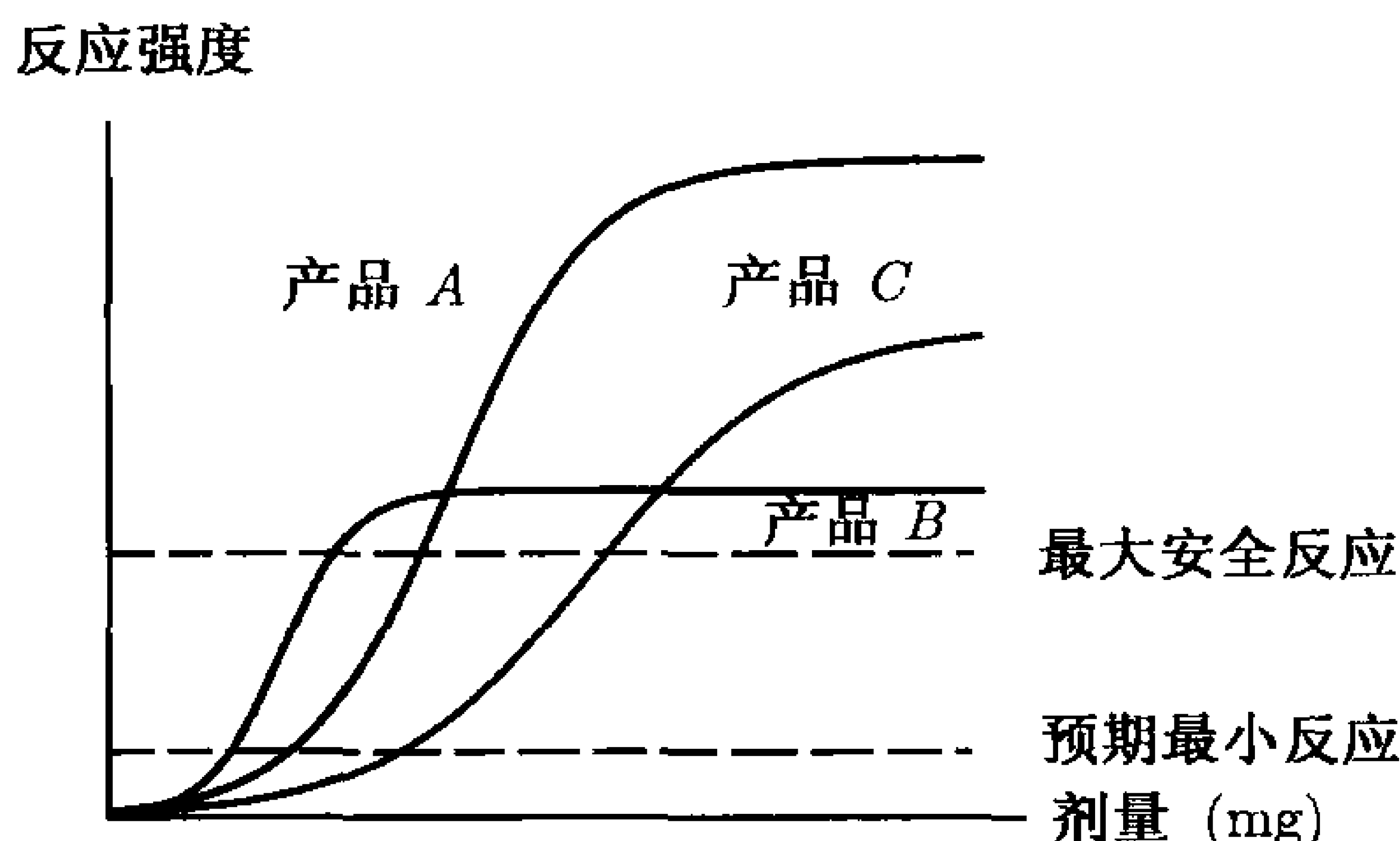


图 4-82

16. 剂量反应曲线为 $R = f(x)$, 其中 R 表示最大反应的百分比, x 是剂量 (单位: mg). 曲线的形状如图 4-79 所示. 拐点是 (15, 50), $f'(15) = 11$.

(a) 关于该药物的剂量和反应, 说明 $f'(15)$ 告诉你什么?

(b) $f'(10)$ 比 11 大还是小? $f'(20)$ 比 11 大还是小? 请解释.

17. 请说明: 用剂量反应曲线的导数较小的药物比较安全的理由. 剂量反应曲线有两种类型. 本节已经讨论的是其中的一种类型, 它绘制反应强度关于药物剂量的图形. 我们现在考虑这样的剂量反应曲线: 在给定反应的情况下, 病人的百分比关于药物剂量的函数图形.

习题 18 和习题 19 中, 左边的曲线给出了表现预期反应的病人的百分比, 右边的曲线给出给定剂量使病人致命的百分比.

18. 在图 4-83 中, 对 99%的病人都安全有效的剂量范围看上去是多少?

19. 在图 4-84 中, 讨论所有可能结果, 并指出当施用 50 mg 该药物时, 表现各个结果的病人的百分比.

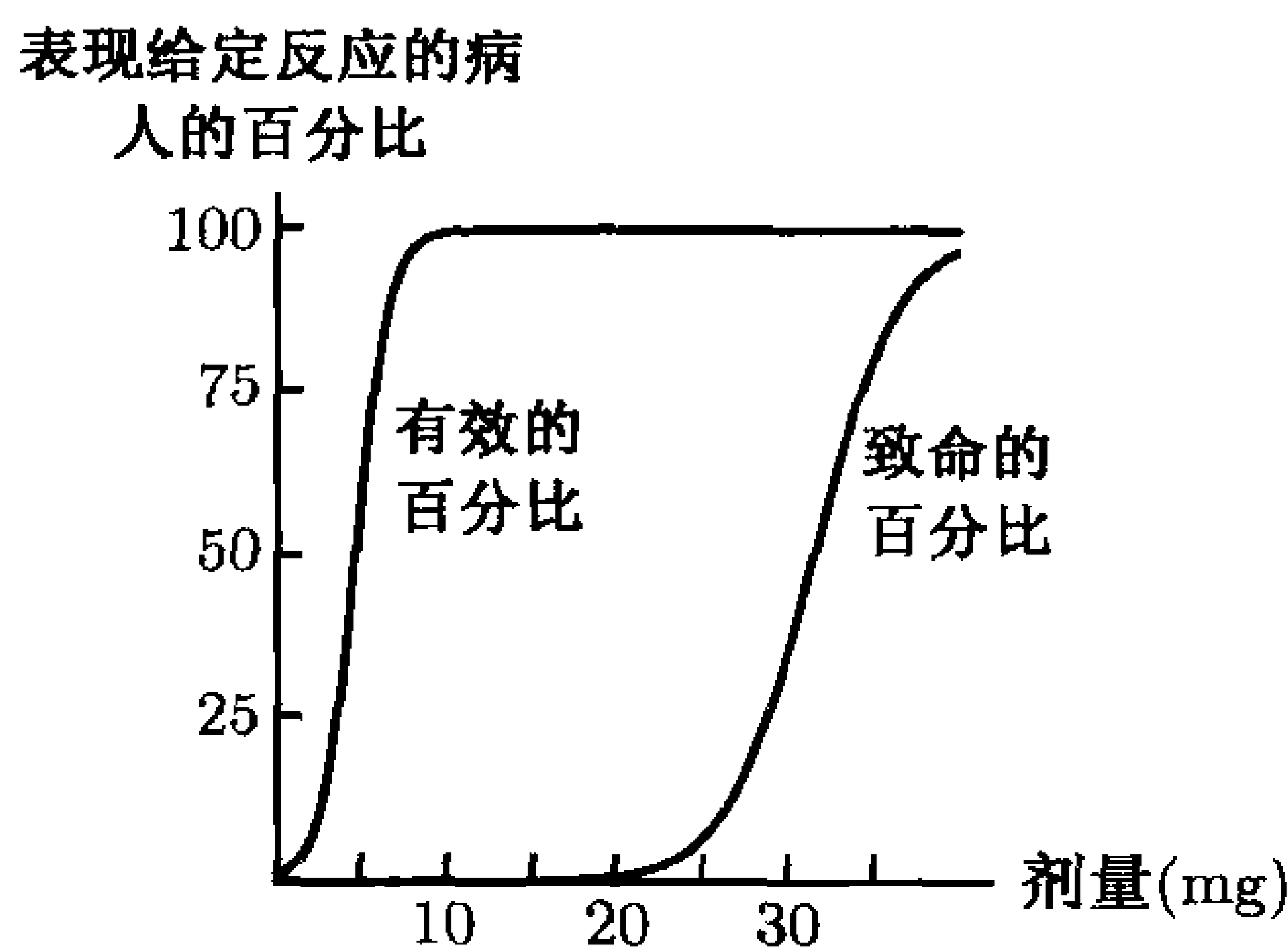


图 4-83

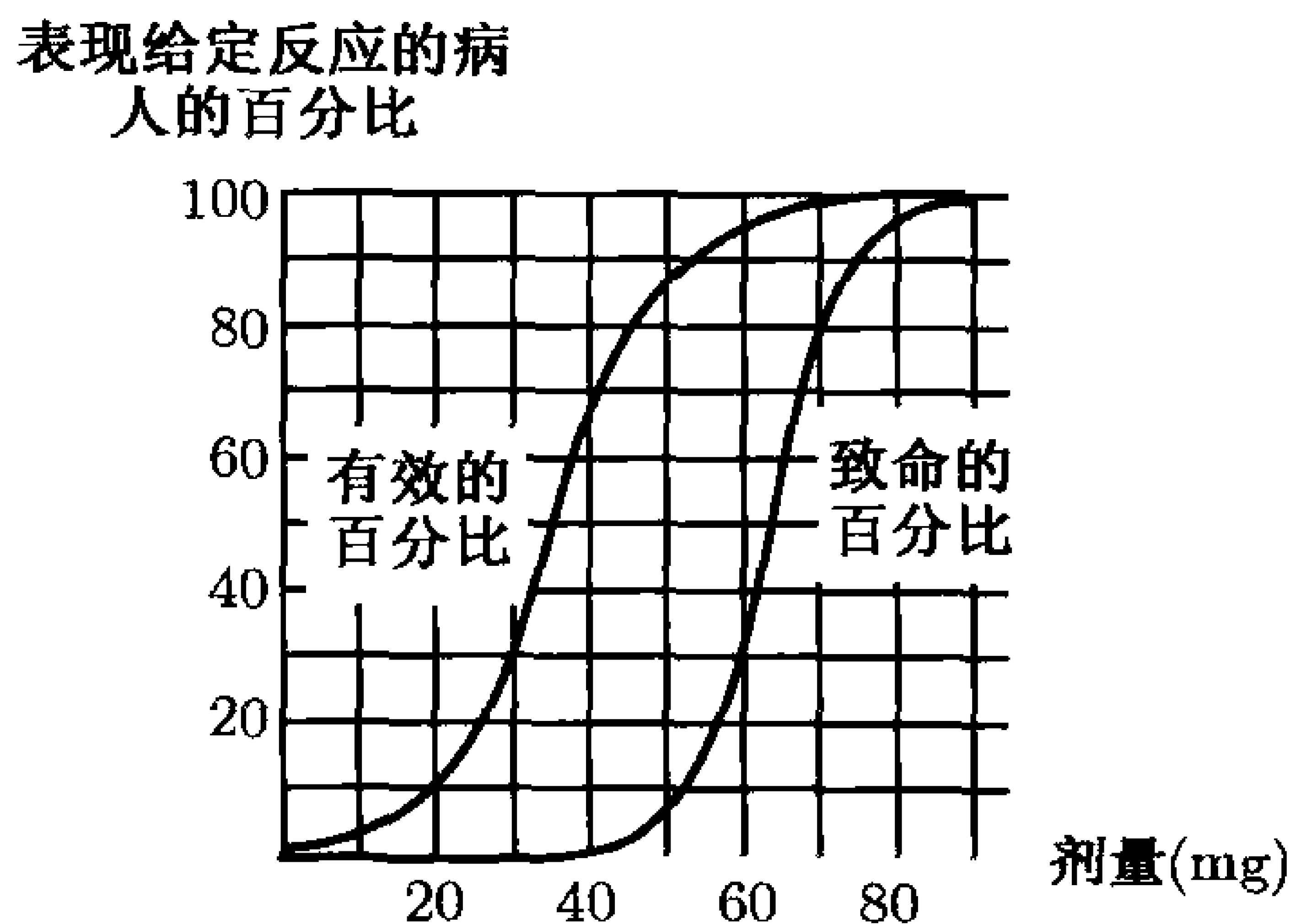


图 4-84

4.8　电涌函数和药物浓度

4.8.1　血液中的尼古丁

人抽香烟时, 来自香烟的尼古丁经过肺脏进入人体并被吸收进入血液扩散至全身. 大部分香烟含 0.5~2.0 mg 尼古丁; 大约 20% (0.1~0.4 mg) 真正被吸收进入人的血流. 尼古丁排出人体后, 吸烟者感觉需要再吸一支. 血流中的尼古丁的半衰期大约是 2 小时. 大约 60 mg 的剂量被认为是致命的.

血液里的尼古丁含量在人吸烟时升高, 而吸完烟后逐渐降低. 表 4-10 给出了吸烟过程中和吸完烟后血液中尼古丁的浓度 (单位: ng/ml). (前 10 分钟是吸烟时间, 给出的实验数据代表 10 个人的平均值.①)

表 4-7 中所给出的点在图 4-85 中标出. 具有这种行为特性的函数称作电涌函数. 他们具有形如 $y = ate^{-bt}$ 的方程, 其中 a 和 b 是正常数.

① Benowitz, Porched, Skeiner, Jacog, "Nicotine Absorption and Cardiovascular Effects with Smokeless Tobacco Use: Comparison with Cigarettes and Nicotine Gum." *Clinical Pharmacology and Therapeutics* 44 (1988): 24.

表 4-7 吸烟过程中和吸完烟后血液中的尼古丁浓度

t(分钟)	0	5	10	15	20	25	30	45	60	75	90	105	120
C(ng/ml)	4	12	17	14	13	12	11	9	8	7.5	7	6.5	6

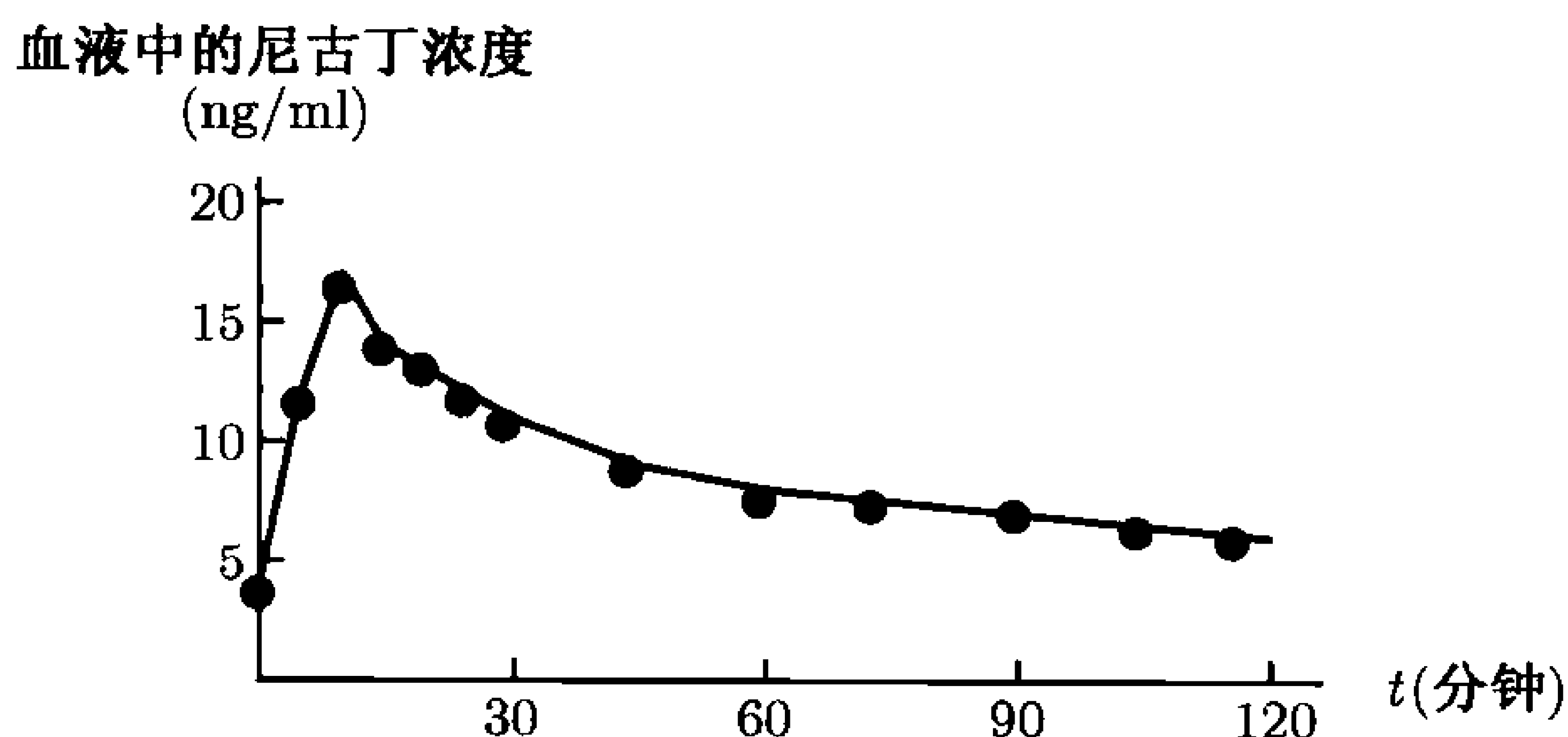


图 4-85 吸烟过程中和吸完烟后血液中的尼古丁浓度

4.8.2 函数族 $y = ate^{-bt}$

参数 a 和 b 对 $y = ate^{-bt}$ 的图形有何影响呢? 先从 $a = 1, b = 1$ 的图形入手研究. 参见图 4-86. 我们考虑参数 b 对 $y = ate^{-bt}$ 的图形的影响; 在本节的习题 12 考虑参数 a.

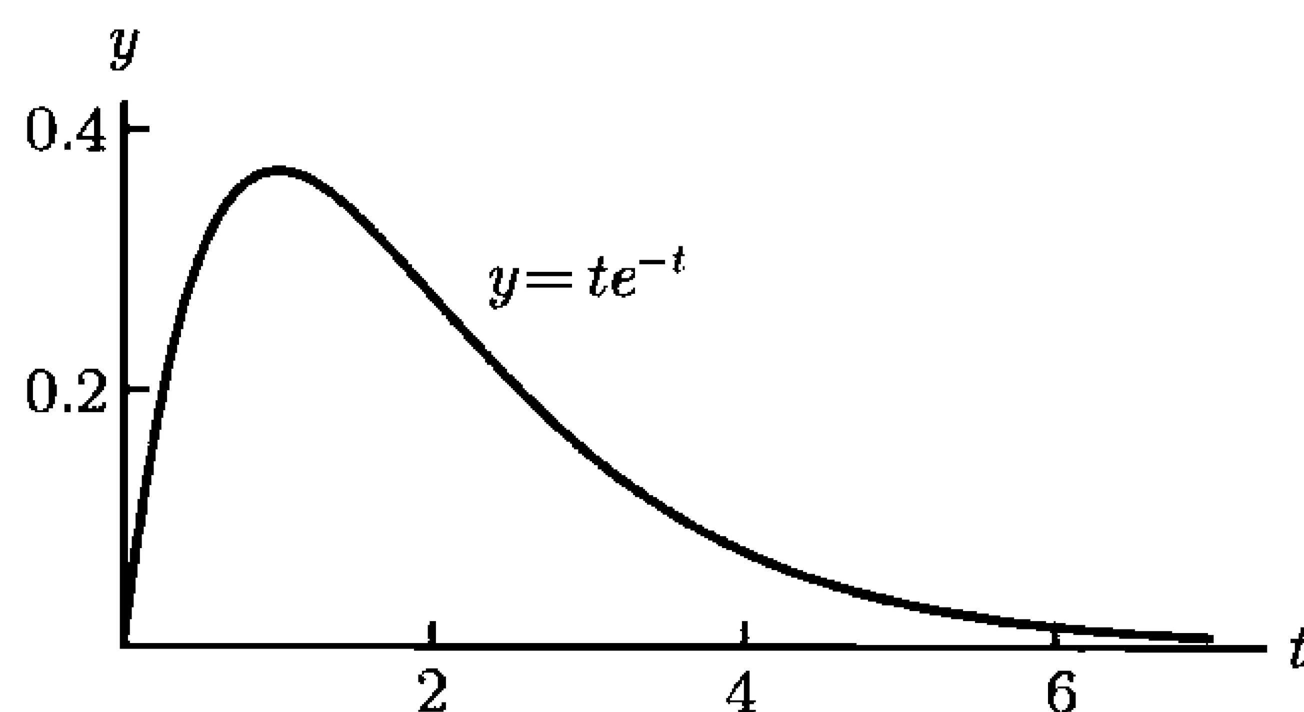


图 4-86 函数族 $y = ate^{-bt}$ 中的一个函数, 其中 $a = 1, b = 1$

b 对 $y = te^{-bt}$ 的影响

$y = te^{-bt}$ 在 b 取不同正值时的图形参见图 4-87. 曲线的大体形状不随 b 的变化而变化, 但随着 b 的减小, 曲线要较长的时间上升并达到较大的一个值.

我们从图 4-88 观察到, 当 $b = 1$ 时, 最大值大约在 $t = 1$ 处取得. $b = 2$ 时, 最大值大约在 $t = 1/2$ 处取得, $b = 3$ 时, 大约在 $t = 1/3$ 处取得. 下一个例子证明了函数 $y = te^{-bt}$ 的最大值在 $t = 1/b$ 处取得.

例 1 证明: 对 $b > 0$, 函数 $y = te^{-bt}$ 的最大值在 $t = 1/b$ 处取得, 并随着 b 的减小而增加.

解 最大值在满足 $dy/dt = 0$ 的临界点取到. 求导得

$$\frac{dy}{dt} = 1 \cdot e^{-bt} + t(-be^{-bt}) = e^{-bt} - bte^{-bt} = e^{-bt}(1 - bt).$$

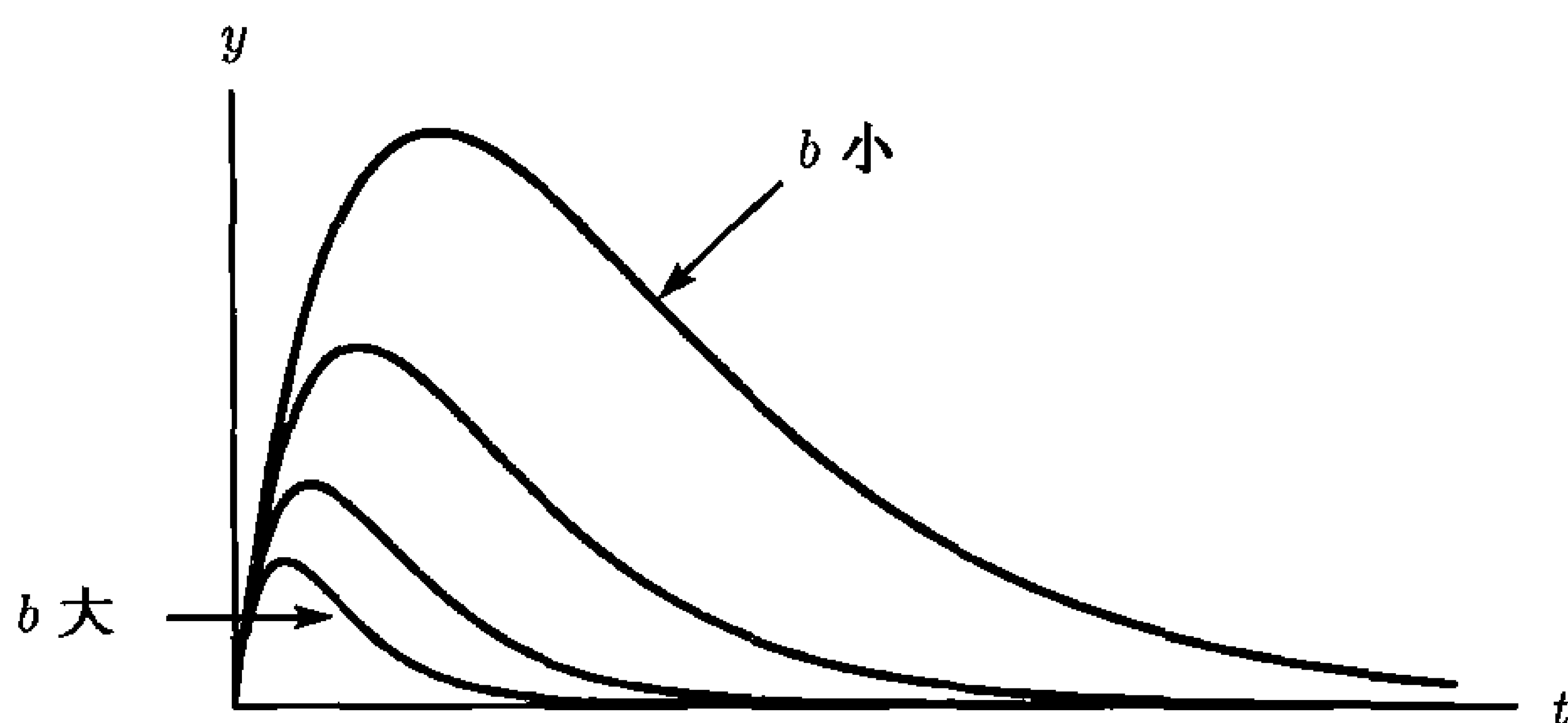


图 4-87　b 变化中的 $y = te^{-bt}$ 的图形

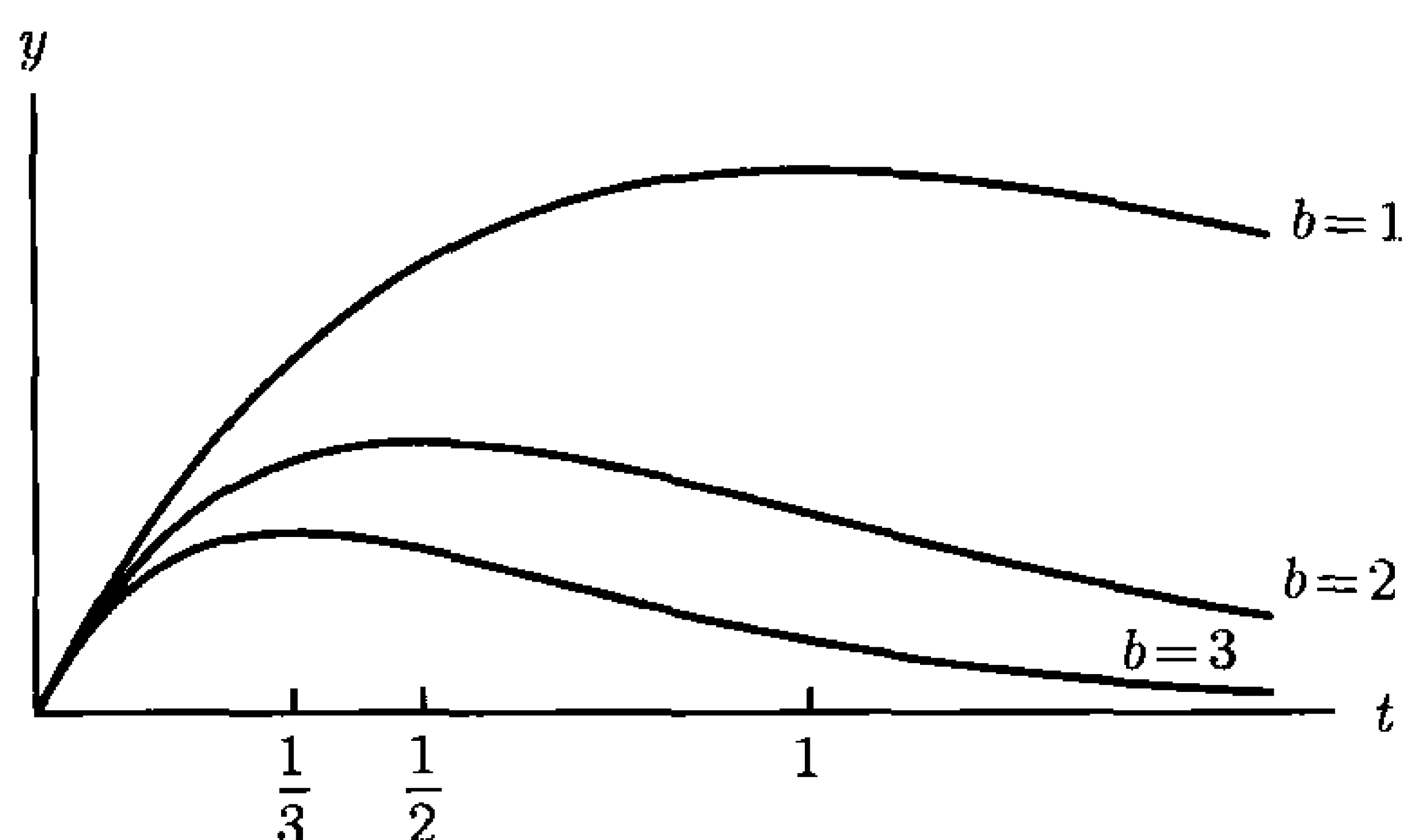


图 4-88　最大值是如何依赖 b 的

于是令 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ 得

$$1 - bt = 0$$

$$t = \frac{1}{b}.$$

将 $t = 1/b$ 代入得到最大值

$$y = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{-b(1/b)} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{b}.$$

因此, 对 $b > 0$, 最大值随着 b 的增加而减小, 反之亦然. □

> **电涌函数** $y = at\mathrm{e}^{-bt}$ 迅速地增加, 然后递减并趋向于零, 其最大值在 $t = 1/b$ 处取得.

4.8.3　药物浓度曲线

人体内药物浓度 C 关于自施药后 t 时刻的图形一般如图 4-89 所示, 这被称作**药物浓度曲线**, 并用形如 $C = at\mathrm{e}^{-bt}$ 的函数模拟. 图 4-89 给出了峰值浓度 (人体内药物浓度的最大值) 和达峰时间.

影响药物吸收的因素

药物相互作用和病人的年龄可能影响药物浓度曲线. 我们从习题 9 和 10 看到, 食物的摄入也能影响药物的吸收率, 而且 (最令人吃惊地是) 药物浓度曲线可能随

着同种药物的不同商业版本有显著地变化.

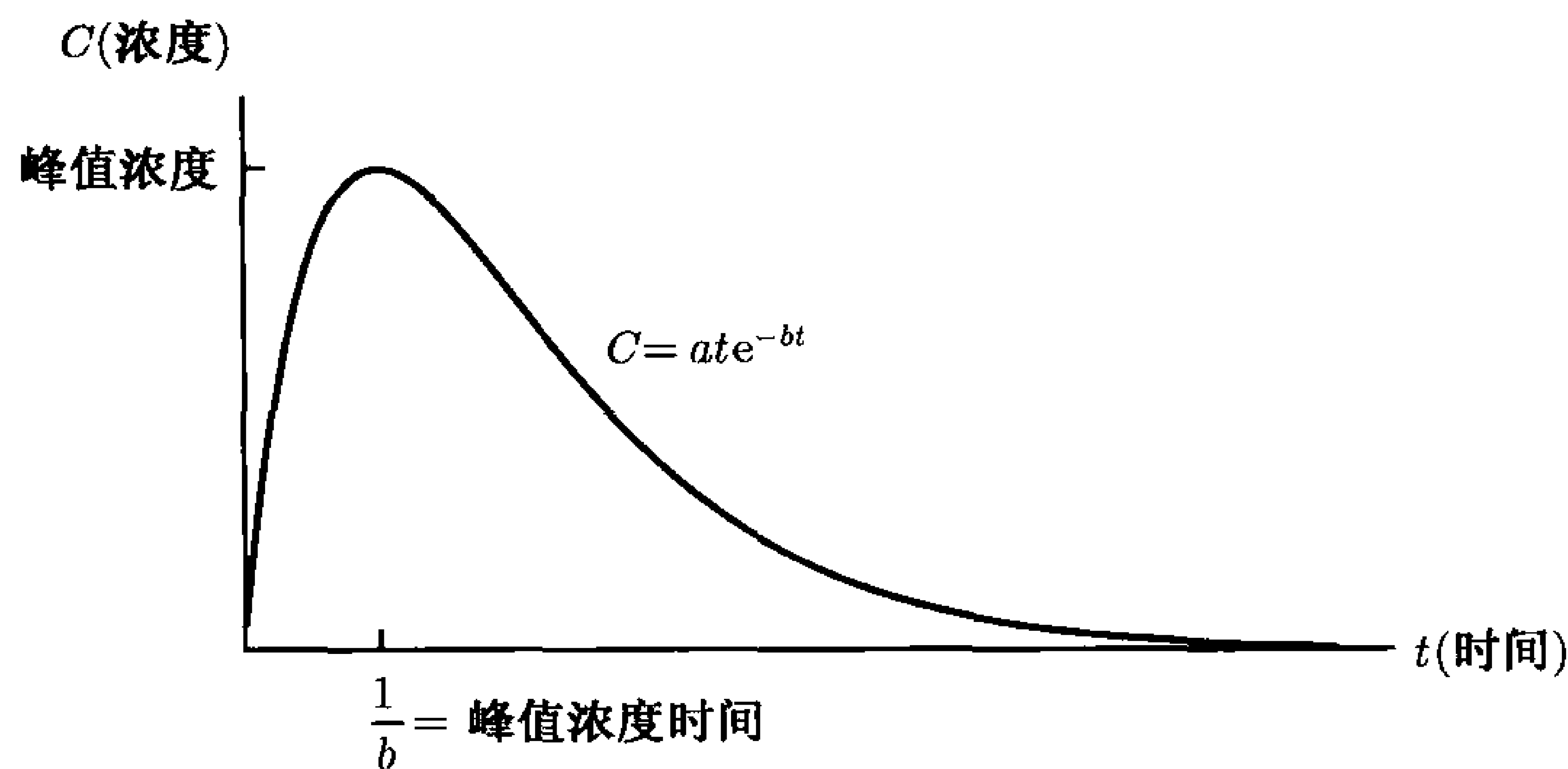


图 4-89 药物浓度作为时间函数的曲线

例 2 图 4-90 给出单独服用扑热息痛 (醋氨酚) 及结合普鲁苯辛服用扑热息痛的药物浓度曲线. 图 4-91 给出已知对药物吸收较慢的病人单独服用扑热息痛及结合胃复安服用扑热息痛的药物浓度曲线. 讨论附加药物对峰值浓度及达峰时间的影响.①

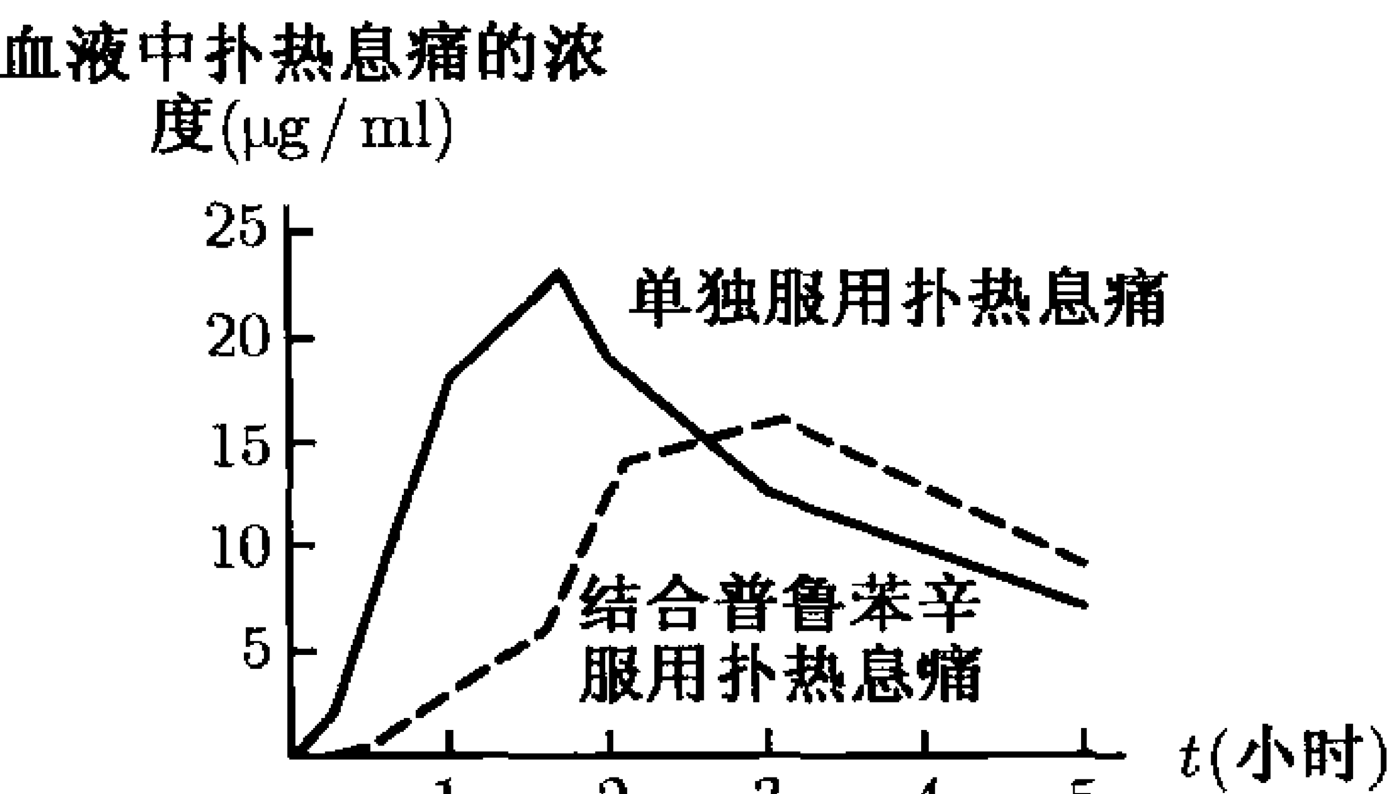


图 4-90 正常病人的扑热息痛的药物浓度曲线

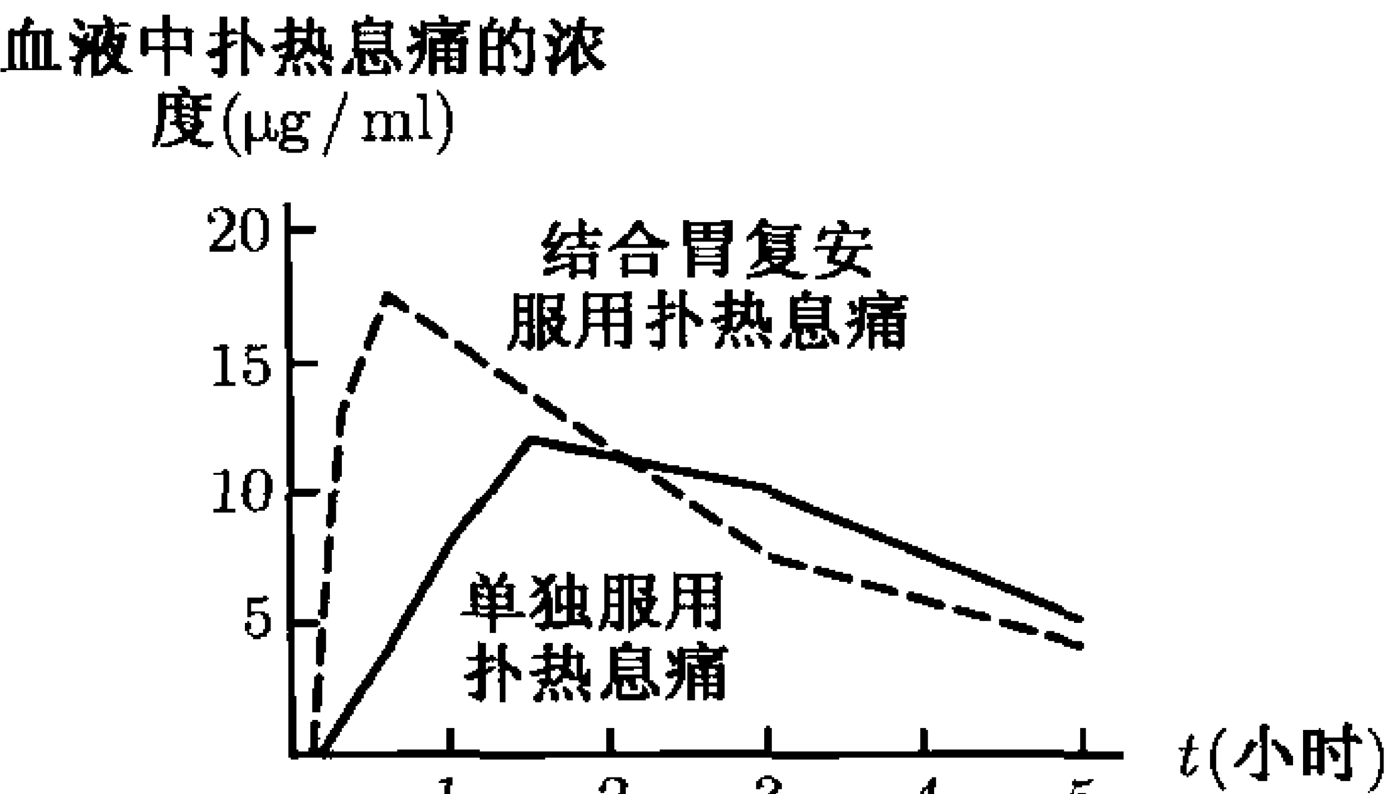


图 4-91 吸收较慢的病人的扑热息痛的药物浓度曲线

解 图 4-90 表明扑热息痛达到峰值浓度大约需要 1.5 小时, 且达到的峰值浓度大约为每毫升血液中 23 μg. 然而, 如果普鲁苯辛和扑热息痛一起用药, 则需要更长的达峰时间 (大约 3 小时或为单独用药时间的 2 倍), 且峰值浓度更低, 大约为 16 μg/ml.

比较图 4-90 和 4-91 中单独服用扑热息痛的曲线表明达峰时间一样 (大约 1.5 小时), 但吸收慢的病人的峰值浓度低. 在图 4-91 中, 当扑热息痛和胃复安一起用药时, 达到峰值浓度更快并且峰值浓度更高. □

---

① Graeme.《药物治疗：临床药理学与治疗法的理论与实践》, (悉尼：Adis Press, 1976).

最小有效浓度

药物的最小有效浓度指的是达到药理学反应所必需的血液中的药物浓度. 达到这个浓度称药物发作; 药物浓度下降到这个水平以下时, 终止发作. 参见图 4-92.

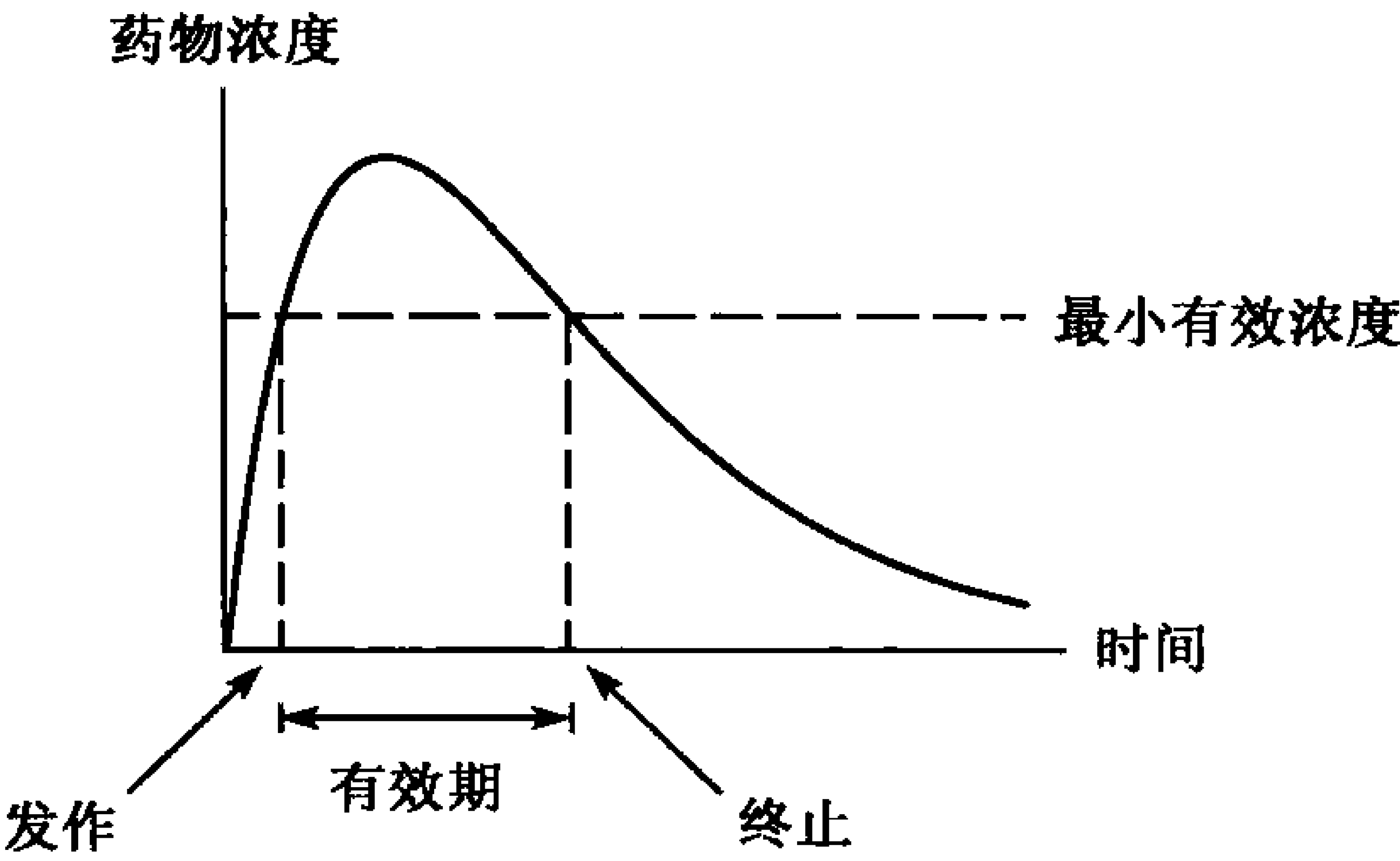


图 4-92 药物何时有效

例 3 美国 1992 年批准甲羟孕酮避孕针作为避孕用具使用. 图 4-93 给出了肌肉注射 150 mg 的药物浓度曲线.[①]最小有效浓度大约是 4 ng/ml. 过多久就要注射该药物?

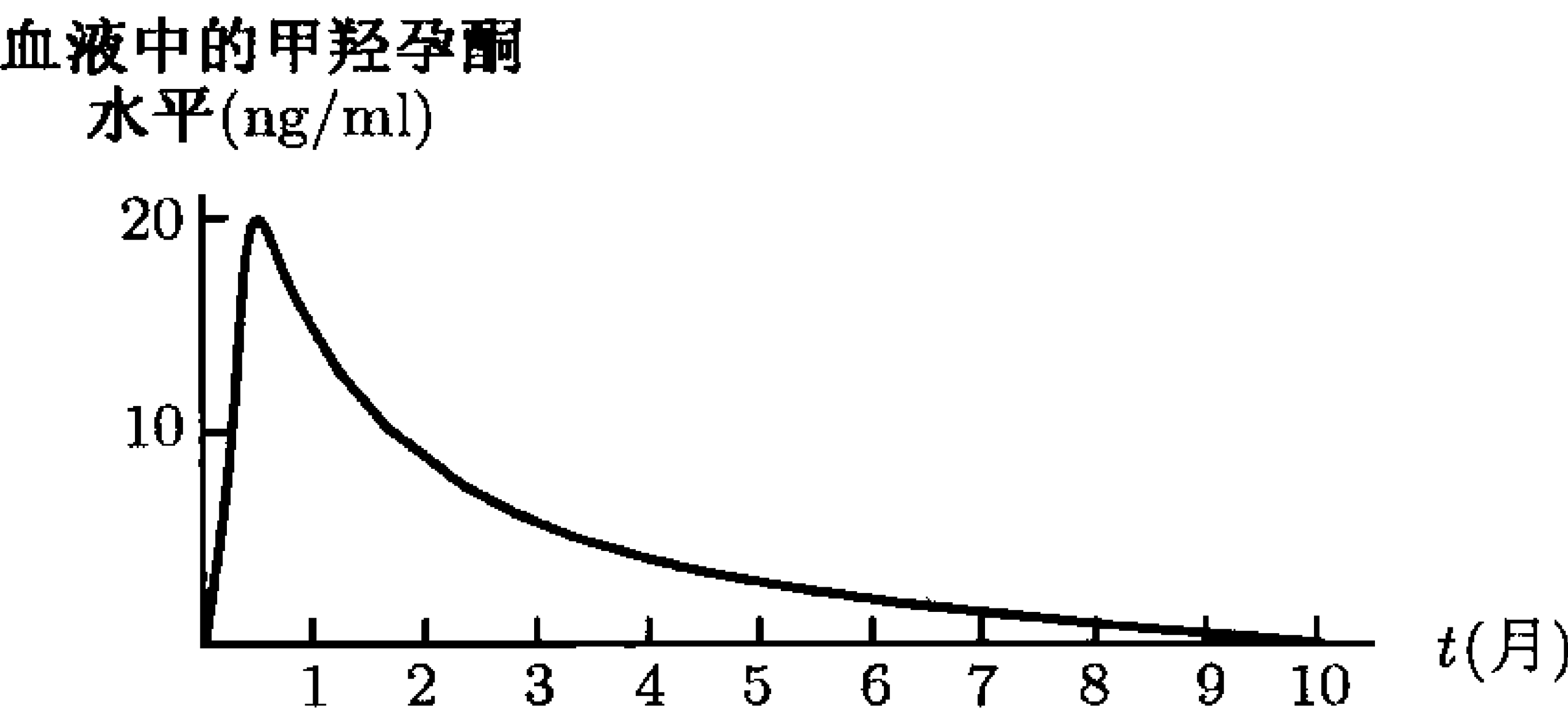


图 4-93 甲羟孕酮的药物浓度曲线

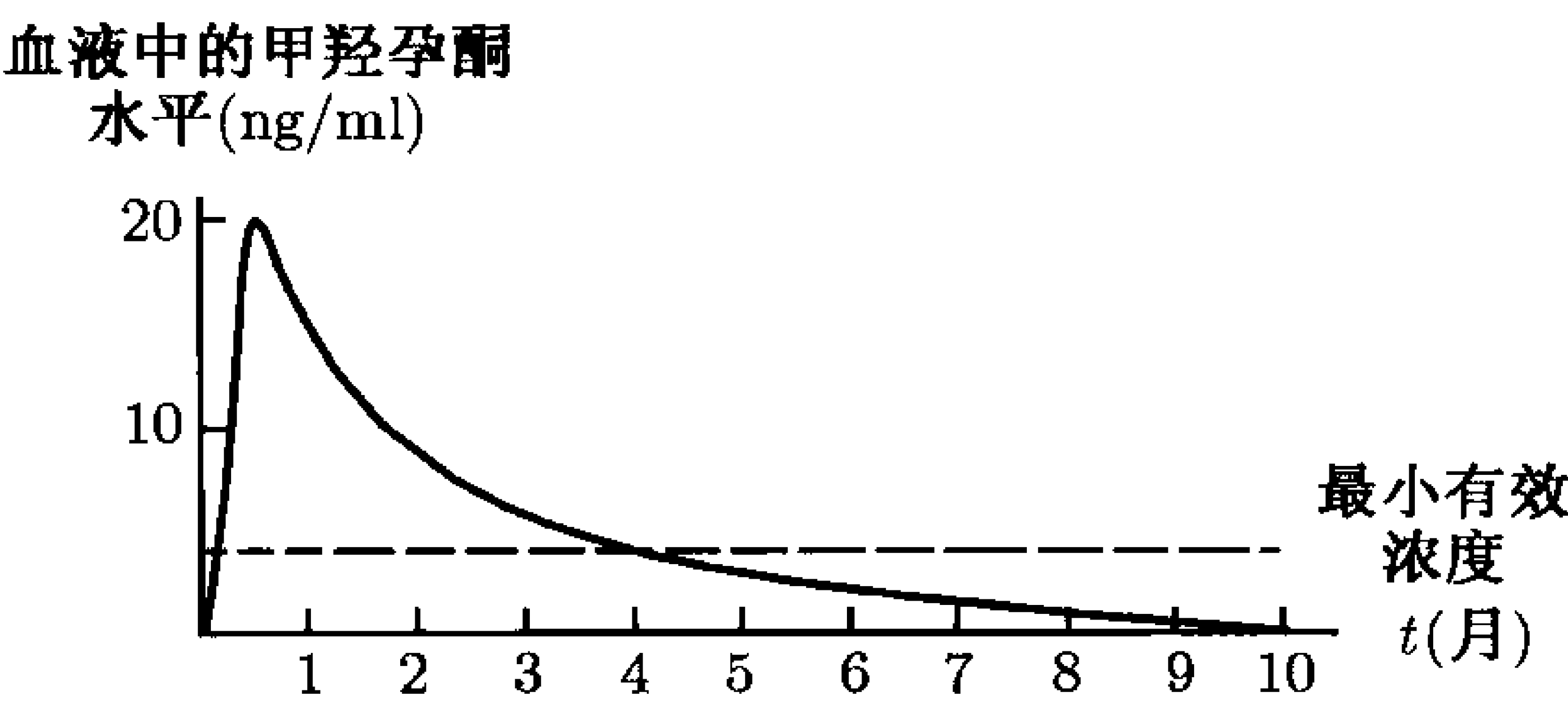


图 4-94 下一剂药何时施用

解 最小有效浓度在药物浓度曲线上用 4 ng/ml 处的虚水平线绘制出来. 参见图

① Robert M. Julien *A Primer of Drug Action* (W. H. Freeman and Go, 1995).

4-94. 我们看到药物几乎马上生效, 4 个月后无效. 每过大约 4 个月要施用该药物.

虽然药剂区间是 4 个月, 但请注意甲羟孕酮在注射后完全从体内消失需要 10 个月. 这段时期的受孕可能性是无法预知的. □

习题

1. 设时间 t 的单位是小时, 浓度 C 的单位是 ng/ml, 某药物的药物浓度曲线为

$$C = 12.4te^{-0.2t}.$$

(a) 画出这条曲线.

(b) 药物过几个小时达到它的峰值浓度? 此时的浓度是多少?

(c) 如果最小有效浓度为 10 ng/ml, 药物在哪段时间内有效?

(d) 药物浓度在 4 ng/ml 以上时可能有并发症. 病人要过多长时间才不会有并发症?

2. 图 4-95 给出了新生儿和成年人施用无水氨比西林后的药物浓度曲线[①]. 讨论新生儿和成年人在该药物的吸收上的不同之处.

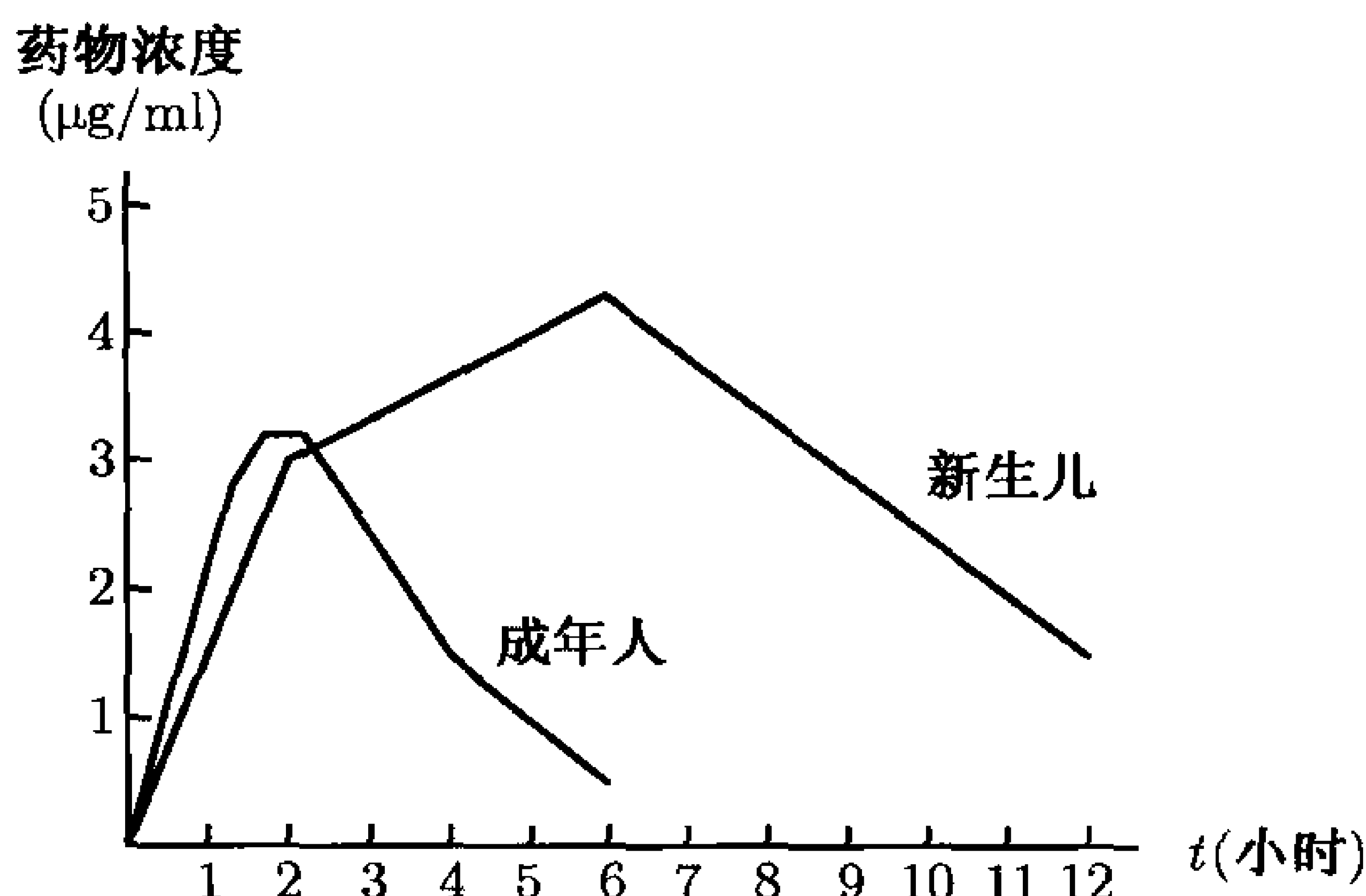


图 4-95

3. 设时间 t 的单位是小时, 某药物的药物浓度曲线为 $C = 17.2te^{-0.4t}$ ng/ml. 最小有效浓度是 10 ng/ml.

(a) 如果第一剂药无效后就马上施用第二剂药, 应该何时施用第二剂药?

(b) 如果你想第二剂药发作与第一剂药无效同时发生, 应该何时施用第二剂药?

4. 不同形式的红霉素的吸收可能因食物而增大, 降低, 延缓或不受到影响. 图 4-96 给出了健康的、吸收快的志愿者的红霉素药物浓度曲线, 他们只接受 500 mg 口服红霉素药丸及大量 (250 ml) 或小量 (20 ml) 水.[②]讨论水对血液中红霉素浓度的影响. 峰值浓度及达到峰值浓度的时间是如何受到影响的? 水量的影响何时消失?

5. 氢可酮是一种镇咳口服药, 通常一次剂量是 10 mg. 血液中该药物的峰值浓度在服用后 1.3 小时达到, 且峰值浓度为 23.6 ng/ml. 画氢可酮的药物浓度曲线.

6. 如果 t (min) 表示施用某药物后的时间, 病人血液中该药物的浓度 $C(t)$ (ng/ml) 为

① Pediatrics, 1973, 51, 578.

② J. W. Bridges 和 L. F. Chasseaud, 《药物代谢的进展》(纽约: John Wiley and Sons, 1980).

$$C(t) = 20te^{-0.03t}.$$

(a) 该药物过多久达到峰值浓度? 峰值浓度是多少?

(b) 15 分钟后, 体内该药物的浓度是多少? 1 小时后呢?

(c) 如果最小有效浓度是 10ng/ml, 下一剂药应该什么时候施用?

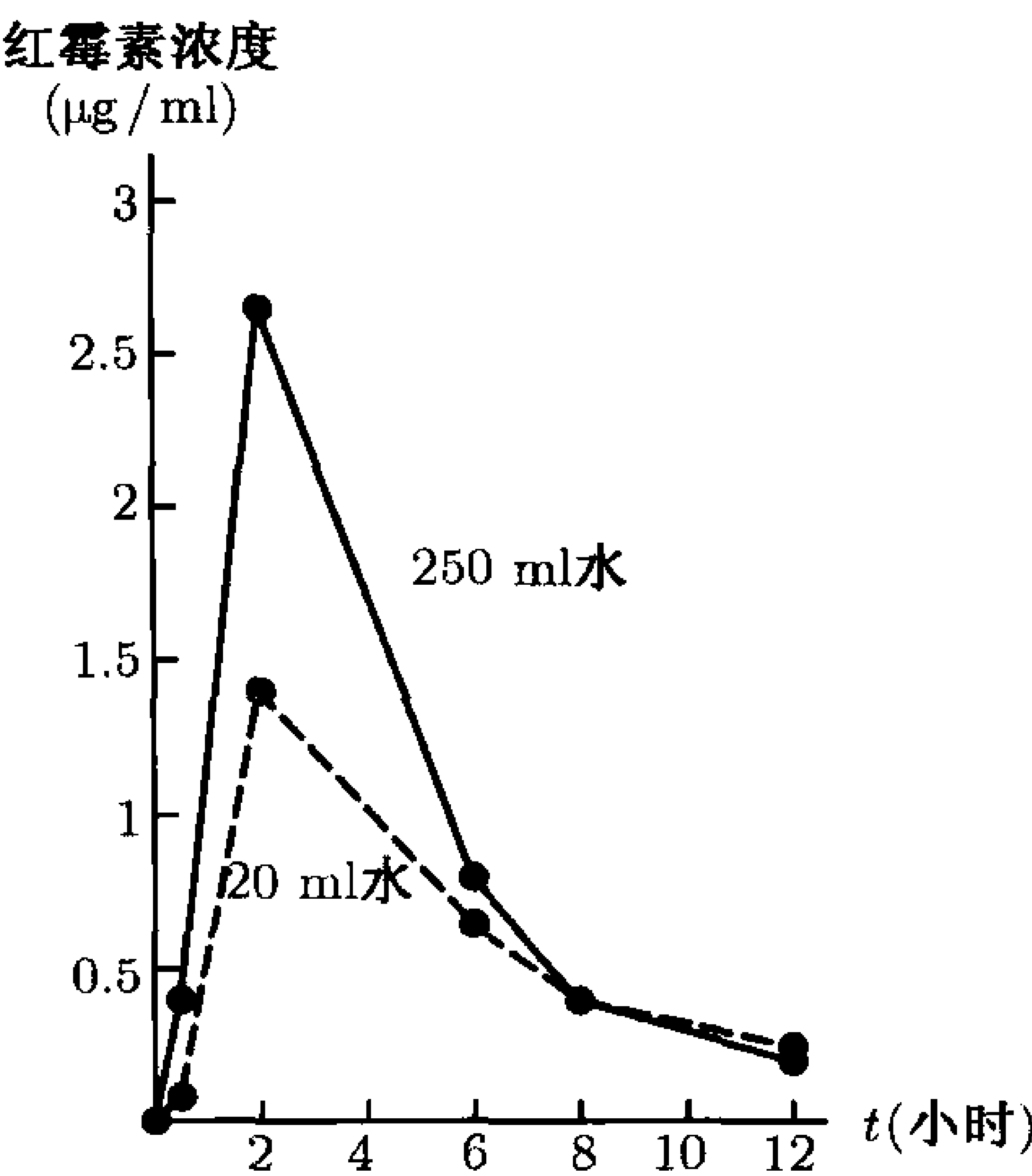


图 4-96

7. 图 4-85 给出了吸烟过程中和吸完烟后血液中尼古丁的浓度. 图 4-97 给出了咀嚼嚼烟或尼古丁胶姆糖过程中或结束后血液中尼古丁的浓度. (咀嚼在前 30 分钟进行, 给出的实验数据代表 10 个病人的平均值.)[①] 比较这三条 (香烟, 嚼烟和尼古丁胶姆糖) 尼古丁浓度曲

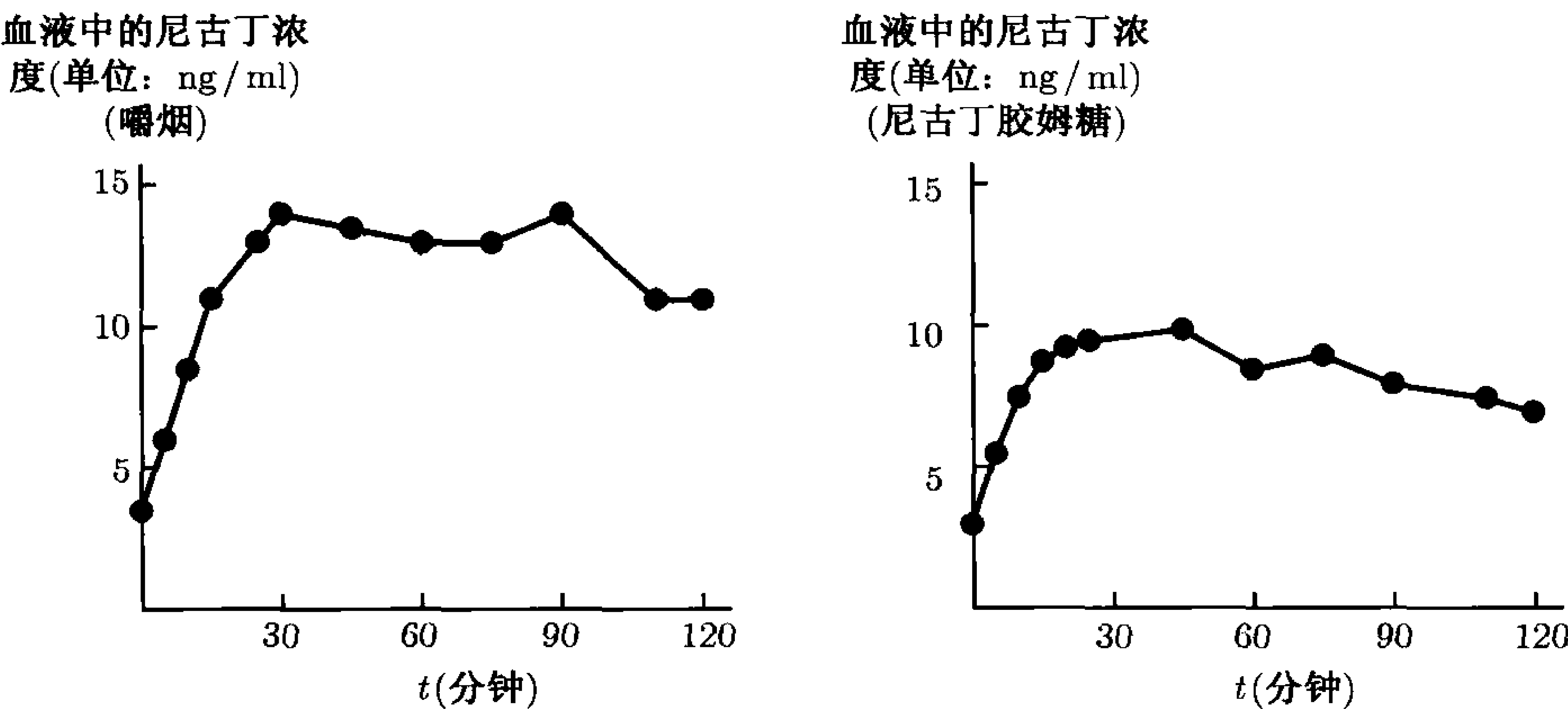


图 4-97

① Benowitz, Porchet, Skeiner, Jacob, "Nicotine Absorption and Cardiovascular Effects with Smokeless Tobacco Use: Comparison with Cigarettes and Nicotine Gum," 《临床药理学与治疗法》44 (1988): 24.

线的峰值浓度, 达峰时间和尼古丁从体内消失的速度.

8. 施药方法对药物浓度曲线有很大的影响. 图 4-98 给出了不同方法施用盘尼西林时的药物浓度曲线. 将用量为每公斤体重 3 mg 的盘尼西林溶解在水中, 分别以静脉注射 (IV), 肌肉注射 (IM), 皮下注射 (SC) 和口服 (PO) 四种方式施用. 溶解在油中的同样重量的盘尼西林施以肌肉注射 (P-IM). 图形上也标出了最低有效浓度曲线 (MEC).[①]

(a) 哪种方式达到峰值浓度最快? 最慢?

(b) 哪种方式的峰值浓度最大? 最小?

(c) 哪种方式消耗最快? 最慢?

(d) 哪种方式的有效期最长? 最短?

(e) 盘尼西林在口服时, 大约在哪个时间段有效?

9. 图 4-99 分别给出健康的志愿者在空腹和食用标准早餐后服用安体舒通后, 血浆中坎利酮

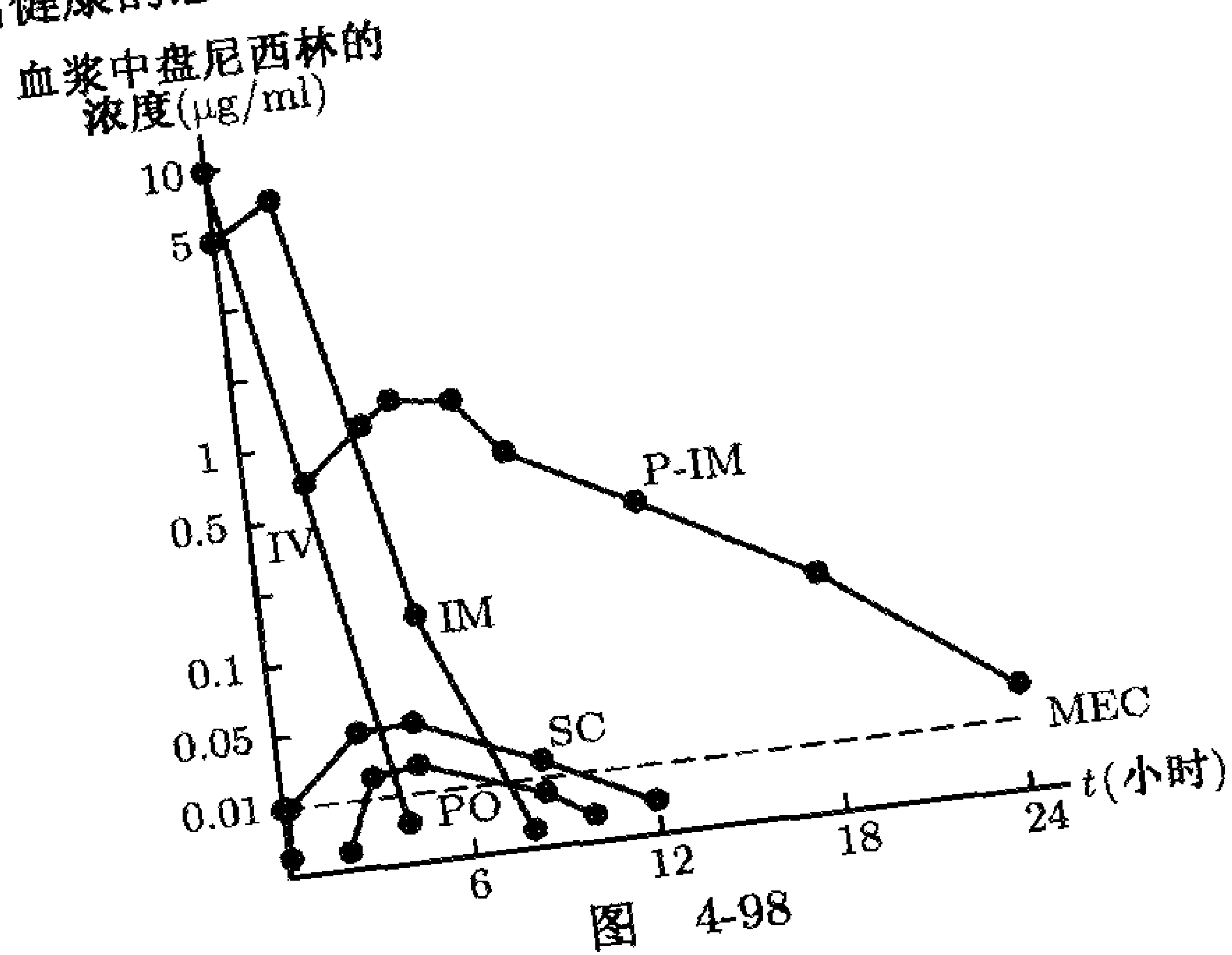


图 4-98

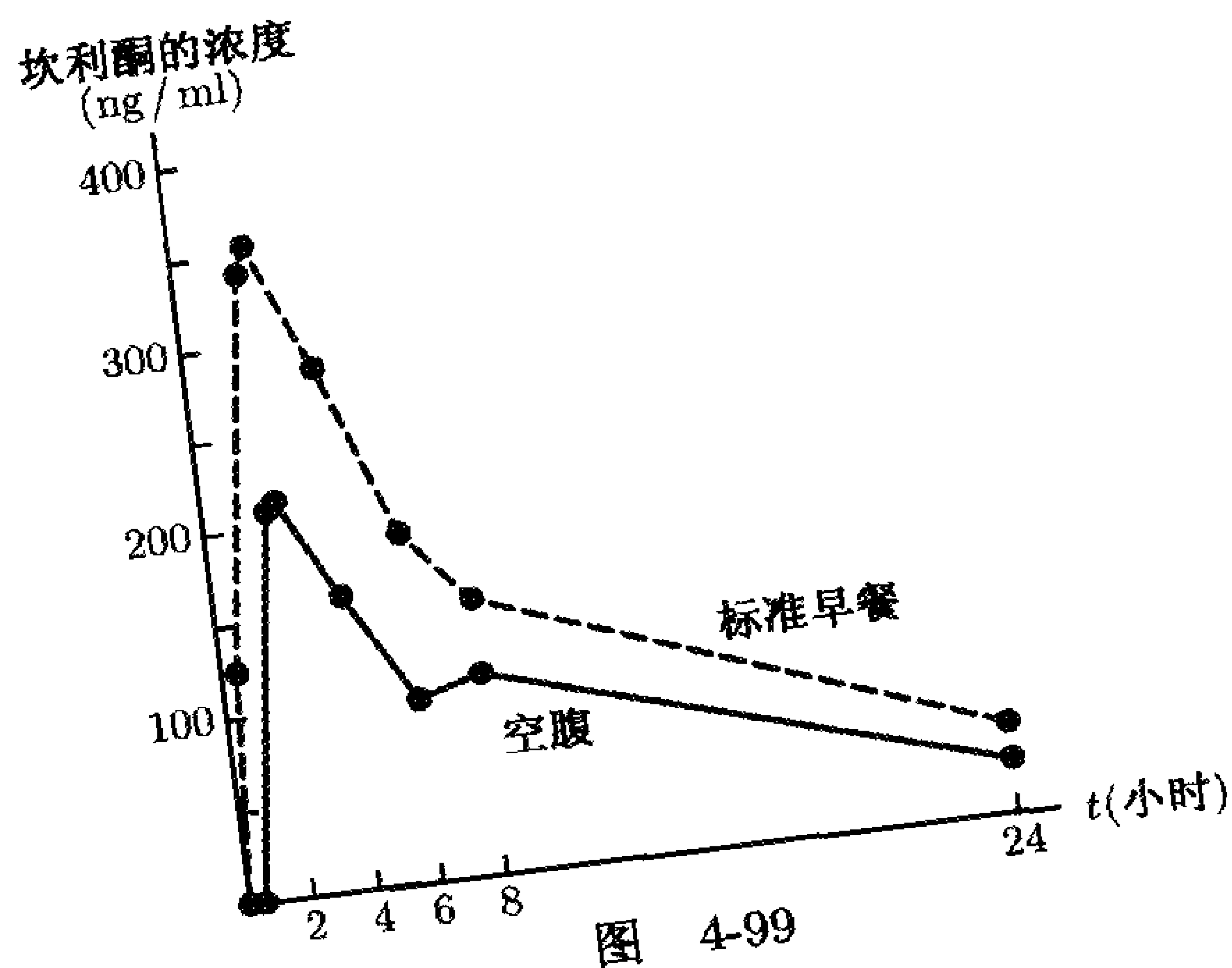


图 4-99

① J. W. Bridges 和 L. F. Chasseaud,《药物代射的进展》(纽约: John Wiley and Sons, 1980).

的水平. (安体舒通是一种利尿药物, 它在人体内部分转化为坎利酮.)[①] 讨论食物对峰值浓度及达峰时间的影响. 食物在前 8 小时还是 8 小时后的效果好?

10. 图 4-100 给出了口服 0.5 mg 四种地高辛 (一种强心剂) 产品的药物浓度曲线. 这四种药丸的效用、溶解时间和溶出度都符合美国当前的专利标准.[②]

(a) 讨论峰值浓度及达峰时间的异同之处.

(b) 写出最小有效浓度和最大安全浓度的可能值, 使产品 C 或产品 D 是优选药物.

(c) 写出最小有效浓度和最大安全浓度的可能值, 使产品 A 是优选药物.

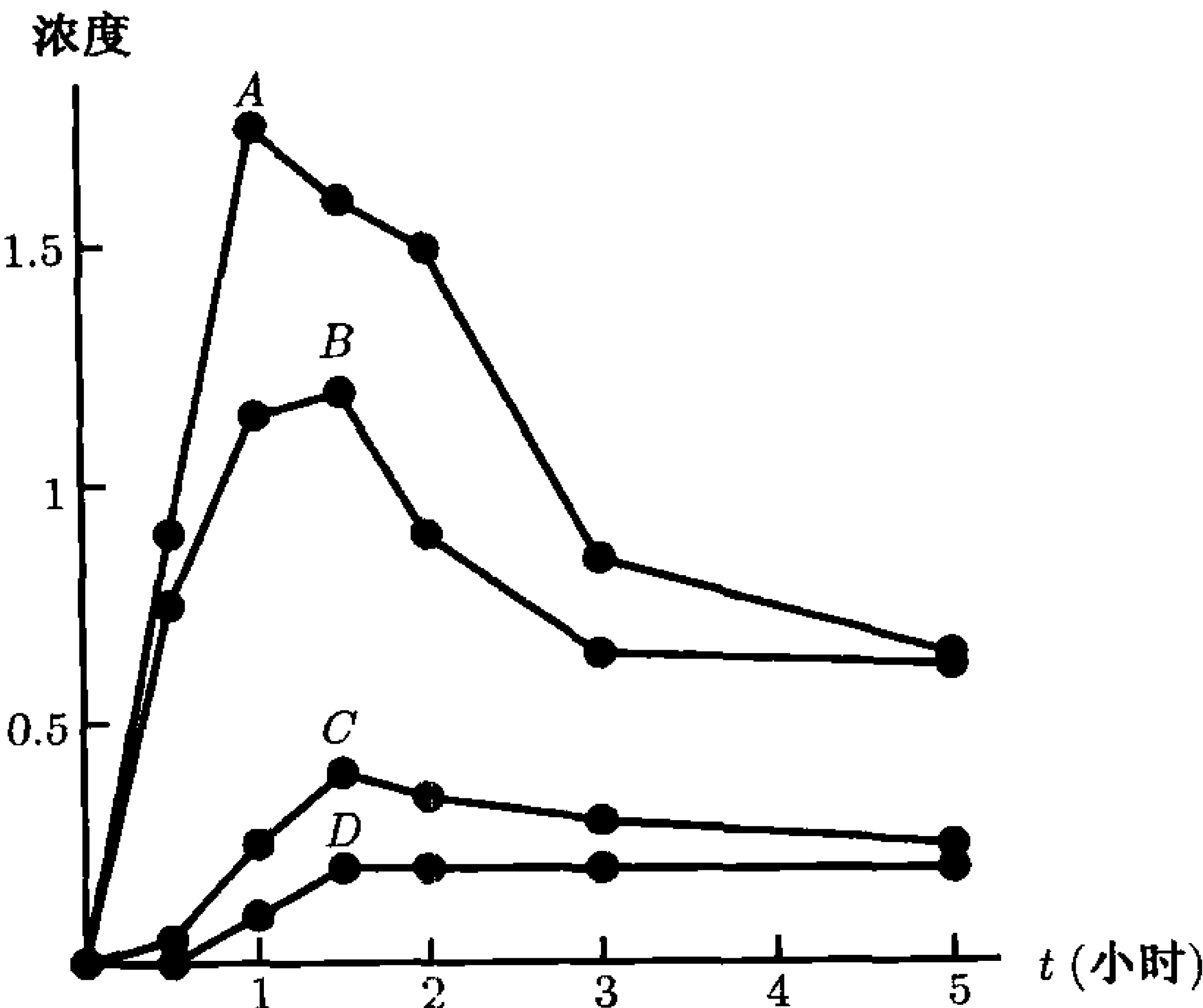


图 4-100

11. A,B,C,D 四种四环素在一定时间内溶解的百分比的图形参见图 4-101. 图 4-102 则给出了同样这四种四环素的药物浓度曲线.[③] 讨论溶出率对峰值浓度和达峰时间的影响.

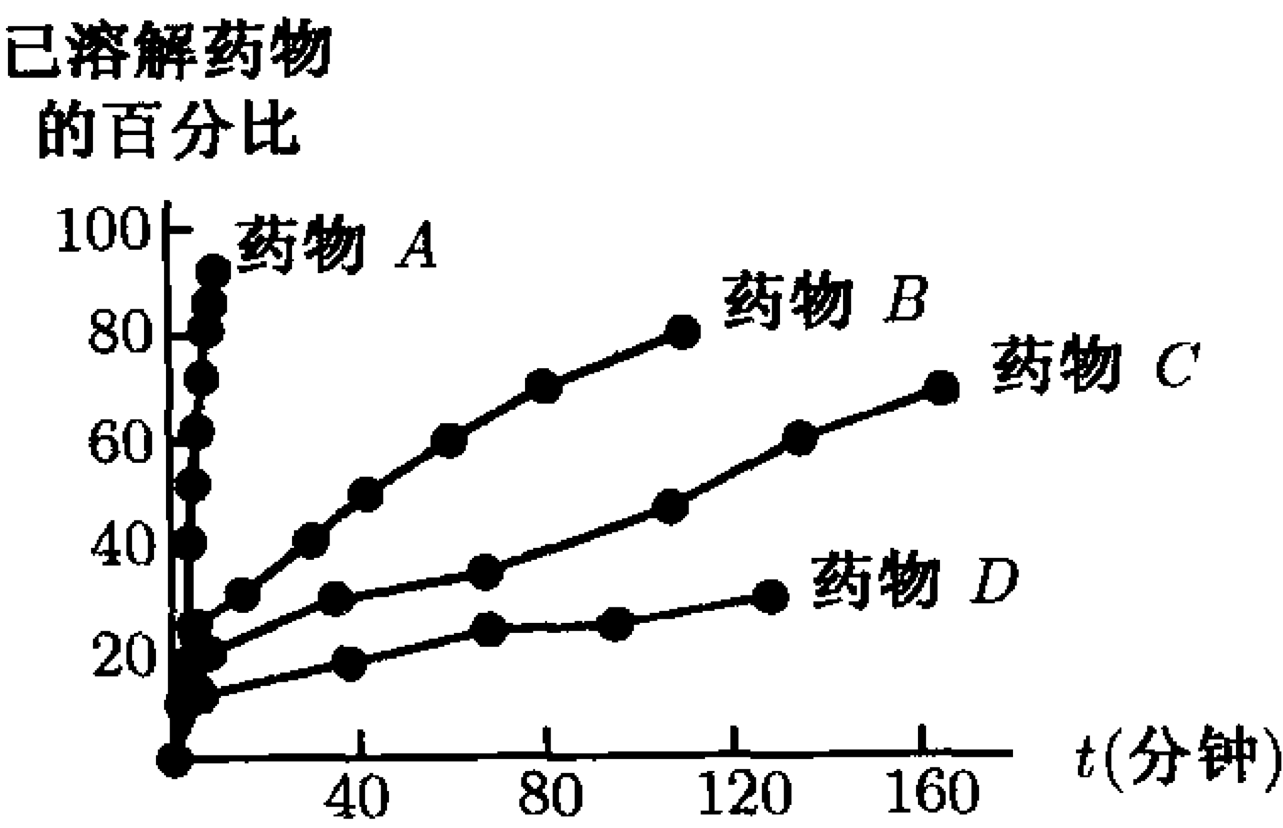


图 4-101

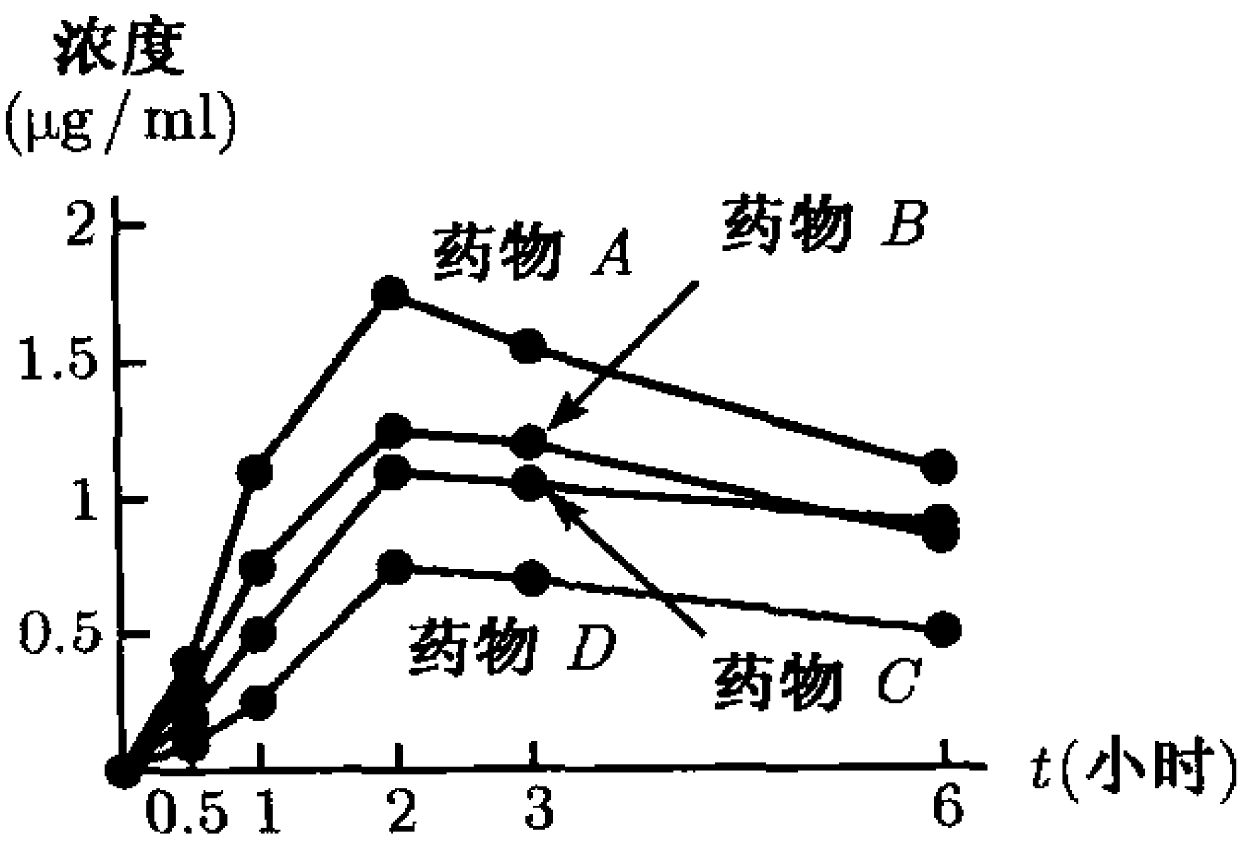


图 4-102

12. 设 $b=1$, 取不同的 a 值, 画 $C=ate^{-bt}$ 的图形, 并说明参数 a 的影响.

---

① Welling & Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular, Central Nervous System , and Antimicrobial Druge,* (The Royal Society of Chemistry, 1985).

② Graeme S. Avery, ed. *Drug Treatment*: 《药物治疗: 临床药理学与治疗法的理论与实践》, (悉尼: Adis Press, 1976).

③ J. W. Bridges and L. F. Chasseaud, 《药物代谢的进展》(纽约: John Wiley and Sons, 1980).

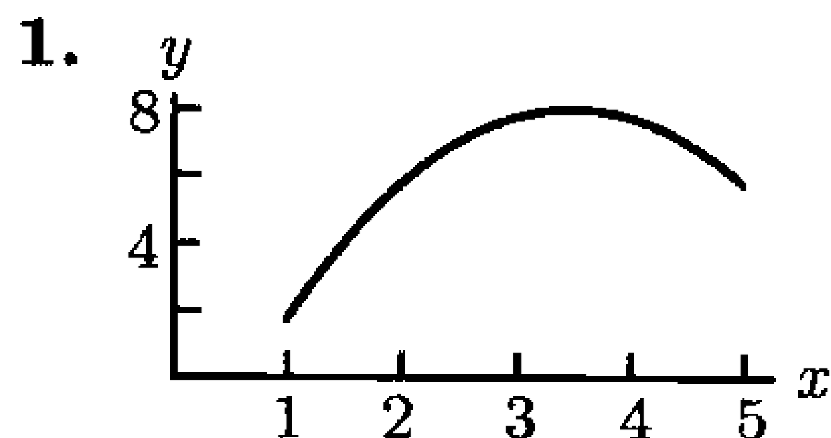
本章概要

- **应用一阶导数**
  临界点, 局部最大值和局部最小值
- **应用二阶导数**
  拐点, 凹性
- **最优化**
- **平均成本**
  平均成本最小化
- **弹性**
- **函数族**
  参数. 电涌函数, 药物浓度曲线. Logistic 函数, 承载容量, 报酬递减点.

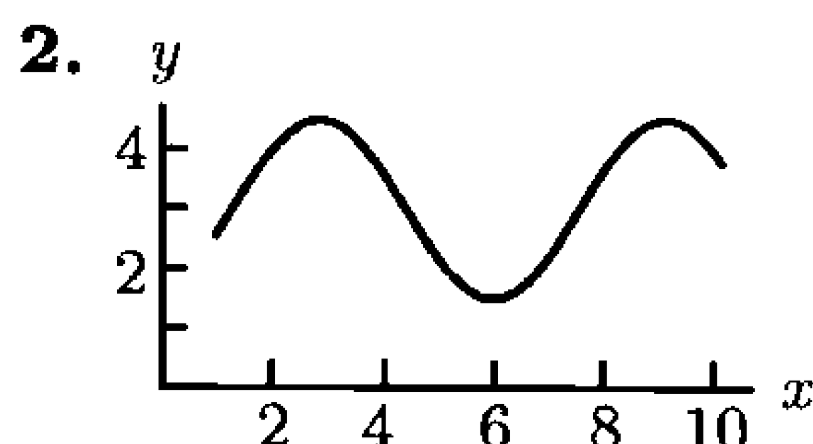
复 习 题

对习题 1~2, 在给定图形上指出所有临界点. 判断哪个对应于局部最大值, 局部最小值, 整体最大值, 整体最小值或四者都不是? (注意, 图形是闭区间上的.)

1.



2.



在习题 3~4, x 的值使

(a) $f(x)$ 是局部最大值或局部最小值. 指出哪些是局部最大值点, 哪些是局部最小值点.

(b) $f(x)$ 是整体最大值或整体最小值.

3. $f(x)=x^{10}-10x,\ 0\leqslant x\leqslant 2$

4. $f(x)=x-\ln x,\ 0.1\leqslant x\leqslant 2$

5. 股票价格在 7 月 1 日有一临界点. 在 7 月 1 日前后, 股票价格是如何变化的?

6. 设 $C=ate^{-bt}$ 表示药物浓度曲线.

(a) 说明保持 b 不动而改变参数 a 对峰值浓度和达峰时间的影响.

(b) 说明保持 a 不动而改变参数 b 对峰值浓度和达峰时间的影响.

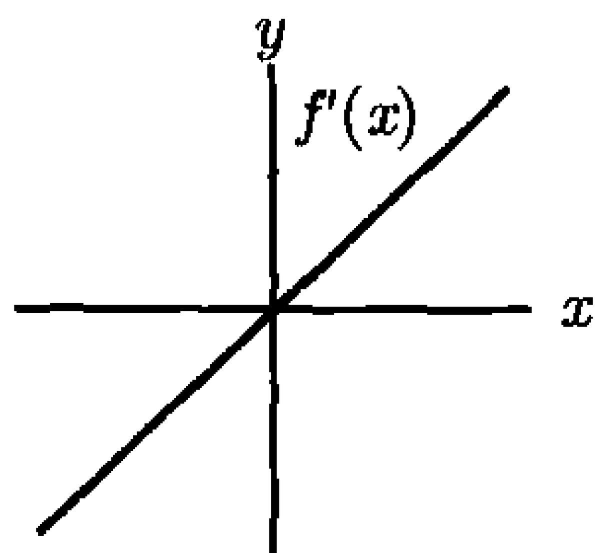
(c) 假设 $a=b$, 则 $C=ate^{-at}$. 讨论改变参数 a 对峰值浓度和达峰时间的影响.

对习题 7~10 给出的 f' 的图形判断:

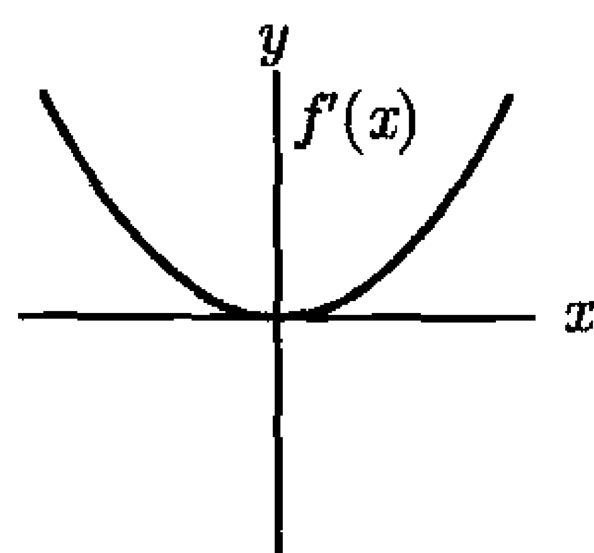
(a) f 在哪个区间是递增的? 哪个是递减的?

(b) f 是否有局部最大值点或局部最小值点? 如果有, 请指出有哪些, 在哪里?

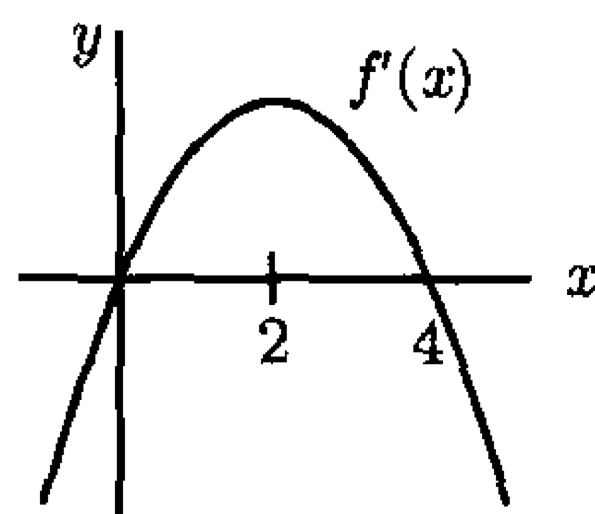
7.



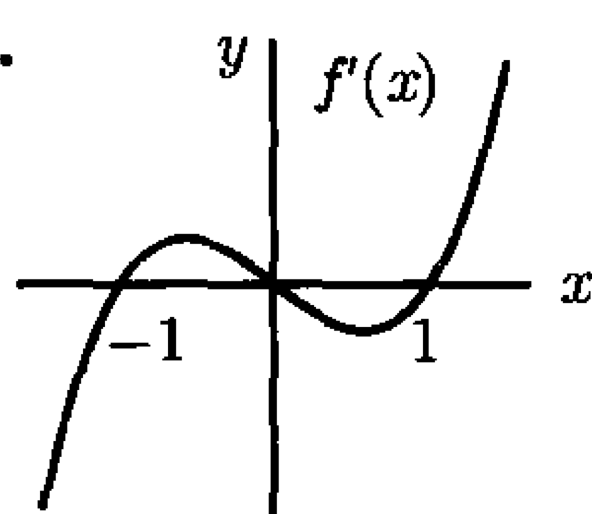
8.



9.



10.



习题 11~14 是关于图 4-103 中的 $f(t)$, 它是人类胎儿的长度关于年龄的函数.

11. (a) $f'(24)$ 的单位是什么?

(b) $f'(24) = 1.6$ 的生物学意义是什么?

12. (a) $f'(20)$ 和 $f'(36)$ 哪个大?

(b) 有关胎儿的生长, 你的答案说明了什么?

13. (a) 拐点何时发生?

(b) 这个点的生物学意义是什么?

14. 估计

(a) $f'(20)$ (b) $f'(36)$ (c) 40 周内长度的平均变化率.

15. 求常数 a 和 b, 使函数 $f(x) = axe^{-bx}$ 满足 $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, 且在 $x = \frac{1}{3}$ 有局部最大值.

16. 假设 f 有连续导数. 根据下表所给 $f'(\theta)$ 的值, 估计满足 $1 < \theta < 2.1$ 且使 $f(\theta)$ 有局部最大值或局部最小值的 θ 值. 确定哪个是局部最大值点, 哪个是局部最小值点.

θ	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f'(\theta)$	2.4	0.3	−2.0	−3.5	−3.3	−1.7
θ	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1
$f'(\theta)$	0.8	2.8	3.6	2.8	0.7	−1.6

17. 方程 $x^5 + x + 7 = 0$ 有几个实根? 你是如何知道的?

[提示: 这个函数有几个临界点?]

18. 对函数 f, 其图形参见图 4-104:

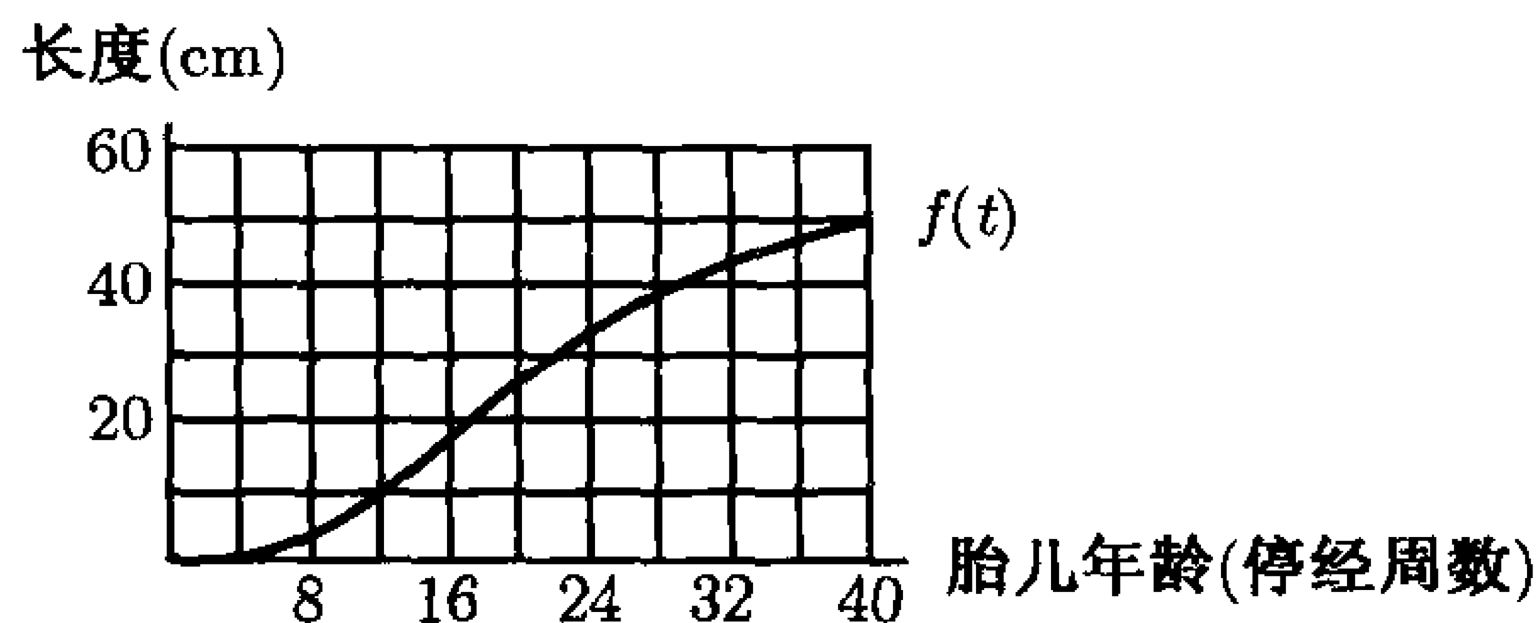


图 4-103

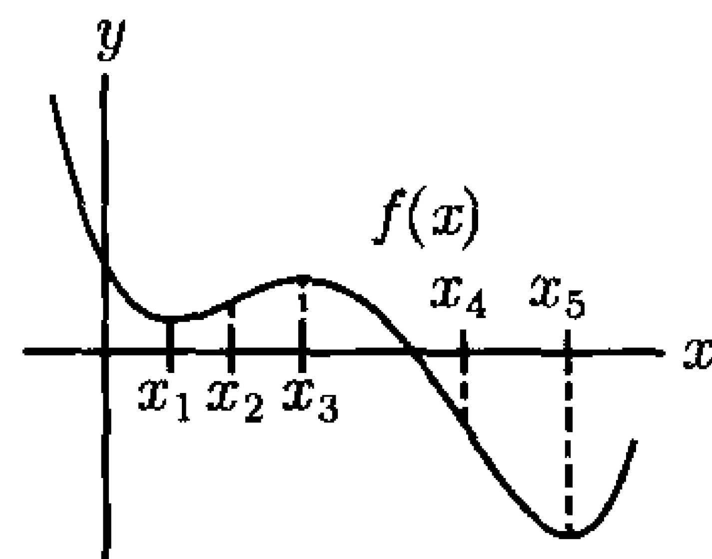


图 4-104

(a) 画 $f'(x)$ 的略图.

(b) $f'(x)$ 在何处改变符号?

(c) $f'(x)$ 在何处有局部最大值或局部最小值.

19. 以你对习题 18 的答案为指南, (用完整的语句) 写篇小短文, 描述一个函数 f 的以下特征之间的关系:

- f 的局部最大值和局部最小值
- f 的图形上改变凹性的点
- f' 符号的变化
- f' 的局部最大值和局部最小值

20. 函数 $y = t(x)$ 是连续正函数, 在点 $(3,3)$ 有整体最大值. 如果 $t'(x)$ 和 $t''(x)$ 对 $x < 3$ 有相同的符号, 对 $x > 3$ 有相反的符号, 画 $t(x)$ 的略图.

21. 图 4-105 中的各图形都属于下列函数族的一个. 在下列各场合中, 确定哪个函数族最可能是:

指数函数,
对数函数,
多项式 (次数是多少? 首项系数是正是负?),
周期函数,
Logistic 函数,
冲击函数.

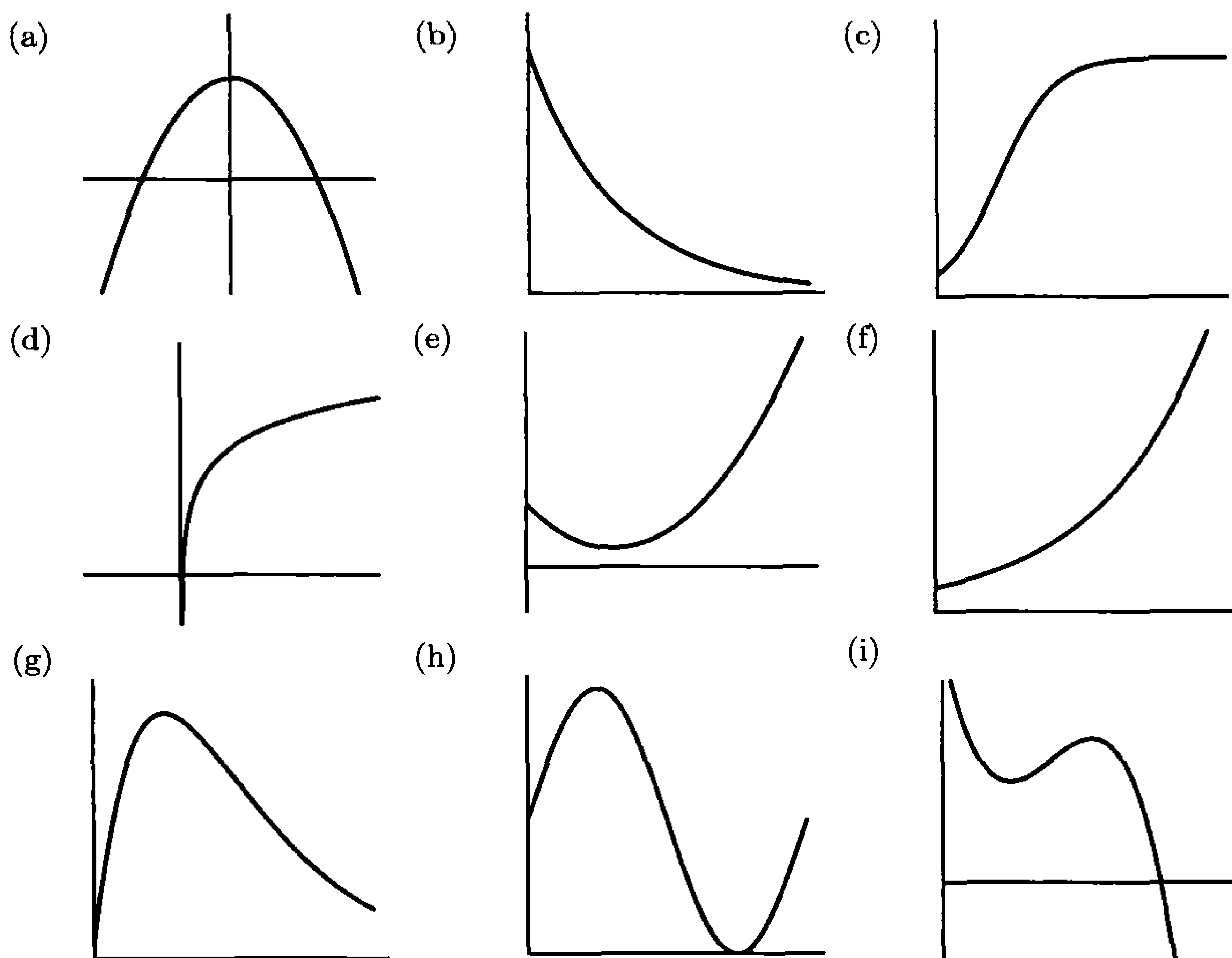


图 4-105

22. 生产 q 单位某产品的总成本是 $C(q)=q^3-60q^2+1400q+1000, 0\leqslant q\leqslant 50$; 该产品以每单位 788 美元出售. 在何生产水平下, 利润最大? 求在该生产水平下的总成本, 总收益和总利润. 在同一坐标轴下画成本函数和收益函数的图形, 并标出使利润最大的生产水平及该生产水平下的成本, 收益和利润. [提示: 成本最高可达 46 000 美元.]

23. 生产 q 件商品的总成本是

$$C(q)=0.01q^3-0.6q^2+13q.$$

(a) 固定成本是多少?

(b) 如果每件商品出售 7 美元, 最大利润是多少? (假设你卖完你生产的所有产品.)

(c) 假设生产了 34 件商品. 价格是 7 美元时, 它们全部卖完, 但价格每上涨 1 美元, 就少卖 2 件. 是否应该提价, 如果是, 应该提高多少?

24. 某产品的需求方程是 $p=b_1-a_1q$, 成本函数是 $C(q)=b_2+a_2q$, 其中 p 是产品价格, q 是售出量. 用正常数 b_1,a_1,b_2,a_2 表示使利润最大的 q 的值.

25. 某制造商生产某产品的成本参见图 4-106. 制造商能以价格 p 售出每件产品 (不管销售量是多少), 因此出售产量 q 的总收益是 $R(q)=pq$.

(a) 差 $\pi(q)=R(q)-C(q)$ 是总利润. 使利润最大的产量 q_0 是多少? 在图形中标出你的答案.

(b) p 与 $C'(q_0)$ 有何关系? 分别用图形和分析的方法解释你的结果. 它在经济学上有什么意义? (注意到 p 是直线 $R(q)=pq$ 的斜率, 而且 $\pi(q)$ 在 $q=q_0$ 有最大值, 因此 $\pi'(q_0)=0$.)

(c) 在同一坐标轴下画 $C'(q)$ 和 p(一条水平直线) 的图形. 在 q 轴上标出 q_0.

26. 假设生产 q 单位产品的总成本 $C(q)=0.04q^3-3q^2+75q+96$.

(a) 把平均成本表示成 q 的函数.

(b) 用作图计算器或计算机作平均成本关于 q 的图形.

(c) q 为何值时, 平均成本递增? 递减?

(d) q 为何值时, 平均成本最小? 此时, 最小平均成本是多少?

27. 画一成本函数的图形, 使其生产 15 000 单位产品达到每单位 25 美元的最低平均成本.

28. 图 4-107 给出某量 q 的成本 $C(q)$ 和收益 $R(q)$. 在图形中标出以下点:

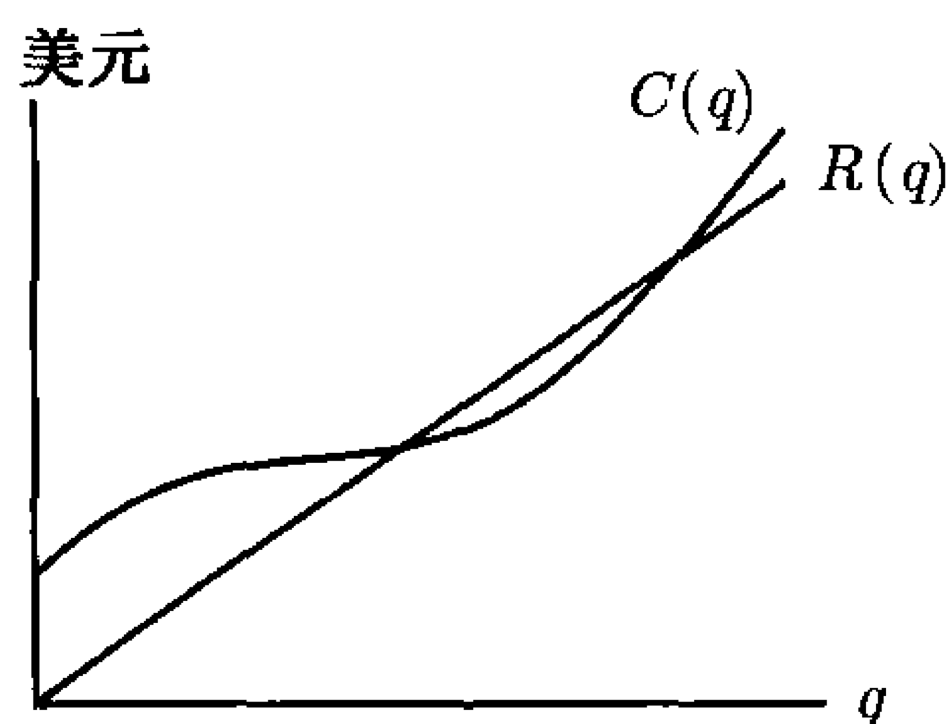


图 4-106

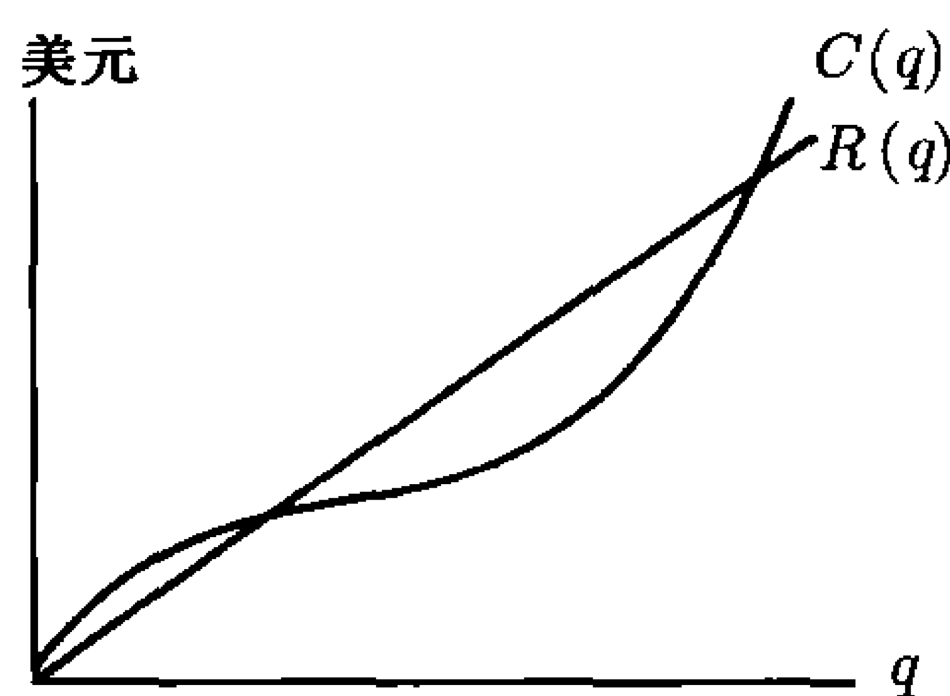


图 4-107

(a) 代表固定成本的点 F.

(b) 代表产量的收支均衡水平的点 B.

(c) 代表使边际成本达到最小值的生产水平的点 M.

(d) 代表使平均成本 $a(q) = C(q)/q$ 达到最小值的生产水平的点 A.

(e) 代表使利润达到最大的生产水平的点 P.

在习题 29~34 中, 成本 $C(q)$ 是生产产量 q 的正的下凹增函数. 两个数中的哪个较大?

29. $C'(2)$ 和 $C'(3)$

30. $C'(5)$ 和 $\dfrac{C(5)-C(3)}{5-3}$

31. $\dfrac{C(100)-C(50)}{50}$ 和 $\dfrac{C(75)-C(50)}{25}$

32. $\dfrac{C(100)-C(50)}{50}$ 和 $\dfrac{C(75)-C(25)}{50}$

33. $C'(3)$ 和 $C(3)/3$

34. $C(10)/10$ 和 $C(25)/25$

35. 某产品的需求量是 $q = 2000 - 5p$, 其中 q 是以 p 美元的价格售出的产品单位数. 求价格为 20 美元时的弹性, 并用需求量说明你的答案.

36. 用分析的方法证明: 如果需求弹性满足 $E > 1$, 那么收益关于价格的导数满足 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}p < 0$.

37. 用分析的方法证明: 如果需求弹性满足 $E < 1$, 那么收益关于价格的导数满足 $\mathrm{d}R/\mathrm{d}p > 0$.

38. 下表给出了拥有有线电视的家庭的百分数[①].

年数	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
P	16.6	17.9	19.4	22.6	28.3	35.0	40.5
年数	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
P	43.7	46.2	48.1	50.5	53.8	57.1	59.0
年数	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
P	60.6	61.5	62.5	63.4	65.7	66.7	67.3
年数	1998	1999	2000	2001	2002	2003	
P	67.4	68.0	67.8	69.2	68.9	68.0	

(a) 说明该数据适合用 Logistic 模型的原因.

(b) 估计报酬递减点. 由该点预测的极限值 L 是多少? 考虑 2002 和 2003 年的百分数, 这个极限值是否准确?

(c) 设 t 是自 1977 年来的年数, 结果表明该数据的最优 Logistic 函数为

$$P = \frac{68.8}{1 + 3.486\mathrm{e}^{-0.237t}},$$

该函数预测的极限值是多少?

(d) 关于家庭的百分数, 该极限值告诉你些什么? 你认为 (c) 部分的答案是否是一个准确的预测? 你认为拥有有线电视的家庭百分数最终会是多少?

39. 考虑一个满足 Logistic 方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$$

的种群 P.

(a) 用链式法则求 $\dfrac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}t^2}$.

① 《2005 年世界年鉴》, 第 310 页 (New York).

(b) 证明报酬递减点, 即使 $\frac{d^2P}{dt^2}=0$ 的点在 $P=\frac{L}{2}$ 出现.

40. 图 4-108 分别给出了单独口服 25mg 贝美噻嗪及同时口服 25mg 贝美噻嗪和 50mg 三氨蝶啶后血液中贝美噻嗪 (某利尿药物) 的浓度.①若最小有效浓度是 40ng/ml, 比较两者的峰值浓度, 达峰时间, 药物生效时间及药效时长. 在什么环境下同时施用贝美噻嗪和三氨蝶啶比较好?

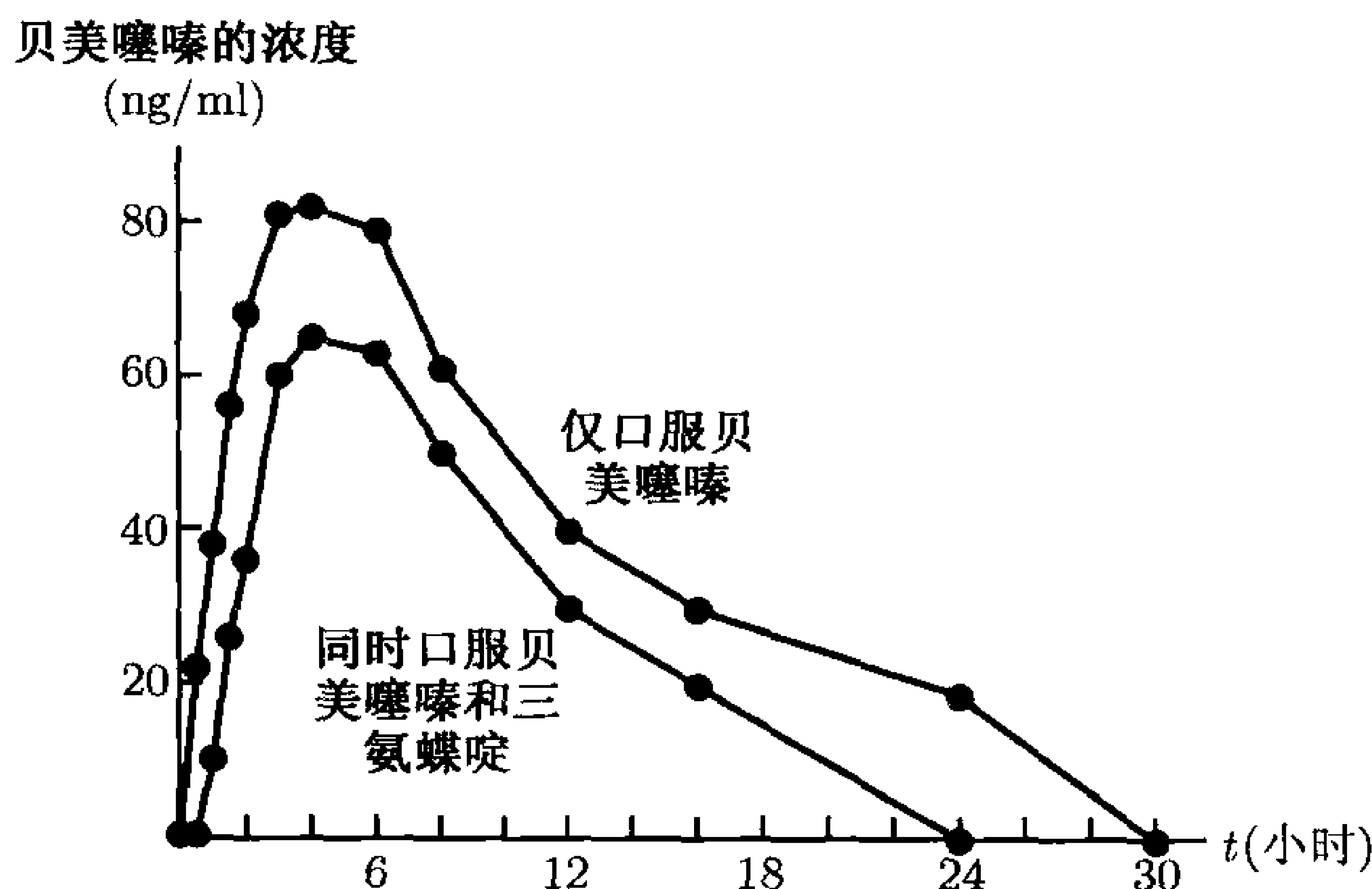


图 4-108

准确求出习题 41~43 中函数的整体最大值和整体最小值.

41. $h(z)=\frac{1}{z}+4z^2,\ z>0$

42. $g(t)=\frac{1}{t^3+1},\ t\geqslant 0$

43. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2+2}$

44. 对函数 $f(x)=\sin(x^2), 0\leqslant x\leqslant 3$, 求截距, 临界点和拐点的坐标 (精确到两个小数点).

45. (a) 画 $a=0.5$ 和 $a=3$ 时 $f(x)=x+a\sin x$ 的图形.

(b) a 取何值时, $f(x)$ 对所有 x 是递增的.

46. (a) 画 $a=1$ 和 $a=20$ 时 $f(x)=x^2+a\sin x$ 的图形.

(b) a 取何值时, $f(x)$ 对所有 x 是上凹的.

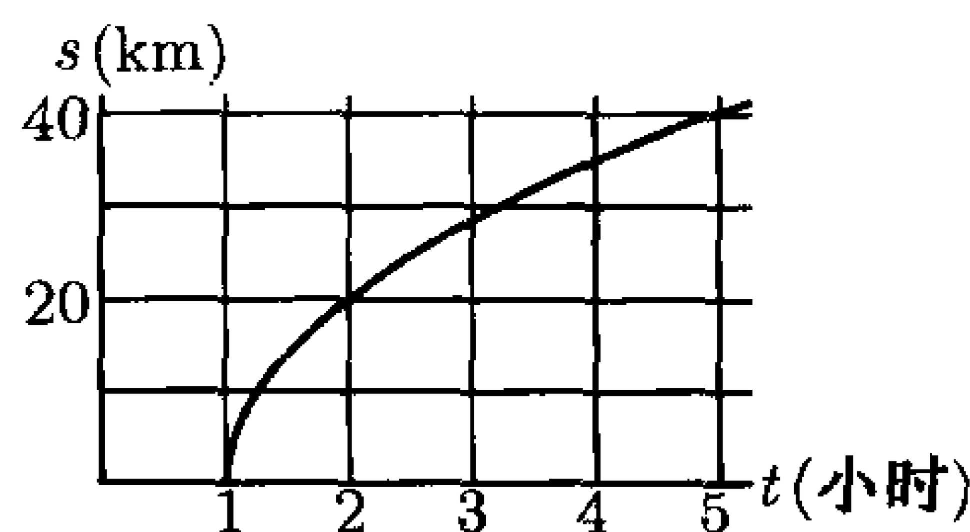


图 4-109

47. 一骑脚踏车的人从下午 1 点出发骑过的路程 s 参见图 4-109. 时间 t 表示正午 12 点后的小时数.

(a) 说明量 s/t 可以用连接原点和图形上点 (t,s) 的直线的斜率表示的理由.

(b) 估计量 s/t 达到最大值的时间.

① Welling & Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular, Central Nervous System, and Antimicrobial Drugs* (The Royal Society of Chemistry, 1985).

(c) 在你 (b) 部分求得的时刻, s/t 和骑脚踏车的人的瞬时速度有何关系?

48. 鸟 (比如八哥) 给幼崽喂食虫子. 为收集虫子, 鸟飞到虫源, 用嘴叼几只虫飞回巢穴. 图 4-110 中的**承载曲线**显示了八哥收集到的虫子数量 (承载量) 与搜寻虫子所花时间的关系.[①] 曲线是下凹的, 这是因为当它的嘴空着时能更有效地叼虫子; 当嘴里有些虫子时, 效率当然会较低. 飞行时间 (从巢穴到虫源再返回) 在图 4-110 中由距离 PO 表示. 鸟要使叼虫回巢穴的比率最大, 其中

$$\text{叼回的虫子比率}=\frac{\text{承载量}}{\text{飞行时间}+\text{搜寻时间}}.$$

(a) 在图 4-110 中画一条斜率是这个比率的直线.

(b) 利用图形估计使该比率最大的承载量.

(c) 如果飞行时间变长, 最优承载量是变大还是变小? 为什么?

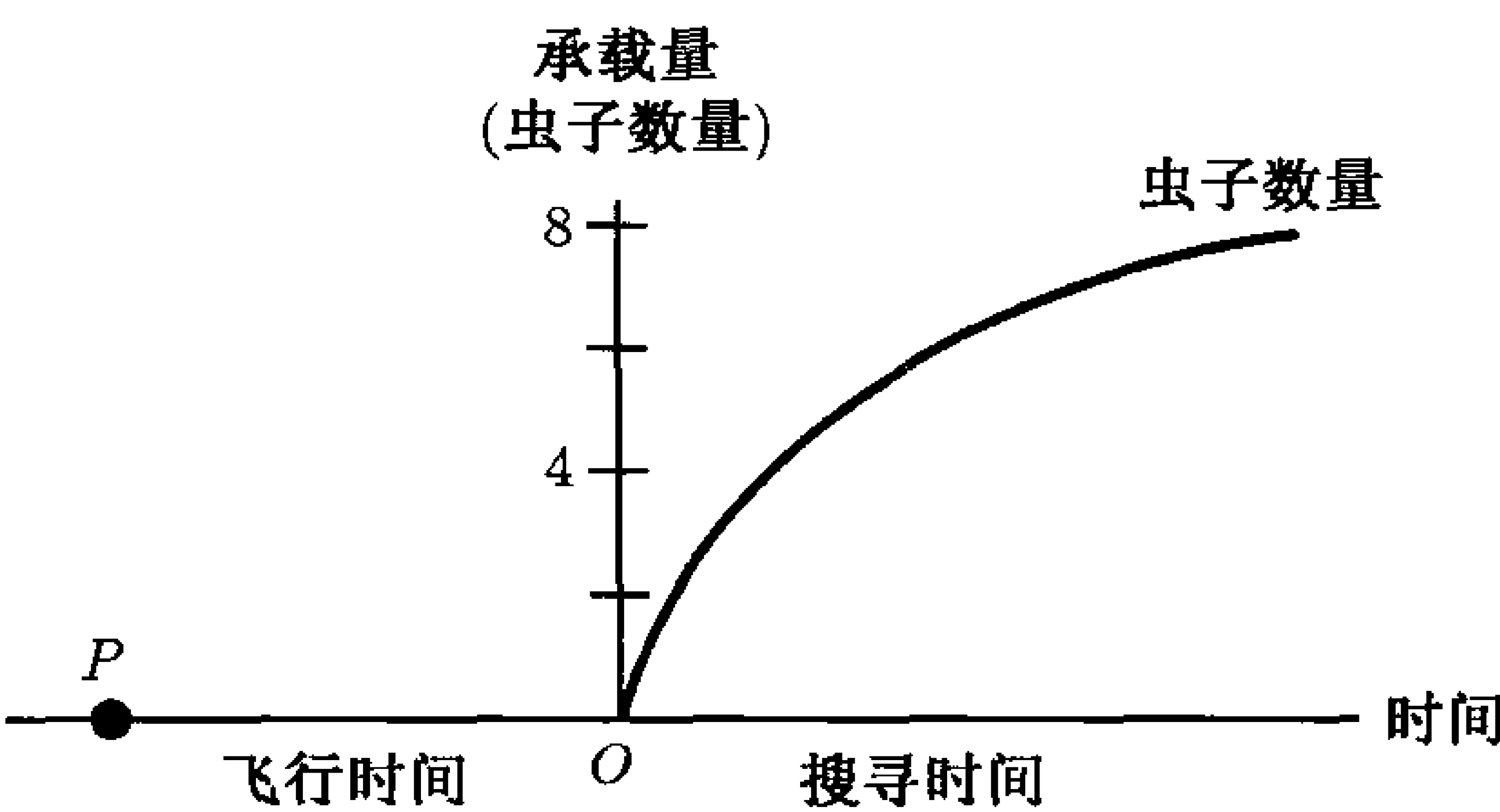


图 4-110

49. 下表是亚利桑那大学停车场每 30 分钟的汽车总数量.[②]

t 时刻汽车总数量

t	5:00	5:30	6:00	6:30	7:00	7:30	8:00	8:30	9:00
C	4	5	8	18	50	110	170	200	200

(a) 画亚利桑那大学停车场的汽车总数量关于时间的函数的图形. 估计停车场的容量及何时车位停满.

(b) 建一个停车率关于时间函数的表格, 然后绘制它的图形.

(c) 由 (b) 部分的图形, 估计何时是亚利桑那大学的交通高峰期.

(d) 说明 (a) 和 (b) 部分的图形中表示高峰期的点之间的关系.

50. 一条直线经过原点及曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-3x}, x\geqslant 0$ 上一点. 求该条直线的最大斜率. 它在 x 取何值时发生?

51. 一个矩形的一条边在 x 轴上, 还有一条边在 y 轴上, 有一顶点为原点, 另有一顶点在曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}, x\geqslant 0$ 上. 求

(a) 最大面积　　(b) 最小周长

① Alex Kacelnick,《行为生态学引论》(牛津: Blackwell, 1987).

② Nancy Roberts 等.《计算机仿真引论》, 第 93 页 (Reading: Addison-Wesley 1983).

52. 蜜蜂蜂巢的蜂房的形状如图 4-111 所示. 蜂房的表面积为

$$A = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(\frac{-\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\right)$$

其中 h, s, θ 如图所示.

(a) 固定 h 和 s, 角 θ 为何值时, 表面积最小?

(b) 对蜜蜂蜂房的测量表明, 实际上的角度大约为 $\theta = 55^\circ$. 请说明.

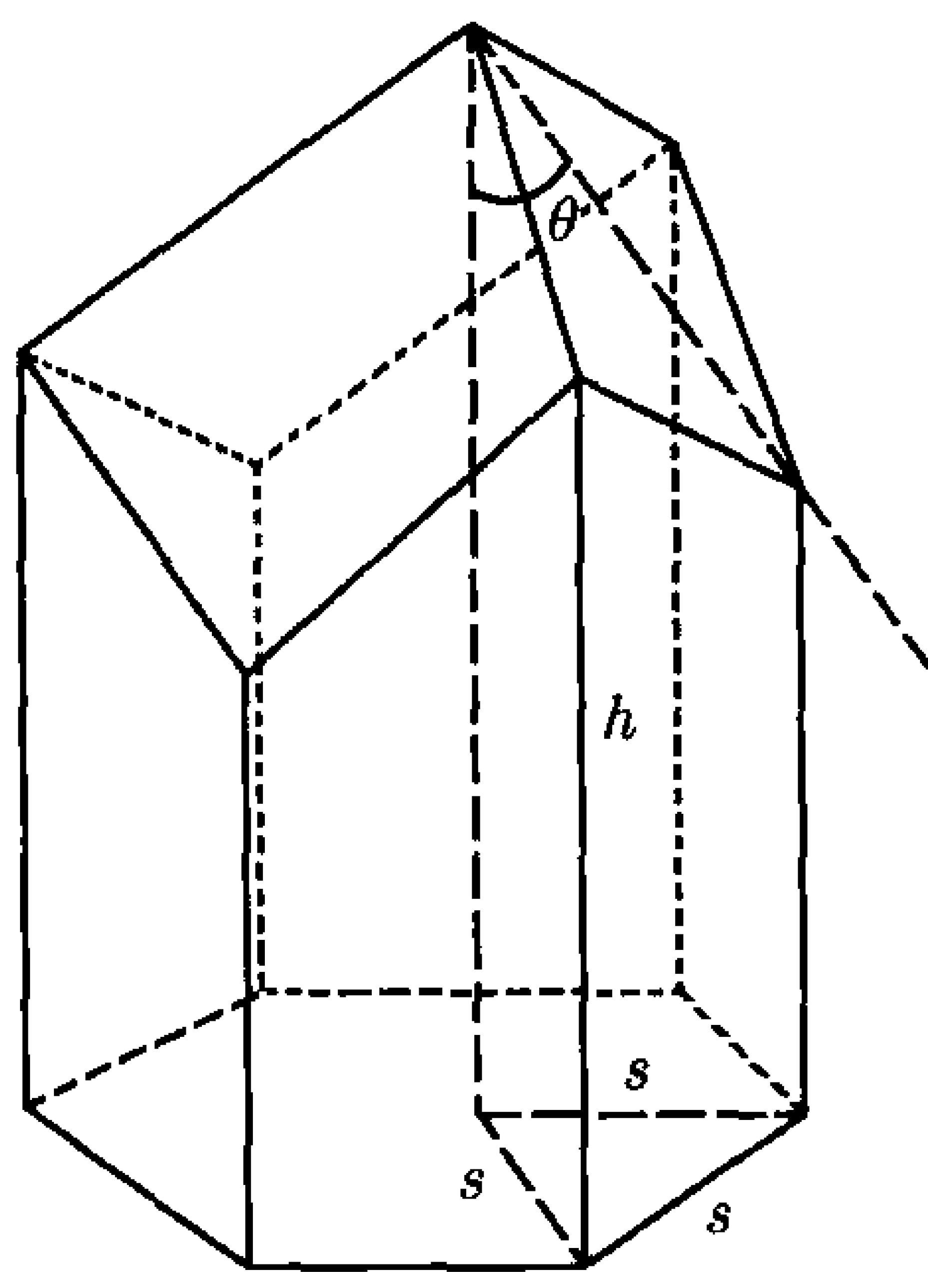


图 4-111

53. 一个生物体在 t 时刻的大小为 W. 对正常数 A, b, c, Gompertz 生长函数为

$$W = A\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{b-ct}}, \quad t \geqslant 0.$$

(a) 求截距和渐近线.

(b) 求临界点和拐点.

(c) 对不同 A, b, c 的值, 画 W 的图形.

(d) 某生物体在生长到它最后大小的 1/3 时生长最快. 用 Gompertz 生长函数模拟它的生长是否有效? 请解释.

课外自修项目

1. 平均成本和边际成本

生产产量 q 的总成本是 $C(q)$. 平均成本 $a(q)$ 参见图 4-112. 经济学家用下列法则来测定 q_0 时的边际成本 $C'(q_0)$:

- 作 $a(q)$ 在 q_0 处的切线 t_1.
- 令 t_2 是与 t_1 具有相同的垂直截距, 但斜率是 t_1 的两倍的直线.

那么 $C'(q_0)$ 是如图 4-112 所示的垂直距离. 说明这个法则有效的理由.

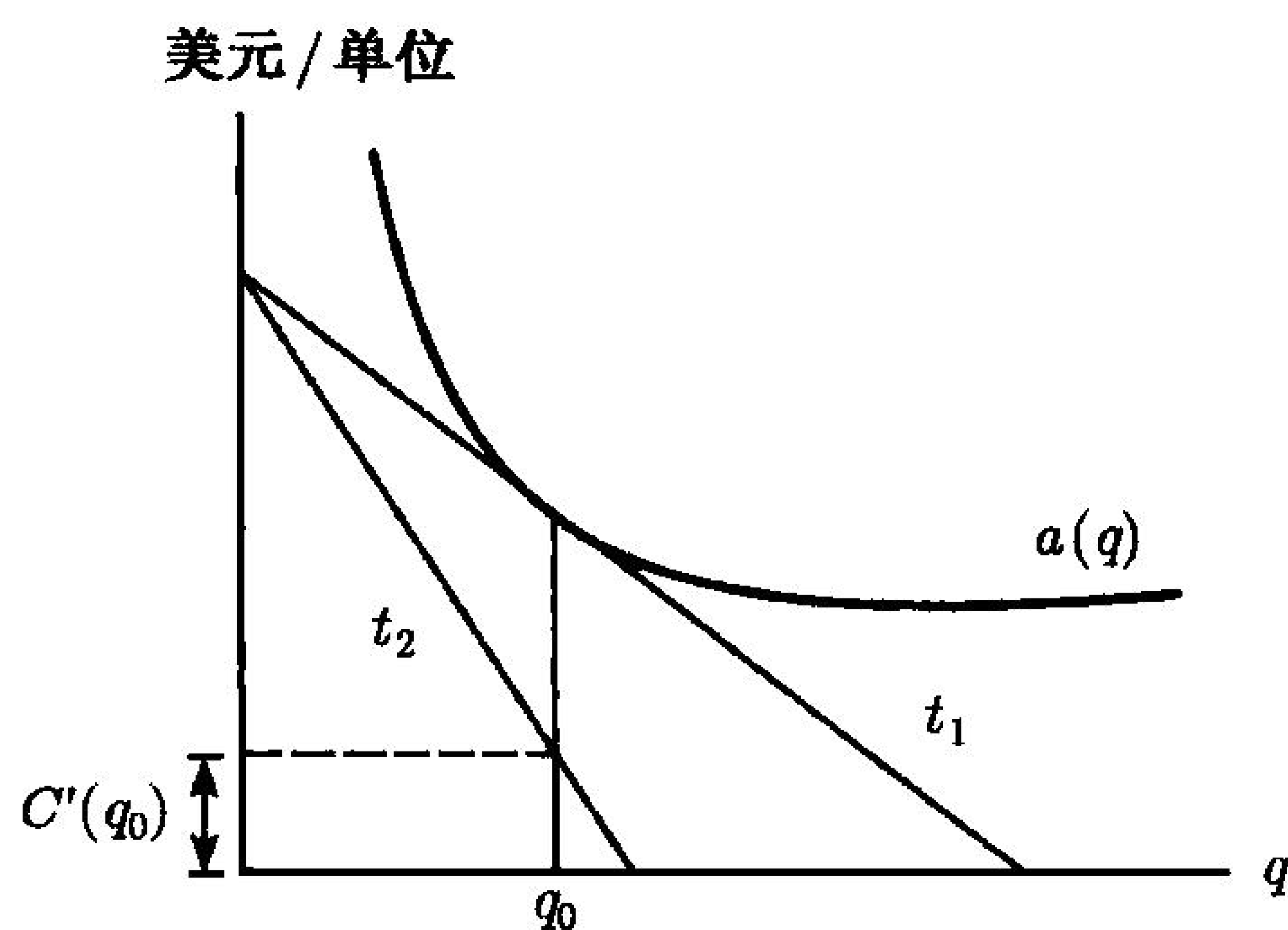


图 4-112

2. **防火道**

美国西部的森林在 2000 年夏遭到破坏, 超过 350 万棵树木因为火灾被烧毁, 这使得这场大火成为 30 年来最大的火灾. 本项目研究称之为**防火道**的火灾管理技术, 它降低因森林火灾引起的损失. 一条防火道就是森林中移走了树木的带形地, 因此源于带形地一侧的火不会蔓延到另一侧. 设立很多防火道有助于把火限制在小面积范围. 另一方面, 设立太多的防火道又会移走大量长片的树木.[①]

(a) 形如 50 km×50 km 的正方形森林有 50 km×0.01 km 的矩形防火道. 两个防火道之间的树称作树阵. 该森林中的所有防火道互相平行, 且平行于森林的一边. 第一条防火道在森林的最端头. 防火道均匀分布在整个森林里. (譬如, 图 4-113 显示了四条防火道). 一场火灾中损失的总面积是起火的树阵的面积加上所有防火道的面积.

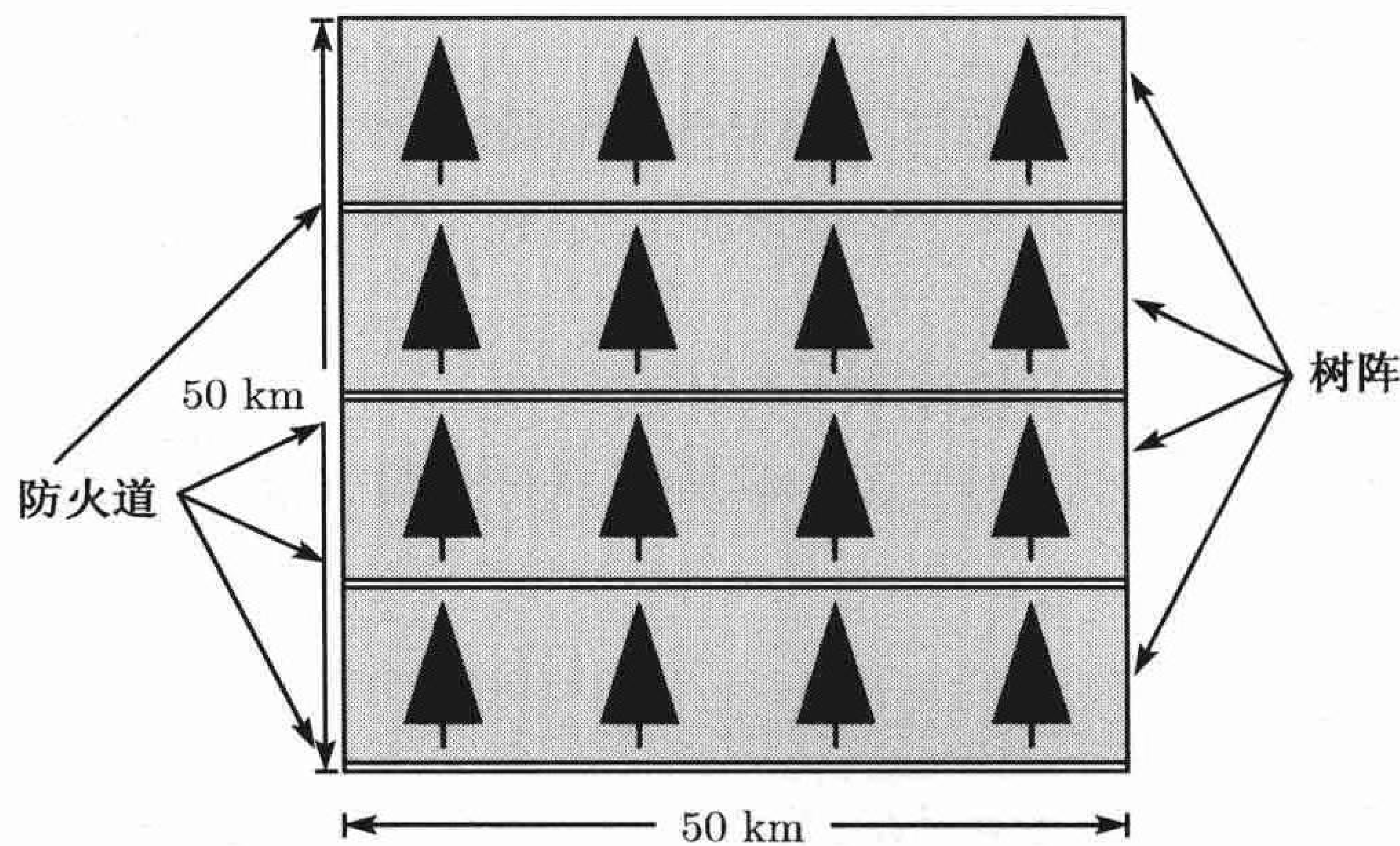


图 4-113

① 摘自 D. Quinney and R. Harding, *Calculus Connections* (纽约: John Wiley & Sons, 1996).

(i) 求使在一场火灾中损失总面积最小的防火道的数量.

(ii) 如果防火道是 50 km×b km, 用 b 表示防火道的最优数. 如果防火道的宽度 b 翻四倍, 防火道的最优数如何变化?

(b)现在假设防火道由两个均匀分布的平行直线集排列, 如图 4-114 所示. 森林是 50 km×50 km 的正方形, 每个防火道是 50 km×0.01 km 的矩形. 求各方向上, 使火灾中森林损失的总面积最小的防火道的最优数.

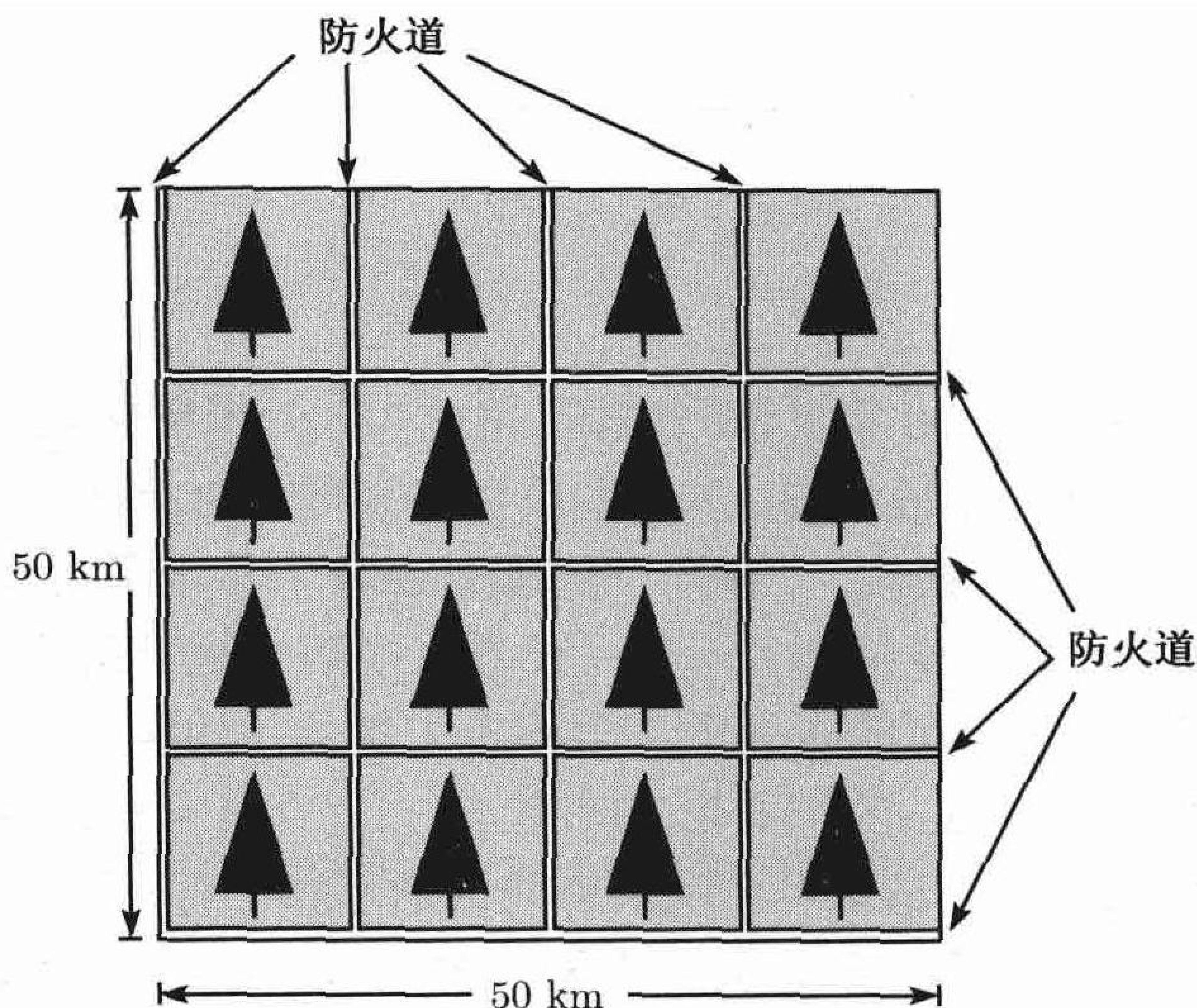


图 4-114

3. 原材料的产量和价格

产量函数 $f(x)$ 是制造公司用 x 单位原材料能生产的产品的单位数. 公司以每单位 w 美元的价格购买原材料, 以每单位 p 美元出售它所有生产的产品. 使利润最大的原材料量用 x^* 表示.

(a) 你预计导数 $f'(x)$ 是正是负? 为什么?

(b) 说明公司所得利润 $\pi(x)$ 表示成所用原材料量 x 的函数为 $\pi(x) = pf(x) - wx$ 的原因.

(c) 估计 $f'(x^*)$.

(d) 假设 $f''(x^*)$ 不等于零, 它是正是负?

(e) 如果原材料的提供商可能改变价格 w, 那么我们应把 x^* 当作 w 的函数处理. 求导数 $\mathrm{d}x^*/\mathrm{d}w$ 的公式, 并判断它是正是负.

(f) 如果价格 w 上涨, 制造公司应该购买更多还是更少的原材料?

第 5 章　累积变化: 定积分

第 2 章讨论了函数的变化率, 这为我们引入了导数. 现在我们考虑反过程: 从变化率获取原函数的信息. 这为我们带来了定积分. 定积分也能够用来求一条曲线下的图形的面积.

微积分基本定理指明了导数与定积分之间的联系. 它告诉我们, 求导数与求定积分在某种意义上互为逆过程.

5.1　路程和累积变化

我们在第 2 章利用导数计算函数的变化率, 这里将讨论如何从相反方向进行研究. 如果知道变化率, 能求出原来的函数吗? 我们将从由速度求路程着手.

5.1.1　如何计算行驶的路程

路程关于时间的变化率是速度. 如果已知速度, 能求出行驶的路程吗? 假设在 4 h 的旅行中, 速度为 50 mile/h, 那么行驶的总路程是多少? 由于

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间},$$

因而有

$$\text{行驶的总路程} = (50\ \text{mile/h}) \times (4\ \text{h}) = 200\ \text{mile}.$$

速度关于时间的函数图像是图 5-1 中的水平直线. 注意行驶的总路程是图像下阴影部分的面积.

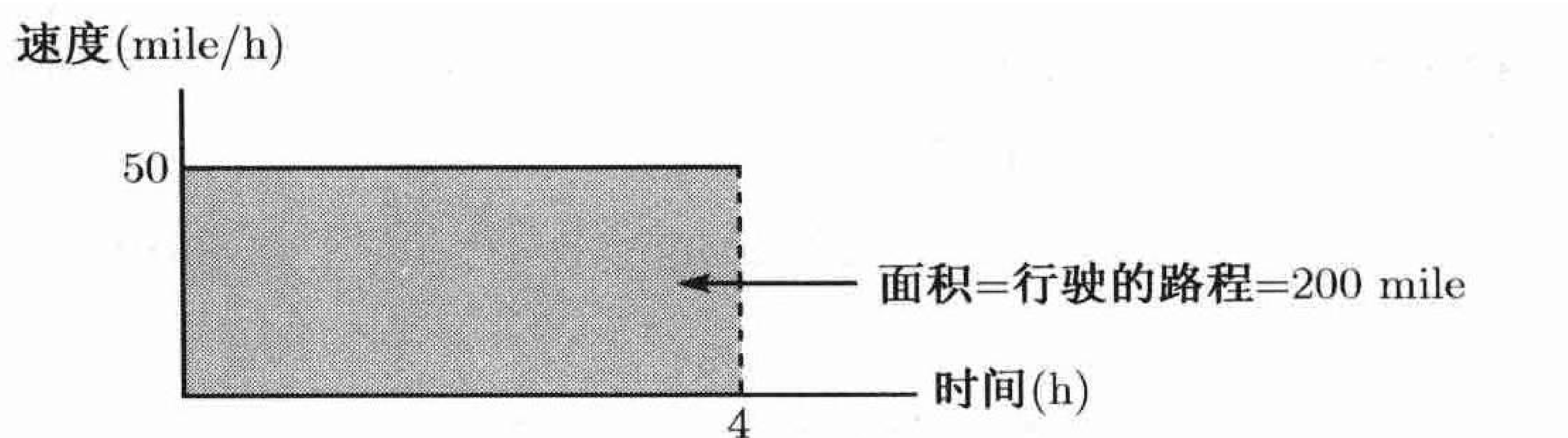


图 5-1　阴影部分面积表示以 50 mile/h 的速度在 4 h 内行驶的路程

现在我们看看, 如果速度不是常数, 情况如何.

例 1　假如你以 30 mile/h 的速度走 2 h, 40 mile/h 的速度走 0.5 h, 然后再以 20 mile/h 的速度走 4 h. 你走过的总路程是多少?

解　我们计算这三段旅程中走过的路程, 然后把它们相加求出总路程:

$$\text{路程} = (30\ \text{mile/h}) \times (2\ \text{h}) + (40\ \text{mile/h}) \times (0.5\ \text{h}) + (20\ \text{mile/h}) \times (4\ \text{h})$$
$$= 60\ \text{mile} + 20\ \text{mile} + 80\ \text{mile}$$
$$= 160\ \text{mile}$$

你在这次旅途中走了 160 mile. □

5.1.2 思考实验: 汽车行驶了多远

例 1 中, 各段的速度是常数, 当然情况并不总是如此. 我们现在看一个速度连续变化的例子.

每两秒钟内的速度数据

假设一辆汽车以不断加快的速度行驶, 并且假设我们每两秒钟就检测汽车的速度, 获得数据如表 5-1 所示.

表 5-1 每两秒钟汽车的速度

时间 (s)	0	2	4	6	8	10
速度 (ft/s)	20	30	38	44	48	50

汽车行驶了多远? 由于我们不知道汽车在每一时刻的行驶速度, 因而不能精确地求路程, 但能估计. 速度是增加的, 所以汽车在前两秒的速度至少是 20 ft/s. 由于路程 = 速度 × 时间, 汽车在前 2 s 内至少行驶了 $20 \times 2 = 40$ ft. 类似地, 汽车在下一个 2 s 内至少行驶了 $30 \times 2 = 60$ ft, 等等. 在这 10 s 内, 汽车至少行驶了

$$20 \times 2 + 30 \times 2 + 38 \times 2 + 44 \times 2 + 48 \times 2 = 360\ \text{ft}.$$

因此, 360 ft 是 10 s 内汽车行驶的总路程的下估计.

为获得上估计, 我们以同样的方式推理: 在前两秒内, 汽车的速度最多为 30 ft/s, 因此它最多行驶了 $30 \times 2 = 60$ ft. 在下一个两秒内, 它至多行驶 $38 \times 2 = 76$ ft, 等等. 所以在 10 s 内, 它最多行驶

$$30 \times 2 + 38 \times 2 + 44 \times 2 + 48 \times 2 + 50 \times 2 = 420\ \text{ft}.$$

因此,

$$360\ \text{ft} \leqslant \text{行驶的总路程} \leqslant 420\ \text{ft}.$$

上估计和下估计相差 60 ft.

每秒钟内的速度数据

如果需要更精确的估计怎么办? 我们需要更频繁的速度检测, 比如说, 每秒钟检测一次. 数据参见表 5-2.

表 5-2 每秒钟汽车的速度

时间 (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
速度 (ft/s)	20	26	30	35	38	42	44	46	48	49	50

像前面一样, 我们利用每秒初的速度得到每秒钟内行驶路程的下估计. 在第一秒钟内, 速度至少为 20 ft/s, 于是汽车最少行驶 $20 \times 1 = 20$ ft. 在接下来的一秒钟内, 汽车最少行驶 26 ft, 等等. 因此我们说

$$\begin{aligned}\text{新的下估计} &= 20 \times 1 + 26 \times 1 + 30 \times 1 + 35 \times 1 + 38 \times 1 + 42 \times 1 \\ &\quad + 44 \times 1 + 46 \times 1 + 48 \times 1 + 49 \times 1 \\ &= 378 \text{ ft}.\end{aligned}$$

注意, 这比原来的下估计 360 ft 大.

我们通过考虑每秒钟末的速度得到新的上估计. 在第一秒钟内, 速度最多为 26 ft/s, 于是汽车最多行驶 $26 \times 1 = 26$ ft. 在接下来的一秒钟内, 汽车最多行驶 30 ft, 等等.

$$\begin{aligned}\text{新的上估计} &= 26 \times 1 + 30 \times 1 + 35 \times 1 + 38 \times 1 + 42 \times 1 + 44 \times 1 \\ &\quad + 46 \times 1 + 48 \times 1 + 49 \times 1 + 50 \times 1 \\ &= 408 \text{ ft}.\end{aligned}$$

这比原来的上估计 420 ft 小. 现在我们知道

$$378 \text{ ft} \leqslant \text{行驶的总路程} \leqslant 408 \text{ ft}.$$

注意, 新的上估计与下估计现在相差 30 ft, 是前面的一半. 通过把检测的区间减半, 我们使上估计与下估计的差也减半.

在速度的图像上显示路程

考虑表 5-1 的每两秒检测所得数据. 我们能在速度关于时间的函数图像上描绘出下估计和上估计. 标出这些数据, 画出通过这些数据点的平滑曲线, 就绘制出速度曲线了 (见图 5-2).

我们利用矩形的面积 = 长 × 宽. 第一个暗色矩形的面积是 $20 \times 2 = 40$, 是前两秒内行驶路程的下估计. 第二个暗色矩形的面积是 $30 \times 2 = 60$, 是第二个两秒内行驶路程的下估计. 暗色矩形的总面积代表 10 s 内行驶总路程的下估计.

如果一起考虑暗色和浅色矩形. 那么第一个面积是 $30 \times 2 = 60$, 是前两秒内行驶路程的上估计. 第二个面积是 $38 \times 2 = 76$, 是第二个两秒内路程的上估计. 继续这个计算表明, 总路程的上估计就是暗色和浅色矩形面积之和. 因此, 浅色矩形的面积之和表示这两个估计之差.

图 5-3 给出了一秒内数据的图形. 暗色矩形的面积仍然表示下估计, 暗色和浅色矩形的面积之和是上估计. 图 5-3 中的浅色面积之和小于图 5-2 中的浅色面积之和, 因此一秒内的上估计与下估计之差比两秒内的要小.

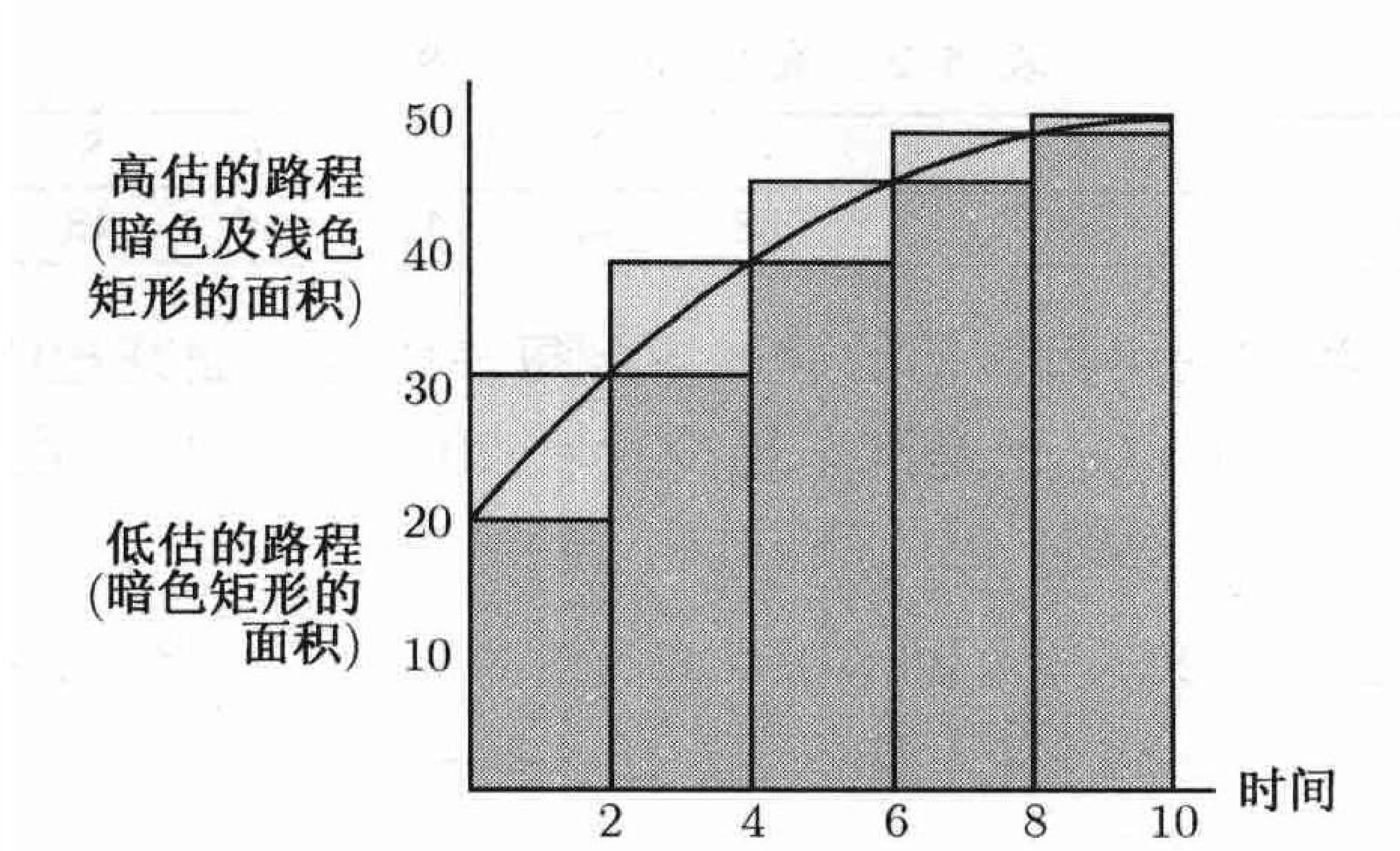


图 5-2 阴影面积估计行驶的路程. 每两秒检测的速度

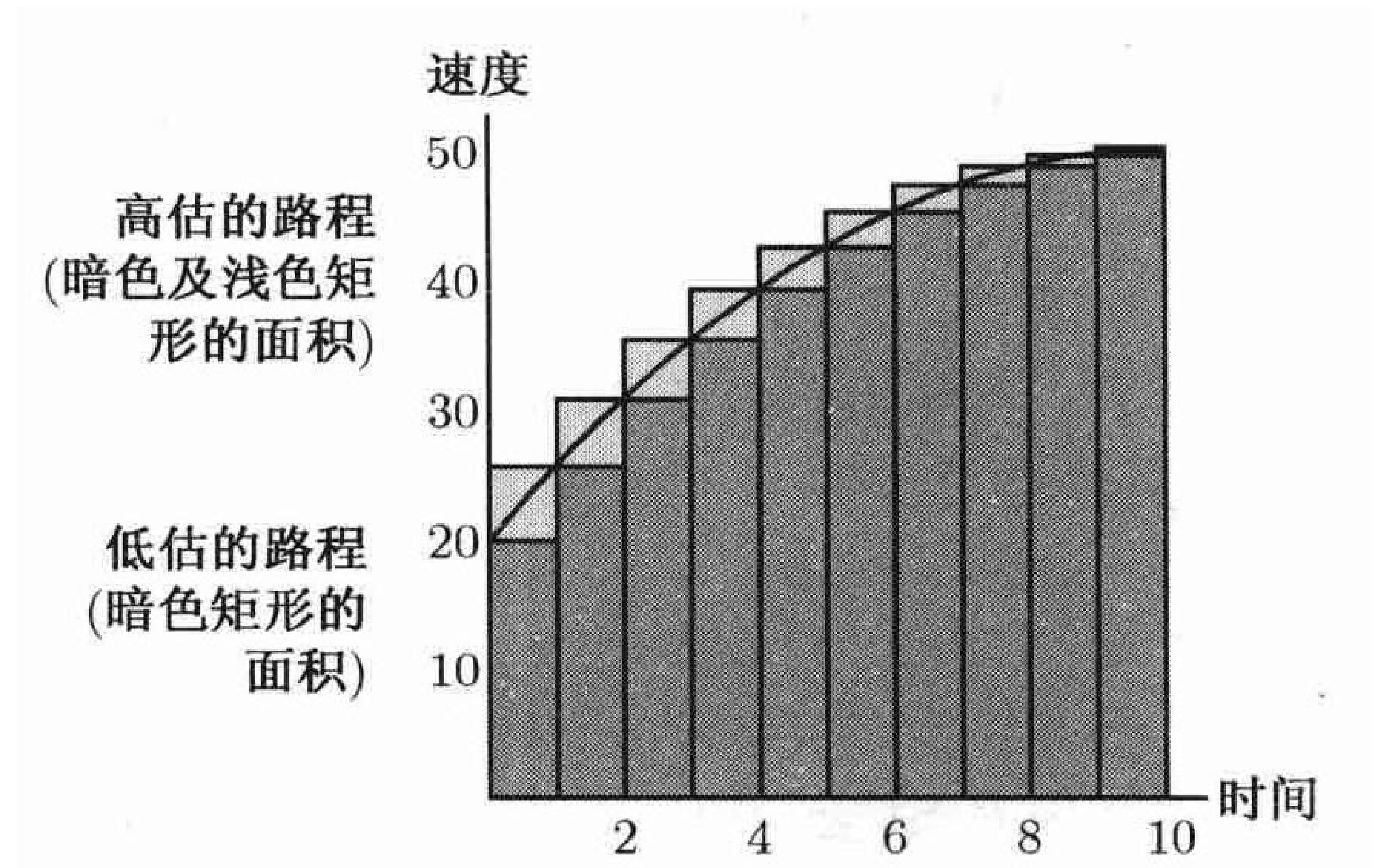


图 5-3 阴影面积估计行驶的路程. 每秒检测的速度

5.1.3 在速度的图形上显示路程：曲线下的面积

随着我们越来越频繁地检测速度, 用来估计行驶路程的矩形越来越接近曲线. 参见图 5-4 和图 5-5. 在极限中, 随着细分数量的增多, 我们发现行驶的路程就是速度曲线与水平轴之间的面积. 见图 5-6. 一般说来,

如果速度是正的, 行驶的总路程就是速度曲线下的面积.

例 2 用秒计量时间, 自行车的速度 (单位: ft/s) 为 $v(t) = 5t$. 自行车在 3 s 内行驶了多远?

解 速度是线性的. 参见图 5-7. 行驶的路程是直线 $v(t) = 5t$ 和 t 轴之间的面积. 由于这个区域是高为 15, 底为 3 的三角形, 所以

$$\text{行驶的路程} = \text{三角形的面积} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 = 22.5 \text{ ft}.$$

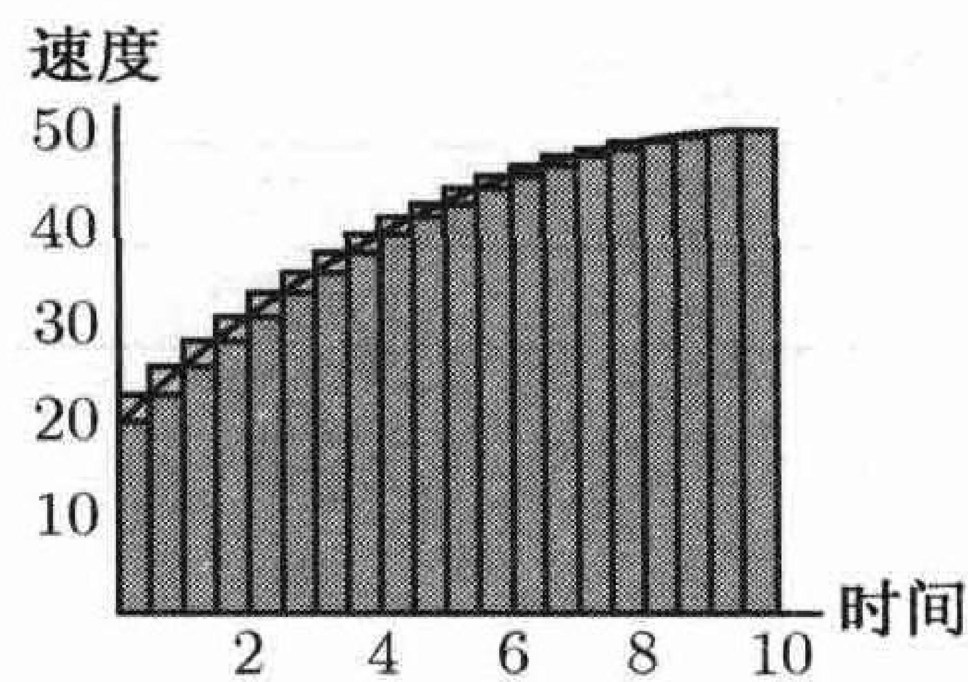


图 5-4 每 $\frac{1}{2}$ 秒检测所得速度

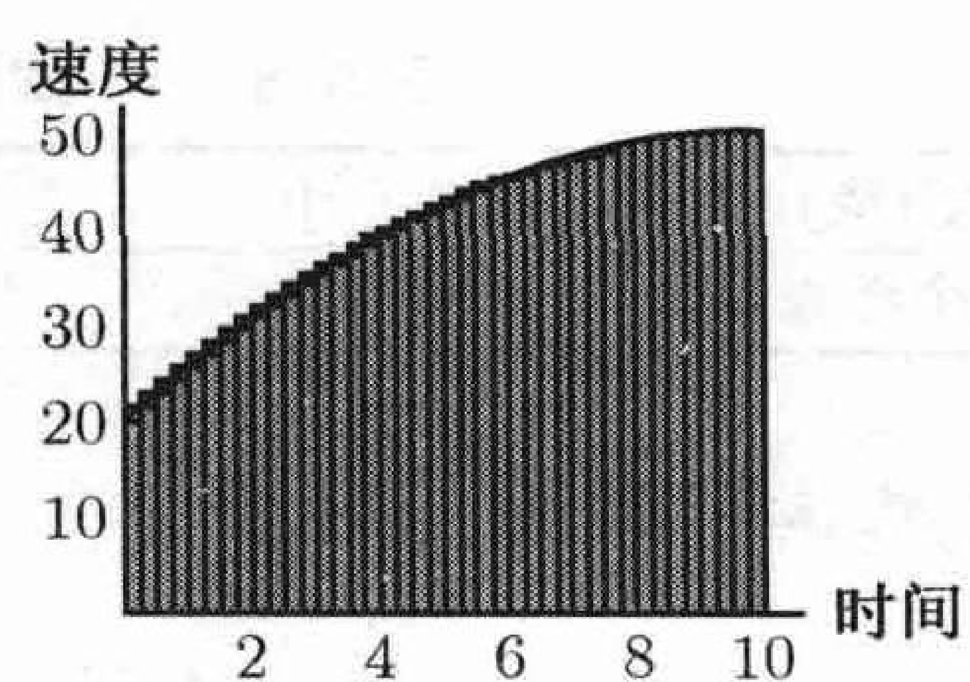


图 5-5 每 $\frac{1}{4}$ 秒检测所得速度

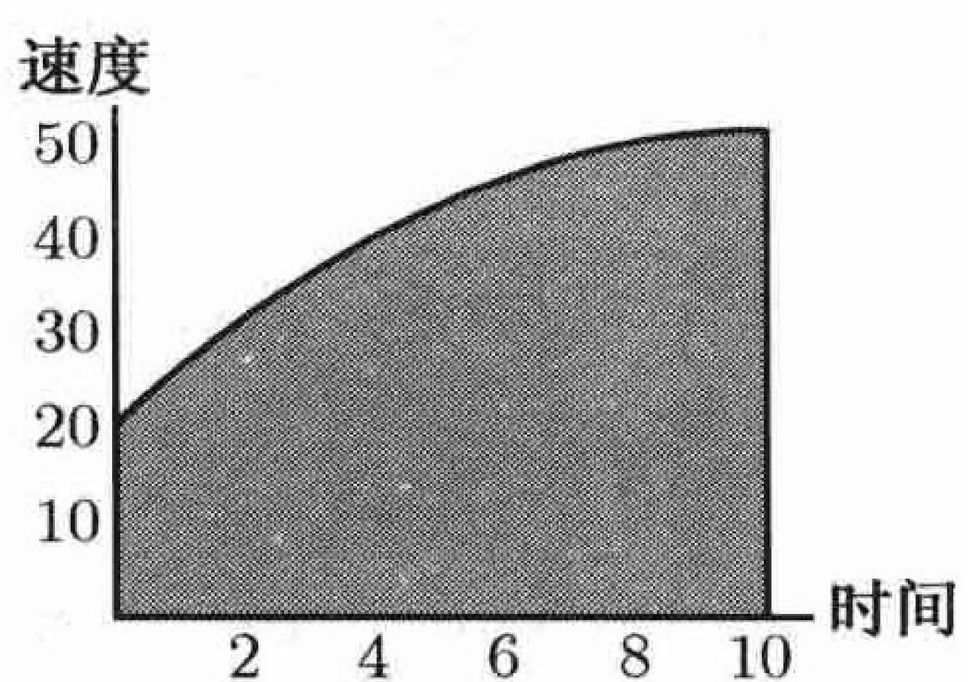


图 5-6 行驶的路程是曲线下方的面积

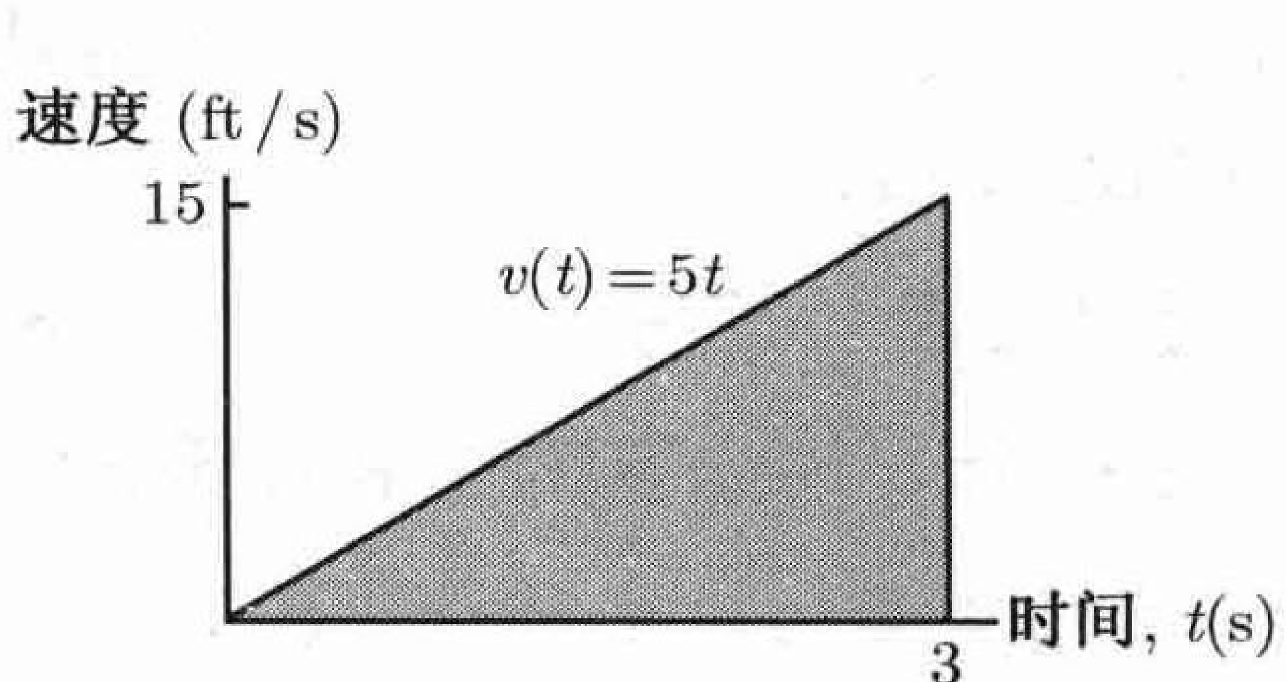


图 5-7 阴影面积表示行驶的路程 □

5.1.4 由变化率逼近总变化量

我们已经清楚如何用路程的变化率 (速度) 计算行驶的总路程. 我们也能利用同样的方法从其他量的变化率求总变化量.

例 3 某城市的人口在前 3 年以 5000 人/年的速度增长, 在接下来的 4 年内以 3000 人/年的速度增长. 该城市在这 7 年内的总变化量是多少?

解 人/年这个单位提醒我们, 已知的是人口 (人) 关于时间的变化率. 如果变化率是常数, 我们知道

$$\text{人口的总变化量} = \text{每年的变化率} \times \text{年数}.$$

因此, 该人口的总变化率为

$$\begin{aligned}\text{总变化量} &= (500\text{人/年})(3\text{ 年}) + (3000\text{ 人/年})(4\text{ 年})\\ &= 15\,000\text{ 人} + 12\,000\text{人}\\ &= 27\,000\text{ 人}.\end{aligned}$$

人口的变化量为 27 000 人. 注意, 这没有告诉我们 7 年后该城市的人口, 它告诉我们该人口的变化. 比如, 如果人口原来是 100 000, 那么它在 7 年后将为 127 000. □

例 4 一款新的电脑游戏的销售率 (个游戏/周) 见表 5-3. 假设销售率在 20 周内都在增长, 估计在这 20 周内售出的游戏总数.

表 5-3 一款新电脑游戏的周销售量

时间 (周)	0	5	10	15	20
销售率 (个游戏/周)	0	585	892	1875	2350

解 如果销售率是常数, 那么有

$$\text{总销售数} = \text{每周的销售率} \times \text{周数}.$$

第一个 5 周内售出多少游戏呢? 在这段时期内, 每周售出的游戏从 0 到 585 不等. 如果我们假设每周售出 585 个游戏, 我们得到第一个 5 周内的销售量的过高估计 (585 游戏/周)(5 周) = 2925 个游戏. 由每个 5 周内的类似过高估计得出整个 20 周内的过高估计:

$$\text{总销售量的过高估计}=585 \cdot 5 + 892 \cdot 5 + 1875 \cdot 5 + 2350 \cdot 5 = 28\ 510\text{个游戏}$$

通过在每个 5 周内取销售率的低估值, 我们低估了总销售量:

$$\text{总销售量的过低估计} =0 \cdot 5 + 585 \cdot 5 + 892 \cdot 5 + 1875 \cdot 5 = 16\ 760\text{个游戏}.$$

因此这 20 周内游戏的总销售量介于 16 760 与 28 510 之间.

总销售量的一个好的估计是这两个数的平均数:

$$\text{总销售量} \approx \frac{16\ 760 + 28\ 510}{2} = 22\ 635 \text{ 个游戏}.$$ □

习题

1. 汽车在司机刹车后 5 s 内停下. 当刹车时, 记录下了下面的数据:

刹车后的时间 (s)	0	2	4	6
速度 (ft/s)	88	45	16	0

(a) 给出刹车后汽车行驶路程的下估计和上估计.

(b) 在速度关于时间的图形上, 指出 (a) 部分的下估计和上估计.

2. 一辆汽车在 $t = 0$ 时刻开始行驶, 并且越来越快. 它的速度参见下表. 估计在这 12 s 内汽车行驶了多远.

t(s)	0	3	6	9	12
速度 (ft/s)	0	10	25	45	75

3. 一辆汽车的速度为 $f(t) = 5t$ m/s. 利用 $f(t)$ 的图形, 求从 $t = 0$ 到 $t = 12$ 内汽车行驶的准确路程 (单位: m).

4. 两辆汽车同时出发, 沿同一条直路朝同一方向行驶. 图 5-8 给出每辆汽车的速度关于时间的函数图形. 问哪辆车

(a) 的最大速度较大?

(b) 最先停下?

(c) 行驶得较远?

5. 两辆汽车沿一条直路朝同一方向行驶. 图 5-9 给出了每辆汽车在时刻 t 的速度 v. 汽车 B 在汽车 A 出发两小时后出发, 且汽车 B 的最大速度为 50 km/h.

(a) 每辆汽车大约行驶了多久?

(b) 估计汽车 A 的最大速度.

(c) 每辆汽车大约行驶了多远?

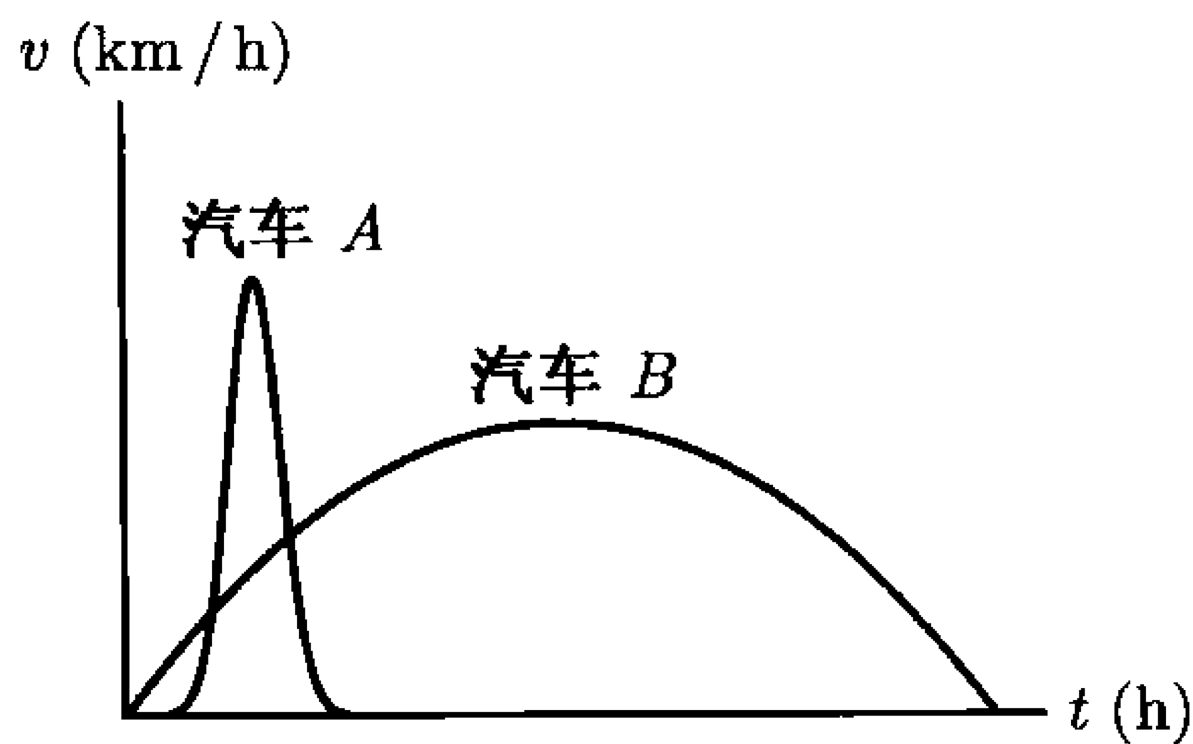


图 5-8

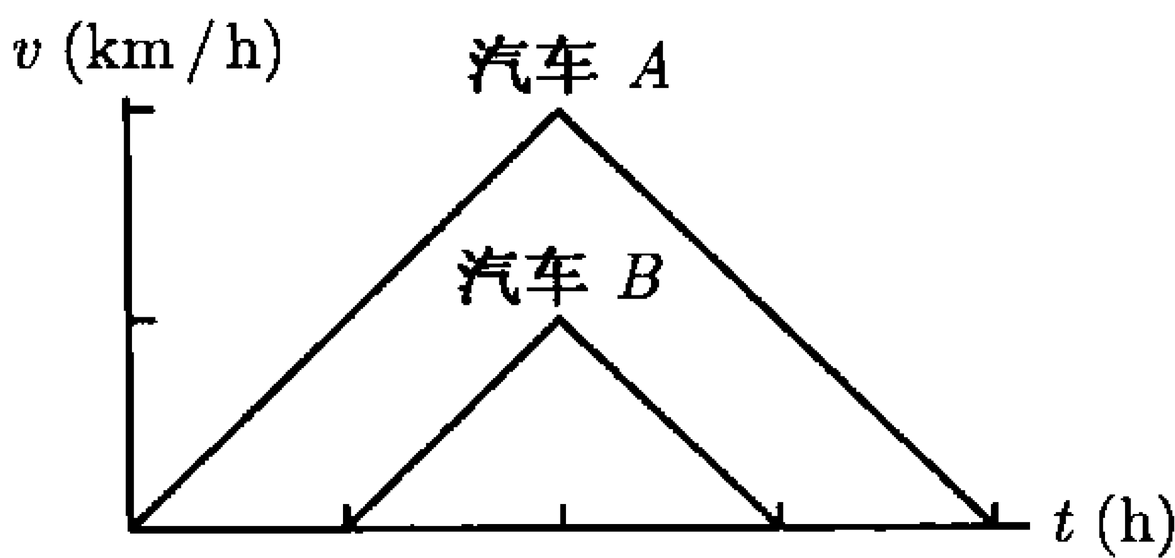


图 5-9

6. 图 5-10 给出了某物体的速度 v(单位: m/s). 估计物体在 $t = 0$ 和 $t = 6$ 之间移动的总路程.

7. 一辆汽车以图 5-11 所给速度在 10 s 内从速度 0 连续地加速到 60 mile/h. 估计在 1 s 秒内汽车行驶了多远.

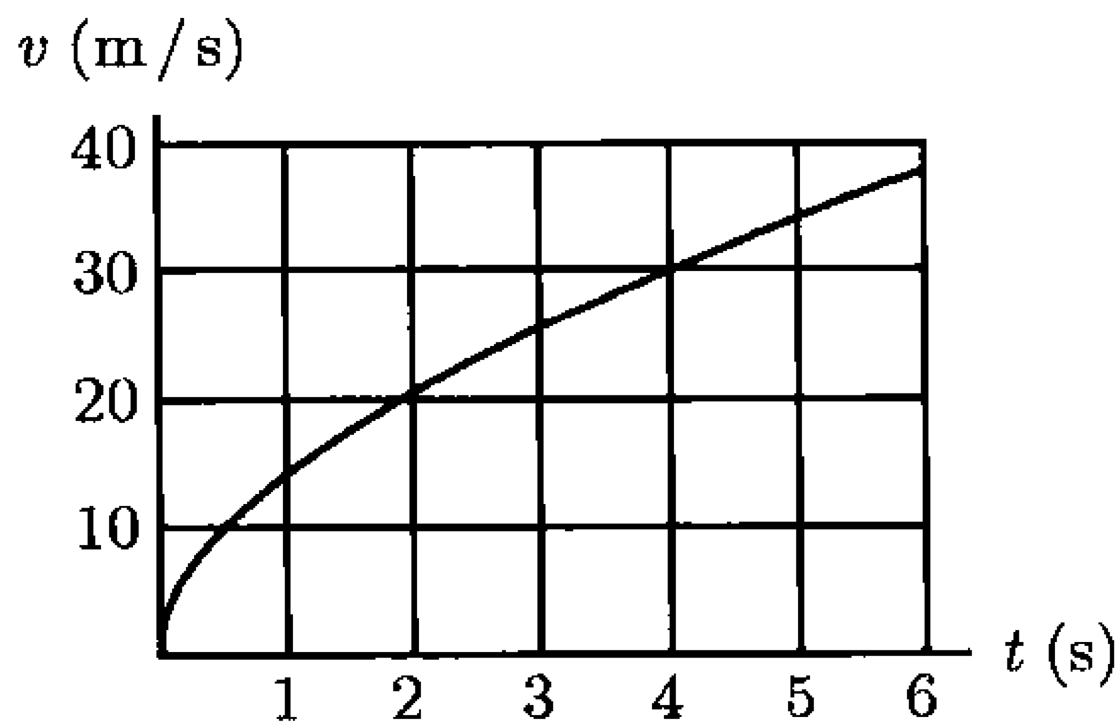


图 5-10

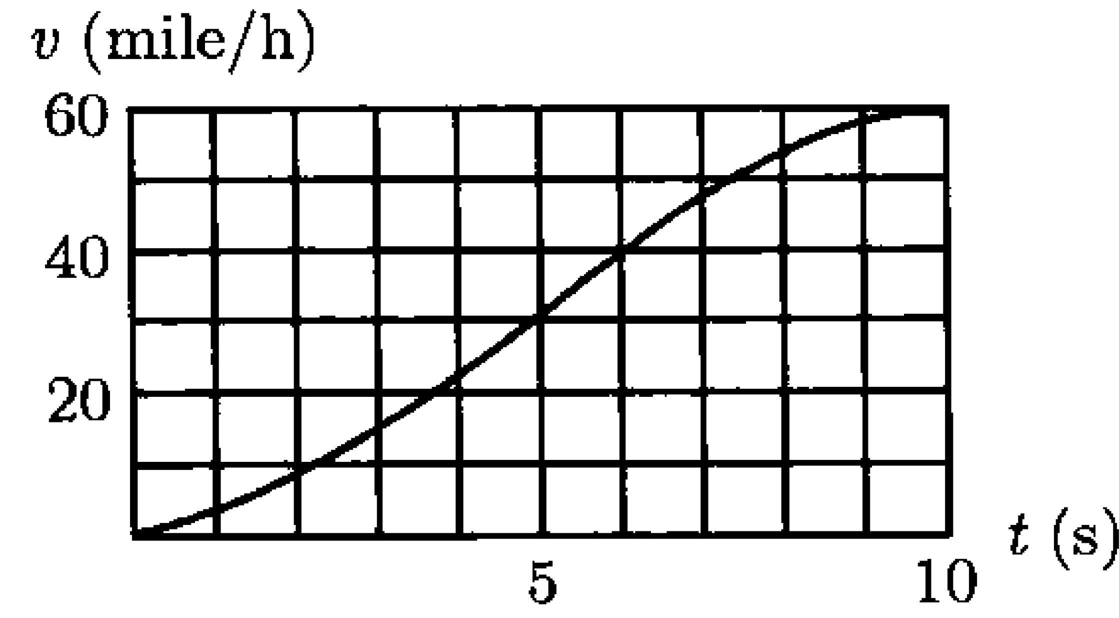


图 5-11

8. 下表给出了全世界的石油消耗 (单位: 十亿桶/年).[①]估计这 20 年内的总石油消耗.

年份	1980	1985	1990	1995	2000
石油 (十亿桶/年)	22.3	21.3	23.9	24.9	27.0

9. 一污水处理公司的过滤器因时间过长效率越来越低. 污染物经过过滤器进入附近湖的速度参见下表.

(a) 估计这 30 天内进入湖水的污染物总量.

(b) 你对 (a) 部分的答案仅仅是一个估计. 请给出污染物的真值必然所处的界限 (下估计和上估计). (假设污染物进入的速度是连续增加的.)

① www.bp.com/centres/energy/world-stat-rev/oil/reserves.asp.

天	0	6	12	18	24	30
速度 (kg/天)	7	8	10	13	18	35

10. 世界人口的变化率 (单位：百万人/年) 参见下表.

(a) 利用这个数据估计 1950~2000 年世界人口的总变化量.

(b) 1950 年的世界人口是 2555 百万人, 2000 年是 6085 百万人. 计算人口总变化量的真值. 这个数值与你 (a) 部分的估计相比如何?

年份	1950	1960	1970	1980	1990	2000
变化率	37	41	78	77	86	79

11. 某村庄想估量一上午注入工厂的水量. 水线上的一计量表提供了任意时刻的流量 (单位：m^3/h). 上午 6 时的流量大约为 100 m^3/h, 且稳定地增加到上午 9 时的 280 m^3/h. 仅利用这些信息, 给出该工厂在上午 6 时到上午 9 时之间用水体积的估计.

12. **(a)** 画本节例 1 描述的旅行的速度函数的略图.

(b) 在该图形上描绘行驶的总路程.

13. 画例 4 中电脑游戏的销售率关于时间的图形. 在图形上标出在例子中计算出的过高估计和过低估计.

14. 罗格在跑马拉松. 他的朋友杰夫骑自行车跟在他后面, 每 15 分钟记下他的速度. 罗格开始跑得很快, 但一个半小时后, 他因为疲惫不得不停下来. 杰夫记录的数据如下：

开始后的时间 (min)	0	15	30	45	60	75	90
速度 (m/h)	12	11	10	10	8	7	0

(a) 假设罗格的速度不会增加, 给出在前半个小时中罗格所跑路程的上估计和下估计.

(b) 给出在整个一个半小时中罗格所跑总路程的上估计和下估计.

15. 一辆开始以 50 ft/s 行驶的汽车以恒定的比率 (稳定的负加速度) 刹车, 在 5 s 后停下来.

(a) 画从 $t = 0$ 到 $t = 5$ 这段时间内速度的图形.

(b) 汽车行驶了多远?

(c) 如果汽车最初的速度翻倍, 但仍以同样恒定的比率刹车, 汽车行驶多远?

16. 图 5-12 是鱼群鱼口 (鱼的数量) 的变化率. 估计在这 12 个月内鱼群鱼口的总变化.

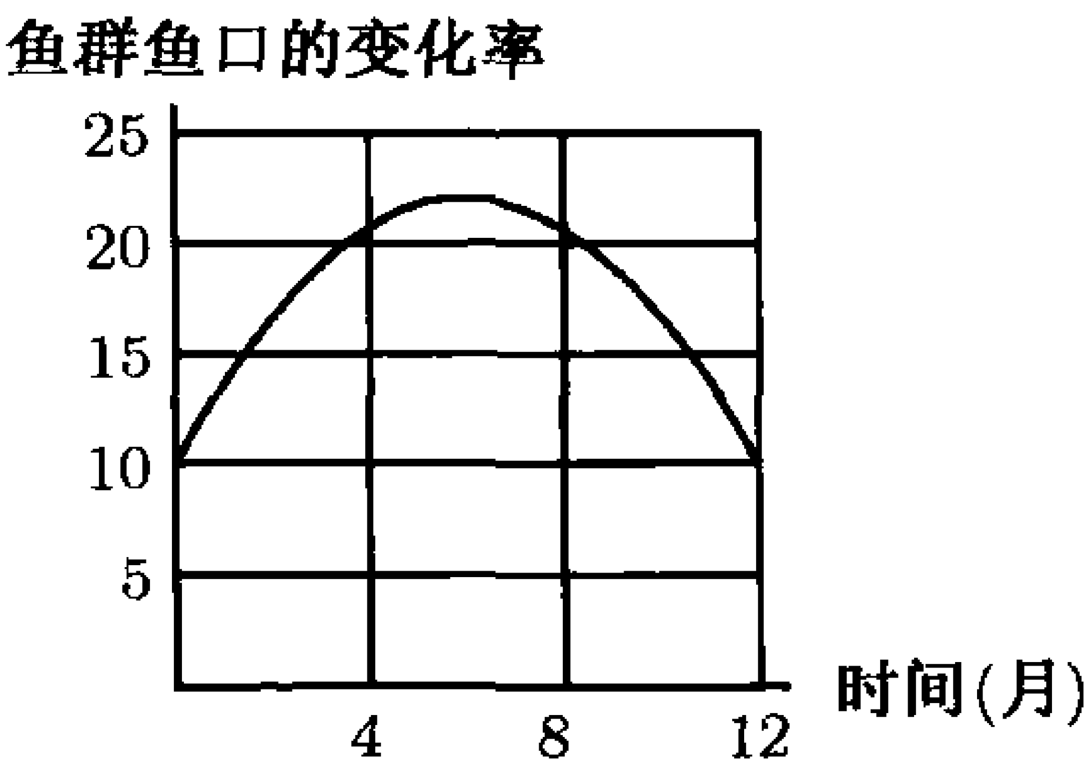


图 5-12

17. 假设速度 $v(t) = t^2 + 1$, 其中时间以秒计量, 速度以 m/s 计量. 估计 $t = 0$ 与 $t = 5$ 这段时间上的路程, 并说明你是如何得到该估计值的.

18. 一艘旧划艇裂开了一个洞, 水以下表中的速度 $r(t)$ 流入划艇.

t min	0	5	10	15
$r(t)$ l/min	12	20	24	16

(a) 求在 15 分钟内流入划艇的水的体积的上估计和下估计.

(b) 画图描述下估计.

19. 某投资基金的价值以每年 $R = 500e^{0.04t}$ 的比率增长, 其中 t 是自 2005 年以来的年数.

(a) 利用 $t = 0, 2, 4, 6, 8$, 作 R 的价值表.

(b) 利用表格估计投资基金在 2005~2015 年的总变化量.

20. 一辆汽车以恒定的比率在半小时内从 10 mile/h 加速到 70 mile/h. 它在不同速度的燃料利用率 (单位: mile/gal) 参见下表. 求半小时内用过的燃料量的下估计和上估计.

速度 (mile/h)	10	20	30	40	50	60	70
燃料利用率	15	18	21	23	24	25	26

5.2 定 积 分

在 5.1 节中, 我们学习了在给定变化率的条件下, 如何估计总变化量. 现在我们来看如何使近似更准确.

提高估计精确度: n 和 Δt 的作用

为估计总变化量, 我们构造一个和. 我们用记号 Δt 表示应用的 t 区间的长度, 用 n 表示长度为 Δt 的子区间的数量. 在下例中, 我们将看到减小 t(和增加 n) 是如何提高近似的精确度的.

例 1 如果 t 以小时计量, 从 20 小时期初开始, 细菌数量以 $f(t) = 3 + 0.1t^2$ 百万/小时的比率增长. 利用下面的各 Δt, 求细菌数量总变化量的下估计.

(a) $\Delta t = 4$ 小时 (b) $\Delta t = 2$ 小时 (c) $\Delta t = 1$ 小时

解 变化率为 $f(t) = 3 + 0.1t^2$. 如果我们利用 $\Delta t = 4$, 则每隔 4 小时计算比率, 且 $n = 20/4 = 5$. 参见表 5-4. 细菌数量的变化量在最初 4 小时的下估计是 (3.0 百万/小时)(4 小时)=12 百万. 求所有子区间上的下估计之和得:

总变化量 $\approx 3.0 \times 4 + 4.6 \times 4 + 9.4 \times 4 + 17.4 \times 4 + 28.6 \times 4 = 252.0$ **百万.**

变化率的图形参见图 5-13a; 阴影矩形的面积就是这个下估计. 注意, $n = 5$ 是该图形中矩形的数量.

表 5-4 利用 $f(t) = 3 + 0.1t^2$ 百万/小时, $\Delta t = 4$ 求出的变化率

t(小时)	0	4	8	12	16	20
$f(t)$	3.0	4.6	9.4	17.4	28.6	43.0

(b) 如果用 $\Delta t = 2$, 我们每 2 小时求 $f(t)$, $n = 20/2 = 10$. 参见表 5-5. 下估计为

$$\text{总变化量} \approx 3.0 \cdot 2 + 3.4 \cdot 2 + 4.6 \cdot 2 + \cdots + 35.4 \cdot 2 = 288.0 \text{ 百万细菌.}$$

图 5-13b 表明该估计比 (a) 部分所做估计更准确.

表 5-5 利用 $f(t) = 3 + 0.1t^2$ 百万/小时, $\Delta t = 2$ 求出的变化率

t(小时)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(t)$	3.0	3.4	4.6	6.6	9.4	13.0	17.4	22.6	28.6	35.4	43.0

(c) 如果我们用 $\Delta t = 1$, 则 $n = 20$, 同样的计算表明我们有

$$\text{总变化量} \approx 307.0 \text{ 百万细菌}.$$

图 5-13(c) 的阴影部分面积就代表该估计, 它是这三个估计中最准确的.

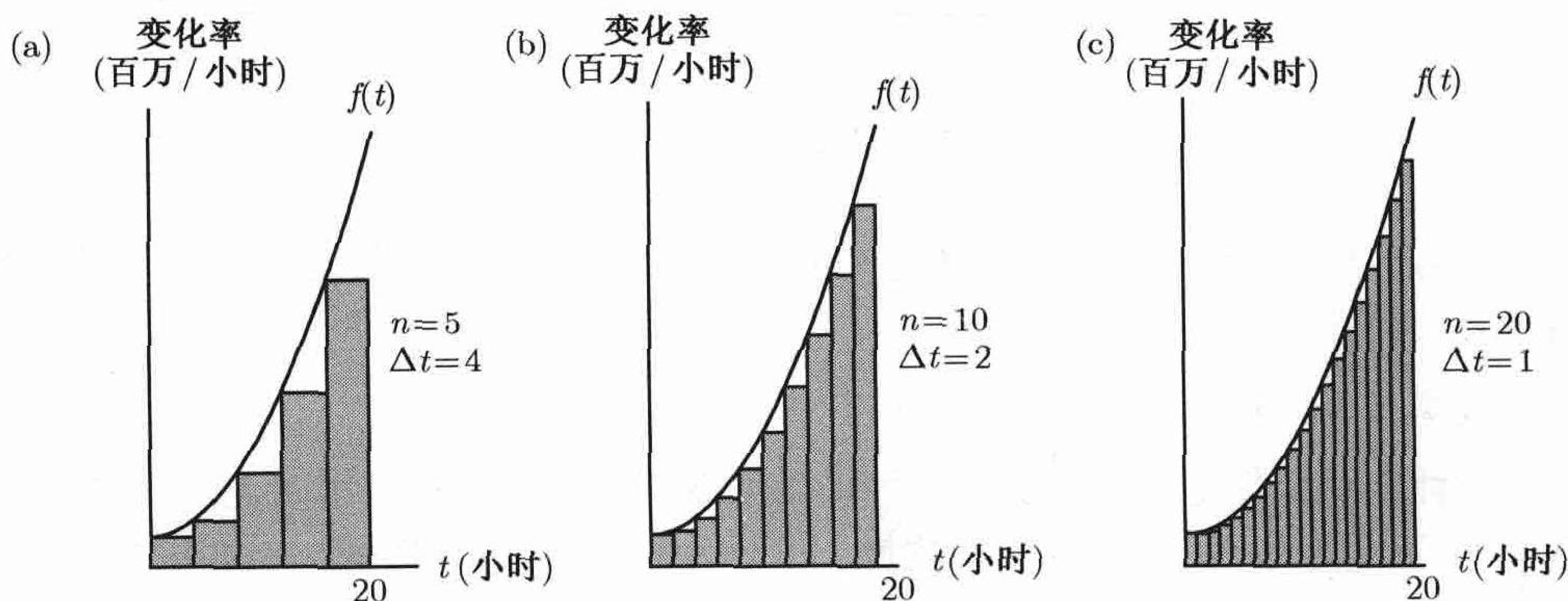


图 5-13 由变化率所得的越来越准确的总变化量的估计. 在各种情形下, $f(t)$ 是变化率, 阴影部分面积近似总变化量. 大 n 及小 Δt 给出最好的估计

注意, 随着 n 的增大, 估计的准确度提高, 阴影矩形的面积接近曲线下方的面积. □

5.2.1 左手和与右手和

假设有 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的连续函数 $f(t)$. 我们把该区间细分成宽度均为 Δt 的 n 个相等的小区间, 因此

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

令 $t_0, t_1, t_2 \cdots, t_n$ 表示每个小区间的端点, 如图 5-14 和图 5-15. 我们构造两个和, 它们与 3.1 节的下估计和上估计相似. 我们利用区间左端点的函数值得左手和, 利用区间右端点的函数值得右手和. 我们有

$$\text{左手和} = f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t$$

和

$$\text{右手和} = f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t.$$

若 $f(t) \geqslant 0$, 这些和就是图 5-14 和图 5-15 的阴影面积. 图 5-14 中, 由于第一个矩形的左边刚好与曲线相交, 因此它的宽为 Δt, 高为 $f(t_0)$, 从而面积为 $f(t_0)\Delta t$.

第二个矩形的宽为 Δt, 高为 $f(t_1)$, 因此面积为 $f(t_1)\Delta t$, 等等. 这些面积之和就是左手和. 以相同的方式构造右手和 (如图 5-15), 唯一不同的是每个矩形的右边而不是左边和曲线相交.

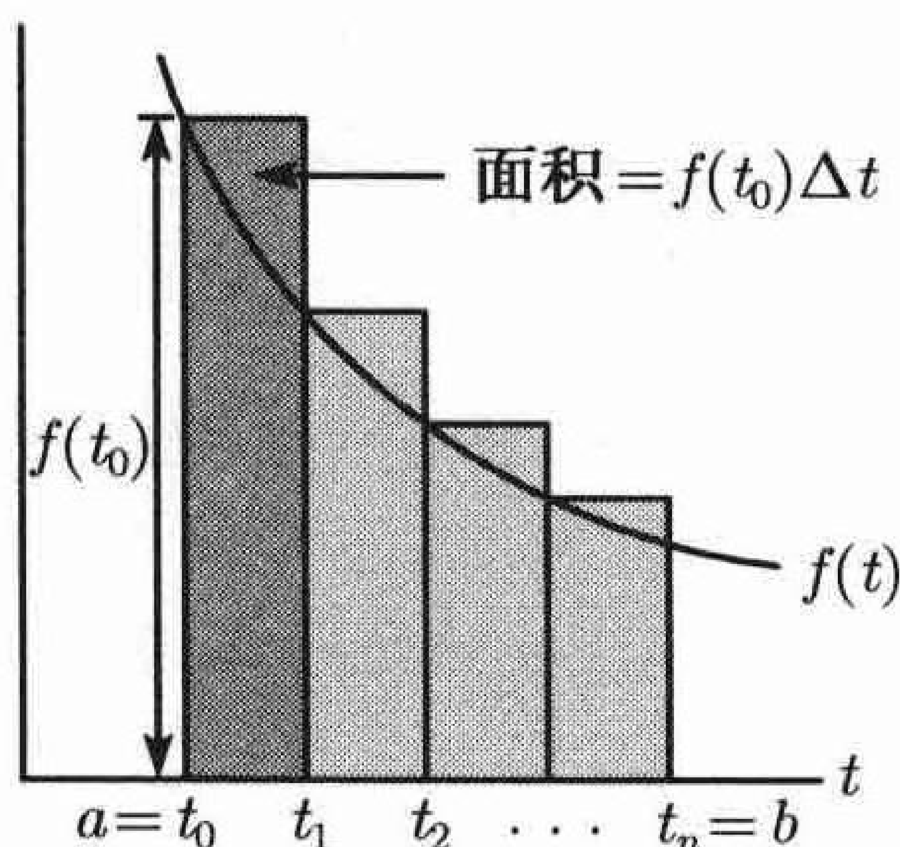


图 5-14 左手和: 矩形的面积

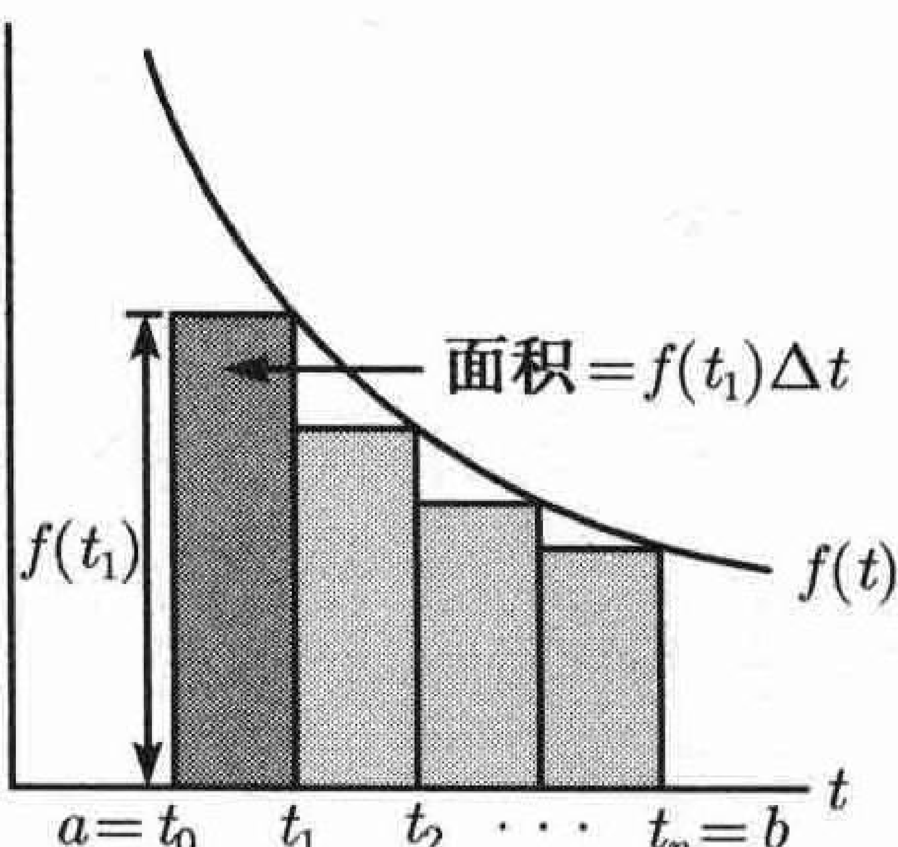


图 5-15 右手和: 矩形的面积

利用 $\sum$ 符号写左手和与右手和

利用 $\sum$ 符号可以把左手和与右手和写得更加紧凑. 符号 $\sum$ 是大写的 σ 或希腊字母 S. 我们记

$$\text{右手和} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t = f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t.$$

$\sum$ 告诉我们把所有的 $f(t_i)\Delta t$ 加起来. 符号 $\sum$ 底下的 $i=1$ 告诉我们从 $i=1$ 开始求和, 顶部的 n 告诉我们在 $i=n$ 时停止.

在左手和中, 我们从 $i=0$ 开始, 在 $i=n-1$ 时停止, 因此记

$$\text{左手和} = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t = f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\Delta t.$$

5.2.2 取极限获得定积分

如果 f 是某个量的变化率, 那么左手和与右手和近似于该量的总变化量. 对大多数的函数 f 来说, 增加 n 的值能提高近似的精确度. 为准确地求总变化量, 我们取越来越大的 n 的值, 并求左手和与右手和的近似值. 这称作 n 趋于无穷大时取这些和的极限, 并记作 $\lim\limits_{n\to\infty}$. 如果 f 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续, 那么左手和与右手和的极限存在并且相等. 定积分就是这些和的共同极限.

> 假设 f 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续. f 从 a 到 b 的**定积分**, 记作 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, 是把 $[a,b]$ 分成 n 个相等的区间后所得左手和与右手和在 n 趋于无穷大时的极限. 换句话说, 如果 $t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是各小区间的端点, 那么

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}(\text{左手和}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t\right)$$

和

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}(\text{右手和}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t\right)$$

这些和都称作**黎曼和**, f 称作**被积函数**, a 和 b 叫做**积分限**.

符号 $\int$ 来自老式的、和 $\sum$ 以相同的方式表示求和的 S. 积分中的 $\mathrm{d}t$ 来自因子 Δt. 注意, 左手和中 $\sum$ 符号上的界限是 0 和 $n-1$, 右手和中是 1 和 n, 而 $\int$ 中的界限是 a 和 b.

如果 $f(t)$ 是正的, 左手和与右手和就是矩形的面积之和, 因此定积分从图形上来说就是面积.

计算定积分

在实践中, 我们通常用计算器或计算机近似地数值计算定积分. 它们求 n 越来越大时的和, 最终得到积分值. 不同的计算器或计算机可能会得到略有不同的估计值, 这主要是由于舍入误差以及它们可能采用的近似方法不同.

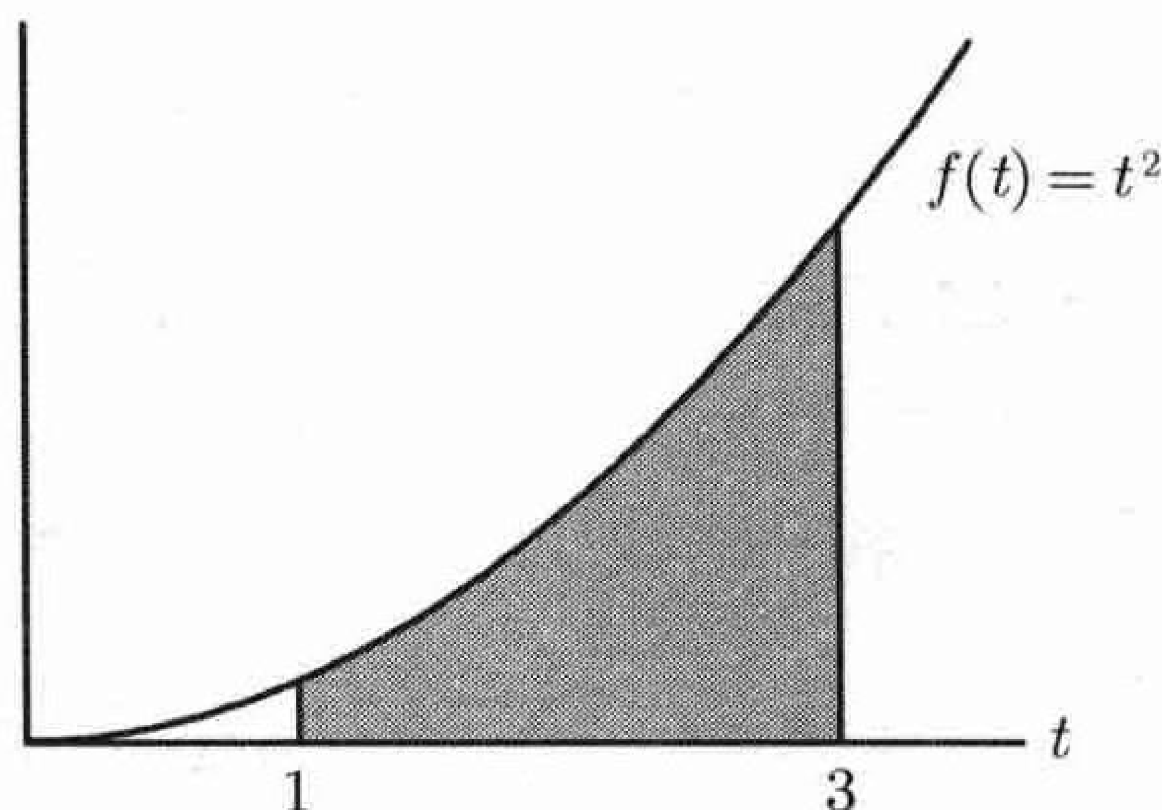


图 5-16 阴影面积 $=\int_1^3 t^2\mathrm{d}t$

例 2 计算 $\int_1^3 t^2\mathrm{d}t$, 并用面积表示该积分.

解 利用计算器, 我们求得

$$\int_1^3 t^2\mathrm{d}t = 8.667.$$

这个积分表示曲线 $f(t)=t^2$ 下方、$t=1$ 和 $t=3$ 之间的面积. 参见图 5-16. □

5.2.3 由表格或图形估算定积分

如果我们已知被积函数的表达式, 就能用计算器或计算机计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 如果我们仅知道 $f(x)$ 的函数值的表格或图形, 我们仍然能估计定积分.

例 3 函数 $f(t)$ 的值参见下表. 估计 $\int_{20}^{30} f(t)\mathrm{d}t$.

t	20	22	24	26	28	30
$f(t)$	5	7	11	18	29	45

解 由于我们只有函数值的表格, 我们用左手和与右手和去近似定积分. 函数 $f(t)$ 的值每隔 2 个单位给出, 因此 $\Delta t = 2, n = (30-20)/2 = 5$. 计算左手和与右手和得到

$$\begin{aligned}
\text{左手和} &= f(20)\cdot 2 + f(22)\cdot 2 + f(24)\cdot 2 + f(26)\cdot 2 + f(28)\cdot 2 \\
&= 5\cdot 2 + 7\cdot 2 + 11\cdot 2 + 18\cdot 2 + 29\cdot 2 \\
&= 10 + 14 + 22 + 36 + 90 \\
&= 140.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右手和} &= f(22)\cdot 2 + f(24)\cdot 2 + f(26)\cdot 2 + f(28)\cdot 2 + f(30)\cdot 2 \\
&= 7\cdot 2 + 11\cdot 2 + 18\cdot 2 + 29\cdot 2 + 45\cdot 2 \\
&= 14 + 22 + 36 + 58 + 90 \\
&= 220.
\end{aligned}$$

左手和与右手和都近似于该积分. 我们一般取两者的平均, 得一个更好的估计:

$$\int_{20}^{30} f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{140+220}{2} = 180.$$

□

例 4 函数 $f(t)$ 的图形参见图 5-17. 估计 $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$.

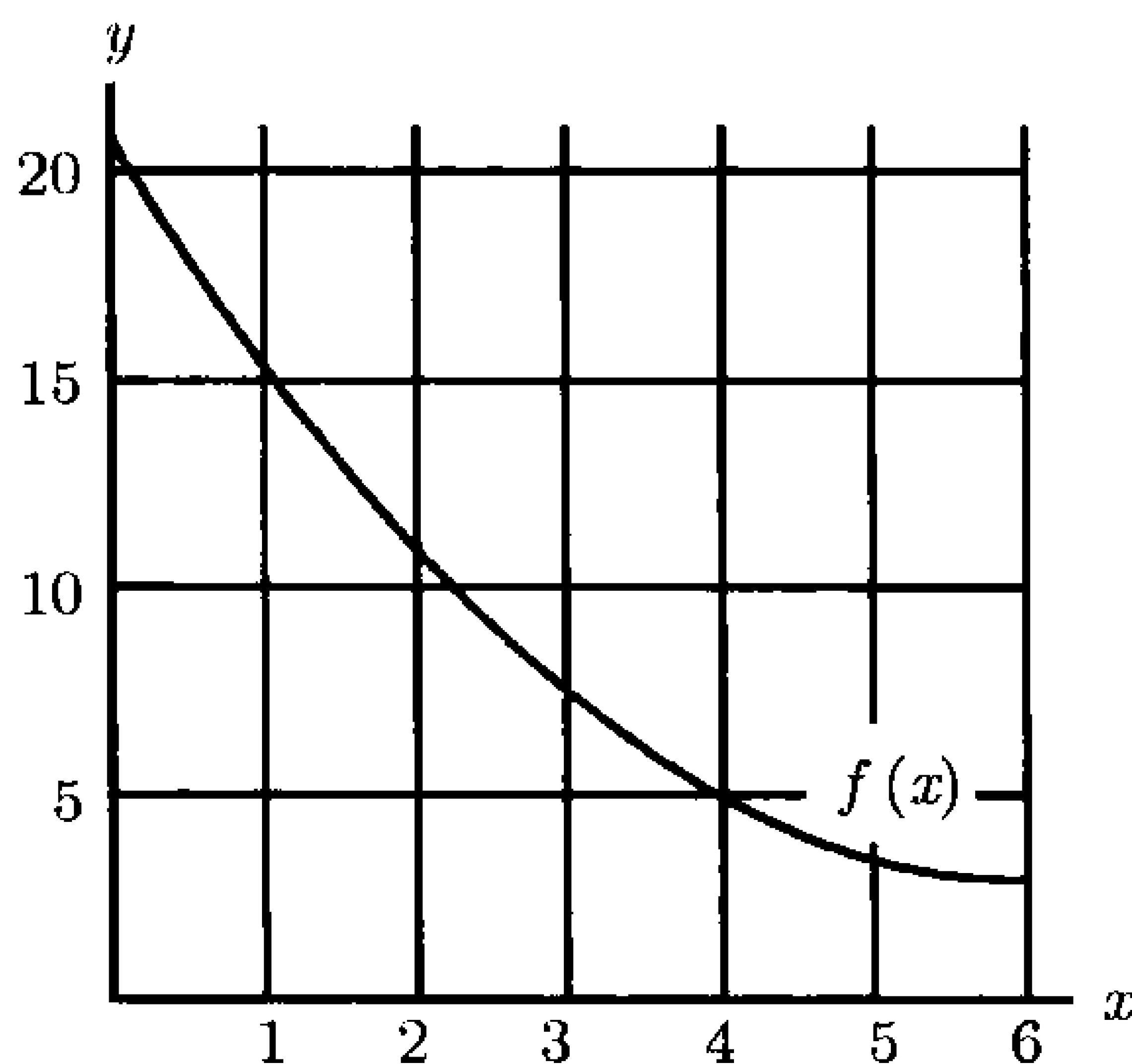


图 5-17 估计 $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$

解 利用 $n = 3, \Delta x = 2$ 时的左手和与右手和来近似积分. 由图 5-18 和图 5-19 得

$$\text{左手和} = f(0)\cdot 2 + f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 = 21\cdot 2 + 11\cdot 2 + 5\cdot 2 = 74,$$

$$\text{右手和} = f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 + f(6)\cdot 2 = 11\cdot 2 + 5\cdot 2 + 3\cdot 2 = 38.$$

取平均估计积分得

$$\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{74+38}{2} = 56.$$

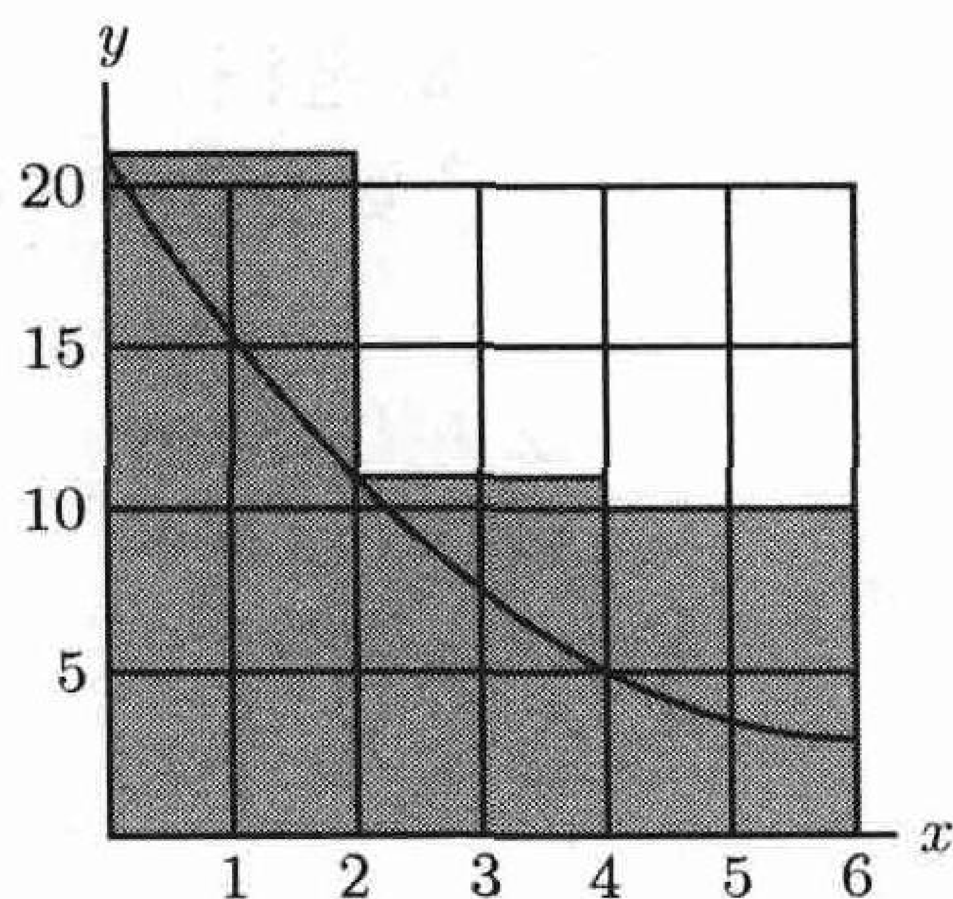


图 5-18　阴影区域的面积是 $n=3$ 时的左手和

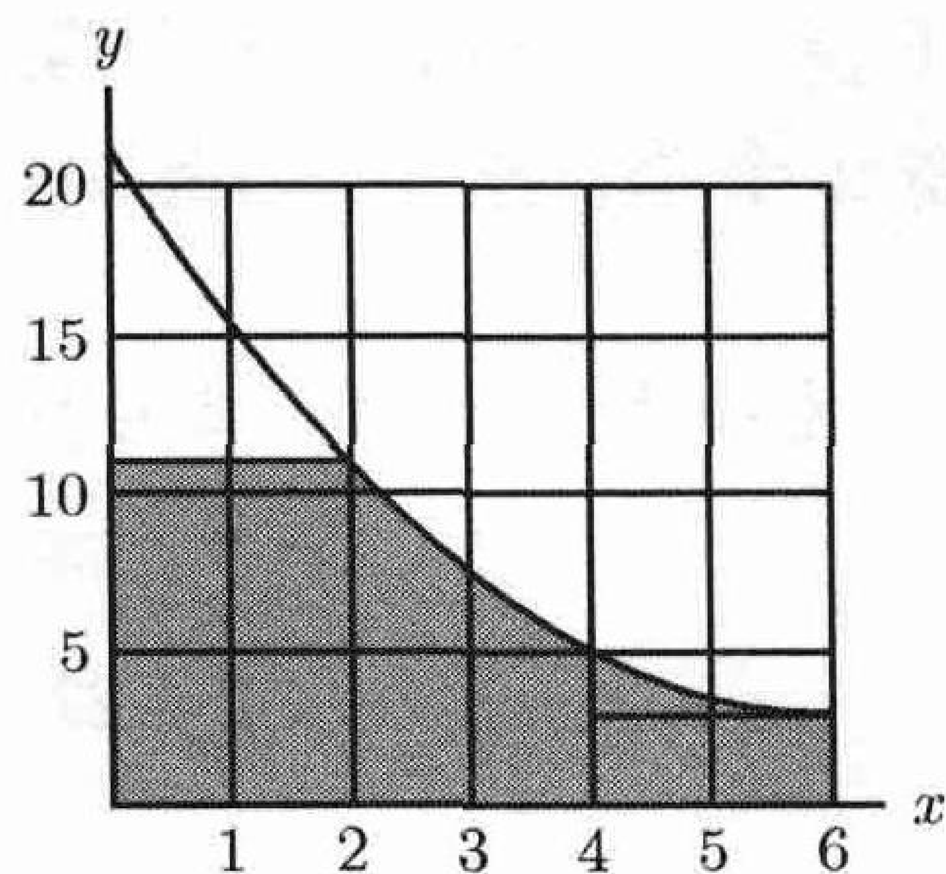


图 5-19　阴影区域的面积是 $n=3$ 时的右手和

另有一种方法, 由于积分等于曲线下方、$x=0$ 和 $x=6$ 之间的面积, 我们能通过计算格子数来估计它. 每个格子的面积为 $5\cdot1=5$, 而 $f(x)$ 下方的区域大约有 10.5 个格子, 因此面积大约为 $10.5\cdot5=52.5$. □

5.2.4　定积分的粗略估计

用计算器或计算机计算定积分时, 对你所预期的值有粗略的想法是有益的. 这对判断积分是否错误是有帮助的.

例 5　三个人用计算器计算 $\int_1^3\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, 得到 0.023, 11.984, 1.526. 说明你确信这三个值没有一个正确的理由.

解　图 5-20 是 $n=1$ 时的左手和与右手和近似 $\int_1^3\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 的图形. 我们看到右手和 $2(1/3)$ 是 $\int_1^3\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 的下估计. 由于 0.023 比 2/3 小, 因此这个值必然是错误的. 类似地, 我们看到 2(1) 是积分的上估计. 由于 11.984 比 2 大, 这个值是错误的. 由于图形上凹, 积分值离这两个和中的较小值 2/3 的距离比较大值 2 要近, 因此该积分比这两个和的平均值 4/3 小. 由于 $1.526>4/3$, 这个值也是错误的.

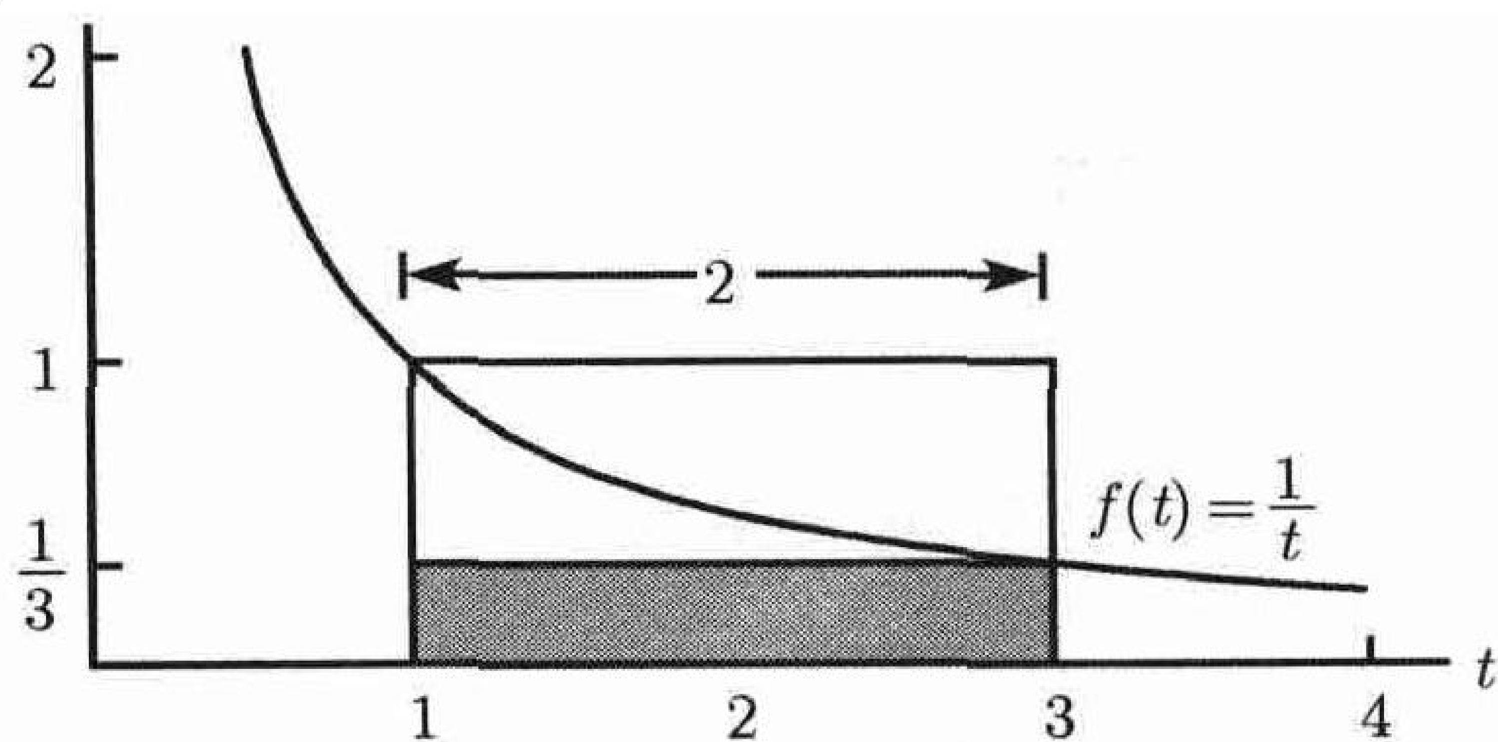


图 5-20　$n=1$ 时的左手和与右手和 □

习题

1. 利用下表估计 $\int_0^{25}f(x)\mathrm{d}x$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	100	82	69	60	53	49

2. 利用下表估计 $\int_3^4 W(t)\mathrm{d}t$. $n, \Delta t$ 分别是多少?

t	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
$W(t)$	25	23	20	15	9	2

3. 利用下表估计 $\int_0^{15} f(x)\mathrm{d}x$.

x	0	3	6	9	12	15
$f(x)$	50	48	44	36	24	8

4. 利用下表估计 $\int_0^{40} f(x)\mathrm{d}x$, 你所利用的 $n, \Delta t$ 分别是多少?

x	0	10	20	30	40
$f(x)$	350	410	435	450	460

5. 利用图 5-21, 用矩形表示区间 $0 \leqslant t \leqslant 8$ 上的函数 f 的以下各黎曼和, 并求各和的值.

(a) $\Delta t = 4$ 时的左手和

(b) $\Delta t = 4$ 时的右手和

(c) $\Delta t = 2$ 时的左手和

(d) $\Delta t = 2$ 时的右手和

6. 利用图 5-22 估计 $\int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x$.

7. 利用图 5-23 估计 $\int_{-10}^{15} f(x)\mathrm{d}x$.

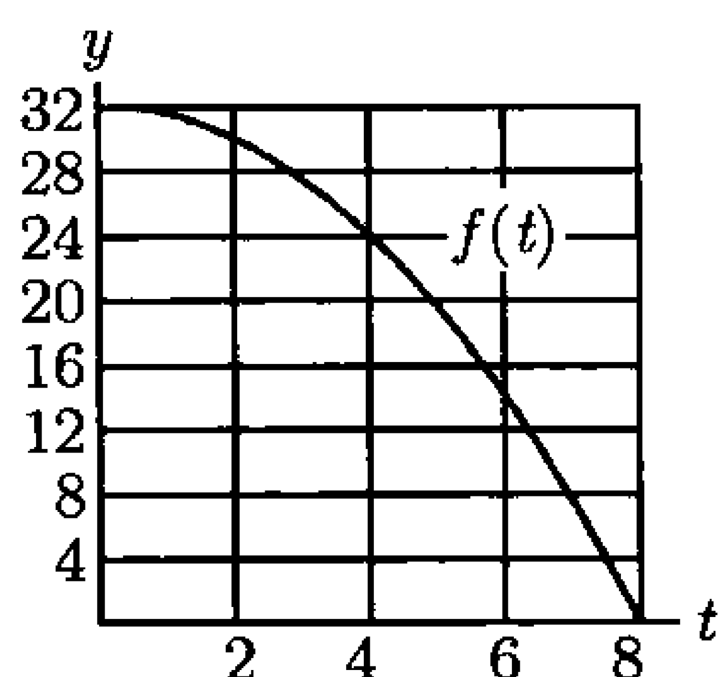


图 5-21

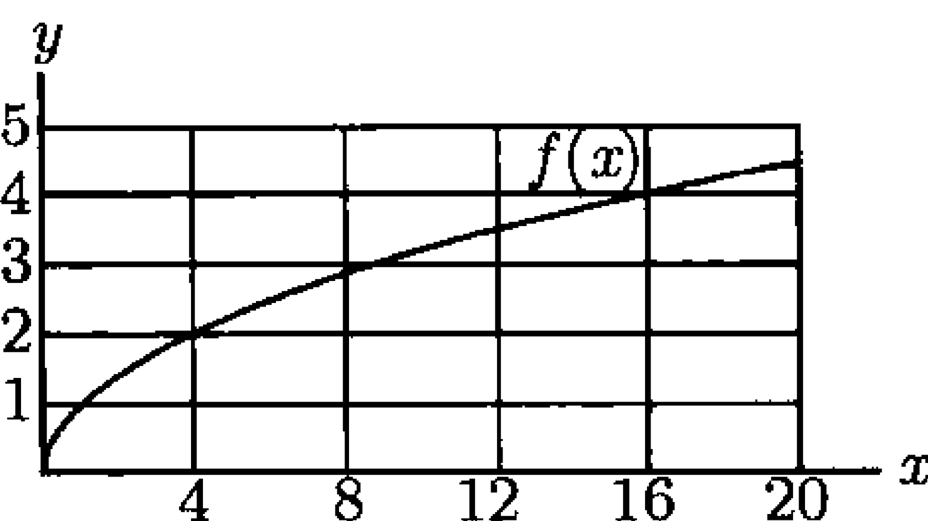


图 5-22

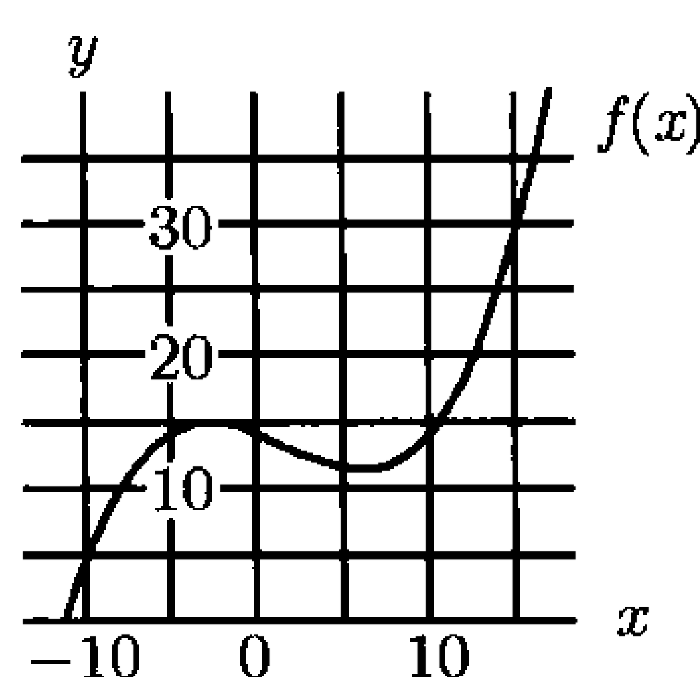
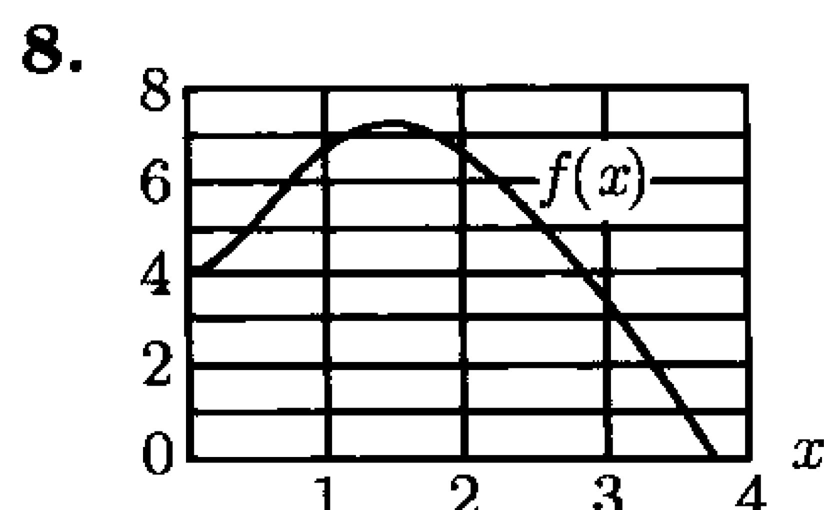


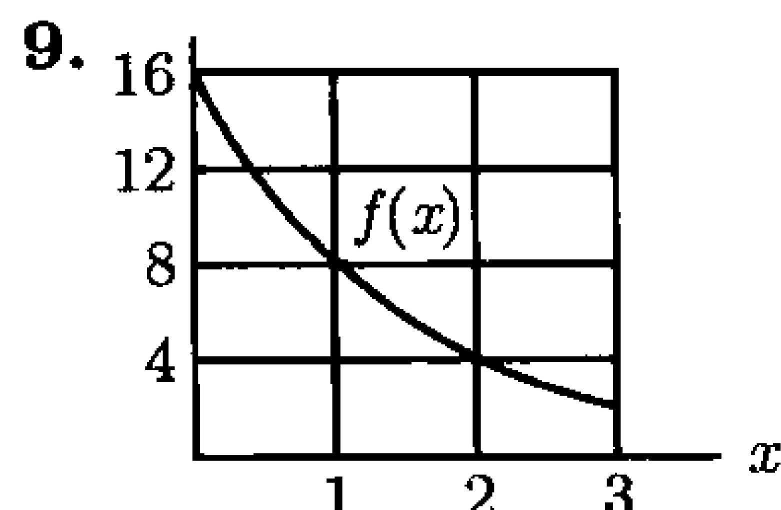
图 5-23

利用习题 8~9 的图估计 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

8.



9.



对习题 10~13:

(a) 利用被积函数的图形粗略地估计积分值，并说明你的理由.

(b) 利用计算器或计算机求定积分的值.

10. $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$

11. $\int_0^3 \sqrt{x} \mathrm{d}x$

12. $\int_0^1 3^t \mathrm{d}t$

13. $\int_1^2 x^x \mathrm{d}x$

14. 某个量的变化率为 $f(t) = t^2 + 1$. 利用

(a) $\Delta t = 4$ (b) $\Delta t = 2$ (c) $\Delta t = 1$

求该量在 $t = 0$ 和 $t = 8$ 之间的总变化量的上估计和下估计. 在各种情况下的 n 等于多少？画 $f(t)$ 和阴影矩形分别表示你的六个答案.

15. (a) 利用计算器或计算机求 $\int_0^6 (x^2 + 1)\mathrm{d}x$. 用曲线下方的面积表示该值.

(b) 利用 $n = 3$ 时的左手和估计 $\int_0^6 (x^2 + 1)\mathrm{d}x$. 在 $f(x) = x^2 + 1$ 的草图上表示这个和. 它是 (a) 部分所求得的真值的上估计还是下估计？

(c) 利用 $n = 3$ 时的右手和估计 $\int_0^6 (x^2 + 1)\mathrm{d}x$. 在你的草图上表示这个和. 它是上估计还是下估计？

16. 利用图 5-24，求 $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$.

17. 函数 $f(t)$ 的图形参见图 5-25. 下面四个数哪个可能是 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 精确到两个小数位的估计？说明你是如何选择答案的.

(a) −98.35 (b) 71.84 (c) 100.12 (d) 93.47

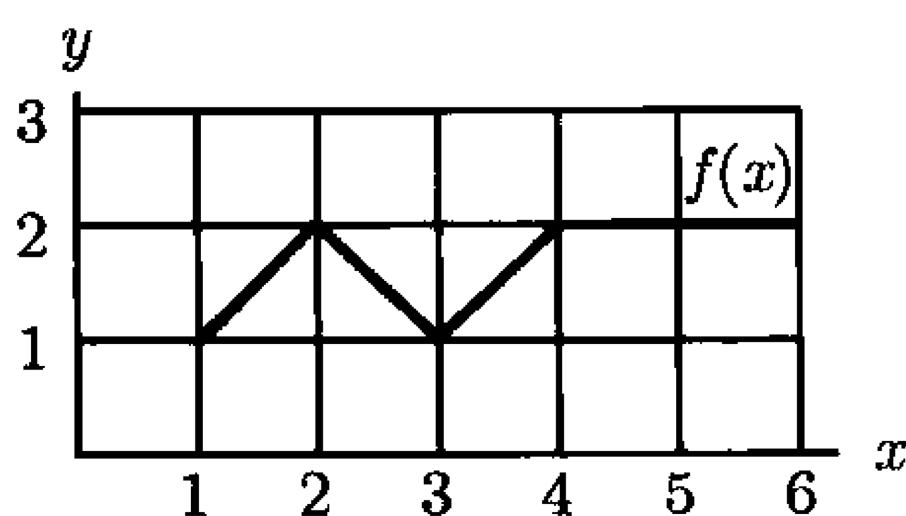


图 5-24

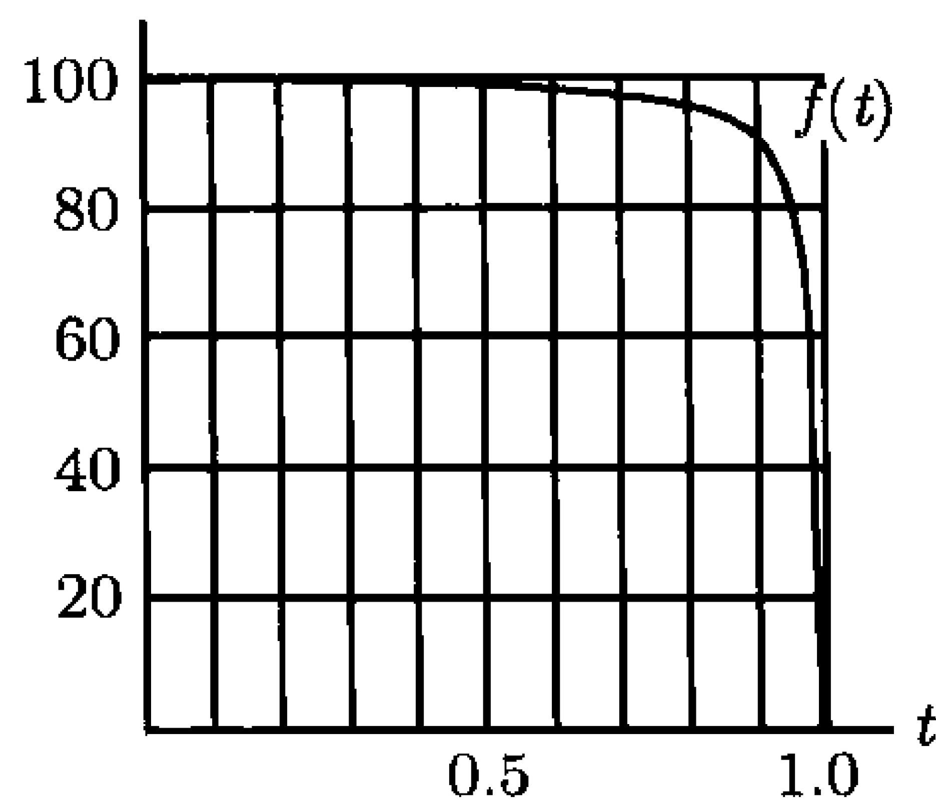


图 5-25

利用计算器或计算机计算习题 18~27 中的积分.

18. $\int_0^5 x^2 \mathrm{d}x$

19. $\int_1^5 (3x + 1)^2 \mathrm{d}x$

20. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \mathrm{d}x$

21. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t$

22. $\int_{1.1}^{1.7} 10(0.85)^t \mathrm{d}t$

23. $\int_1^2 2^x \mathrm{d}x$

24. $\int_1^2 (1.03)^t \mathrm{d}t$

25. $\int_1^3 \ln x \mathrm{d}x$

26. $\int_{1.1}^{1.7} \mathrm{e}^t \ln t \mathrm{d}t$

27. $\int_{-3}^{3} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$

28. 利用左手和与右手和的表达式及下表.

(a) 如果 $n = 4$, Δt 是多少? t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 是多少? $f(t_0), f(t_1), f(t_2), f(t_3), f(t_4)$ 又各是多少?

(b) 利用 $n = 4$ 求左手和与右手和.

(c) 如果 $n = 2$, Δt 是多少? t_0, t_1, t_2 是多少? $f(t_0), f(t_1), f(t_2)$ 又各是多少?

(d) 利用 $n = 2$ 求左手和与右手和.

t	15	17	19	21	23
$f(t)$	10	13	18	20	30

29. 利用左手和与右手和的表达式及下表.

(a) 如果 $n = 4$, Δt 是多少? t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 是多少? $f(t_0), f(t_1), f(t_2), f(t_3), f(t_4)$ 又各是多少?

(b) 利用 $n = 4$ 求左手和与右手和.

(c) 如果 $n = 2$, Δt 是多少? t_0, t_1, t_2 是多少? $f(t_0), f(t_1), f(t_2)$ 又各是多少?

(d) 利用 $n = 2$ 求左手和与右手和.

t	0	4	8	12	16
$f(t)$	25	23	22	20	17

5.3 作为面积的定积分

5.3.1 作为面积的定积分: 当 $f(x)$ 大于零时

如果 $f(x)$ 是连续函数并且大于零, 左、右黎曼和的每一项 $f(x_0)\Delta x, f(x_1)\Delta x, \cdots$ 都表示矩形的面积. 参见图 5-26. 随着矩形的宽度 Δx 趋于零, 矩形与曲线越来越吻合, 它们的面积之和越来越接近图 5-27 中曲线下方阴影部分的面积. 换句话讲,

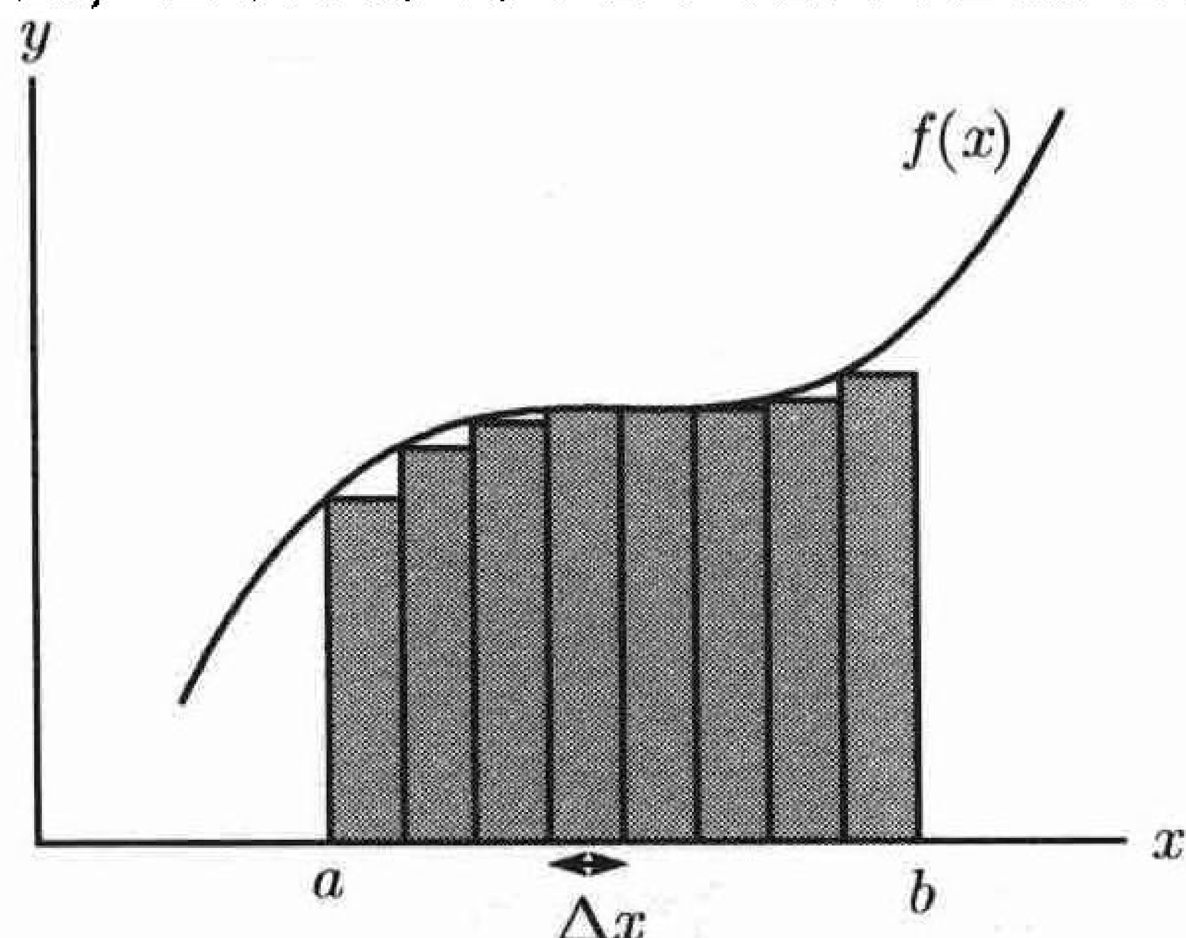


图 5-26 用来近似曲线下方阴影面积的多个矩形面积

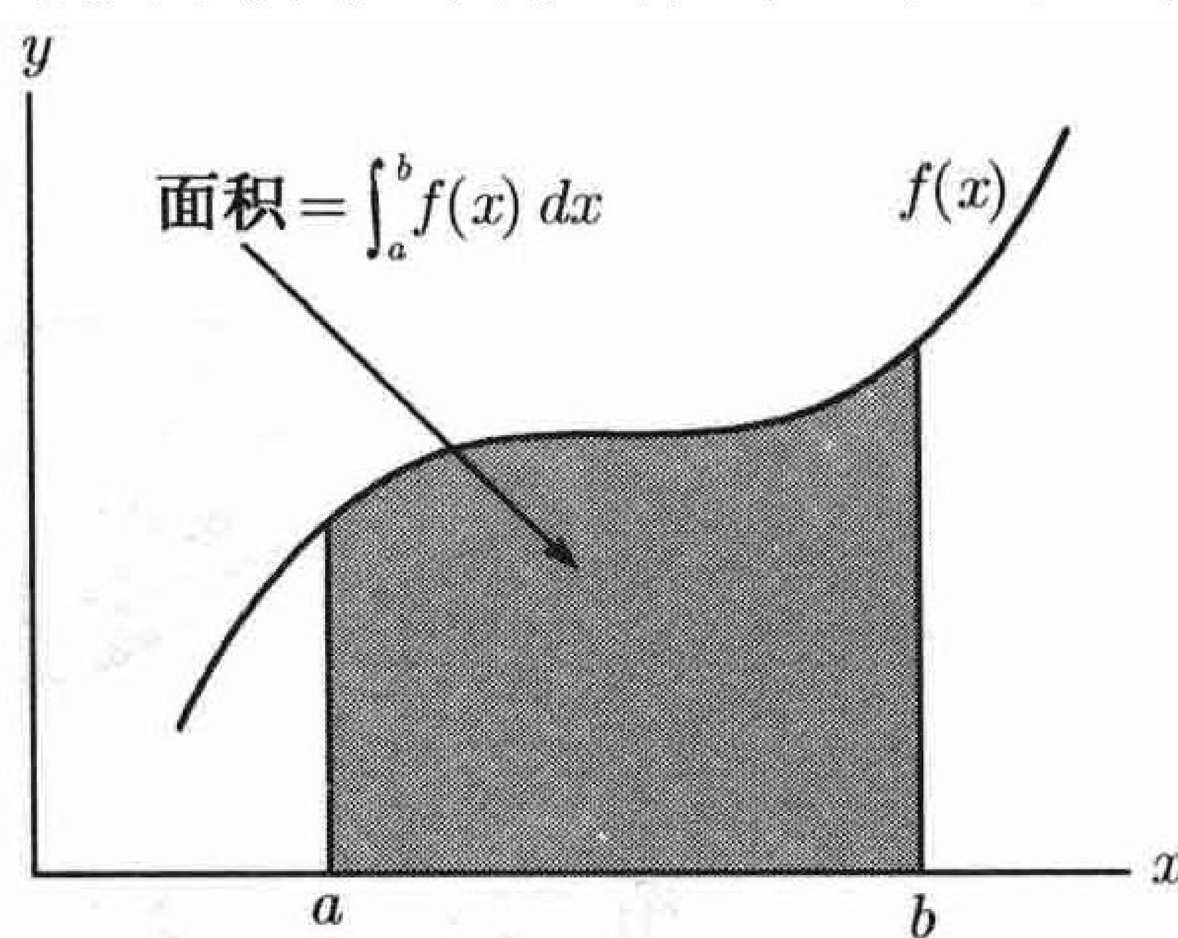


图 5-27 阴影部分面积是定积分 $= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

> 如果 $f(x)>0$ 且 $a<b$,
>
> $$f\text{ 图形下方在 } a \text{ 和 } b \text{ 之间的面积} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

例 1 求 $y=10x(3^{-x})$ 的图形下方在 $x=0$ 和 $x=3$ 之间的面积.

解 我们所求面积就是图 5-28 的阴影部分. 粗略估计这个面积为 6, 因为它与宽为 3, 高为 2 的矩形有大致相等的面积. 为更准确地求出面积, 我们有

$$\text{阴影面积} = \int_0^3 10x(3^{-x})\mathrm{d}x.$$

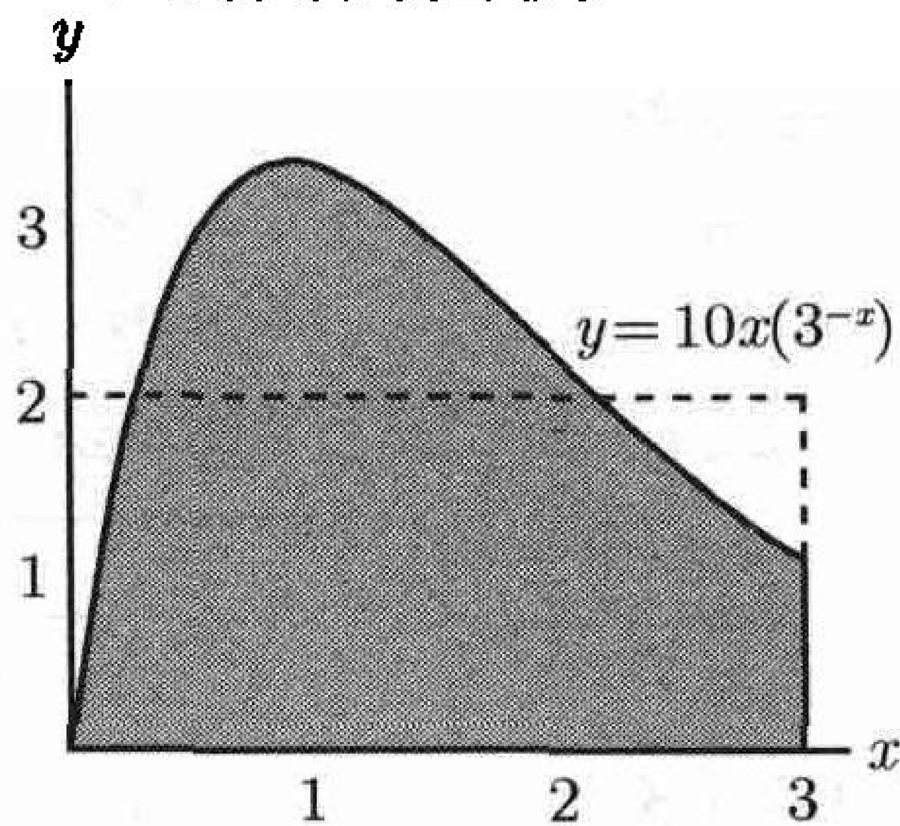


图 5-28 阴影面积 $=\int_0^3 10x(3^{-x})\mathrm{d}x$

利用计算器或计算机估计这个积分, 我们得

$$\text{阴影面积} = \int_0^3 10x(3^{-x})\mathrm{d}x = 6.967 \approx 7 \text{ 平方单位}.$$ □

5.3.2 定积分和面积之间的关系: 当 $f(x)$ 非正

在画图 5-27 时, 我们假设 $f(x)$ 的图形位于 x 轴上方. 如果图形位于 x 轴下方, 那么 $f(x)$ 的每个值都为负, 从而每个 $f(x)\Delta x$ 都是负的, 所得数为面积的相反数. 在那种情况下, 定积分是 f 的图形与水平轴之间面积的相反数.

例 2 定积分 $\int_{-1}^1 (x^2-1)\mathrm{d}x$ 与抛物线 $y=x^2-1$ 和 x 轴之间的面积的关系如何?

解 $x=-1$ 和 $x=1$ 之间的抛物线位于 x 轴下方. (参见图 5-29.) 因此,

$$\int_{-1}^1 (x^2-1)\mathrm{d}x = -\text{面积} = -1.33.$$

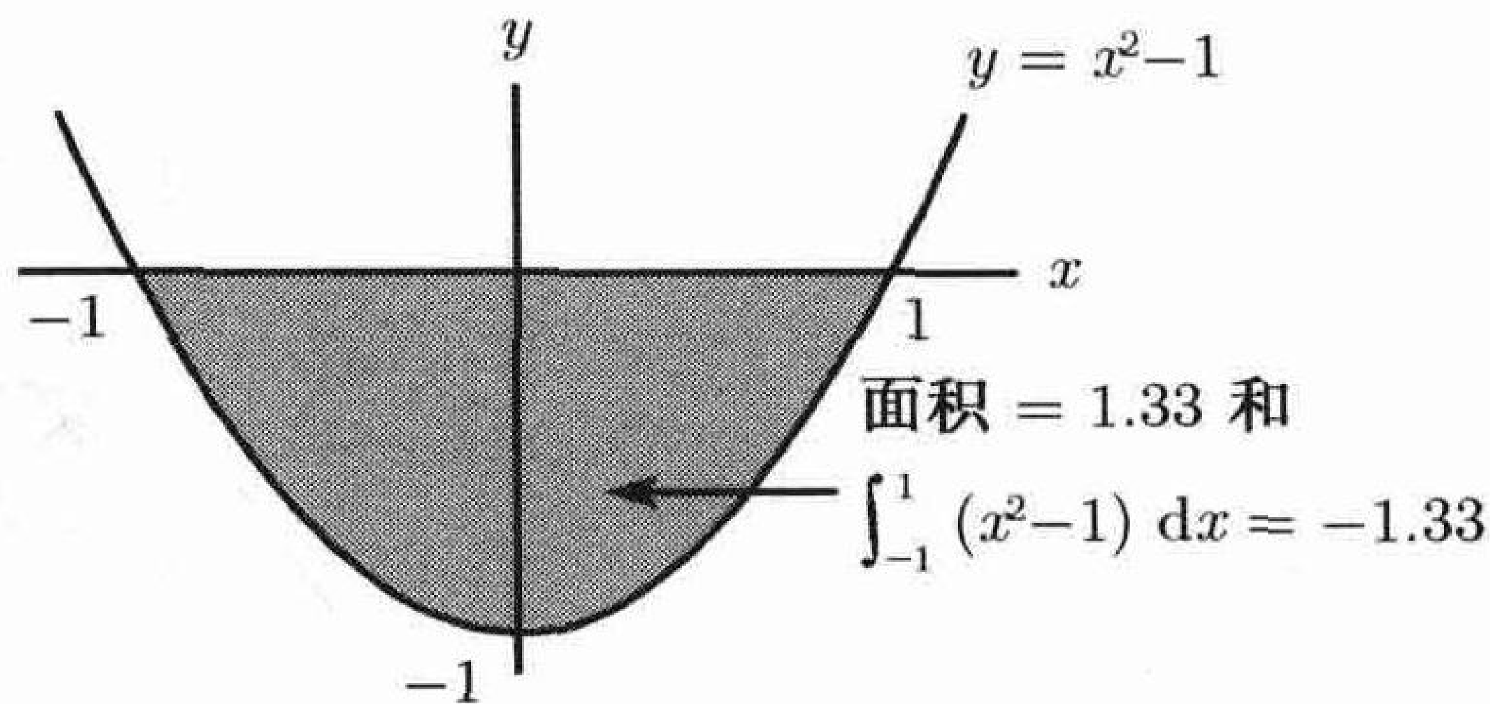


图 5-29 定积分 $\int_{-1}^1 (x^2-1)\mathrm{d}x$ 是阴影部分面积的相反数 □

总之, 若 $f(x)$ 是连续函数, 我们有

> **若$f(x)$ 在某些 x 处为正, 在其他点处为负且 $a < b$, 那么**
> $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是 x 轴上方的面积 (以正数计) 和 x 轴下方的面积 (以负数计) 之和.

我们在下面的例子中分解定积分. 保证我们如此做的性质见章末相关理论部分.

例 3 用面积描述定积分 $\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x$.

解 图 5-30 表明函数 $x^3 - 7x^2 + 11x$ 的图形大约在 $x = 2.38$ 处穿过 x 轴落在 x 轴下方. 定积分就是 x 轴上方的面积 A_1 减去 x 轴下方的面积 A_2. 利用计算器或计算机计算定积分得

$$\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x = 2.67.$$

把定积分分成两部分并分别计算得

$$\int_0^{2.38} (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x = 7.72 \quad 及 \quad \int_{2.38}^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x = -5.05.$$

于是 $A_1 = 7.72$, $A_2 = 5.05$. 所以正如我们所预知的,

$$\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 = 7.72 - 5.05 = 2.67.$$

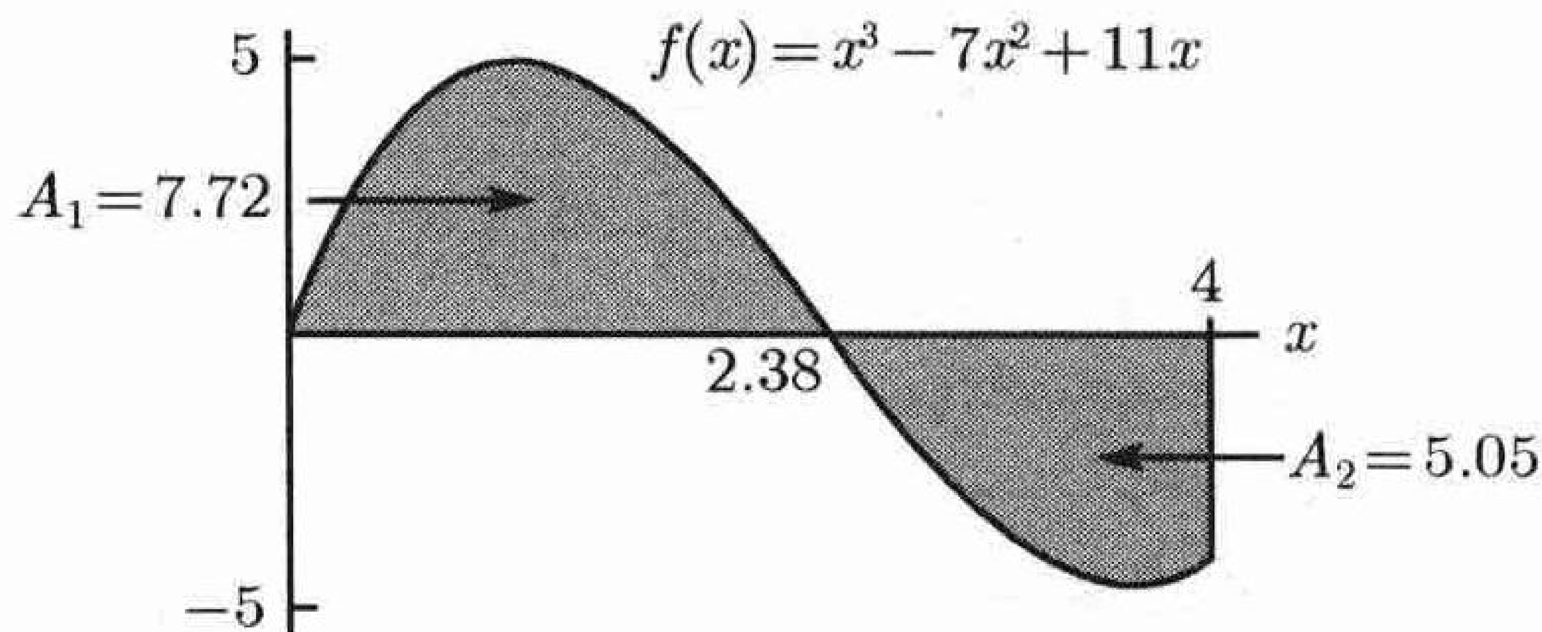


图 5-30 定积分 $\int_0^4 (x^3 - 7x^2 + 11x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2$ □

例 4 求图 5-30 中阴影部分的总面积.

解 由例 3 我们有 $A_1 = 7.72$, $A_2 = 5.05$. 因此我们得到

$$\text{阴影部分的总面积} = A_1 + A_2 = 7.72 + 5.05 = 12.77.$$ □

例 5 对图 5-31 中的每个函数, 判断 $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ 是正, 是负还是几乎为零?

解 (a) 图形几乎完全落在 x 轴下方, 因此定积分是负的.

(b) 图形一部分落在 x 轴上方, 一部分落在 x 轴下方. 但是 x 轴上方的面积大于 x 轴下方的面积, 因此定积分是正的.

(c) 图形一部分落在 x 轴上方, 一部分落在 x 轴下方. 由于 x 轴上方的面积与 x 轴下方的面积看上去大小几乎一样, 因此定积分几乎为零. □

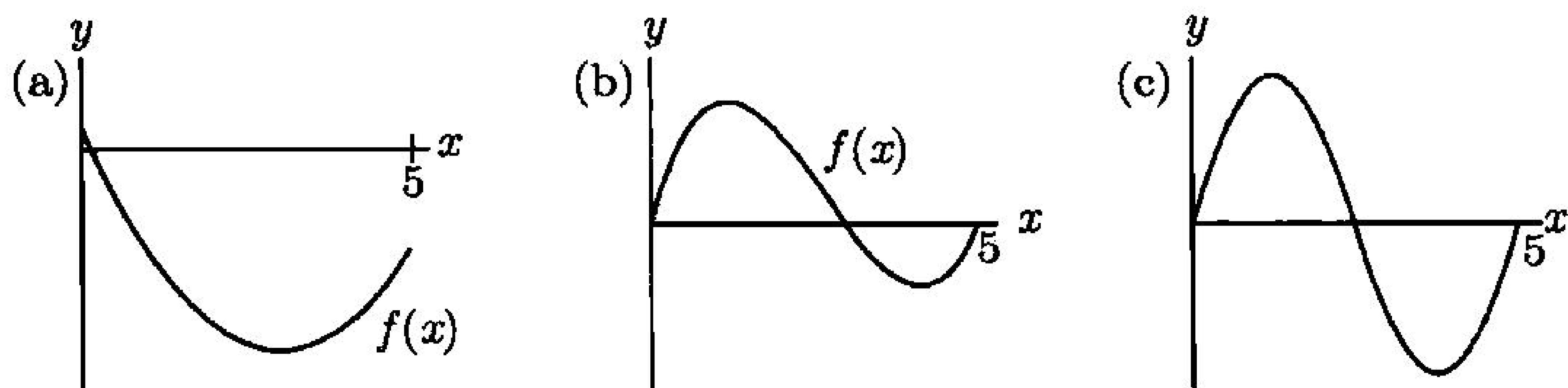


图 5-31 $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ 是正, 是负还是零

5.3.3 两条曲线间的面积

我们能利用矩形近似两条曲线间的面积. 若 $g(x) \leqslant f(x)$(如图 5-32), 矩形的高为 $f(x)-g(x)$. 矩形的面积为 $(f(x)-g(x))\Delta x$, 我们有如下的结果.

> 如果 $g(x) \leqslant f(x), a \leqslant x \leqslant b$, 那么
> 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上, $f(x), g(x)$ 间的面积 $= \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x$.

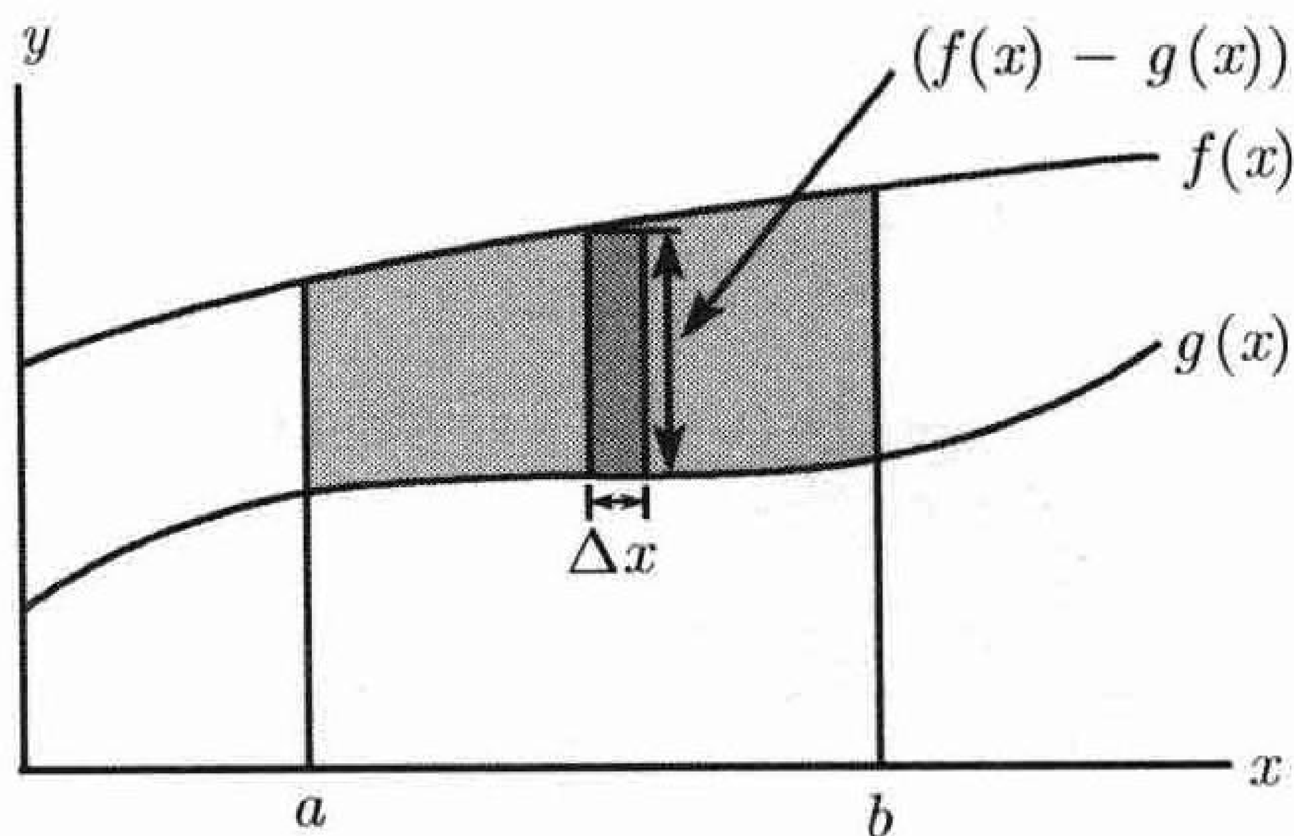


图 5-32 两条曲线间的面积 $= \int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x$

例 6 $f(x)=4x-x^2, g(x)=\frac{1}{2}x^{3/2}$ 在 $x \geqslant 0$ 时的图形如图 5-33. 利用定积分估计由这两个函数的图形所围面积.

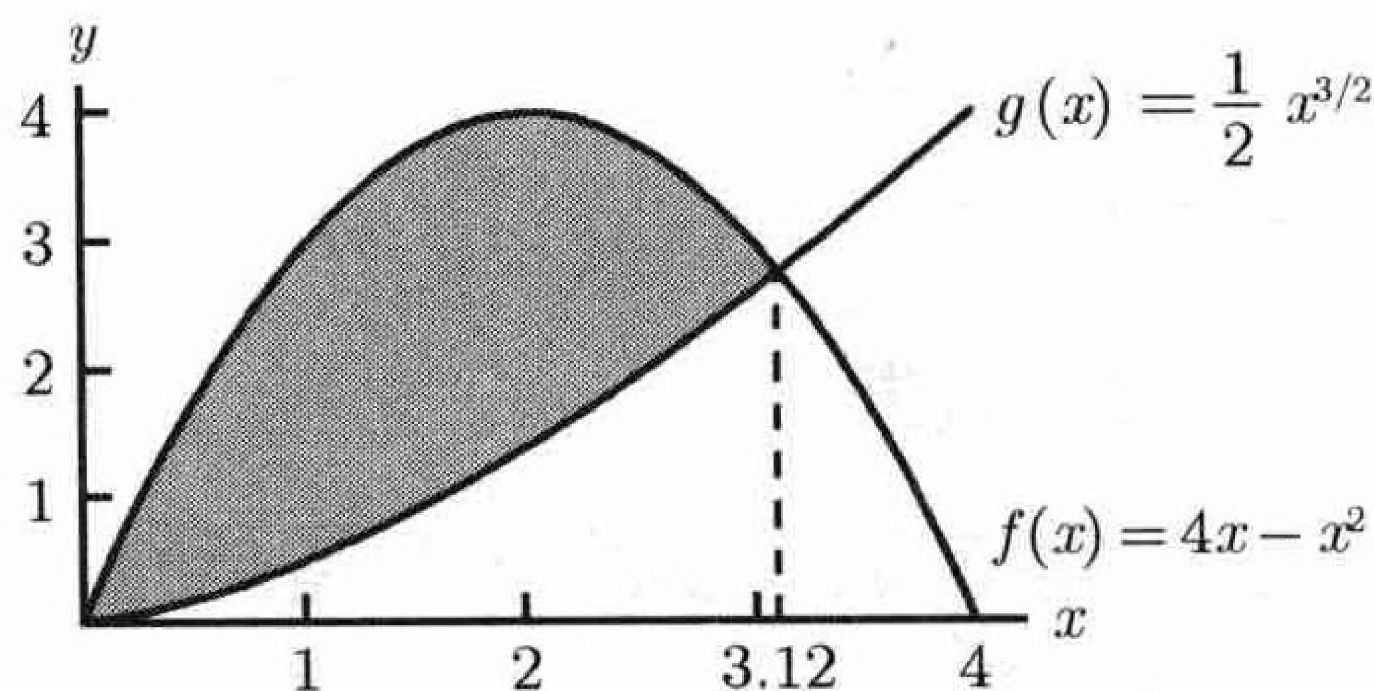


图 5-33 利用定积分求 $f(x)=4x-x^2$ 和 $g(x)=\frac{1}{2}x^{3/2}$ 之间的面积

解 由这两个函数的图形所围区域为图 5-33 的阴影部分. 这两个图形在 $x=0$ 和 $x \approx 3.12$ 处相交. 在这两个数之间, $f(x)=4x-x^2$ 的图形位于 $g(x)=\frac{1}{2}x^{3/2}$ 的图

形之上. 利用计算器或计算机估计积分, 我们得到

$$\text{图形间的面积} = \int_0^{3.12} \left((4x - x^2) - \frac{1}{2}x^{3/2}\right)\mathrm{d}x = 5.906. \qquad \square$$

习题

1. 求 $P = 100(0.6)^t$ 下方、$t=0, t=8$ 之间的面积.

2. 求 $y = x^3 + 2$ 下方、$x=0, x=2$ 之间的面积, 并画出这个区域.

3. **(a)** 图 5-34 中在 $x=0, x=5$ 之间的 $f(x)$ 的图形与 x 轴之间的面积.

(b) $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ 等于多少?

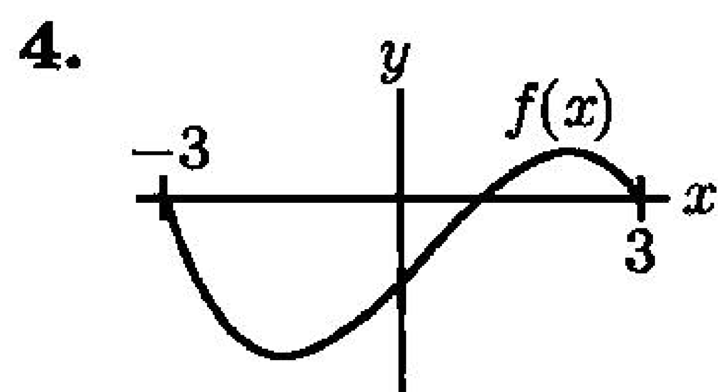
面积 = 7

面积 = 6

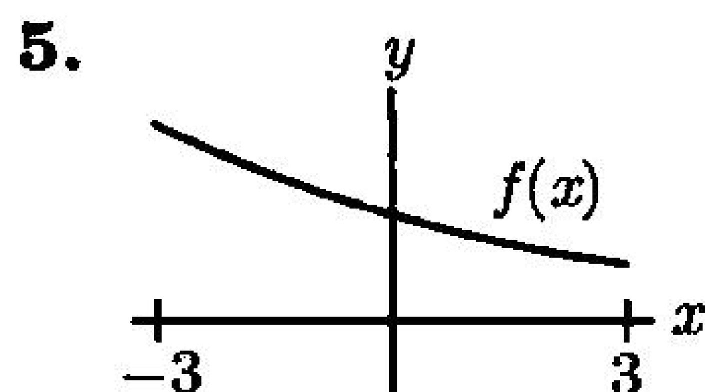
图 5-34

对习题 4~7 中的函数, 判断 $\int_{-3}^3 f(x)\mathrm{d}x$ 是正, 是负还是几乎为零?

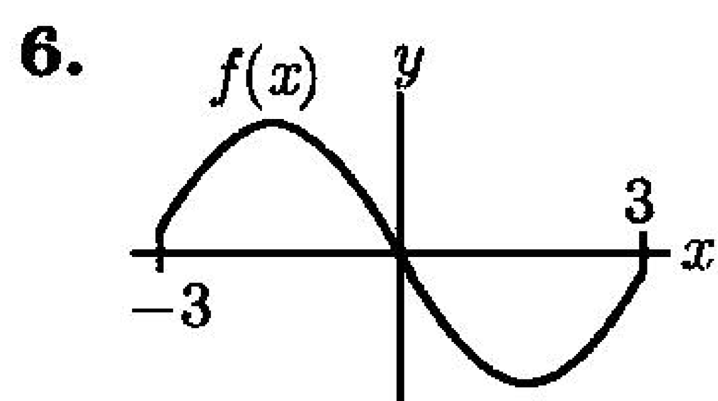
4.



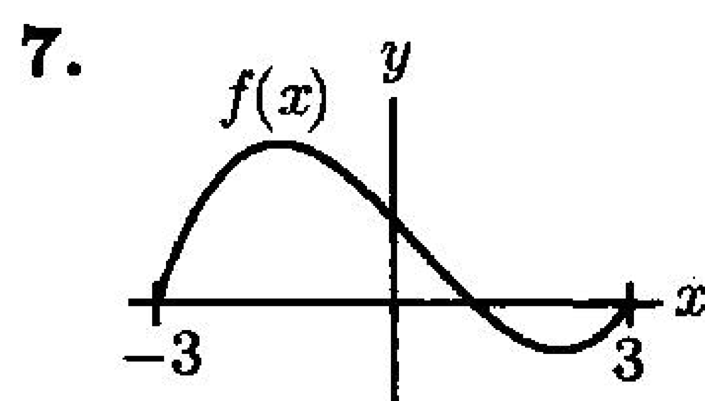
5.



6.



7.



8. **(a)** (通过计算正方形的个数) 估计图 5-35 中阴影部分的总面积.

(b) 利用图 5-35, 估计 $\int_0^8 f(x)\mathrm{d}x$.

(c) 为什么你 (a)、(b) 两部分的答案不同?

9. 利用图 5-36, 估计 $\int_{-3}^5 f(x)\mathrm{d}x$.

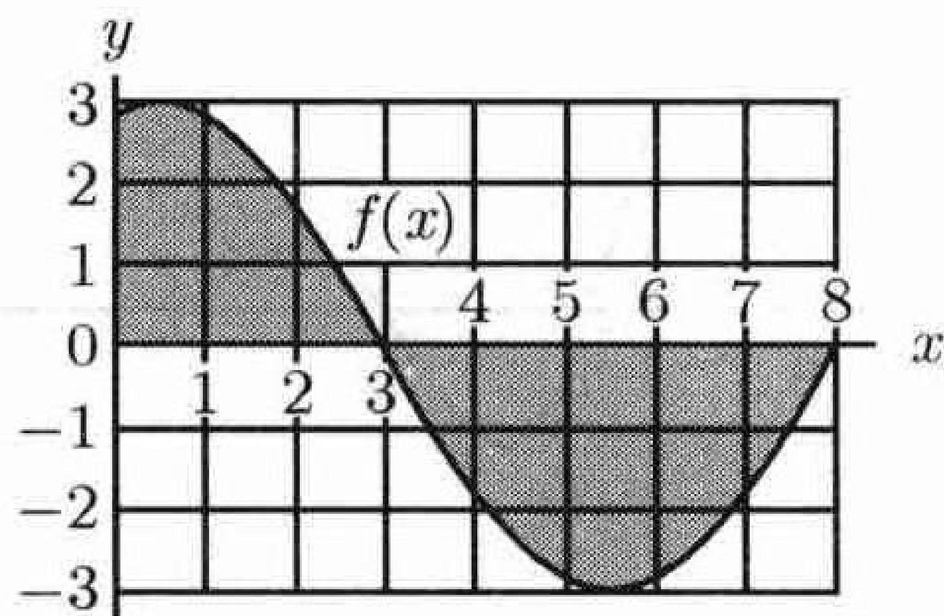


图 5-35

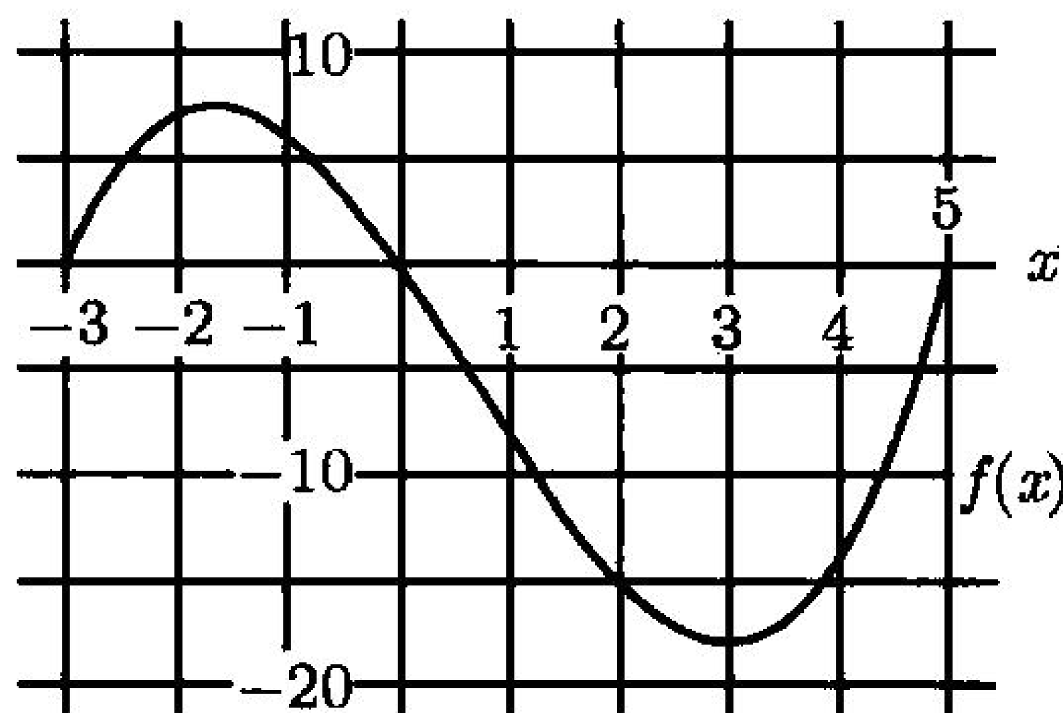


图 5-36

10. 若已知 $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = 0.25$ 和图 5-37, 估计

(a) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ **(b)** $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ **(c)** 阴影部分总面积

11. 若已知 $\int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 4$ 和图 5-38, 估计

(a) $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$　(b) $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$　(c) 阴影部分总面积

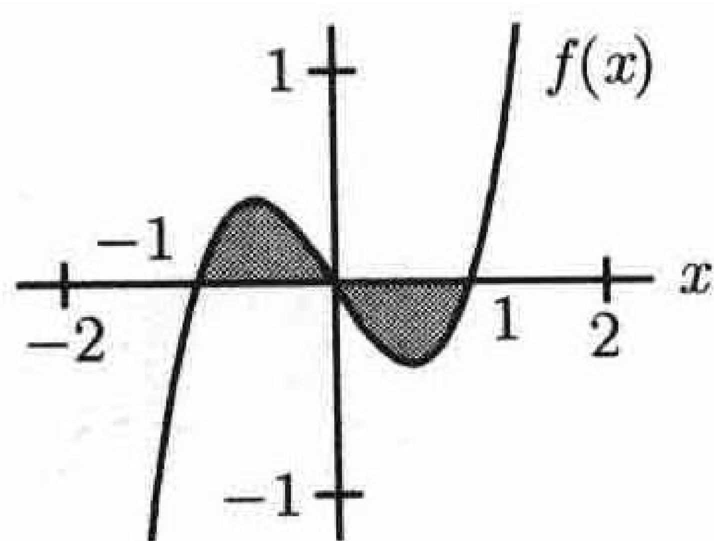


图 5-37

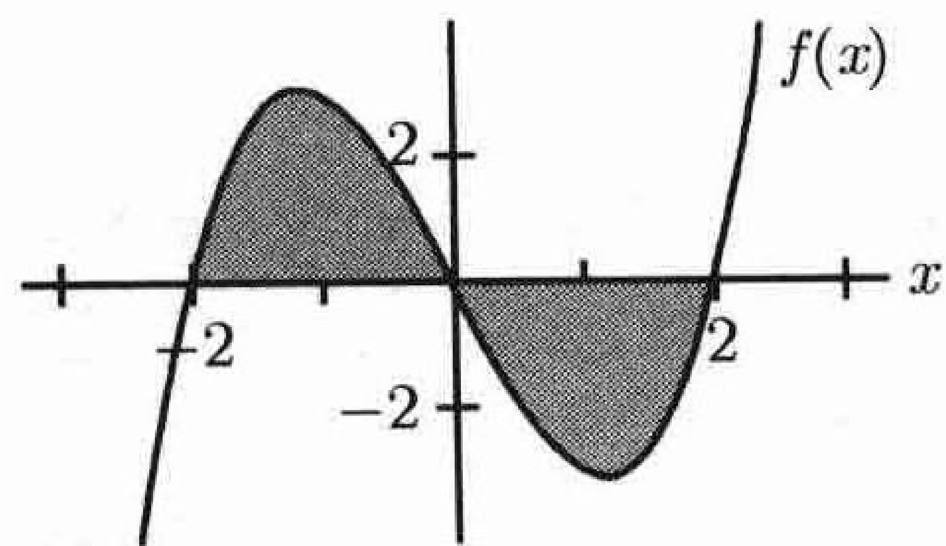
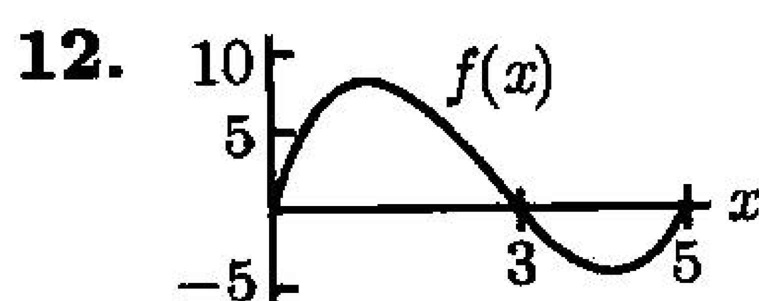


图 5-38

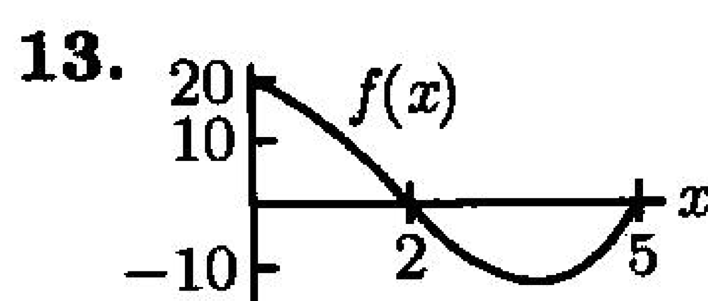
对习题 12~15, 把下面 $\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x$ 的可能值与图形对应起来.

Ⅰ. −10.4　Ⅱ. −2.1　Ⅲ. 5.2　Ⅳ. 10.4

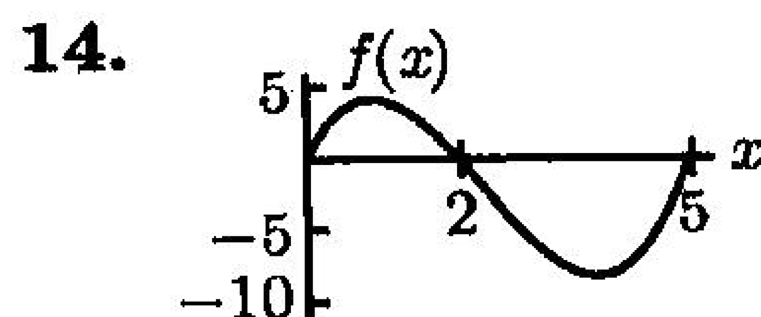
12.



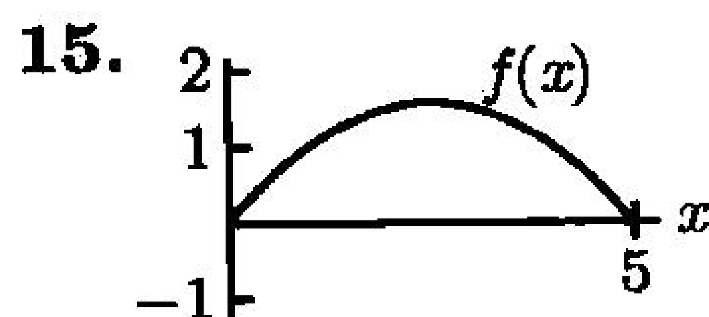
13.



14.



15.



16. 利用图 5-39 求下列值:

(a) $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$　(b) $\int_{b}^{c} f(x)\mathrm{d}x$　(c) $\int_{b}^{c} f(x)\mathrm{d}x$　(d) $\int_{a}^{c} |f(x)|\mathrm{d}x$

17. 利用图 5-40 把下列定积分按递增的顺序 (从小到大) 排列. 哪些是正的, 哪些是负的? 请说明理由.

Ⅰ. $\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$　Ⅱ. $\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$

Ⅲ. $\int_{a}^{e} f(x)\mathrm{d}x$　Ⅳ. $\int_{b}^{e} f(x)\mathrm{d}x$　Ⅴ. $\int_{b}^{c} f(x)\mathrm{d}x$

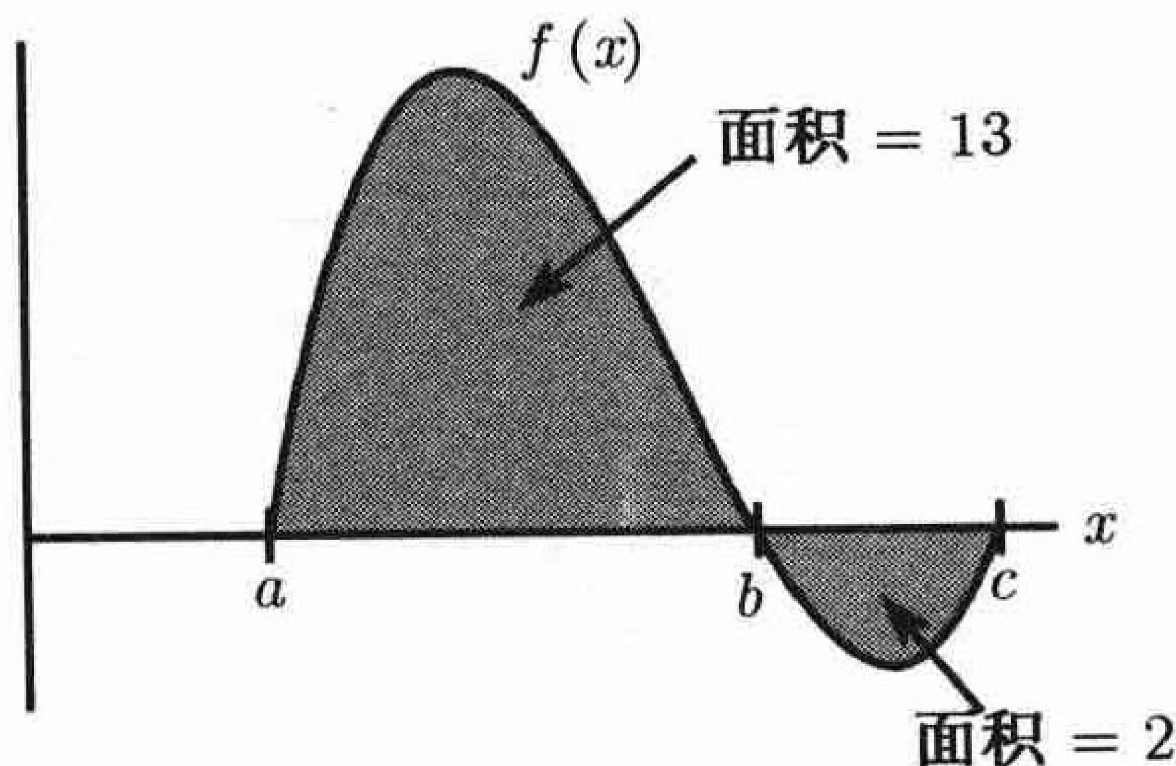


图 5-39

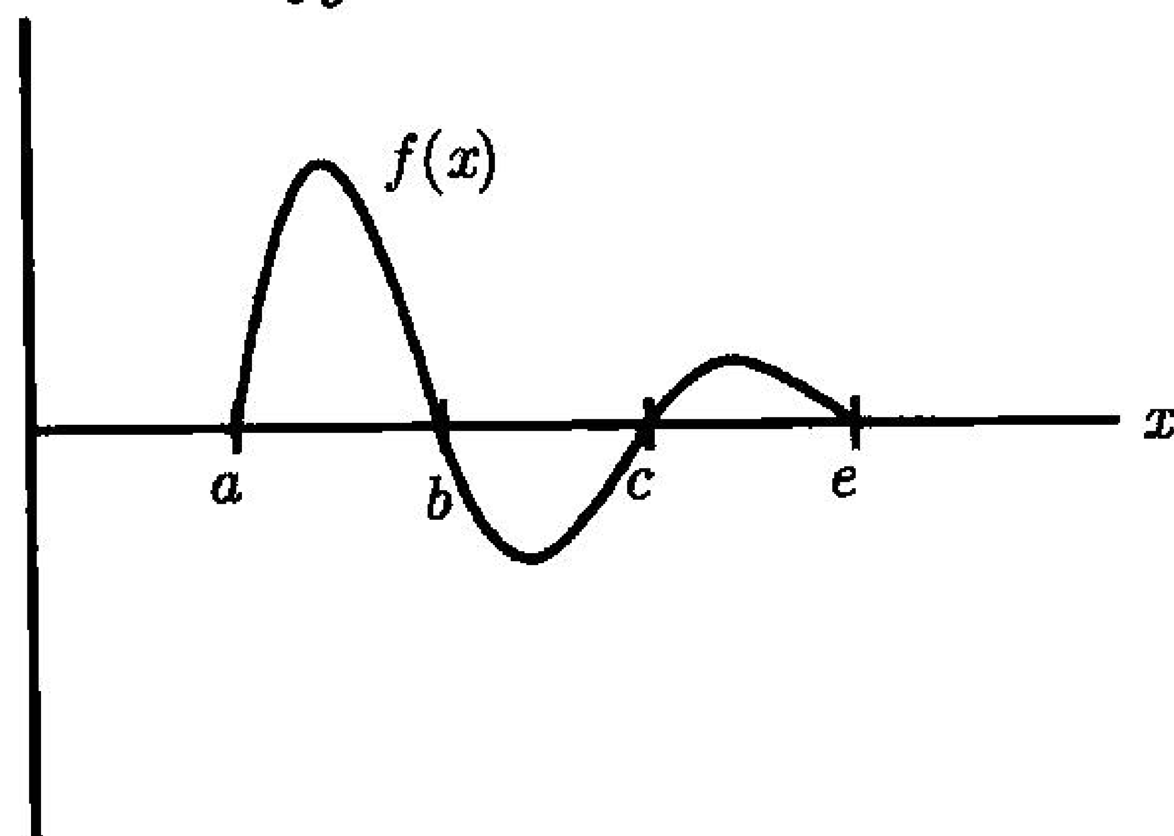


图 5-40

18. (a) 画 $f(x) = x(x+2)(x-1)$ 的略图.

(b) 求图形与 x 轴, $x=-2$, $x=1$ 所围面积.

(c) 求 $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ 并用面积解释这个积分.

19. 求 $y = x^2 - 2$ 的图形与 x 轴, $x = 0$, $x = 3$ 所围面积.

20. 计算定积分 $\int_0^4 \cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$, 并用面积解释所得结果.

21. (a) 利用图 5-41 求 $\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

(b) 如果阴影区域的面积为 A, 估计 $\int_{-3}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

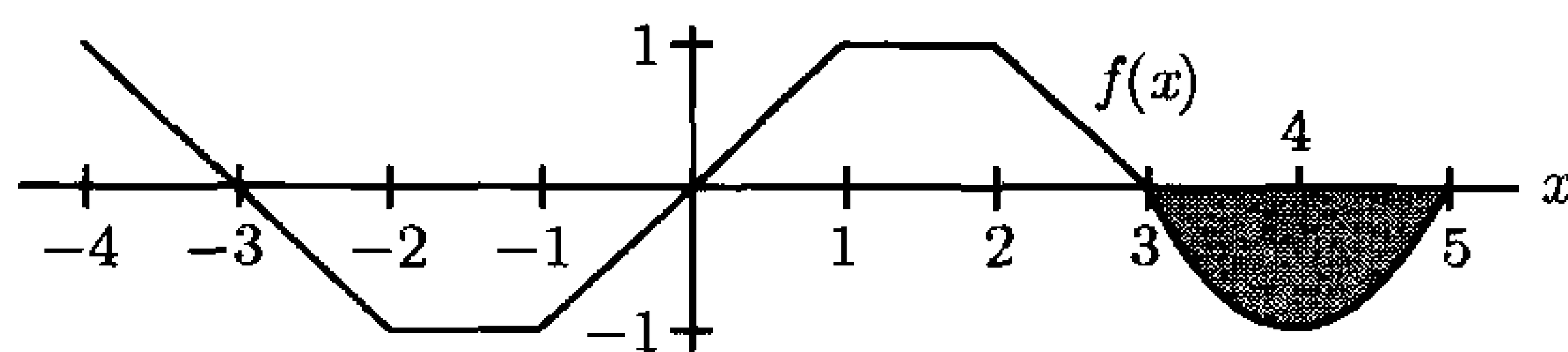


图 5-41

22. 利用下表估计 $f(x)$ 及 x 轴之间在区间 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 上的面积.

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	15	18	20	16	12

计算 23~24 题的定积分, 并用面积解释所得结果.

23. $\int_1^4 \frac{x^2-3}{x}\mathrm{d}x$.

24. $\int_1^4 (x - 3\ln x)\mathrm{d}x$.

对习题 25~32, 利用定积分求指定区域的面积.

25. $5 \leqslant x \leqslant 10$ 上 $y = 6x^3 - 2$ 下方.

26. $1 \leqslant t \leqslant 2$ 上 $y = 2\cos(t/10)$ 下方.

27. $3 \leqslant x \leqslant 5$ 上 $y = 5\ln(2x)$ 下方、$y = 3$ 上方.

28. $6 \leqslant x \leqslant 10$ 上 $y = \sin x + 2$ 及 $y = 0.5$ 之间.

29. $5 \leqslant x \leqslant 7$ 上 $y = \cos x + 7$ 及 $y = \ln(x-3)$ 之间

30. 曲线 $y = x^4 - 8$ 上方、x 轴以下.

31. 曲线 $y = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2(x-1)}, x \geqslant 0$ 上方、x 轴以下.

32. $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上 $y = \cos t$ 下方及 $y = \sin t$ 以上.

5.4 定积分的解释

5.4.1 定积分的记号及单位

正如导数的莱布尼茨记号 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 提醒我们导数是差商的极限, 定积分的记号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 使我们想起定积分是和的极限. 积分号是变形的 S. 由于相加的项是形如 "$f(x)$ 乘 x 的增量" 的乘积, 我们有如下的结论.

> $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的计量单位就是 $f(x)$ 的单位与 x 的单位的乘积.

比如, 如果 x 和 $f(x)$ 具有相同的计量单位, 那么积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 以平方单位计量, 比如 cm×cm=cm^2. 定积分表示面积, 这恰是我们所预期的.

类似地, 如果 $f(t)$ 是以 m/s 为单位的速度, t 时以秒为单位的时间, 那么积分 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的单位是 m/s×s=m, 这恰是我们所料想到的, 因为定积分表示位移. 在 5.1 节中, 我们看到能够用由变化率构造的黎曼和近似总变化量. 总之, 我们有

> 如果 $f(t)$ 是某量的变化率, 则
> $$t=a \text{ 和 } t=b \text{ 之间的总变化量} = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

单位相应地为: 如果 $f(t)$ 是单位为量/时间的变化率, 则 $f(t)\Delta t$ 和定积分的单位是 (量/时间)× 时间 = 量.

例 1 某菌群最初有 14 百万细菌. 假设 t 小时后, 细菌数量以 $f(t)=2^t$ 百万细菌/小时的速度增长.

(a) 用定积分表示在从 $t=0$ 到 $t=2$ 这段时间内细菌数量的总变化量.

(b) 求 $t=2$ 时的细菌数量.

解 (a) 由于 $f(t)=2^t$ 是细菌数量的变化率, 我们有

$$t=0 \text{ 到 } t=2 \text{ 这段时间内细菌数量的变化量} = \int_0^2 2^t\mathrm{d}t.$$

利用计算器, 我们求得 $\int_0^2 2^t\mathrm{d}t=4.328$. 细菌数量在 $t=0$ 时是 14 百万, 且 $t=0$ 到 $t=2$ 这段时间内增长 4.328 百万, 因此 $t=2$ 时,

$$\text{细菌数量}=14+4.328=18.328 \text{ 百万细菌}.$$ □

例 2 假设 $C(t)$ 表示每天为房子供暖的成本 (单位: 美元/天), 其中 t (单位: 天) 是时间, 且 $t=0$ 代表 2005 年 1 月 1 日. 解释 $\int_0^{90} C(t)\mathrm{d}t$.

解 积分 $\int_0^{90} C(t)\mathrm{d}t$ 的单位是 (美元/天)× 天 = 美元. 积分表示 2005 年前 90 天 (即 1 月、2 月、3 月), 房子供暖的成本 (单位: 美元). □

例 3 某男人在离他家 50 mile 的地方驾车出发开始旅行. 他沿直线走, 且他家在这条直线上. 他的速度参见图 5-42.

(a) 何时这个男人离家最近? 此时他离家多远?

(b) 何时这个男人离家最远? 此时他离家多远?

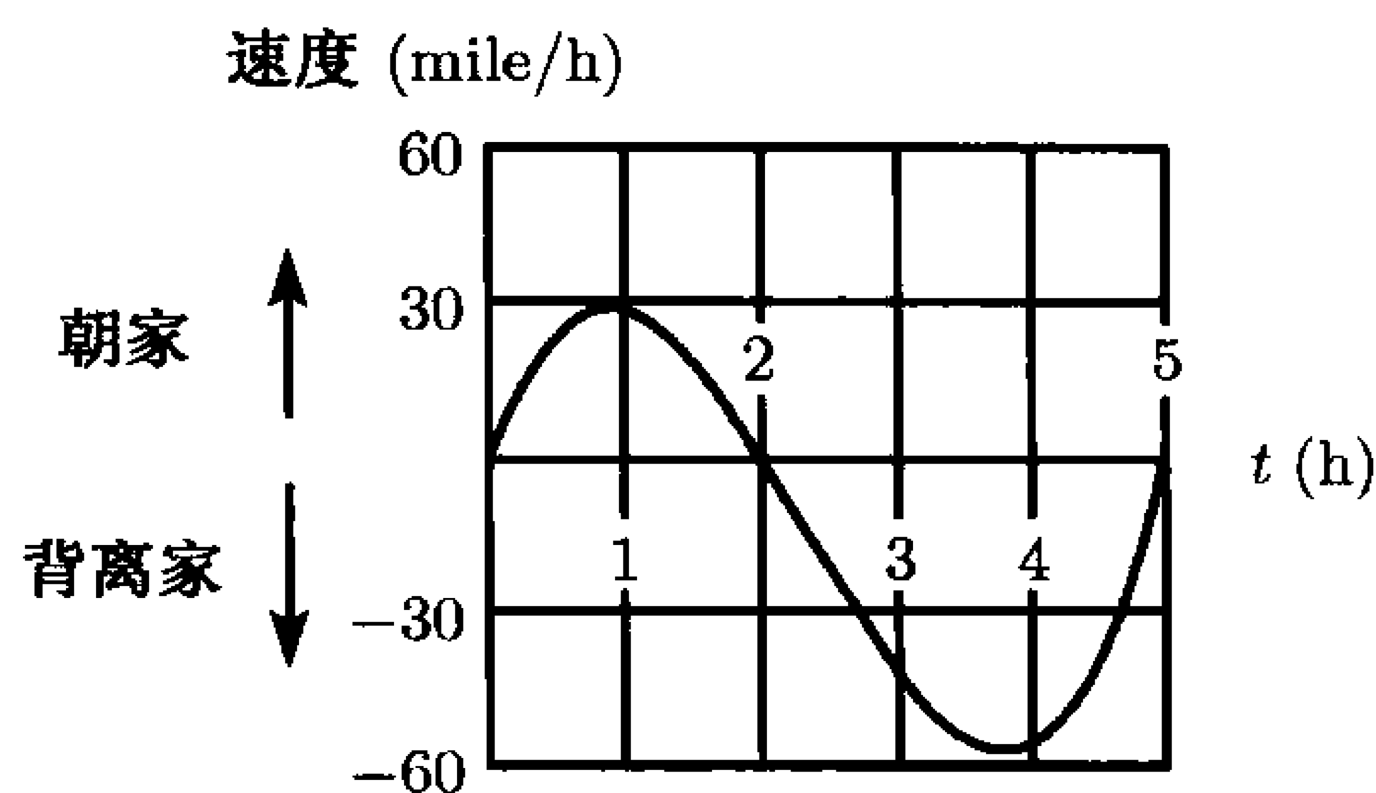


图 5-42　离家 50 mile 远出发的旅程的速度

解　在这次旅程途中是什么状况? 前两小时内的速度函数是正的, 在 $t=2$ 和 $t=5$ 这段时间内是负的. 因此, 这个男人在前两小时内朝家的方向驾车, 而后在 $t=2$ 时掉头沿背离家的方向行驶. 他所行驶的距离是速度函数图形与 t 轴所围面积; 由于 t 轴下方的面积大于上方的面积, 我们知道他停下来时, 离家的距离比他出发时远. 因此在 $t=2$ 时, 他离家最近; 在 $t=5$ 时, 离家最远. 我们能够通过估计面积来估计他在每个方向上行驶的距离.

(a) 这个男人从离家 50 mile 的地方出发. 前两小时内, 他行驶的距离是曲线下方、$t=0$ 和 $t=2$ 之间的面积. 这个面积相当于一个方形格子. 由于每个格子的面积为 (30 mile/h)×1 h=30 mile. 他在 2 h 后离家最近, 此时他离家大约 20 mile.

(b) 在 $t=2$ 和 $t=5$ 这段时间内, 这个男人离家行驶. 由于这个面积大约相当于 3.5 个方形格子, 即 3.5×30=105 mile, 他已经在离家的方向上又多走了 105 mile. 他离家已经有 20 mile 了, 因此在 $t=5$ 时, 他离家大约 125 mile, 此时离家最远.

注意, 这个男人驾车走了 30+105=135 mile 的总距离. 他朝家走了 30 mile, 然后离家行驶了 105 mile. 他在位置上的净变化量为 75 mile. □

例 4　两种植物数量的增长率 (单位: 每年新长出的植物) 如图 5-43 所示. 假设这两种植物在 $t=0$ 时数量相等.

(a) 一年后, 哪种植物数量较多? 两年后呢?

(b) 前两年内种类 1 的数量增长了多少?

解　(a) 种类 1 的数量的增长率在第一年内比种类 2 的大, 因此一年后, 种类 1 的数量比较多. 两年后, 形势不太明显, 因为种类 1 的数量在第 1 年增长较快而种类 2 在第 2 年增长较快. 然而, 若 $r(t)$ 是某量的增长率, 我们有

$$\text{前两年内的数量总变化量}=\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t.$$

这个积分就是 $r(t)$ 的图形下方的面积. 在 $t=0$ 和 $t=2$ 之间, 图 5-43 中种类 1 的

图形下方的面积小于种类 2 的图形下方的面积, 因此两年后, 种类 2 的数量大于种类 1.

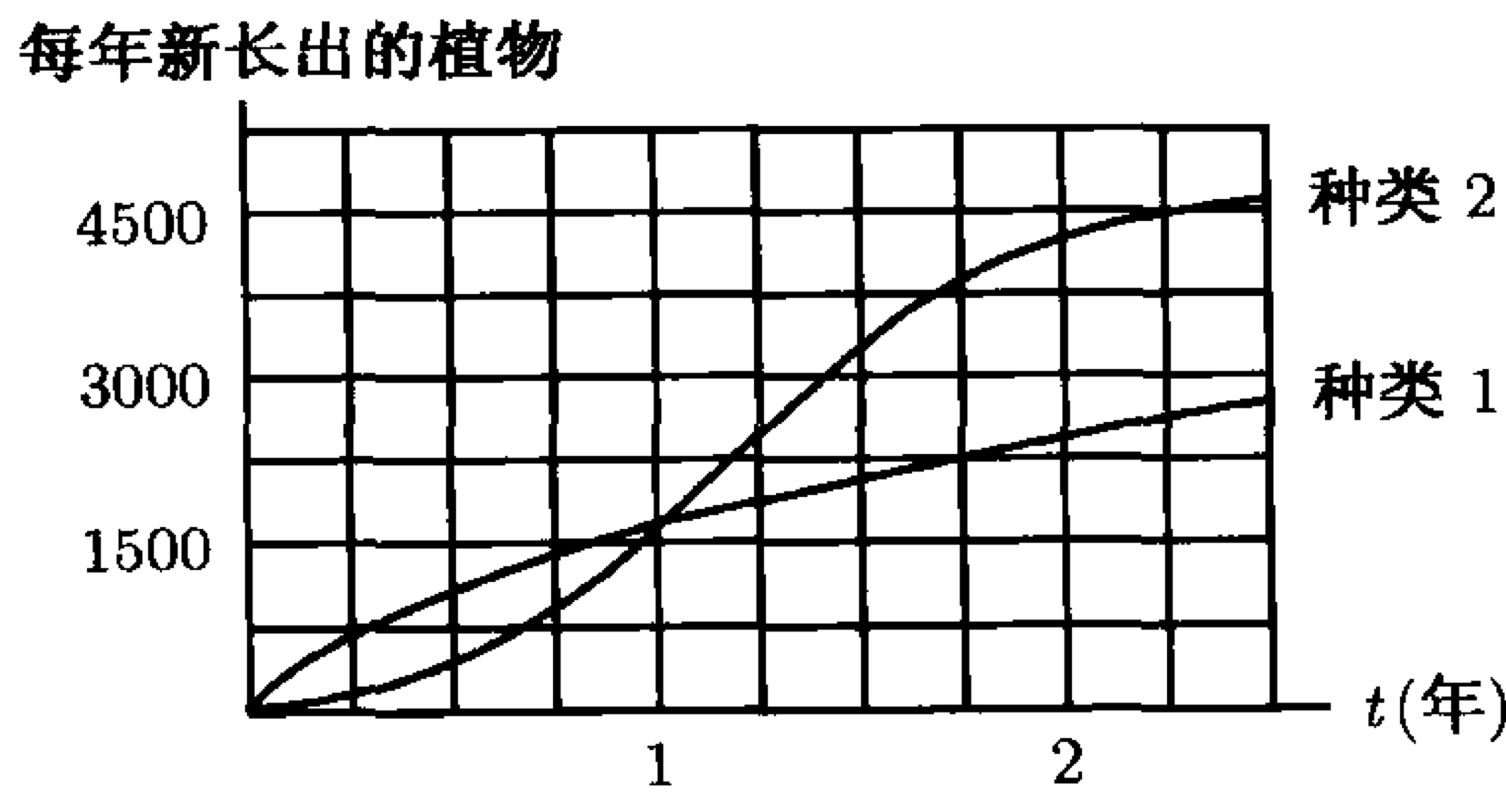


图 5-43 两种植物数量的增长率

(b) 种类 1 的数量改变量等于 $t = 0$ 和 $t = 2$ 之间及 $r(t)$ 的图形下方区域的面积, 如图 5-43. 这个区域大约包括 16.5 个面积为 (750 植物/年)(0.25 年)=187.5 植物的方形格子, 由此得到总数为 (16.5)(187.5)=3093.75 植物. 种类 1 的数量在两年内大约增加了 3100 植物. □

5.4.2 生物利用度

定积分在药理学中用来估量*生物利用度*, 即在治疗过程中进入血流的药量. 单位生物利用度就是指在血流中 1 h 的 1 单位的药物浓度. 比如, 浓度为 3 μg/cm^3 在血流中 2 h 的生物利用度为 $3 \cdot 2 = 6$ μg/cm^3-h.

一般讲来, 血流中药物的浓度不是常数. 血液中药物的浓度在药物被吸收进入血流时提高, 而随着药物被分解及排泄后浓度降低[①]. (参见图 5-44.)

假设我们要计算在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 这段时间内, t 时刻血流中浓度为 $C(t)$ μg/cm^3 的某药物的生物利用度. 在一小段时间 Δt 内, 我们估计

$$\text{生物利用度} \approx \text{浓度} \times \text{时间} = C(t)\Delta t.$$

所有小区间上的生物利用度相加得

$$\text{总生物利用度} \approx \sum C(t)\Delta t.$$

该和在 $n \to \infty$ (其中 n 表示宽度为 Δt 的区间数) 的极限就是一个积分. 因此对 $0 \leqslant t \leqslant T$, 我们有

$$\text{总生物利用度} = \int_0^T C(t)\mathrm{d}t.$$

也就是说, 药物的总生物利用度等于药物的浓度曲线下的面积.

例 5 两种药物在血液中的浓度曲线[②]参见图 5-45. 用峰值浓度, 吸收进入血流的速度和总生物利用度描述这两种药物之间的差异和相似之处.

① 《药物疗法》, (悉尼: Adis Press, 1976).

② 《药物疗法》, (悉尼: Adis Press, 1976).

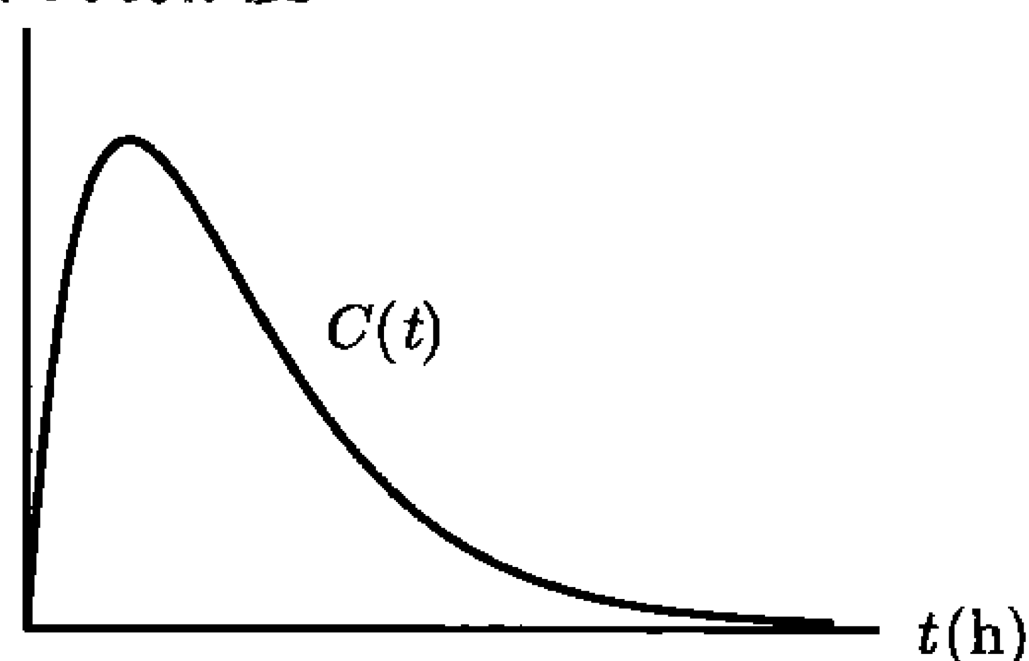


图 5-44 表示为时间函数的药物浓度曲线

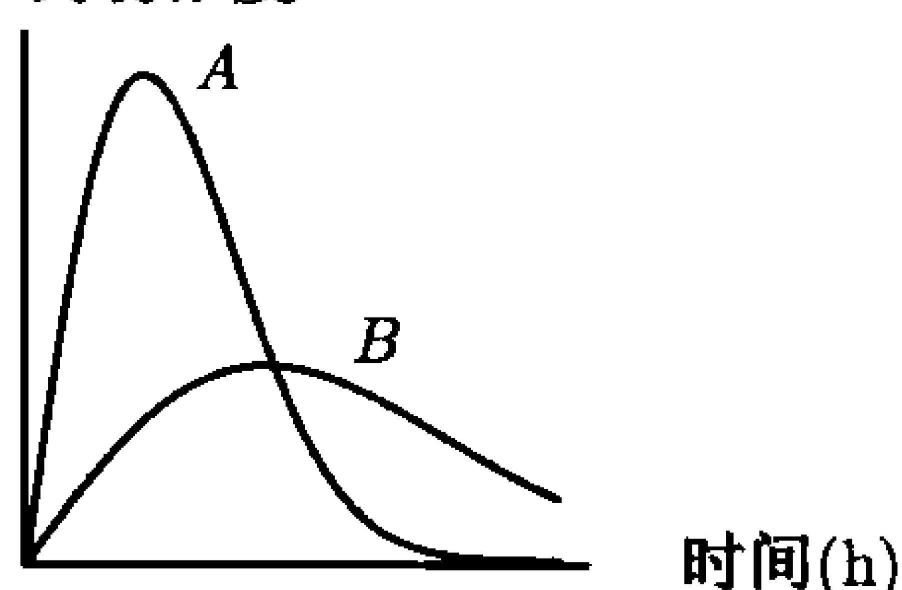


图 5-45 两种药物的浓度曲线

解 A 药物的峰值浓度是 B 药物的两倍多. 由于 A 药物比 B 药物早达到峰值浓度, A 药物被吸收进入血流比 B 药物快. 最后, A 药物有较大的总生物利用度, 因为它的浓度函数图形下的面积比 B 药物的图形下的面积大. □

习题

1. 下表给出了美国氮氧化物的年排放量 E(单位: 百万吨)[1]. 设 t 表示自 1970 年以来的年数, $E = f(t)$.

(a) 积分 $\int_0^{30} f(t)\mathrm{d}t$ 表示什么含义, 它的单位是什么?

(b) 估计 $\int_0^{30} f(t)\mathrm{d}t$.

年	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
E	26.9	26.4	27.1	25.8	25.5	25.0	22.6

2. 美国的年产煤量 (单位: quadrillion BTU) 参见下表[2]. 估计美国 1960~1990 年的总产煤量. 如果 $r = f(t)$ 是 1960 年起第 t 年的产煤率, 请用定积分表示 1960~1990 年的总产煤量.

年	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
产煤率	10.82	13.06	14.61	14.99	18.60	19.33	22.46

在习题 3~6 中, 用语言说明定积分表示的含义, 并指出它的单位.

3. $\int_1^3 v(t)\mathrm{d}t$, 其中 $v(t)$(单位: m/s) 是速度, t(单位: s) 是时间.

4. $\int_0^6 a(t)\mathrm{d}t$, 其中 $a(t)$(单位: m/h^2) 是加速度, t(单位: h) 是时间.

5. $\int_{2000}^{2004} f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $f(t)$(单位: 十亿人/年) 是世界人口在第 t 年的增长率.

6. $\int_0^5 s(x)\mathrm{d}x$, 其中 $s(x)$(单位: g/l-cm) 表示海水含盐量的变化率, x(单位: cm) 是海平面下

① 《2005 世界年鉴》9. 117 (纽约).

② 《1995 世界年鉴》.

的深度.

7. 石油以 $r=f(t)$ 加仑/分钟的速度从油轮漏出，其中 t (单位：分钟) 是时间. 用定积分表示前 1 小时内从油轮漏出的总石油量.

8. 把一杯 90°C 的咖啡在 $t=0$ 时刻放入温度为 20°C 的房间. 咖啡的温度以每分钟 $r(t)=-7(0.9^t)$°C 的速度改变，其中 t 的单位是分钟. 估计咖啡在 $t=10$ 时的温度.

9. 一外来物质注入血液后，产生抗体的速度为 $r(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ (单位：千抗体/分钟)，其中时间 t 的单位是分钟. 假设 $t=0$ 时刻没有抗体，求 4 分钟末血液中的总抗体量.

10. 图 5-46 是 4 月份水塔中水量的变化率 (单位：升/天). 如果 4 月 1 日水塔中有 12 000 升水，估计 4 月 30 日水塔中的水量.

11. 图 5-47 表明人类胎儿体重的增长率.

(a) 如图 5-47 的函数说明体重作为年龄的函数有何性质?

(b) 估计在第 40 周出生的婴儿的体重.

12. 一场森林大火在 $t=0$ 烧毁 2000 英亩. 火势正以每小时 $8\sqrt{t}$ 英亩的速度蔓延，其中 t 的单位是小时. 问 24 小时后，有多少英亩被烧毁?

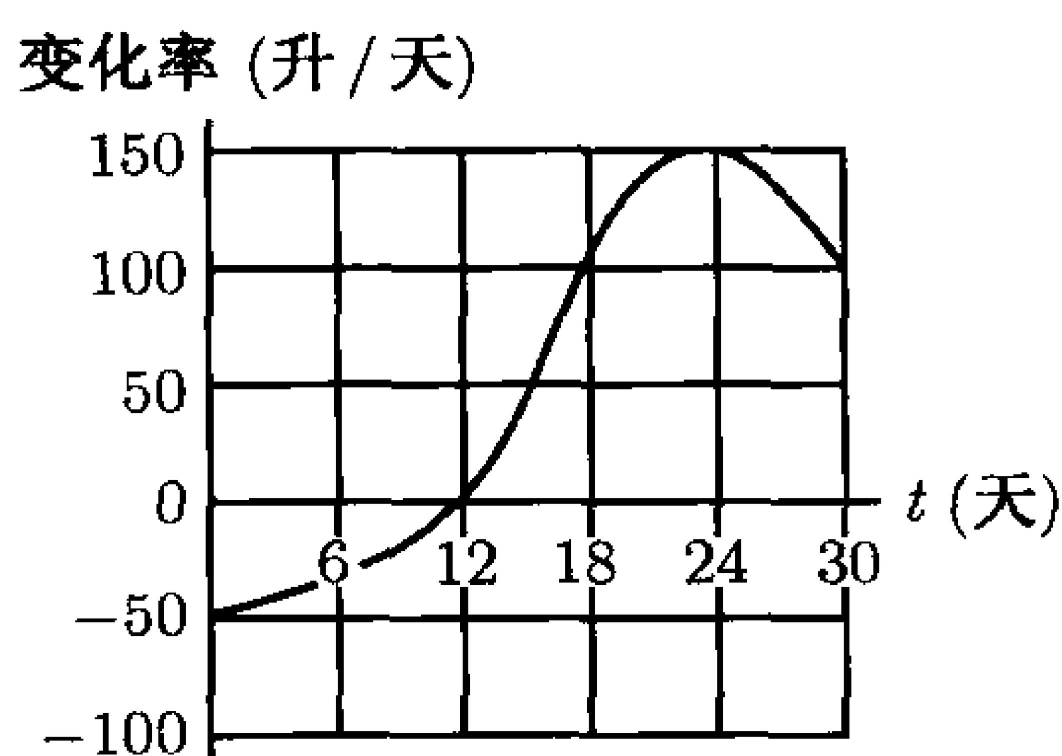


图 5-46

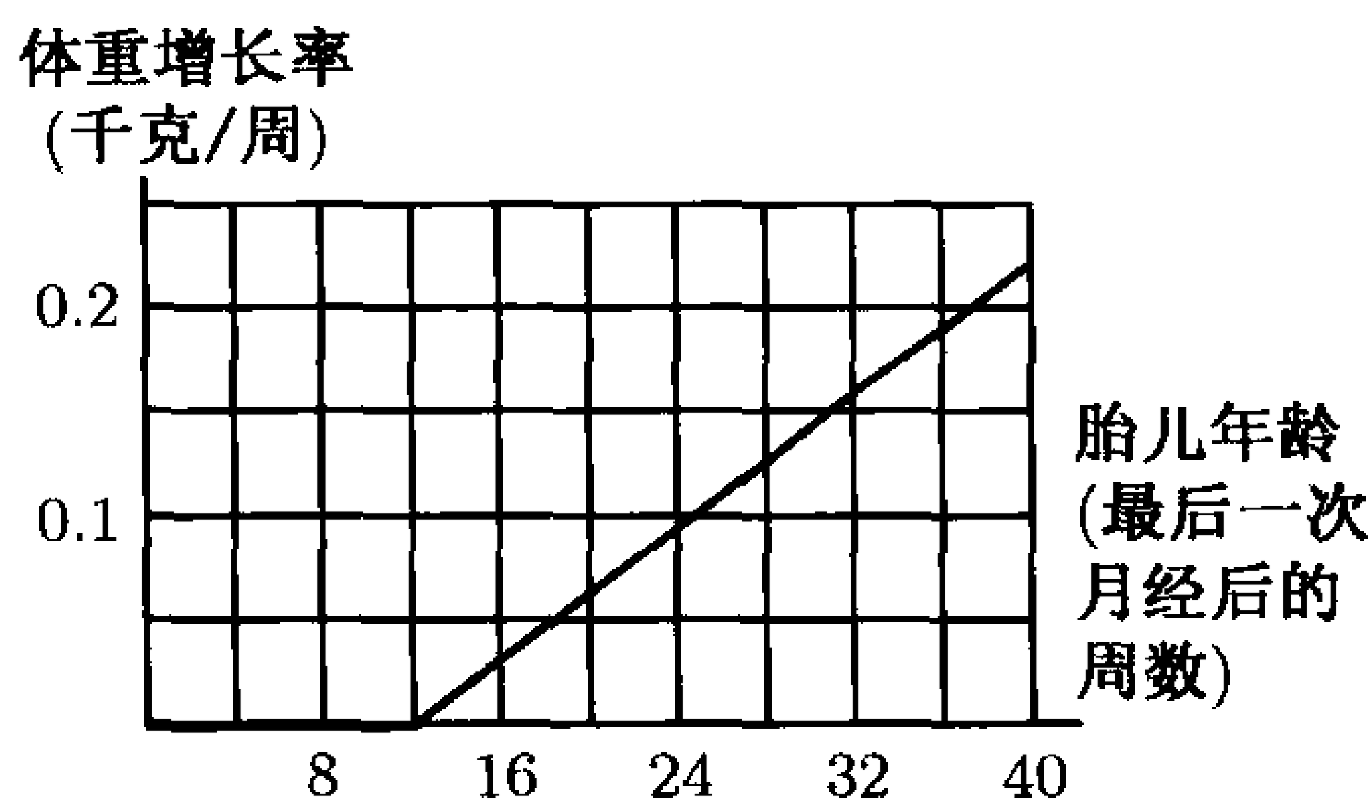


图 5-47 胎儿体重的增长率

13. 以 $5\text{-}5e^{-0.12t}$ 升/分钟的速度从储水器中抽水，其中 t 表示从抽水开始计时的分钟数. 如果抽水开始时储水器有 1000 升水，问 1 小时后它还剩多少水?

14. 图 5-48 表示两棵树的生长速度. 如果两棵树在 $t=0$ 时一样高，5 年后哪棵树较高? 10 年后呢?

15. 图 5-49 是两个销售人员每月的销售量. 6 个月后哪个人的总销售量大? 1 年后呢? 大约在何时，他们有基本相同的总销售量 (如果有的话)? 第 1 年末，两个人的销售量大约各为多少?

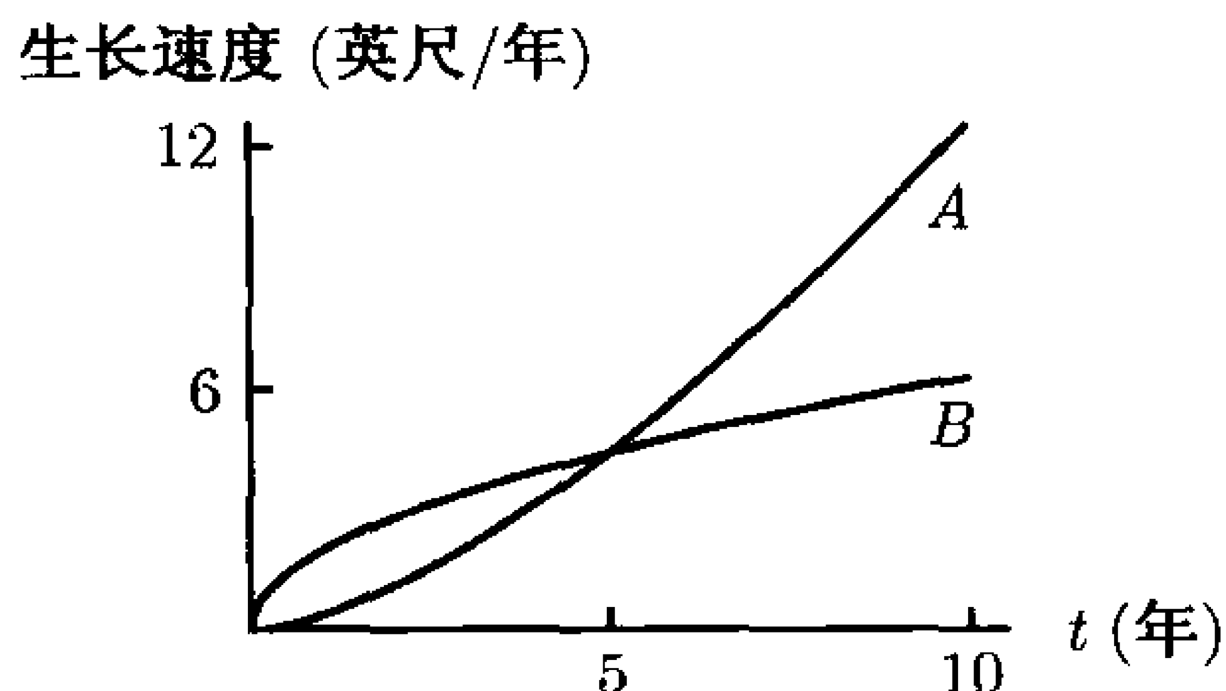


图 5-48

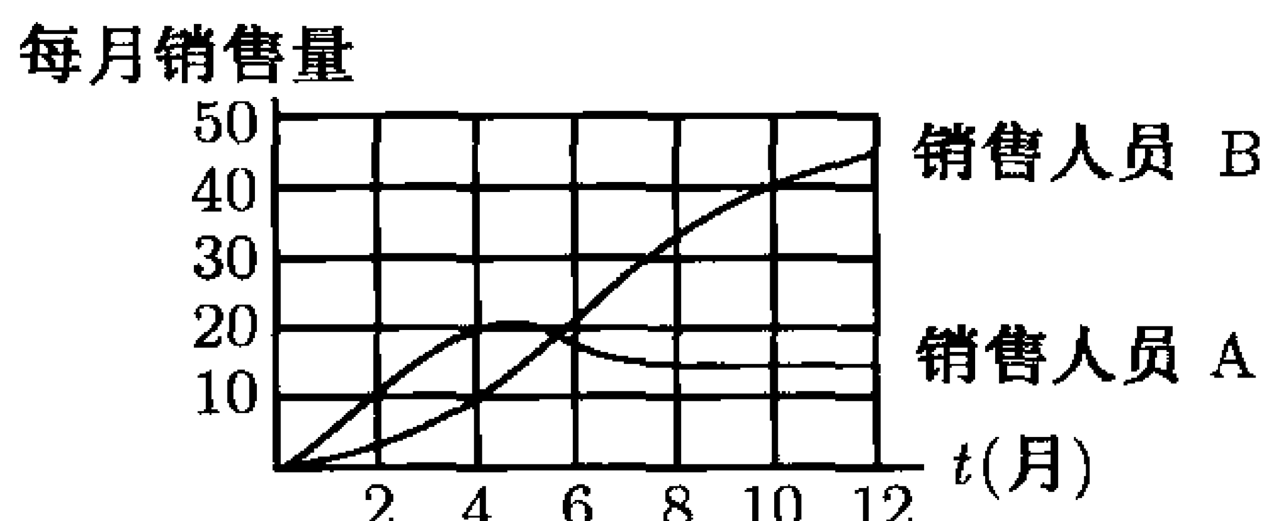


图 5-49

16. 内分泌学家用身高速度图形来追踪有生长缺陷的孩子的发育状况. 图 5-50 是 3~18 岁普通男孩与女孩的身高速度曲线.

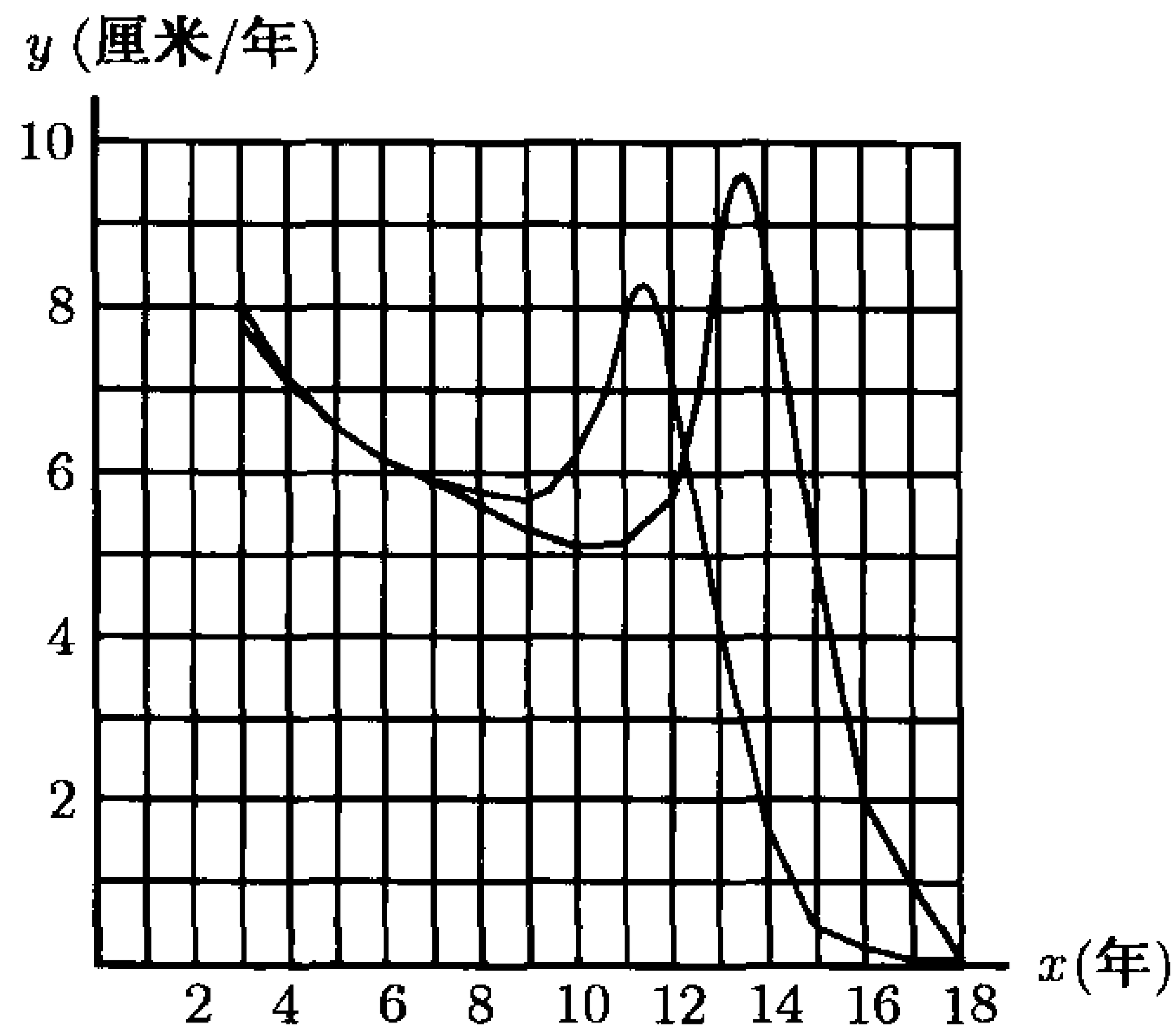


图 5-50

(a) 哪条曲线是男孩的身高速度曲线, 哪条是女孩的? 说明你的理由.

(b) 普通男孩在 3~10 岁长了多高?

(c) 由于青春期到来, 普通男孩的生长冲刺期在 12~15 岁, 而普通女孩则是在 10~12.5 岁. 估计在生长冲刺期普通男孩和女孩各长高多少?

(d) 完全长大后, 普通男人比普通女人高多少? (普通男孩和女孩在 3 岁时差不多一样高.)

17. 某菌群的出生率 B (单位: 新出生数/小时) 参见图 5-51. 标记 D 的曲线是同一菌群的死亡率 (单位: 死亡数/小时).

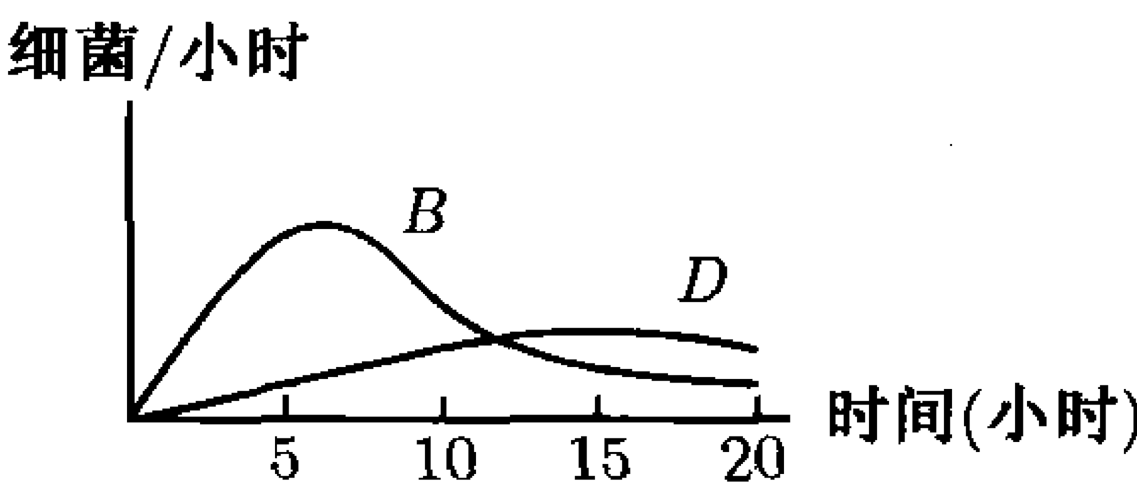


图 5-51

(a) 说明这些图形的形状告诉你菌群的什么信息?

(b) 利用图形找出菌群的纯增长率最大的时刻.

(c) $t=0$ 时菌群的大小为 N. 画直到 t 时刻出生的细菌总数的图形. 也画出 t 时刻活着的细菌数的图形. 估计何时菌群最大?

18. 挨饿 8 周, 人体内储备的蛋白质和脂肪的消耗率参见图 5-52. 在这段时期内, 消耗的脂肪多还是蛋白质多?

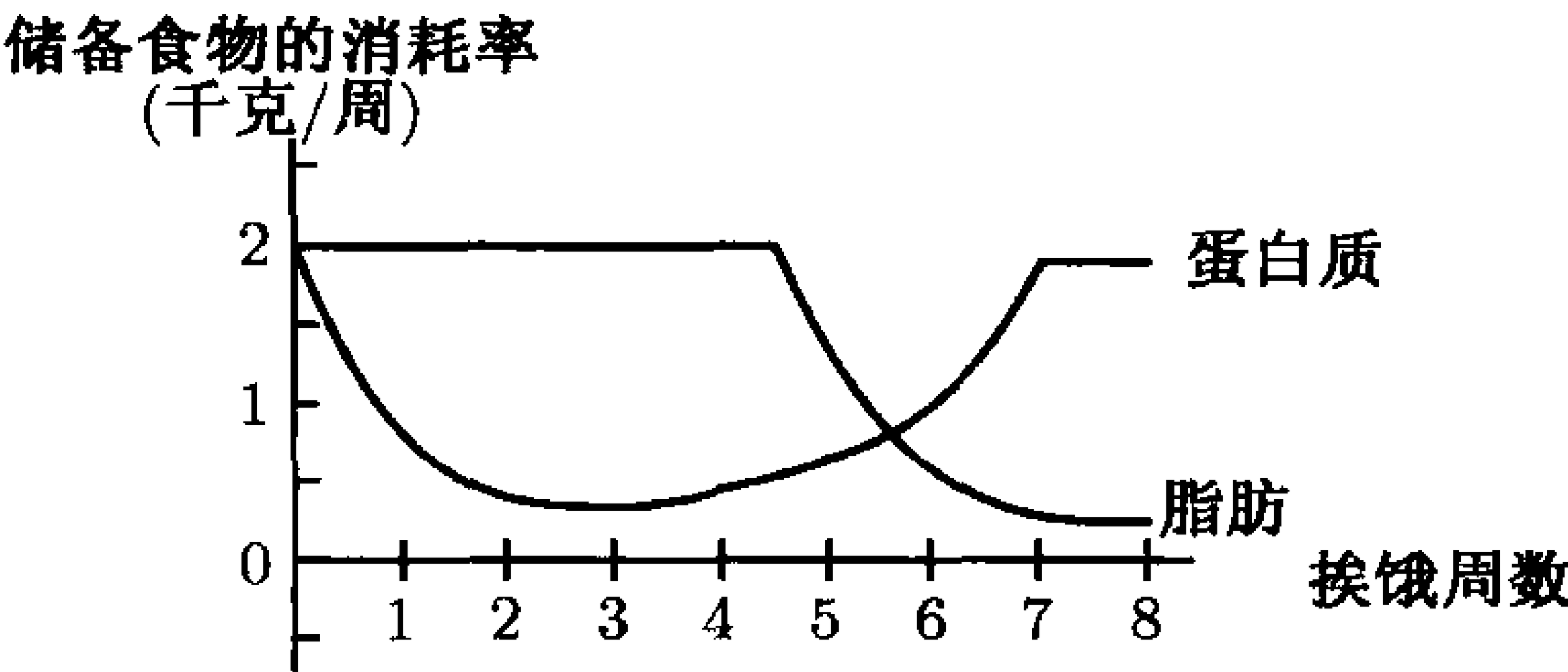


图 5-52

正常人的心脏每分钟大约输血 5 升. 图 5-53 描绘心脏对失血的反应, 习题 19~20 就依赖于该图. 输血率下降, 如果完全康复会恢复正常, 如果人死亡会下降到零.

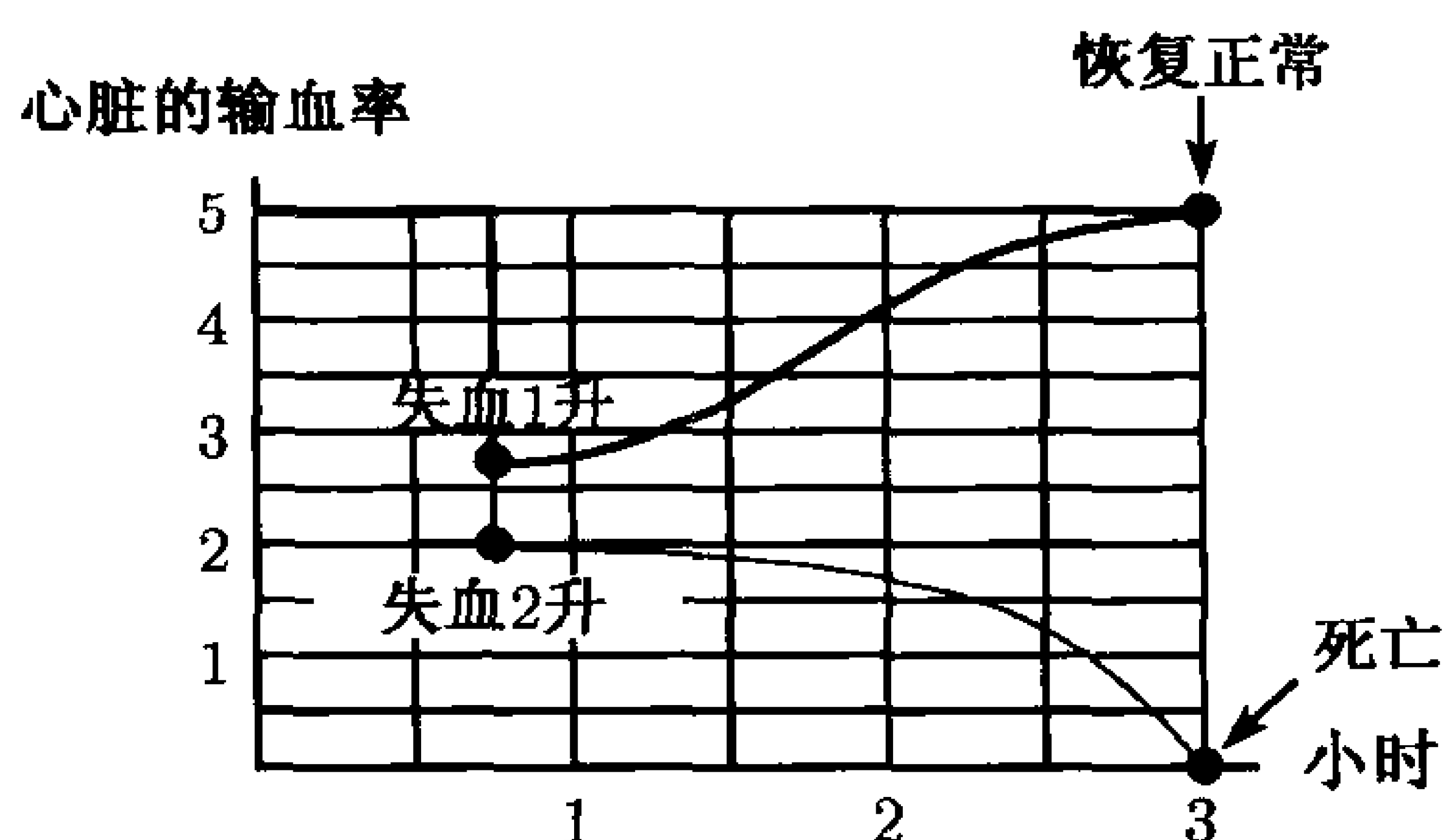


图 5-53

19. (a) 如果身体失血 2 升, 在到死亡的 3 小时内, 输血多少?

(b) 如果 $f(t)$ 是 t 时刻的输血率 (单位: 升/分钟), 用定积分表示你 (a) 部分的答案.

(c) 如果没有失血, 在相同的时间段内, 将多输血多少? 把你的答案在图形上表示出来.

20. (a) 如果身体失血 1 升, 在到完全恢复的 3 小时内, 输血多少?

(b) 如果 $g(t)$ 是 t 时刻的输血率 (单位: 升/分钟), 用定积分表示你 (a) 部分的答案.

(c) 如果没有失血, 在相同的时间段内, 将多输血多少? 在图形上用面积表示你的答案.

21. 一公司制造的废物量 W 大约为 $W = 3.75e^{-0.008t}$ 公吨, 其中 t 是 2005 年 1 月 1 日以来的周数. 公司搬走废物的成本为 15 美元/吨. 2005 年, 公司为搬运废物花费多少?

22. 1987 年, 美国的平均收入是 26 000 美元, 自此以后, 以每年 $r(t) = 480(1.024)^t$ 美元的速度增长. 估计 2010 年的平均收入.

23. 一辆汽车的速度为 $v(t) = 40t - 10t^2$ mile/h, 其中 t 的单位是 h.

(a) 用定积分表示汽车在前 3h 内行驶的路程.

(b) 画速度关于时间函数的图形, 并在图形上用面积表示前 3h 内行驶的路程.

(c) 利用计算器或计算机求这段路程.

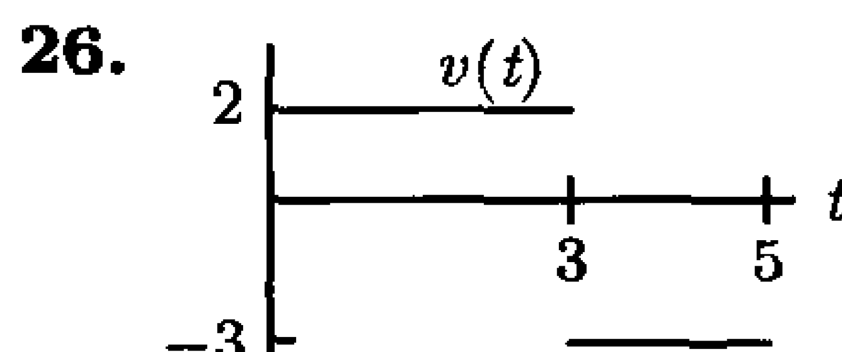
24. 你的速度是 $v(t) = \ln(t^2 + 1)$ mile/h, $0 \leqslant t \leqslant 3$. 估计这段时间内走过的路程.

习题 25~28 给出了沿着 x 轴移动的粒子的速度 (cm/s). 计算粒子在 $t = 0$ 和 $t = 5$ s 这段时间内位置的变化, 左 (负) 或右 (正).

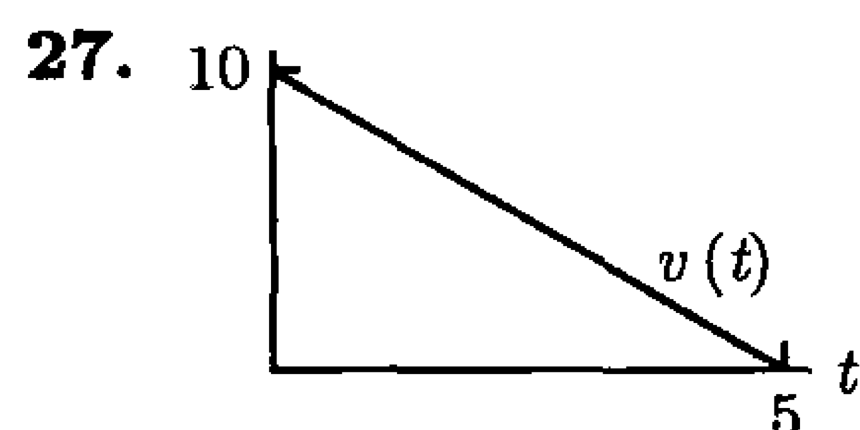
25.



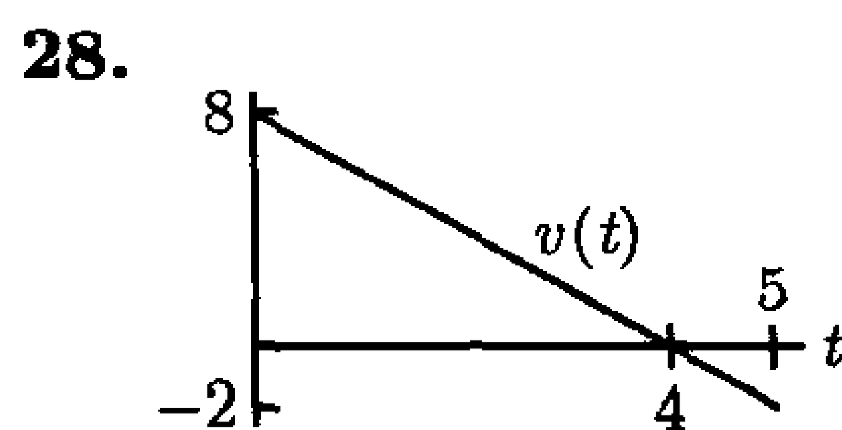
26.



27.



28.



29. 图 5-54 是你离家开始旅程的速度. 正速度表示你离家走, 而负速度表示你朝家的方向

走. 5 小时末你在哪里? 何时你离家最远? 此时你离家多远?

30. 一人以图 5-55 所示的速度 v 沿一条直路骑自行车 1 小时. 她从离湖 5 km 处出发, 且正速度表示她向着湖的方向骑车. [图形上的竖直线的间隔是 10 分钟 (1/6 小时)]

(a) 自行车是否转过向? 如果有, 在何时?

(b) 她何时速度最快? 当时她的速度是多少? 是朝湖还是离湖骑车?

(c) 她何时离湖最近? 她大约离湖有多近?

(d) 她何时离湖最远? 此时她大约离湖有多远?

31. 图 5-56 是用来降低快速心率的两种药物在血浆中的浓度曲线. 用峰值浓度, 到峰值浓度所用时间及总生物利用度比较这两种产品.

32. 图 5-57 对两种止痛药在血浆中的浓度进行了对比. 用峰值浓度, 到峰值浓度所用时间及总生物利用度比较这两种产品.

33. 画 A 药物与 B 药物的血浆浓度曲线, 如果 A 产品的峰值浓度大, 但 B 产品能较快地被吸收且有较大的总生物利用度.

34. 为期两天的环境清洁于第一天上午 9 点开始. 清洁人员人数如图 5-58 那样波动. 如果每小时支付清洁人员 10 美元, 那么总共需要支付的人工费是多少?

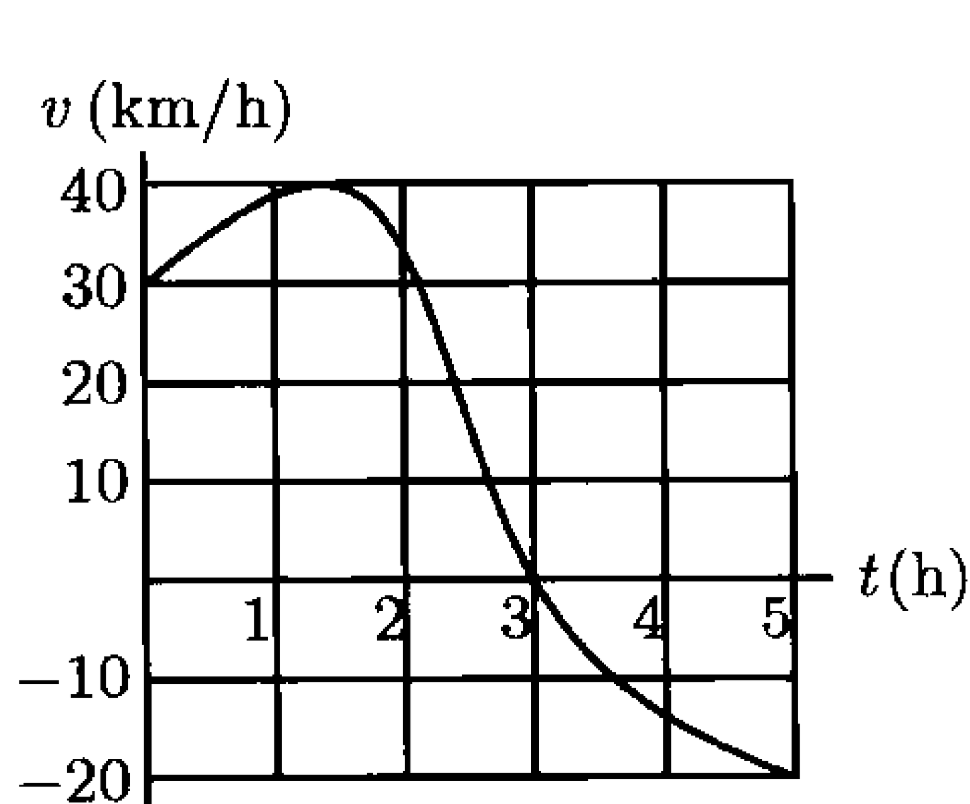


图 5-54

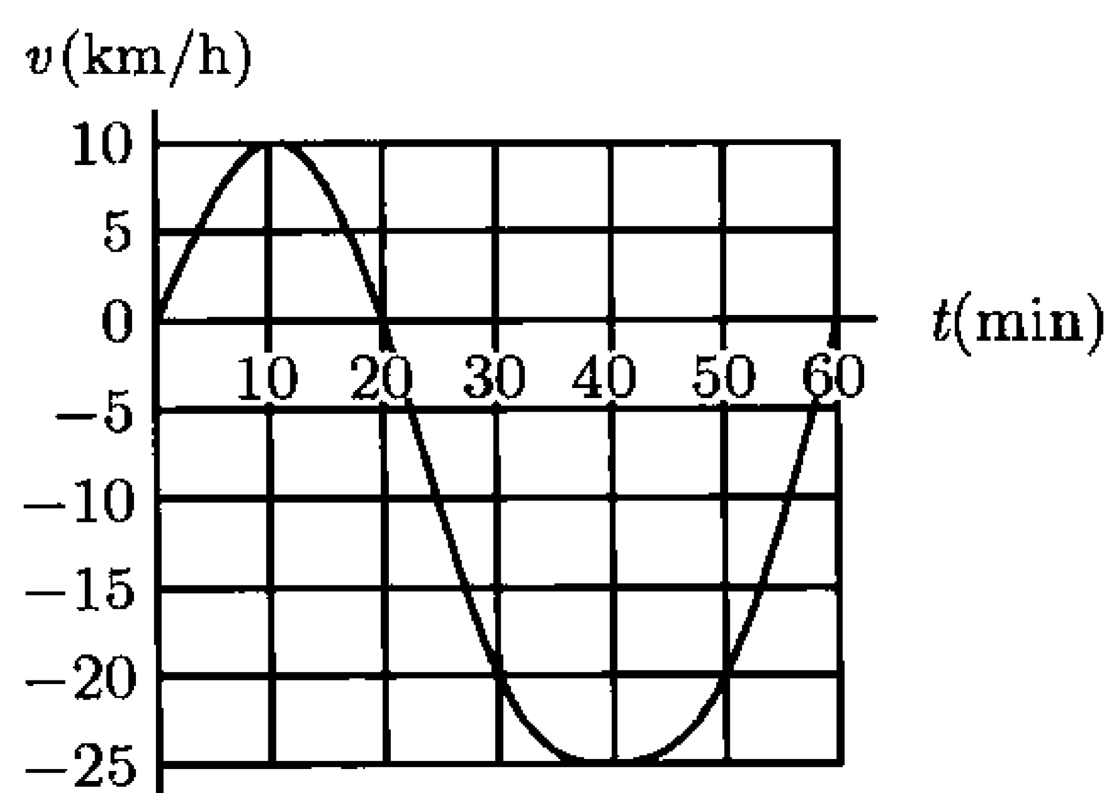


图 5-55

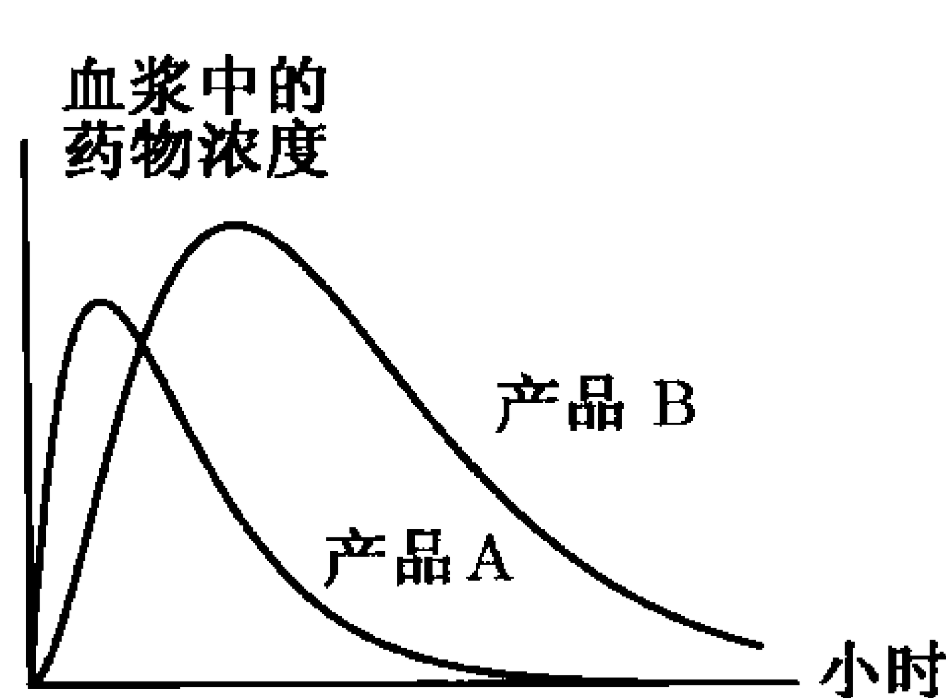


图 5-56

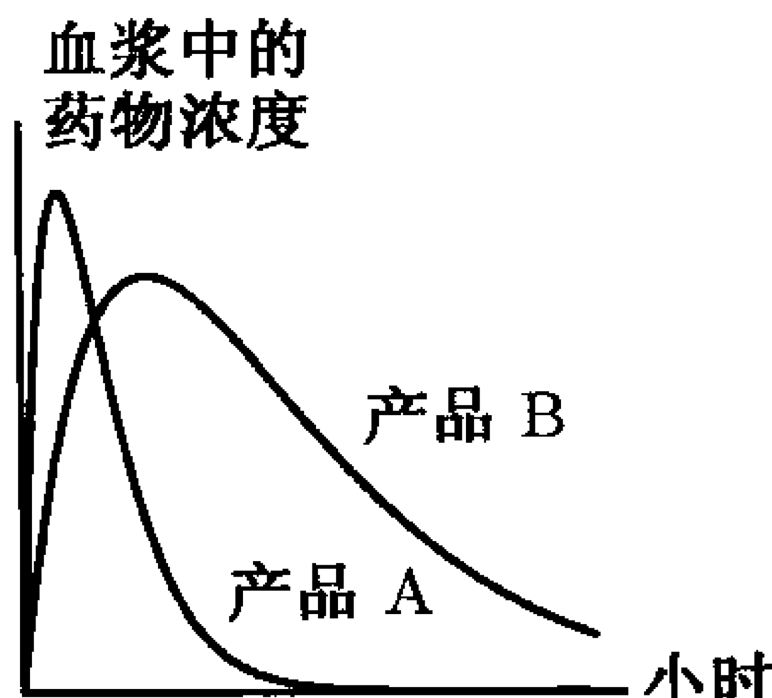


图 5-57

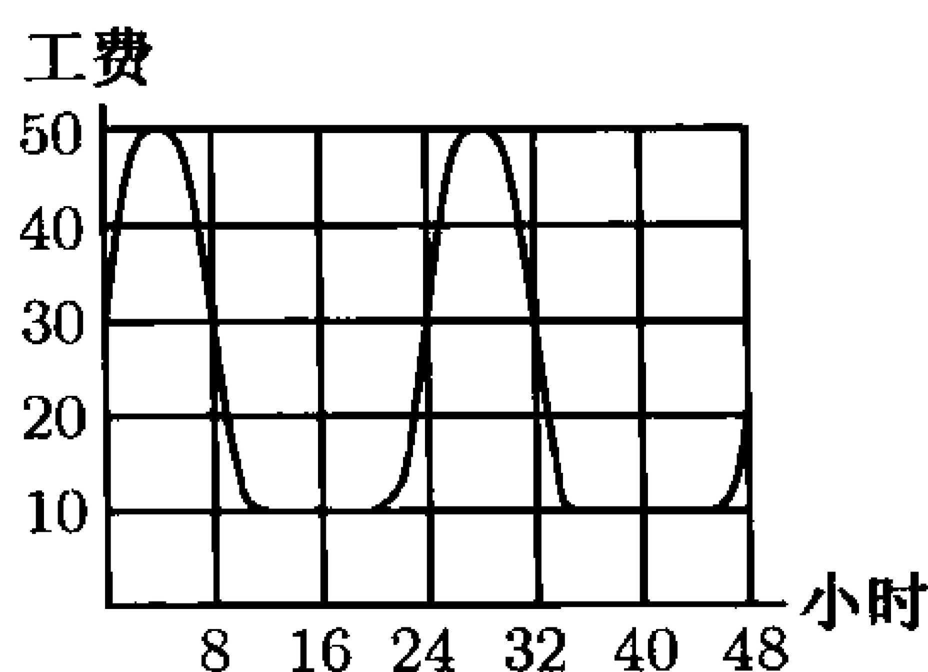


图 5-58

35. 假设在上午 9 点到下午 5 点之间的每小时支付习题 34 中的清洁人员 10 美元, 其余时间每小时 15 美元. 那么这次清洁的总人工费用在这些条件下将是多少?

36. 在放射性碘泄露的地区, 辐射强度是最大可接受极限的 4 倍, 因此被命令撤离. 如果 R_0 是最初 $(t = 0)$ 的辐射水平, t(单位: 小时) 是时间, 辐射强度 $R(t)$(单位: 毫雷姆/小时) 为

$$R(t)=R_0(0.996)^t.$$

(a) 要多长时间该地区达到可接受的辐射强度 0.6 毫雷姆/小时?

(b) 到那时为止已经放射出多少辐射 (单位: 毫雷姆)?

37. 如果你从飞机上跳下来但降落伞没能打开, 跳机 t 秒后的下落速度 (单位: m/s) 大约为

$$v(t)=49(1-(0.8187)^t).$$

(a) 写出 T (s) 后你落下的距离表达式.

(b) 如果你从离地面 5000 m 的空中跳下, 利用反复试验法估计你落到地面需要多少秒?

38. 孟高尔费兄弟 (乔瑟夫和艾提尼) 是 18 世纪热气球领域的先锋. 如果他们有合适的工具, 他们将可能给我们留下他们早期试验中一次试验的记录, 如图 5-59 所示. 图形给出了他们的垂直速度 v, 正速度代表方向向上.

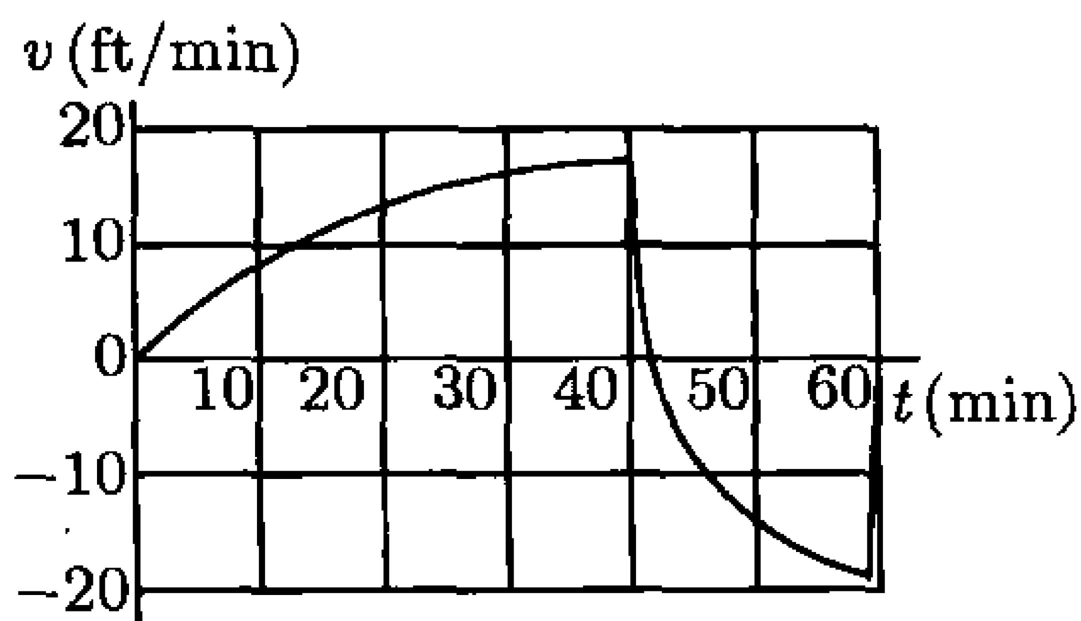


图　5-59

(a) 在哪个区间加速度为正? 为负?

(b) 何时达到最大高度? 最大高度是多少?

(c) 这次特别的飞行在山顶上结束. 你是如何知道的, 山顶离出发点的垂直距离有多少?

5.5　微积分基本定理

我们在 5.2 节看到了定积分可以用一个量的变化率来表示总变化量. 我们知道一个量 $F(t)$ 的变化率就是导数 $F'(t)$.

为计算总变化量, 我们把区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 在 $t_0,t_1,t_2,\cdots,t_n$ 处分成 n 个相等的子区间. 令 $t_0=a,t_n=b$, 并用 Δt 表示每个子区间的长度, 因此 $\Delta t=\dfrac{b-a}{n}$.

第一个子区间上 F 的变化率可以用 $F'(t_1)$ 近似, 因此

$$F\text{ 的变化量}=\text{变化率}\times\text{时间}\approx F'(t_1)\Delta t.$$

类似地, 第二个子区间上 F 的变化率可以用 $F'(t_2)$ 近似, 因此

$$F\text{ 的变化量}=\text{变化率}\times\text{时间}\approx F'(t_2)\Delta t.$$

这样继续下去, 我们看到总变化量可以用右手和近似:

$$F\text{ 在}a,b\text{ 之间的总变化量}\approx F'(t_1)\Delta t+F'(t_2)\Delta t+\cdots+F'(t_n)\Delta t=\sum_{i=1}^{n}F'(t_i)\Delta t.$$

随着 n 的增大, 近似越来越准确. 我们取极限时, 和变成了积分, 而且我们有

$$F\text{ 在}a,b\text{ 之间的总变化量}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}F'(t_i)\Delta t=\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t.$$

另一方面, F 在 a, b 之间的总变化量也等于 $F(b)-F(a)$, 因此我们有如下的结果:

微积分基本定理

如果 $F'(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上连续, 那么

$$\int_a^b F'(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

用语言表示为：一个函数的导数的定积分等于该函数的总变化量.

微积分基本定理可用于变化率 $F'(t)$ 已知时求总变化量 $F(b)-F(a)$. 本章的相关理论部分给出了基本定理的另一种形式.

例 1 图 5-60 是 5 月期投资价值 $F(t)$ 的变化率 $F'(t)$.

(a) 投资价值何时增长, 何时减少?

(b) 这 5 个月内, 投资价值是增加了还是减少了?

解 (a) 投资价值在前 3 个月内减少, 因为这段时间内变化率小于零. 后两个月内价值增长.

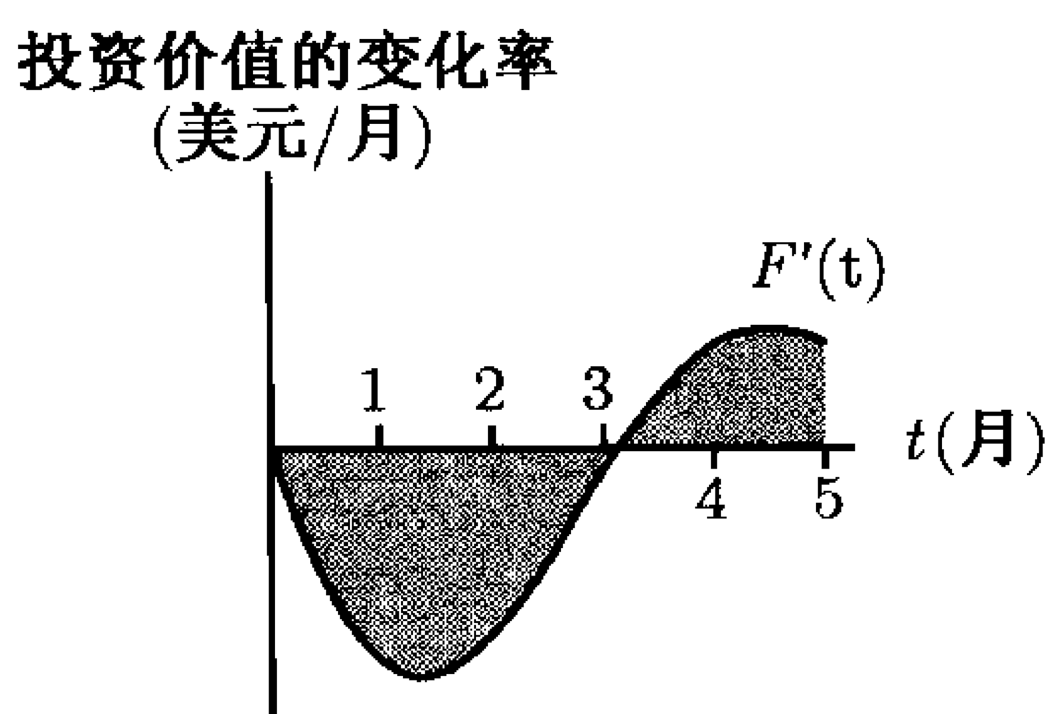


图 5-60 5 个月内, 投资价值是增加了还是减少了?

(b) 我们要求投资价值在 $t=0$ 和 $t=5$ 之间的总变化量. 由于总变化量是变化率 $F'(t)$ 的积分, 我们要求

$$价值的总变化量 = \int_0^5 F'(t)\mathrm{d}t.$$

积分等于 t 轴上方阴影部分的面积减去 t 轴下方阴影部分的面积. 由于图 5-60 中 t 轴下方阴影部分的面积大于上方的面积, 因此定积分为负. 这段时期内价值的总变化量为负, 因此价值减少. □

边际成本和总成本的变化量

假设 $C(q)$ 表示生产 q 单位产品的成本. 导数 $C'(q)$ 是边际成本. 由于边际成本 $C'(q)$ 是成本函数关于产量的变化率, 由微积分基本定理, 定积分 $\int_a^b C'(q)\mathrm{d}q$ 表示成本函数在 $q=a$ 和 $q=b$ 之间的总变化量. 换句话说, 积分就是产量从 a 单位增加到 b 单位所增加的成本.

生产 0 单位产品的成本是固定成本 $C(0)$. 边际成本曲线下方 $q=0$ 和 $q=b$ 之间的面积是产量 0 到产量 q 的成本的总增加量. 这称作总可变成本. 把它与固定成本相加得生产 q 单位产品的总成本. 总之,

> 如果 $C'(q)$ 是边际成本函数，$C(0)$ 是固定成本.
>
> $$\text{产量从 } a \text{ 单位增加到 } b \text{ 单位的成本} = C(b) - C(a) = \int_a^b C'(q)\mathrm{d}q$$
>
> $$\text{生产 } q \text{ 单位产品的总可变成本} = \int_0^b C'(q)\mathrm{d}q$$
>
> $$\text{生产 } q \text{ 单位产品的总成本} = \text{固定成本} + \text{总可变成本} = C(0) + \int_0^b C'(q)\mathrm{d}q$$

例 2 一边际成本曲线如图 5-61 所示. 如果固定成本是 1000 美元，估计生产 250 单位产品的总成本.

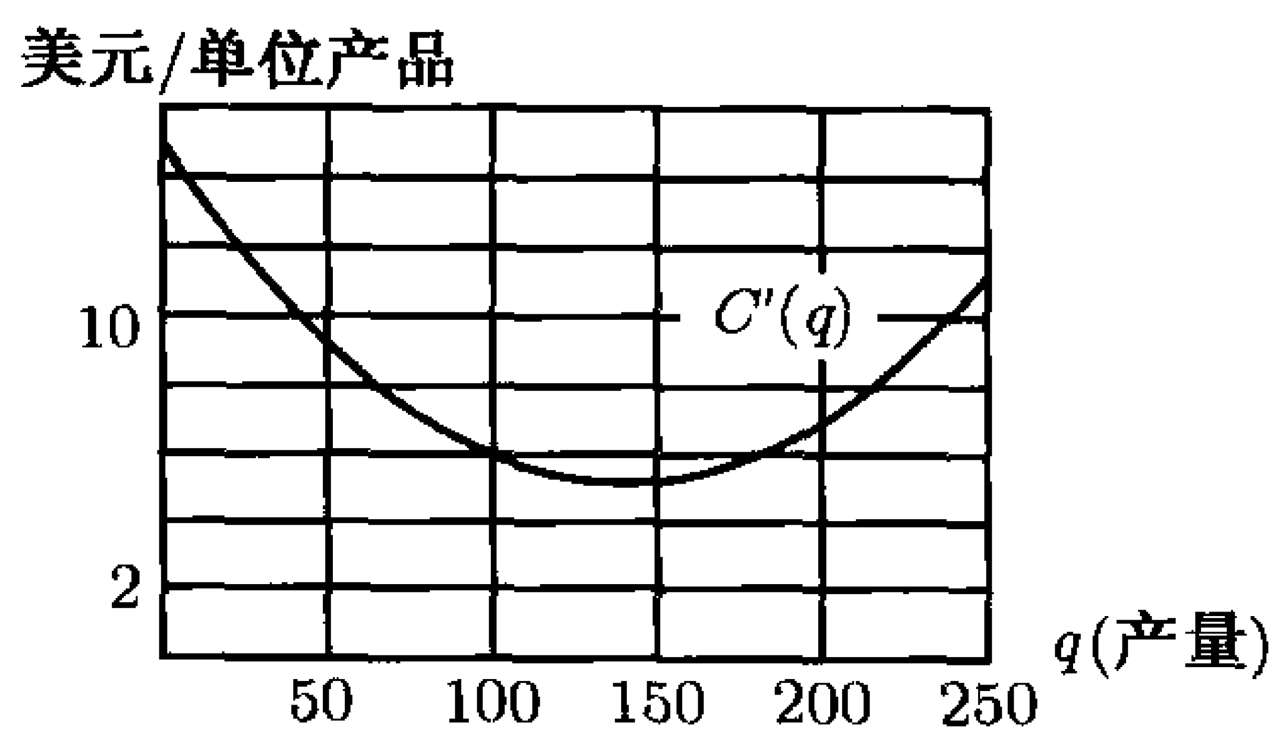


图 5-61 边际成本曲线

解 生产的总成本等于固定成本 + 总可变成本. 生产 250 单位产品的可变成本就是边际成本曲线下方的面积. 图 5-61 在 $q=0$ 和 $q=250$ 之间的面积大约为 20 个方形格子. 每个方形格子的面积为 (2 美元/单位)(50 单位)=100 美元，因此

$$\text{总可变成本} = \int_0^{250} C'(q)\mathrm{d}q \approx 20(100) = 2000.$$

生产 250 单位产品的总成本为

$$\text{总成本} = \text{固定成本} + \text{总可变成本} \approx 1000 \text{ 美元} + 2000 \text{ 美元} = 3000 \text{ 美元}. \quad \square$$

习题

1. 如果边际成本 $C'(q)$ 的计量单位是美元/吨，q(单位：吨) 表示产量，$\int_{800}^{900} C'(q)\mathrm{d}q$ 的计量单位是什么？这个积分表示什么含义？
2. 某产品的边际成本函数为 $C'(q) = q^2 - 50q + 700$ 美元/单位. 如果固定成本是 500 美元，求生产 50 单位产品的总成本.
3. 生产 q 单位某产品的总成本为 $C(q)$ 美元. 固定成本是 20 000 美元. 边际成本为
$$C'(q) = 0.005q^2 - q + 56.$$
   (a) 在 $C'(q)$ 的图形上，用图说明生产 150 单位产品的总可变成本.
   (b) 估计生产 150 单位的总成本 $C(150)$.
   (c) 求 $C'(150)$，并用生产成本说明你的答案.
   (d) 利用 (b) 和 (c) 估计 $C(151)$.
4. 边际成本函数 $C'(q)$ 参见图 5-62. 如果固定成本为 10 000 美元，估计
   (a) 生产 30 单位产品的总成本.
   (b) 公司把产量从 30 增加到 40 单位多增加的成本.
   (c) $C'(25)$. 用生产成本说明你的答案.

5. 东京的人口以图 5-63 的比率增长. 估计 1970~1990 年人口的变化.

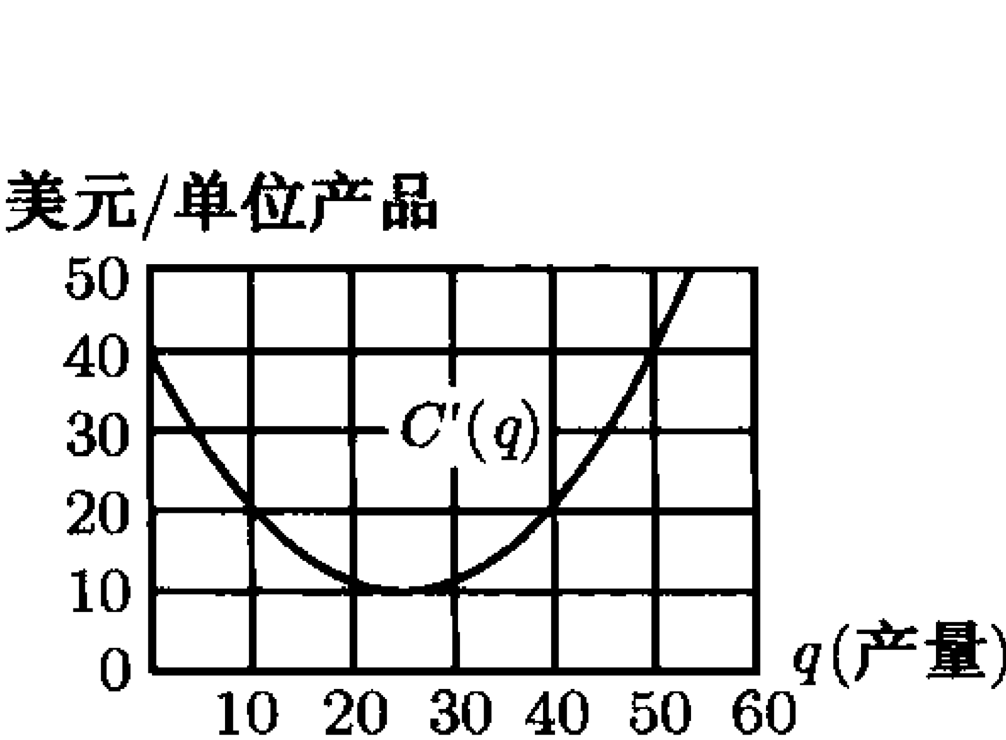


图 5-62

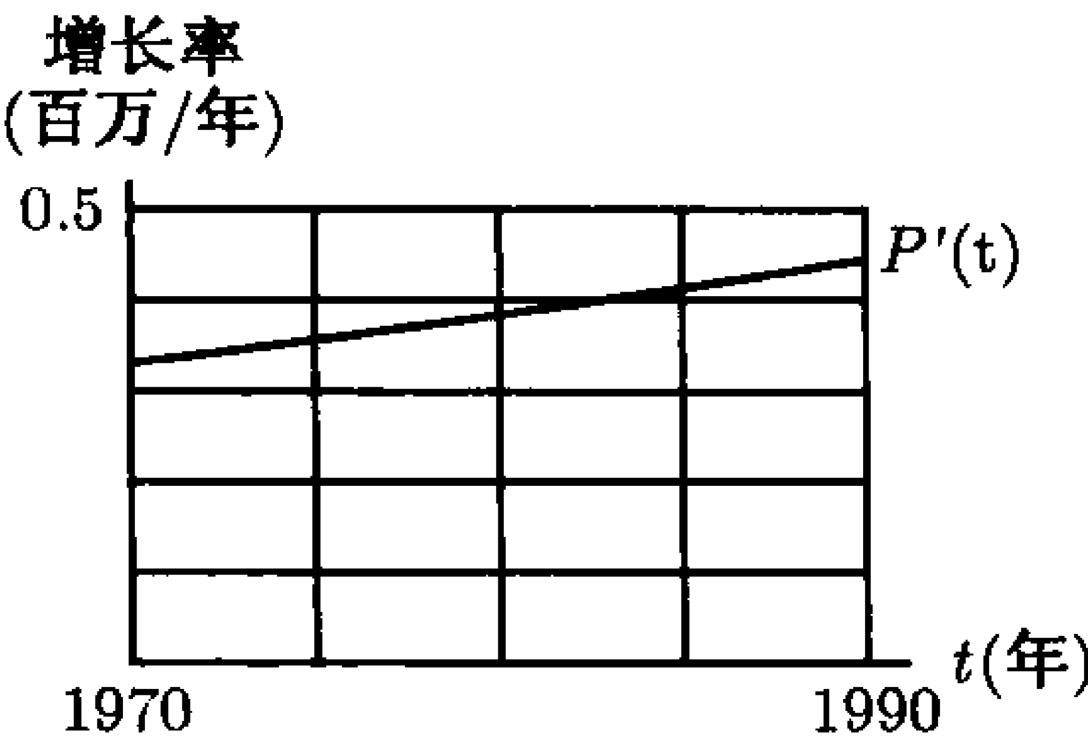


图 5-63

6. 一公司的边际成本函数为

$$C'(q) = q^2 - 16q + 70 \text{ 美元/ 单位},$$

其中 q 是生产的产量. 如果 $C(0) = 500$, 求生产 20 单位的总成本. 固定成本和该产量下的总成本是多少?

7. 生产 q 单位产品的边际成本 $C'(q)$(美元/单位) 参见下表.

(a) 如果固定成本为 10 000 美元, 估计生产 400 单位产品的总成本.

(b) 如果产量增加 1 单位到 401 单位, 总成本增加多少?

q	0	100	200	300	400	500	600
$C'(q)$	25	20	18	22	28	35	45

8. 生产 q 辆山地自行车的边际成本为 $C'(q) = \dfrac{600}{0.3q+5}$.

(a) 如果生产自行车的固定成本为 2000 美元, 求生产 30 辆自行车的总成本.

(b) 如果每辆自行车卖 200 美元, 前 30 辆自行车的利润 (或损失) 是多少?

(c) 求生产第 31 辆自行车的边际利润.

9. 出售 q 单位某产品的边际收益函数为 $R'(q) = 200 - 12\sqrt{q}$ 美元/单位.

(a) 画 $R'(q)$ 的略图.

(b) 估计出售 100 单位的总收益.

(c) 100 单位产品处的边际收益是多少? 利用这个值和 (b) 部分的答案估计出售 101 单位产品的总收益.

10. 图 5-64 是某公司的股票价格在 t 时刻的变化率 $P'(t)$.

(a) 在前 5 周内股价何时达到最大值? 何时最小?

(b) 如果 $P(t)$ 表示股价, 按递增的顺序排列下列各量:

$$P(0),\quad P(1),\quad P(2),\quad P(3),\quad P(4),\quad P(5).$$

11. 一池塘正以 $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\sqrt{t}}{2}$ 英寸/小时的速度结冰, 其中 y 表示开始结冰 t 小时后, 冰的厚度.

(a) 估计 8 小时后冰的厚度.

(b) 8 小时后, 冰的厚度以何速度增长?

12. 某公司的净资产 $f(t)$ 以 $f'(t) = 2000 - 12t^2$ 美元/年的速度增长, 其中 t 是自 2005 年以来的年数. 该公司的净资产在 2005 年和 2015 年预期如何变化? 如果该公司在 2005 年价值 40 000 美元, 那么 2015 年它值多少?

13. 导数 $f'(x)$ 的图形参见图 5-65. 若 $f(0) = 2$, 在下表中填入 $f(x)$ 的值.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2						

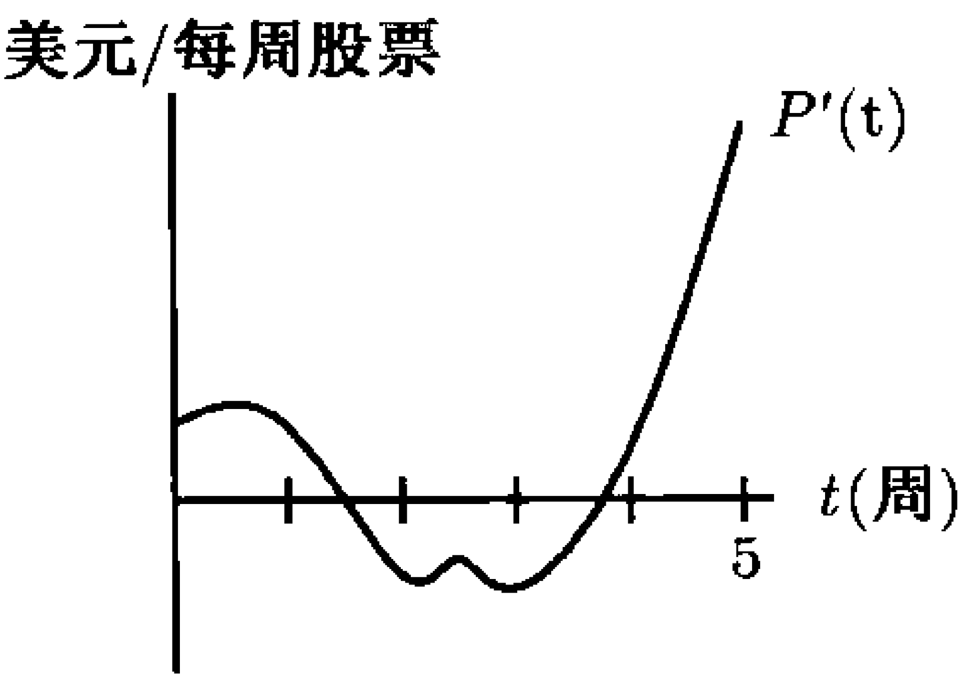


图 5-64

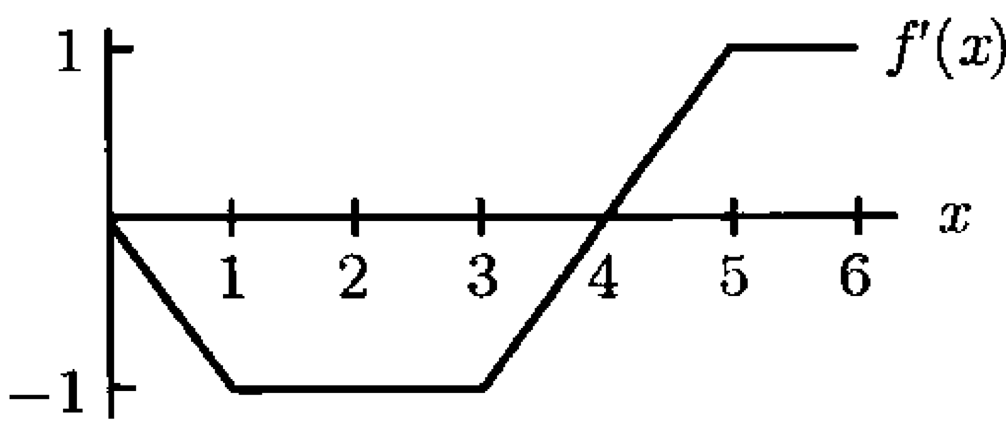


图 5-65 f' 而不是 f 的图形

本章概要

- **定积分是左手和或右手和的极限**
- **定积分的解释**
  由变化率求总变化量, 已知速度求位移, 面积, 生物利用度, 总可变成本
- **定积分的计算**
  从图形, 函数值表或表达式估计定积分
- **微积分基本定理**

复习题

1. 下表给出的速度 $v(t)$ 在 $2 \leqslant t \leqslant 12$ 上是递减的. 利用 $n = 5$ 的划分估计总路程, 求
(a) 一个上估计 (b) 一个下估计

t	2	4	6	8	10	12
$v(t)$	44	42	41	40	37	35

2. 下表中的速度 $v(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 12$ 上是递增的.
(a) 分别利用
  (i) $n = 4$ (ii) $n = 2$
  求总路程的一个上估计.
(b) (a) 部分的两个答案中哪个更准确? 为什么?
(c) 利用 $n = 4$ 求总路程的一个下估计.

t	0	3	6	9	12
$v(t)$	34	37	38	40	45

3. 利用下表估计 $\int_{10}^{26} f(x)\mathrm{d}x$.

x	10	14	18	22	26
$f(x)$	100	88	72	50	28

4. 如果 $f(t)$ 的单位是 mile/h, t 以 h 计, 那么 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的单位是什么?

5. 如果 $f(t)$ 的单位是 $\mathrm{m/s^2}$, t 以 s 计, 那么 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的单位是什么?

6. 如果 $f(t)$ 的单位是美元/年, t 以年计, 那么 $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ 的单位是什么?

7. 如果 $f(x)$ 的单位是磅, x 以英尺计, 那么 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的单位是什么?

8. 由于煤储藏衰竭, 需要为了每一吨煤进行越来越大面积的开采. 图 5-66 给出了从现在开始, 开采过程中, 为每百万吨煤将要破坏的土地亩数 (百万吨煤的数量的函数).

(a) 估计开采出下一个 4 百万吨煤要破坏的土地总亩数 (从现在开始计量). 在曲线下画 4 个矩形, 计算它们的面积.

(b) 用矩形上方的矩形重新估计破坏的总亩数.

(c) 利用 (a), (b) 两部分的答案得到破坏的实际亩数的较好估计.

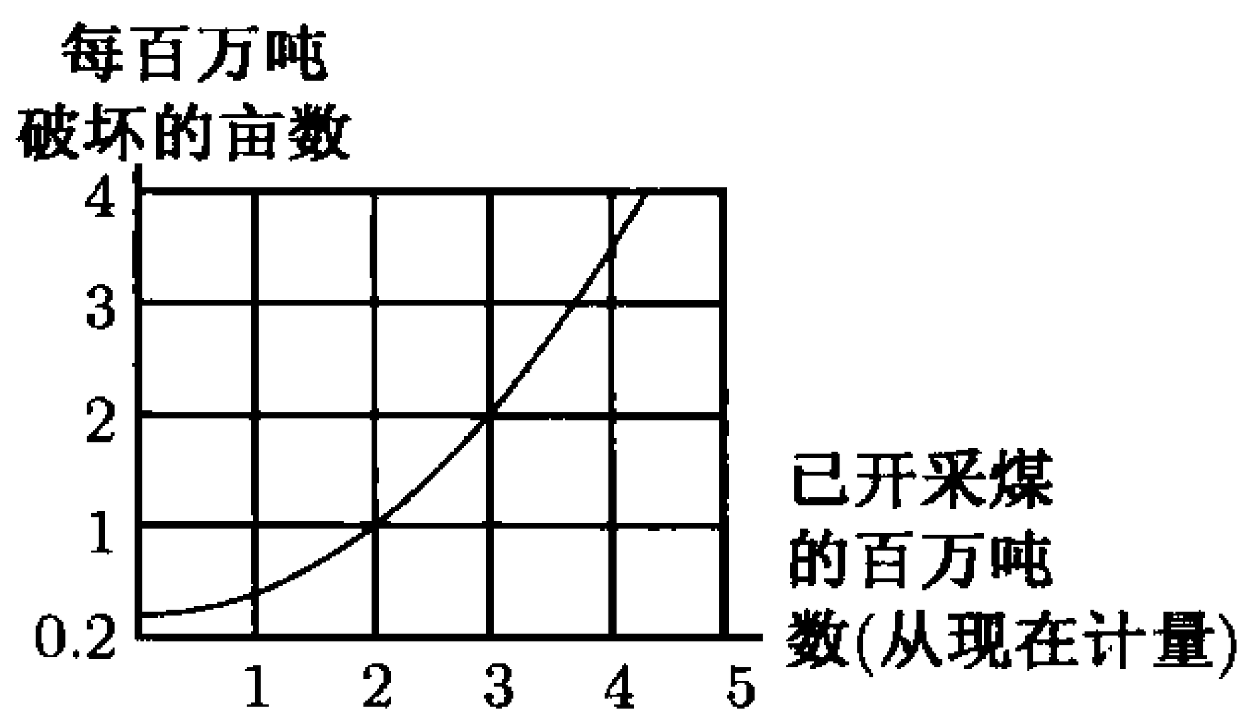


图 5-66

对习题 9~14, 利用计算器或计算机估计下列积分.

9. $\int_0^{10} 2^{-x}\mathrm{d}x$

10. $\int_1^5 (x^2+1)\mathrm{d}x$

11. $\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

12. $\int_{-1}^1 \frac{x^2+1}{x^2-4}\mathrm{d}x$

13. $\int_2^3 \frac{-1}{(r+1)^2}\mathrm{d}r$

14. $\int_1^3 \frac{z^2+1}{z}\mathrm{d}z$

15. 求 $f(x)=x^2+2$ 的图形下方介于 $x=0$ 和 $x=6$ 之间的面积.

对习题 16~19, 求给定的面积.

16. 对 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y=x^2$ 和 $y=x^3$ 之间.

17. 对 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y=x^{1/2}$ 和 $y=x^{1/3}$ 之间.

18. $y=3x$ 和 $y=x^2$ 之间.

19. $y=x$ 和 $y=\sqrt{x}$ 之间.

20. 煤气由煤气厂生产. 煤气中的污染物由洗涤器清除. 洗涤器随着使用时间的增长效率越来越低. 每月初所做的如下测量给出了污染物从煤气中逸出的比率 (吨/月):

时间 (月)	0	1	2	3	4	5	6
污染物逸出率	5	7	8	10	13	16	20

(a) 对第 1 个月从煤气中逸出的污染物总量作个上估计和下估计.

(b) 对第 6 个月从煤气中逸出的污染物总量作个上估计和下估计.

21. 一个学生正驾驶着他的红色保时捷汽车在 11 号公路上飞驰, 汽车雷达系统报警前方 400ft 处有障碍物. 由于在正前方的公路上发现了一只臭鼬, 他马上刹车将汽车减速. 保时捷的 "黑匣子" 记录了每两秒汽车的速度, 得到下表. 速度在 10 s 内一直减慢, 但减速的比率不一定相同.

刹车后的时间 (s)	0	2	4	6	8	10
速度 (ft/s)	100	80	50	25	10	0

(a) 学生的汽车在停下来前行驶的总路程的最好估计是多少?

(b) 下列叙述中, 你能从所给信息推断到的是哪个?

(i) 汽车在碰到臭鼬前停下来.

(ii) 从 "黑匣子" 数据无法得出结论, 有可能撞到也有可能没有撞到臭鼬.

(iii) 汽车没有撞倒臭鼬.

22. 一个粒子沿着 x 轴移动的速度是 $f(t) = 6 - 2t$ cm/s. 利用 $f(t)$ 的图形求粒子在 $t = 0$ 到 $t = 4$ s 间的准确位移.

23. 以 96 ft/s 的速度垂直向上抛掷的棒球在 t 秒时的速度 $v(t) = 96 - 32t$ ft/s.

(a) 画速度在 $t = 0$ 和 $t = 6$ 间的图形.

(b) 棒球何时达到最高点? 高度是多少?

(c) $t = 5$ 时棒球所处高度是多少?

24. 1993 年早期的一则新闻广播报道, 美国平均年收入正以每月 $r(t) = 40(1.002)^t$ 美元的速度变化, 其中 t 是 1993 年 1 月 1 日起的月数. 1993 年内美国平均收入变化多少?

25. 两种植物在 t = 0 时有相同的数量, 它们的生长率如图 5-67 所示.

(a) 第 5 年末, 哪种植物的数量较多? 第 10 年末呢?

(b) 你认为 20 年后哪种植物的数量较多? 请解释.

26. 图 5-68 表示你骑自行车从离家 10 mile 的地方出发沿着笔直公路短途旅行的速度 v. 写短文描述你的短途旅行: 你出发时是朝家还是离家的方向? 你在该方向上骑了多远, 折回

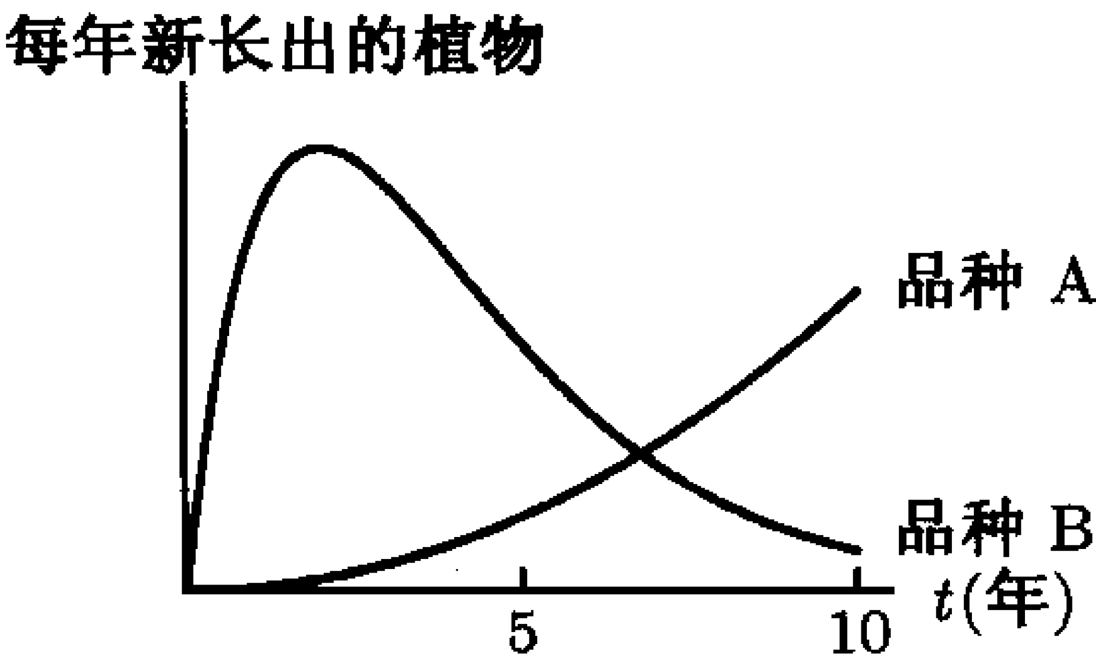


图 5-67

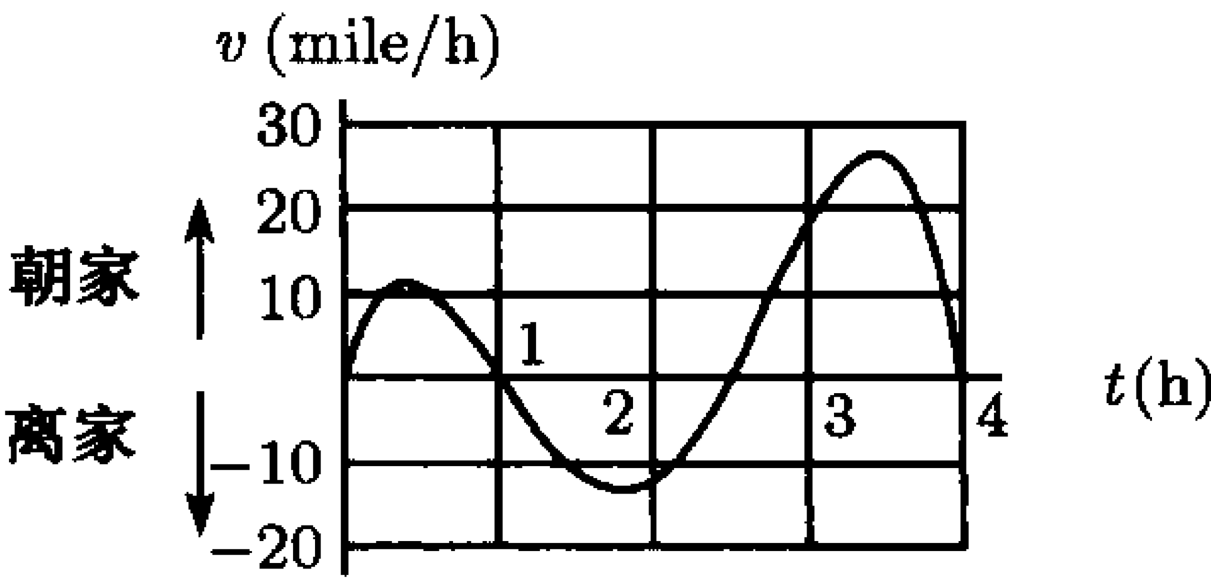


图 5-68

时离家多远？你几次改变旅行的方向？你是否到过家？在这 4 小时汽车旅行后，你在哪里？

27. 图 5-69 给出人类胎儿的长度生长率.

(a) 图 5-69 中的最大值说明了长度关于年龄的函数图形的什么性质？

(b) 估计第 40 周出生的婴儿的长度.

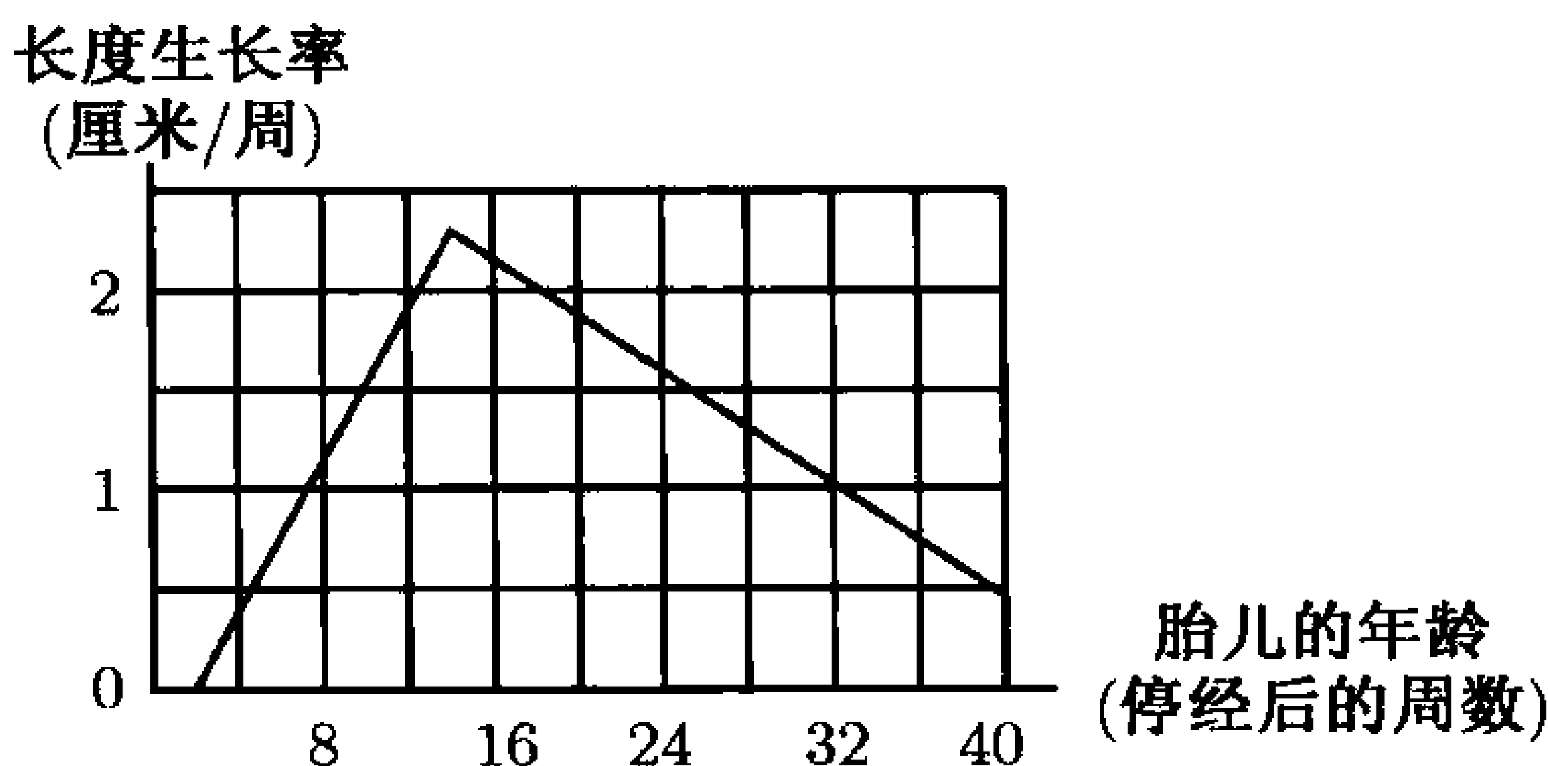


图 5-69

28. 一个人骑自行车以如图 5-70 所示的速度 v 沿着笔直公路走. 她从离湖 5mile 处出发；正的速度表示她骑车离湖，负的速度表示朝湖的方向骑车. 她何时离湖最远，当时她离湖多远？

29. 利用图 5-71，判断下面的定积分是正是负.

(a) $\int_{-5}^{-4} f(x)\mathrm{d}x$　　(b) $\int_{-4}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

(c) $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$　　(d) $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$

30. 利用图 5-71，那从小到大的顺序排列下列定积分：

$$\int_{-5}^{-3} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-5}^{-1} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x, \int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x.$$

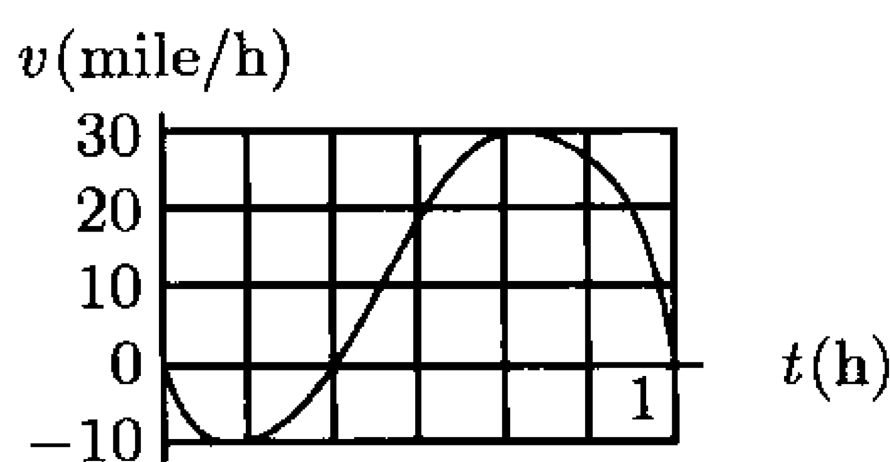


图 5-70

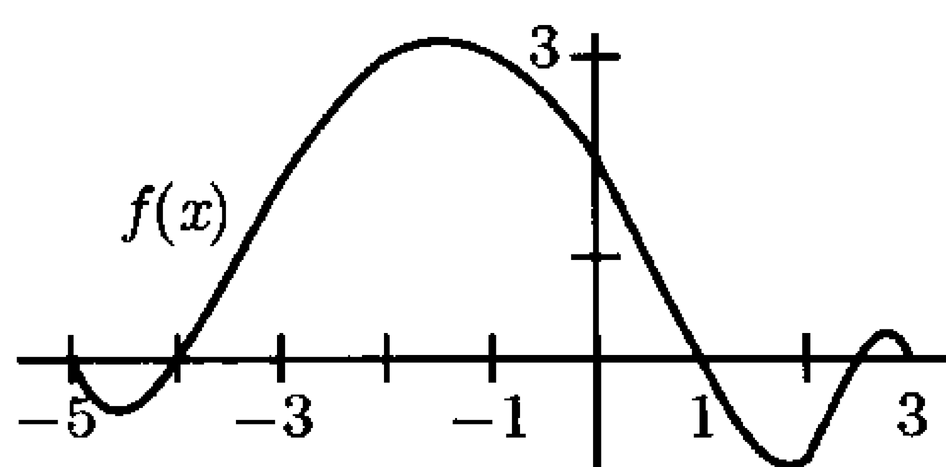


图 5-71

31. 利用 $y = 2^{-x^2}$ 的图形说明为什么 $\int_{-1}^{1} 2^{-x^2}\mathrm{d}x$ 必定介于 0 和 2 之间.

32. 不加计算证明 $2 \leqslant \int_{0}^{2} \sqrt{1+x^3}\mathrm{d}x \leqslant 6$.

33. 一个物体的速度 $v(t) = 10 + 8t - t^2\mathrm{m/s}$，其中 t 的单位是 s.

(a) 把前 5 s 内移动的路程用定积分和面积表示.

(b) 通过估计面积估计该物体在前 5 s 内移动的路程.

(c) 计算移动的距离.

34. 全世界正以连续增加的速度 $f(t)$(单位: 10 亿桶/年) 消耗石油, 其中 t 是自 1990 年初计算的年数.

(a) 用定积分表示 1990 年初到 2005 年初消耗的石油总量.

(b) 假设 $r = 32(1.05)^t$. 利用有 5 个细分区间的左手和求 1990 年初到 2005 年初消耗的石油总量的近似值.

(c) 从石油消耗量的角度说明 (b) 部分所得和的 5 项中的每一项.

35. 一辆汽车以 $v(t) = 6 - 2t, t \geqslant 0$ ft/s 的速度沿直线行驶.

(a) 用语言描述汽车的运动. (何时朝前走, 何时朝后走等等.)

(b) 若汽车的位置用它与出发点的距离衡量, 它何时向前走的最远? 向后呢?

36. 钻油井的边际成本依赖你钻井的地方: 你钻井的地方越深, 钻每米井的成本越高. 固定成本是 1 000 000 里亚尔 (沙特阿拉伯货币单位), 如果 x(单位: m) 是深度, 边际成本是

$$C'(x) = 4000 + 10x \text{ 里亚尔/ m}.$$

求钻 500 m 的井的总成本.

37. 一个仓库按每立方英尺的储存空间每天 5 美元的标准收费. 图 5-72 是一家公司一个月的储存记录. 该公司应支付多少费用?

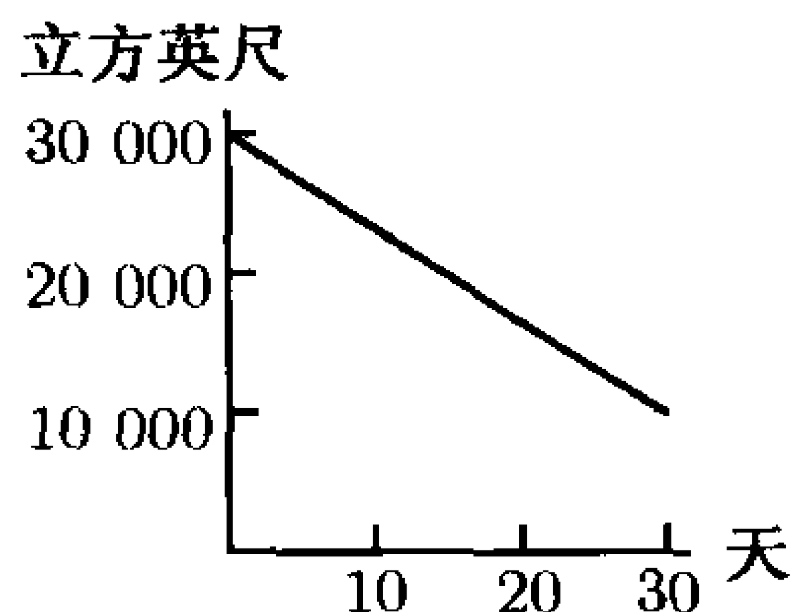


图 5-72

38. 最早引起环境保护局的污染问题是南达科他州东部的苏族 (Sioux) 湖的案例. 附近的一家小型纸厂多年来把含有四氯化碳 (CCl_4) 的废物倒进湖水. 环境保护局了解这一状况时, 化学物质以每年 16 立方码的速度进入湖水.

环保局立即责令安装过滤器以减缓 (最终断绝) 工厂的 CCl_4 流. 方案的实施耗费了整整 3 年时间, 其间污染物的流量稳定在 16 立方码/年. 过滤器安装好后, 流量降低. 从过滤器安装好到流量断绝, 流入的速度很好地近似为

$$\text{速度 (立方码/年)} = t^2 - 14t + 49,$$

其中 t 是自环保局了解到这一状况起的年数 (因此, $t \geqslant 3$).

(a) 从环保局最初了解这一状况的时间起, 画 CCl_4 进入湖水的速度关于时间的函数图形.

(b) 从环保局了解到这一状况到污染物完全断绝有多少年?

(c) 在 (a) 部分的图形所示的这段时间里, 有多少 CCl_4 进入湖水?

39. (a) 画 $x^3 - 5x^2 + 4x$ 的图形, 并标出 $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) 利用你的图形和定积分的面积解释判断

$$I_n = \int_0^n (x^3 - 5x^2 + 4x)\mathrm{d}x, n = 1, 2, 3, 4, 5$$

这 5 个数哪个最大? 哪个最小? 有几个数是正的? (不要计算定积分)

40. 受轮流投入和移动到地道端头 (右端和左端) 的少量干奶酪的吸引, 一只老鼠在地道里来回跑动. 老鼠的速度 v 如图 5-73 所示, 其中正的速度与向右运动相对应. 假设老鼠从

地道的中央开始 ($t=0$), 利用图形估计下列时间:

(a) 老鼠改变方向.

(b) 老鼠向右跑动最快; 向左跑动最快.

(c) 老鼠在右端离中央最远; 离左端最远.

(d) 老鼠的速度 (它的速度的大小) 减小.

(e) 老鼠在地道的中央.

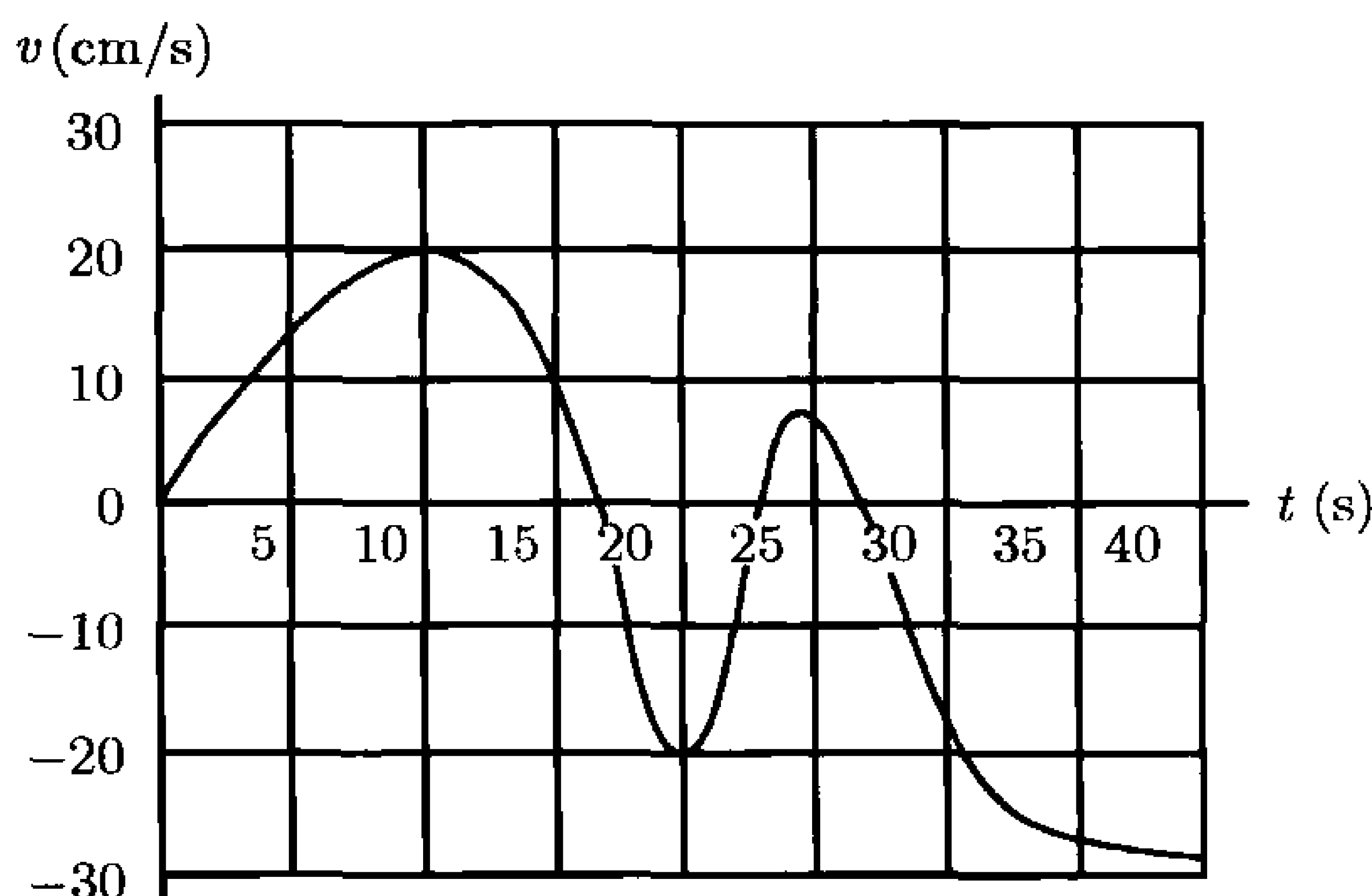


图 5-73

41. 污染物以从 10 kg/年以稳定的比率增大到 50 kg/年的速度倒入湖中, 直到 270 kg 污染物倒入湖中. 画污染物倒入湖中的速度关于时间函数的图形. 将 270 kg 污染物倒入湖中需要多长时间?

对习题 42~44, 假设 $F(0)=0, F'(x)=4-x^2$.

42. 求 $b=0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5$ 时的 $F(b)$.

43. 利用 F' 的图形, 判断 F 在 $0 \leqslant x \leqslant 2.5$ 的何处递增, 何处递减.

44. F 在 $0 \leqslant x \leqslant 2.5$ 上是否有最大值? 如果有, 最大值是多少, 它在 x 取何值时达到?

课外自修项目

1. 池塘水中的二氧化碳

二氧化碳 CO_2 进入或逸出湖水的比率反映了池塘中的生物活动. 植物为白天的光合作用从水中吸收 CO_2, 晚上呼出 CO_2 到水中. 动物在它们呼吸时呼出 CO_2 到水中. 生物学家关注进入池塘的 CO_2 的纯比率在白天的变化情况. 图 5-74 是该比率关于一天中的时间函数的图形. ①比率的单位是毫摩尔 (mmol) 每升水每小时; 时间自黎明计时 (单位: 小时). 黎明时分, 每升水中有 2.600 mmolCO_2.

(a) 由白天的比率为负和晚上的比率为正这一事实可以得出什么结论?

---

① 数据来源于 R. J. Beyers, *The Pattern of Photosynthesis and Respiration in Laboratory Microsystems* (Mem. lst. Ital. Idrobiol., 1965).

(b) 一些科学家已经指出, 植物在晚上以稳定的比率呼吸, 在白天以稳定的比率进行光合作用. 图 5-74 是否支持这一观点?

(c) 水中 CO_2 的含量何时最低? 最低含量是多少?

(d) 在黑夜的 12 小时内, 有多少 CO_2 被释放到水中? 把它与白天的 12 小时内从水中释放出来的 CO_2 量进行比较. 通过观察图形, 你如何说明池塘中的 CO_2 是否保持均衡?

(e) 估计全天的每 3 小时内, 水里的 CO_2 含量. 利用你的估计, 绘制全天 CO_2 含量的图形.

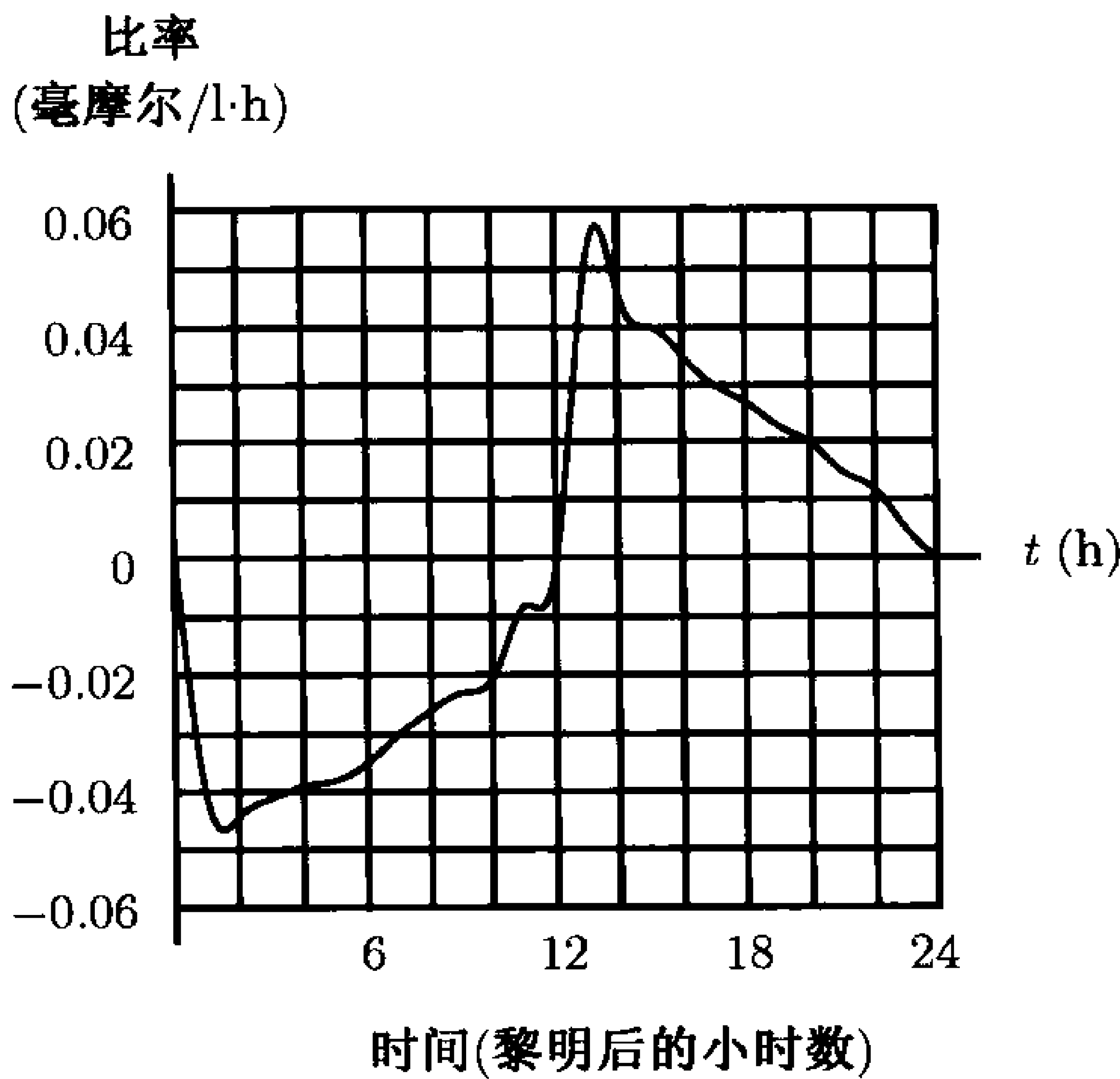


图 5-74 CO_2 进入池塘的比率

2. 大峡谷中的洪水

格伦峡顶部的格伦峡坝预防洪水. 1996 年, 为恢复环境平衡, 科学家认为人造洪水很有必要. 水通过大坝以如图 5-75 所示的受限速度放出来.[①] 该图也给出了最近 1957 年的自然洪水的速度.

(a) 人造洪水前, 1996 年经过大坝的水的速度是多少?

(b) 1957 年的洪水季前经过河流的水的速度是多少?

(c) 估计 1996 年和 1957 年的流注速度的最大值.

(d) 1996 年的洪水大约持续了多长时间? 1957 年的洪水持续了多长时间?

(e) 估计 1996 年由于人造洪水多余流经河流的水量.

(f) 估计 1957 年由于洪水多余流经河流的水量.

---

① 摘自 M. Collier, R. Webb, E. Andrews, “Experimental Flooding in Grand Canyon”,《科学美国人》(1997 年 1 月).

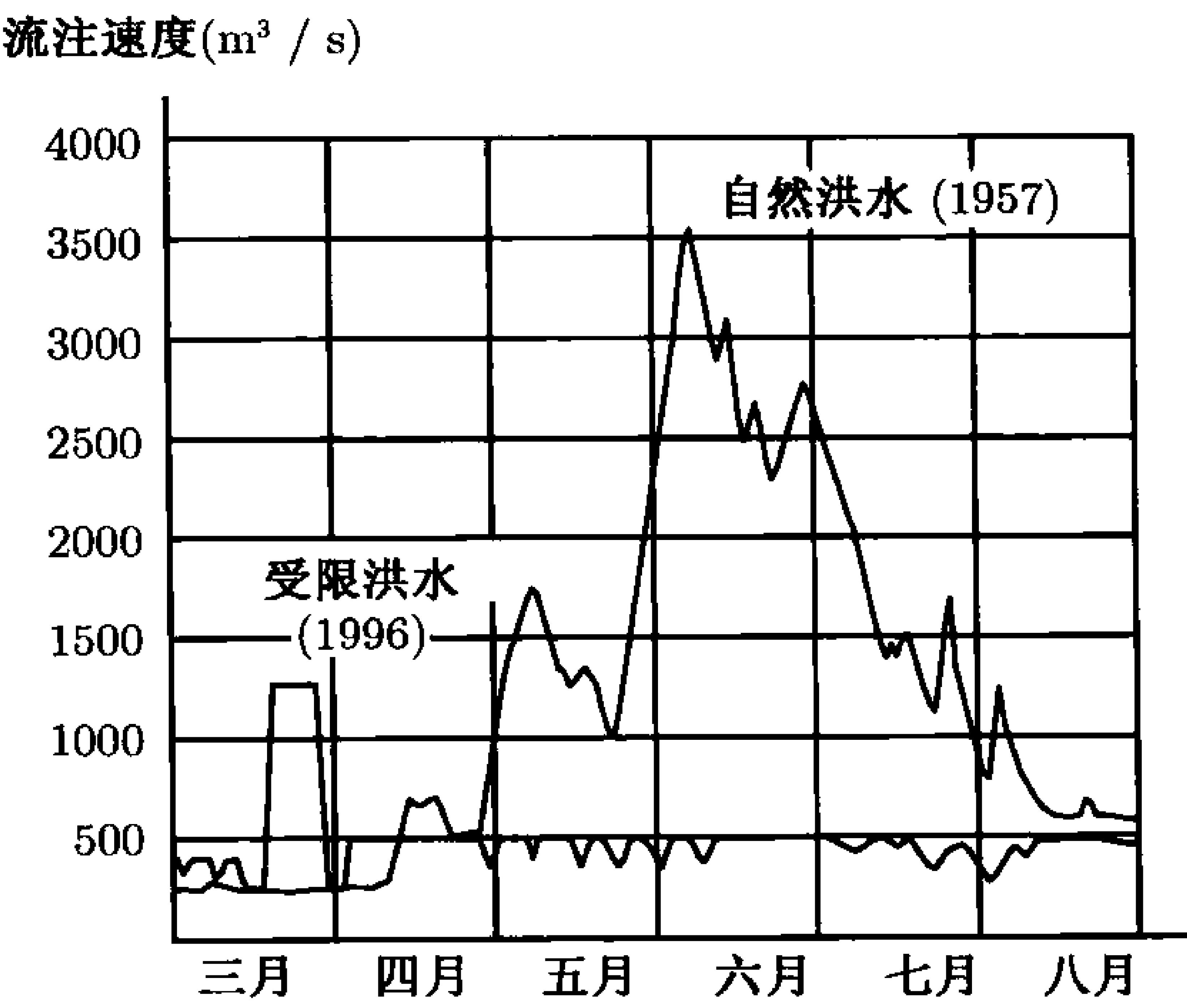

流注速度(m³ / s)
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
自然洪水 (1957)
受限洪水
(1996)
三月
四月
五月
六月
七月
八月

图 5-75

相关理论

有关定积分的定理

微积分基本定理告诉我们, 如果函数 $F(x)$ 的导数 $f(x)$ 是连续函数, 那么 $f(x)$ 的定积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

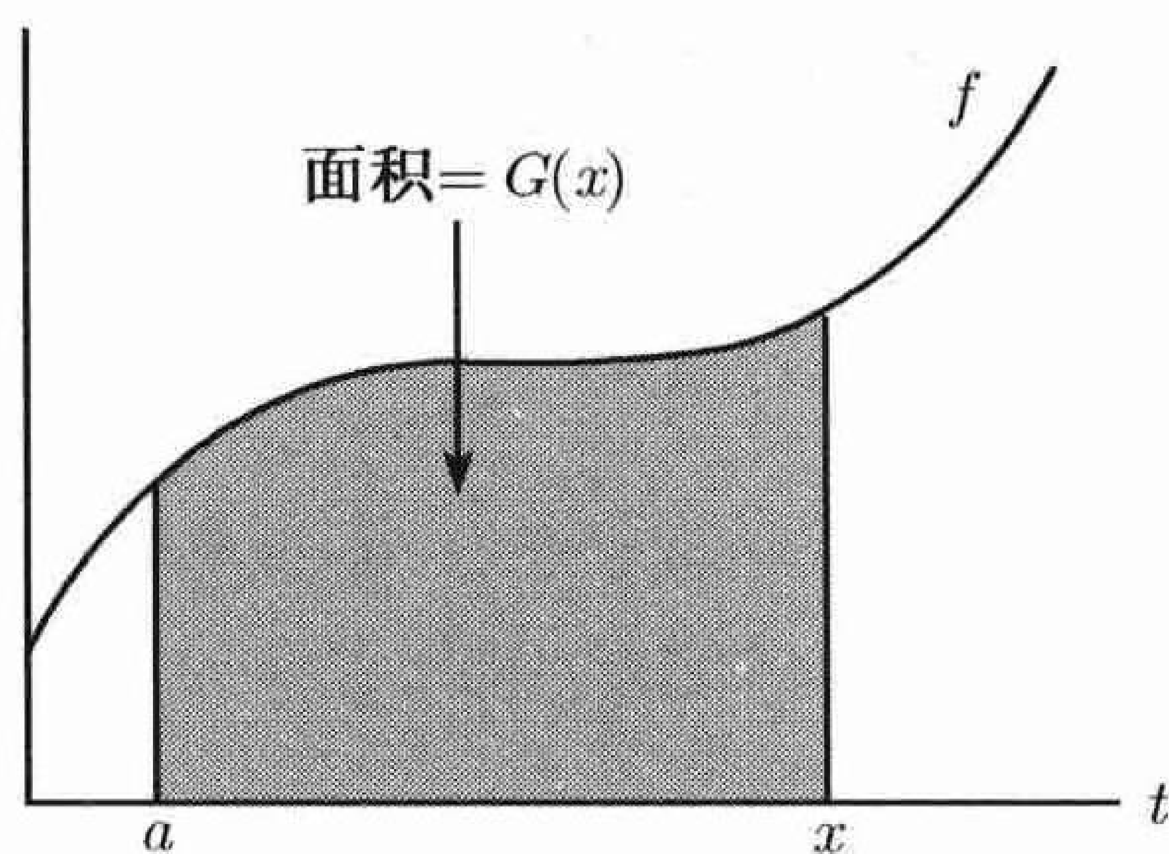


图 5-76　用面积表示 $G(x)$

我们现在采用一种不同的看法. 如果 a 固定, 上限是 x, 那么定积分的值是 x 的函数. 我们定义一个新的函数 G,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

为图形化 G, 假设 f 为正且 $x > a$. $G(x)$ 是 f 的图形下方的面积, 如图 5-76. 如果 f 在包含 a 的区间上连续, 那么可以证明 G 在所有该区间内的 x 有定义.

我们现在考虑 G 的导数. 利用导数的定义,

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}.$$

假设 f 和 h 都是正的. 那么我们用面积来表示

$$G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

和

$$G(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

由此可以用两部分面积的差表示

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t.$$

我们从图 5-77 看到, $G(x+h) - G(x)$ 大约是高为 $f(x)$, 宽 h 的矩形的面积 (图 5-77 中较暗的阴影部分), 因此我们有

$$G(x+h) - G(x) \approx f(x)h,$$

从而

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \approx f(x).$$

h 为负时, 同样的结果成立, 这就表明

$$G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=f(x).$$

这是微积分定理的另一种形式. 它通常表述如下.

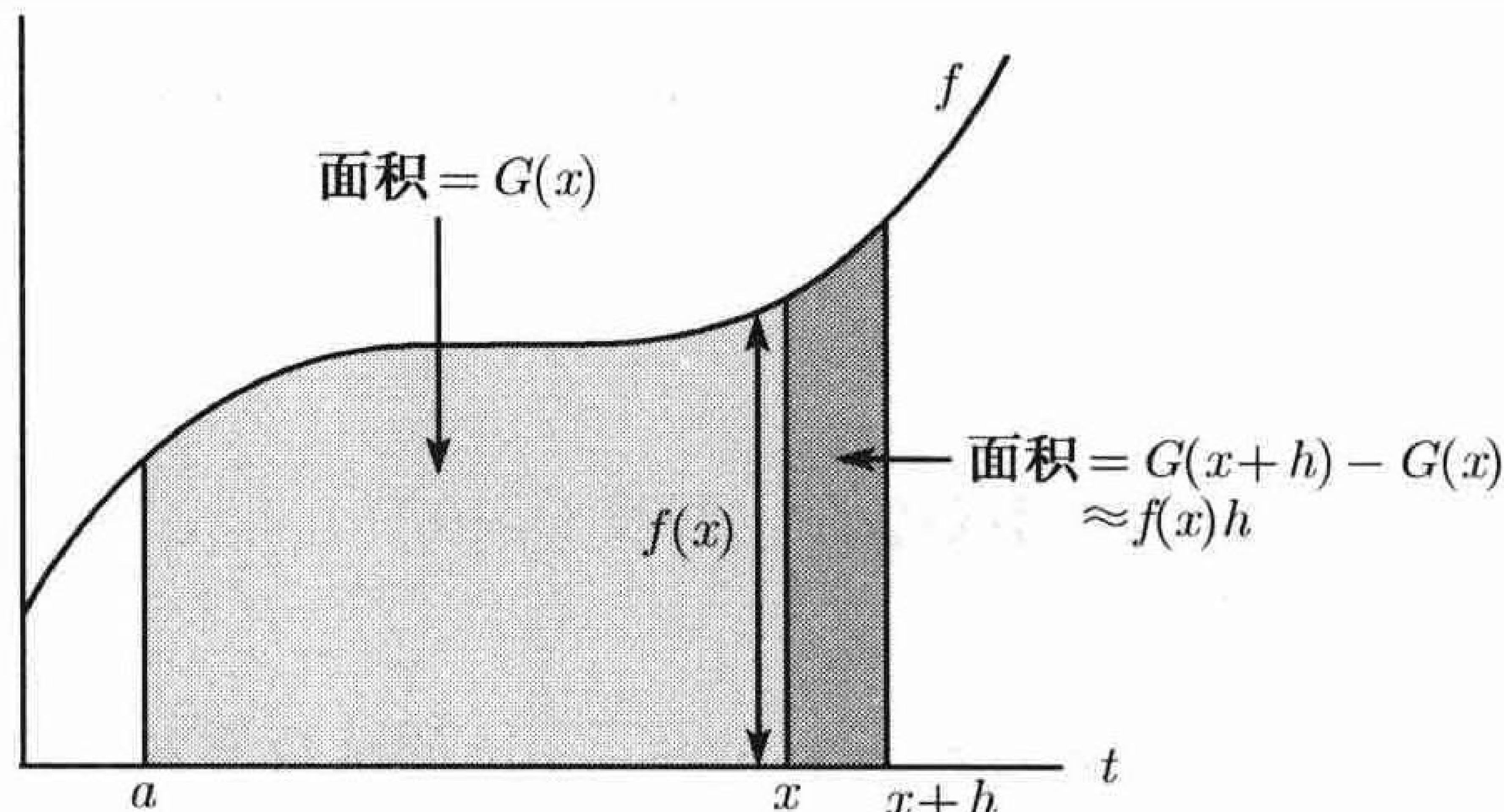


图 5-77 $G(x+h)-G(x)$ 是一个近似矩形区域的面积

微积分第二基本定理

如果 $f(x)$ 是一区间上的连续函数, a 是该区间内的任意一个数, 那么由

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

定义的函数 G 可导; 而且 $G'(x)=f(x)$.

定积分的性质

我们在本章中用下面的性质分解定积分.

定积分的和与数乘

如果 a,b,c 是任意数, f 和 g 是连续函数, 那么

(1) $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

(3) $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

用语言表示为:

(1) 从 a 到 c 的定积分加上从 c 到 b 的定积分等于从 a 到 b 的定积分.

(2) 两个函数定积分的和 (或差) 等于它们的定积分的和 (或差).

(3) 常数与函数乘积的定积分等于常数与函数的定积分的乘积.

这些性质能够通过把定积分理解成面积或矩形面积之和的极限直观表示出来.

习题

对习题 1~4, 求 $G'(x)$.

1. $G(x)=\int_a^x t^3\mathrm{d}t$

2. $G(x)=\int_a^x 3^t\mathrm{d}t$

3. $G(x)=\int_a^x t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$

4. $G(x)=\int_a^x \ln y\mathrm{d}y$

5. 设 $F(b)=\int_0^b 2^x\mathrm{d}x$.

(a) $F(0)$ 是多少?

(b) F 的值随着 b 的增加是递增或递减? (假设 $b\geqslant 0$.)

(c) 估计 $F(1),F(2)$ 和 $F(3)$.

6. 对 $x=0, 0.5, 1.0, 1.5$ 和 2, 作 $I(x)=\int_0^x\sqrt{t^4+1}\mathrm{d}t$ 的函数值表.

7. 假设 $F'(t)=\sin t\cos t$ 且 $F(0)=1$. 对 $b=0, 0.5, 1.0, 1.5, 2, 2.5$ 和 3, 求 $F(b)$.

设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=8, \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x=12, \int_a^b g(t)\mathrm{d}x=2$ 和 $\int_a^b (g(t))^2\mathrm{d}t=3$. 求习题 8~11 中的定积分.

8. $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x$

9. $\int_a^b ((f(x))^2-(g(x))^2)\mathrm{d}x$

10. $\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x-(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)^2$

11. $\int_a^b cf(z)\mathrm{d}z$

第 6 章　定积分的应用

第 5 章考虑了如何利用定积分计算面积或总变化量. 本章, 我们利用定积分解决平均值、消费者剩余和生产者剩余、现值和将来值, 以及人口增长等问题. 针对每种问题, 我们都首先利用黎曼和来估计相关数量.

6.1 平　均　值

本节我们说明如何将定积分解释为函数的平均值.

作为平均值的定积分

我们都知道如何求 n 个数的平均值: 将它们求和后除以 n. 然而, 如果是针对一个连续变化的函数, 怎样才能求出它的平均值呢? 来看一个例子. 假设 $f(t)$ 为时刻 t 时的温度, t 起始于午夜, 单位为小时, 我们需要计算 24 个小时内的平均温度. 一种做法是, 求出一天之内 n 个等距时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 上的平均温度.

$$\text{平均温度} \approx \frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)}{n}.$$

我们设置的 n 越大, 近似程度就越好. 注意到 $\Delta t = 24/n$, 于是 $n = 24/\Delta t$, 在区间 $0 \leqslant t \leqslant 24$ 上, 可以将上式改写为黎曼和:

$$\begin{aligned}\text{平均温度} &\approx \frac{f(t_1)+f(t_2)+\cdots+f(t_n)}{24/\Delta t}\\ &= \frac{f(t_1)\Delta t+f(t_2)\Delta t+\cdots+f(t_n)\Delta t}{24}\\ &= \frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t.\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时, 黎曼和会趋向于一个定积分, 并且近似程度越来越好. 我们预计

$$\begin{aligned}\text{平均温度} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t\\ &= \frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

一般地, 对任意函数 f, 假定 $a < b$, 我们有

$$\text{从 } a \text{ 到 } b \text{ 的区间上 } f \text{ 的平均值} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里, $f(x)$ 的单位和 $f(x)$ 的平均值的单位是一致的.

怎样图形化平均值

通过平均值的定义, 我们知道

$$(f\ \text{的平均值})\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

我们将定积分解释为 f 的图形下方的面积. 如果 $f(x)$ 是正的, 那么 f 的平均值就是一个底边长为 $(b-a)$ 的矩形的高, 这个矩形的面积刚好等于 f 的图形与 x 轴之间的面积. (参见图 6-1.)

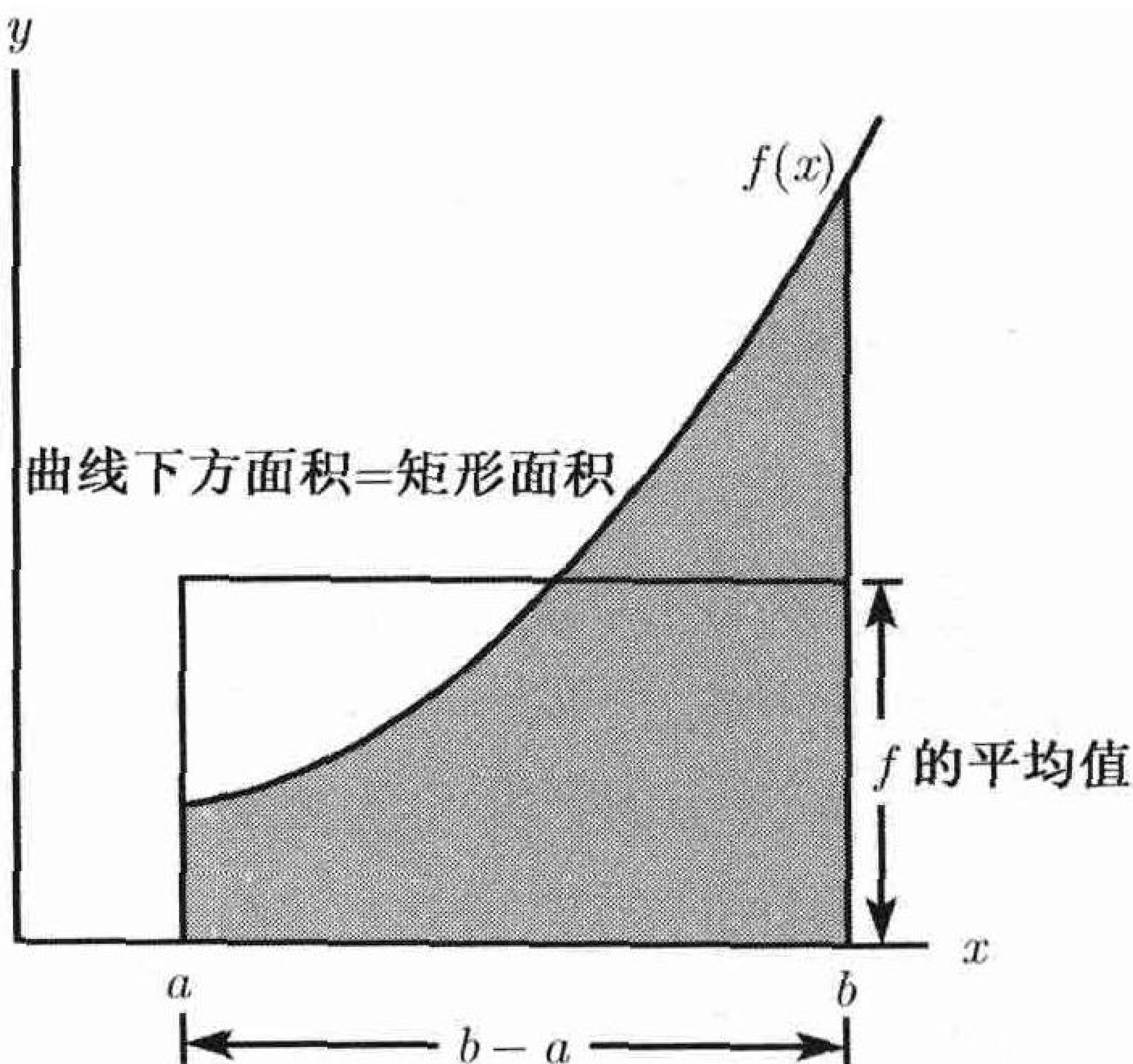


图 6-1　面积与平均值

例 1　假设 $C(t)$ 表示每天的住房供暖费用, 单位为美元/天, 这里 t 以天计, $t=0$ 对应的时间是 2005 年 1 月 1 日, 解释 $\dfrac{1}{90-0}\displaystyle\int_0^{90}C(t)\mathrm{d}t$.

解　定积分 $\displaystyle\int_0^{90}C(t)\mathrm{d}t$ 的单位是: (美元/天)×(天数)= 美元, 它表示 2005 年最初的 90 天内 (也就是 1 月、2 月和 3 月三个月内), 住房供暖的总费用. 表达式 $\dfrac{1}{90-0}\displaystyle\int_0^{90}C(t)\mathrm{d}t$ 表示 2005 年最初的 90 天内的每天平均费用, 它的计量单位是 (1/天数)×(美元)= 美元/天, 与 $C(t)$ 的单位是一致的. □

例 2　在 1.5 节, 我们利用函数

$$P=f(t)=570(1.037)^t,$$

建立了麦卡伦的人口模型, 这里 P 是人口数 (单位是千人), t 是 2000 年以来的年数. 利用上述函数预测 2020~2040 年麦卡伦的平均人口.

解　我们需要求 $t=20$ 到 $t=40$ 期间 $f(t)$ 的平均值, 利用计算器求积分值, 可得

$$\text{平均人口} = \frac{1}{40-20}\int_{20}^{40} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{20}(34\ 656.2) = 1732.81.$$

预计 2020~2040 年麦卡伦的平均人口大约是 1733 千人. □

例 3 (a) 针对图 6-2 给出的函数 $f(x)$, 求 $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(b) 求 $x=0$ 到 $x=5$ 的区间上 $f(x)$ 的平均值, 并利用图形验证结果.

解 (a) 由于 $f(x) \geqslant 0$, 定积分就是 $x=0$ 到 $x=5$ 之间 $f(x)$ 的图形下方区域的面积. 图 6-2 表明这个区域由 13 个完整的方格和 4 个半方格组成, 每个方格的面积是 1, 加在一起总面积为 15, 于是

$$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 15.$$

(b) $x=0$ 到 $x=5$ 的区间上 $f(x)$ 的平均值为

$$\text{平均值} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}(15) = 3.$$

我们利用图形来验证结果. 在 $f(x)$ 的图形上, 画一条水平直线 $y=3$. (参见图 6-3.) 可以发现, 在 $x=0$ 到 $x=5$ 之间 $f(x)$ 的图形下方的面积刚好等于高为 3 的矩形面积.

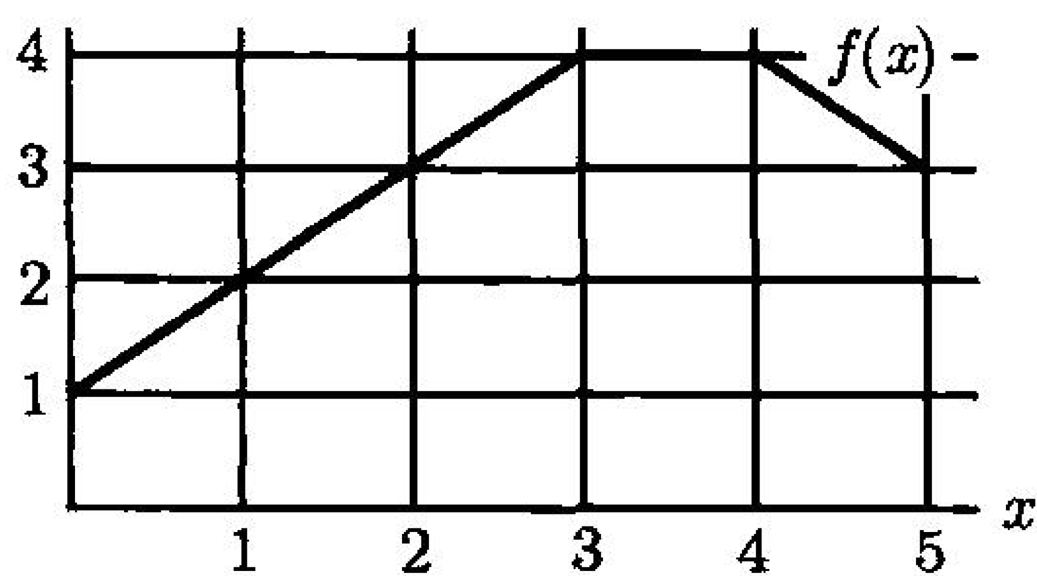


图 6-2 估计 $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

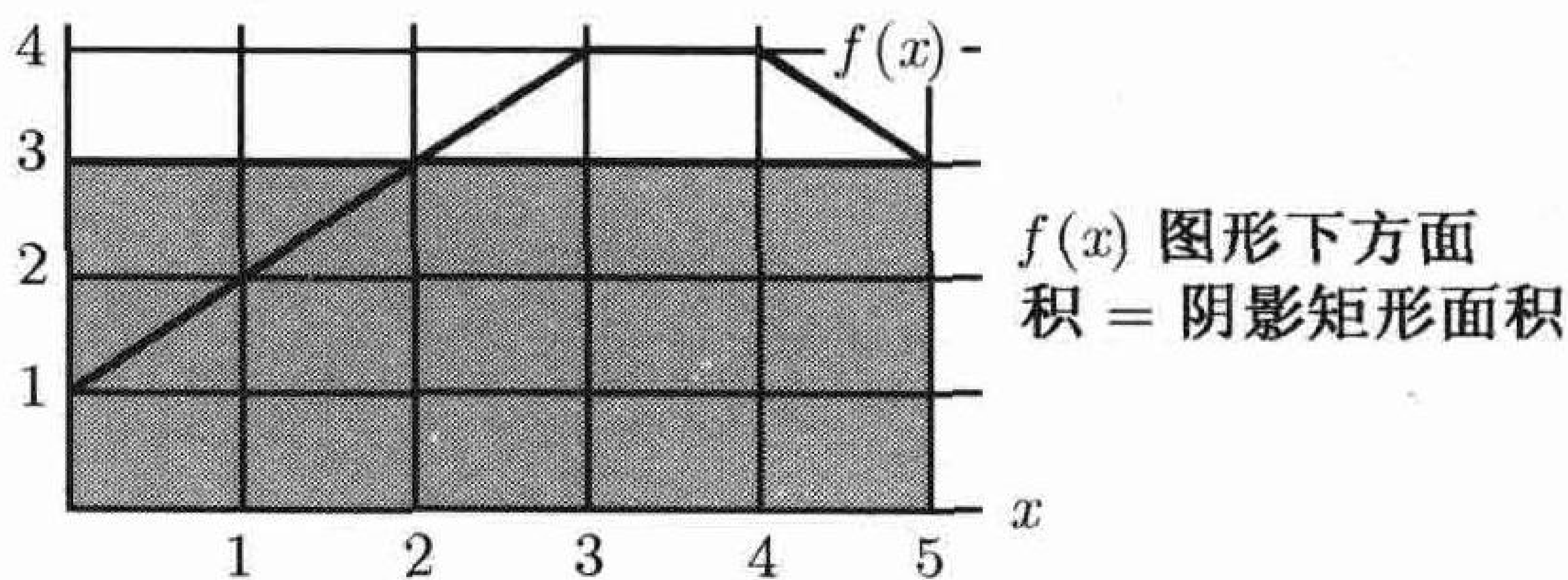


图 6-3 $f(x)$ 的平均值为 3 □

习题

1. 利用图 6-4 估计下列值:

(a) 定积分 $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) 通过直观估计图形的平均高度, 求 f 在 $x=0$ 到 $x=5$ 之间的平均值.

(c) 利用 (a) 的结果, 估计 f 在 $x=0$ 到 $x=5$ 之间的平均值.

2. 求函数 $f(x)=5+4x-x^2$ 在 $x=0$ 到 $x=3$ 之间的平均值.

3. **(a)** 利用图 6-5 求 $\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x$.

(b) f 在 $x=0$ 到 $x=6$ 的区间上的平均值是多少?

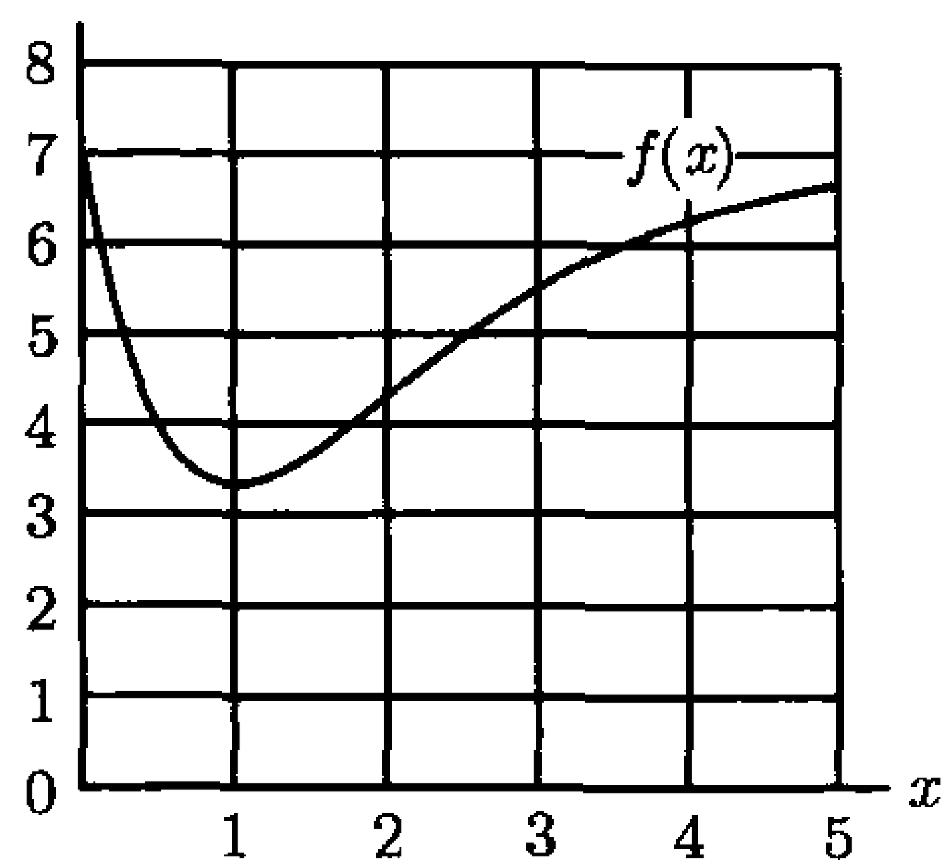


图 6-4

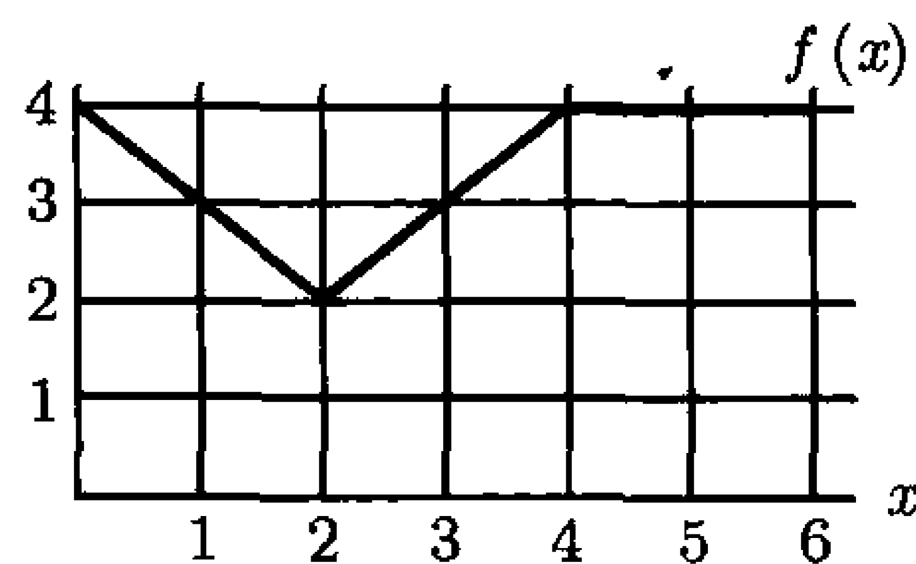


图 6-5

4. 求函数 $g(t)=1+t$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值.

5. (a) 利用图 6-6 和图 6-7, 求下列函数在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上的平均值:

(i) $f(x)$ (ii) $g(x)$ (iii) $f(x)\cdot g(x)$

(b) 下面陈述是否正确? 说明理由.

$$f \text{ 的平均值}\cdot g \text{ 的平均值} = f\cdot g \text{ 的平均值}$$

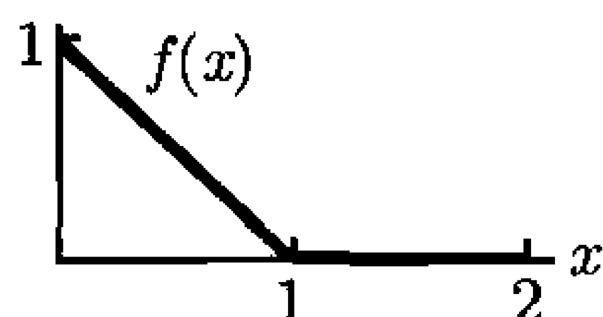


图 6-6

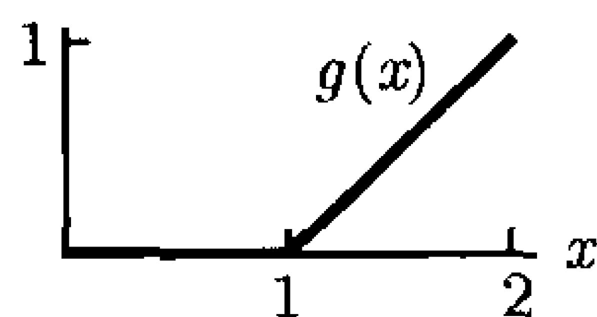
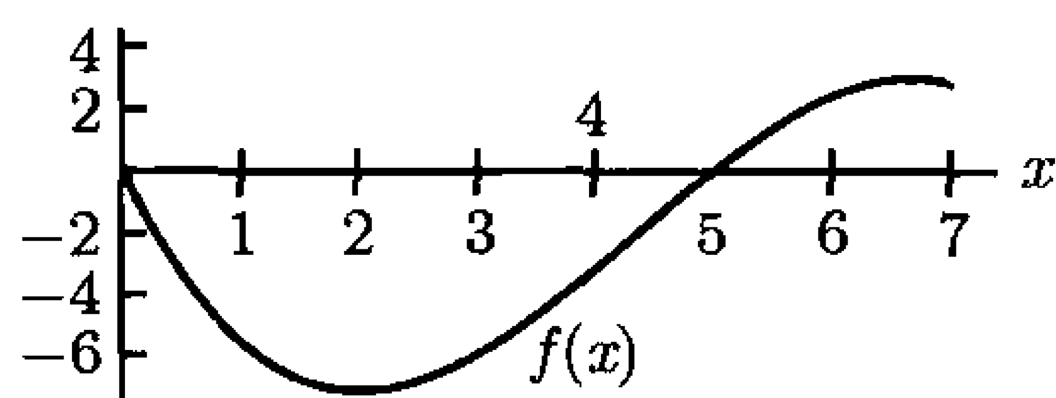


图 6-7

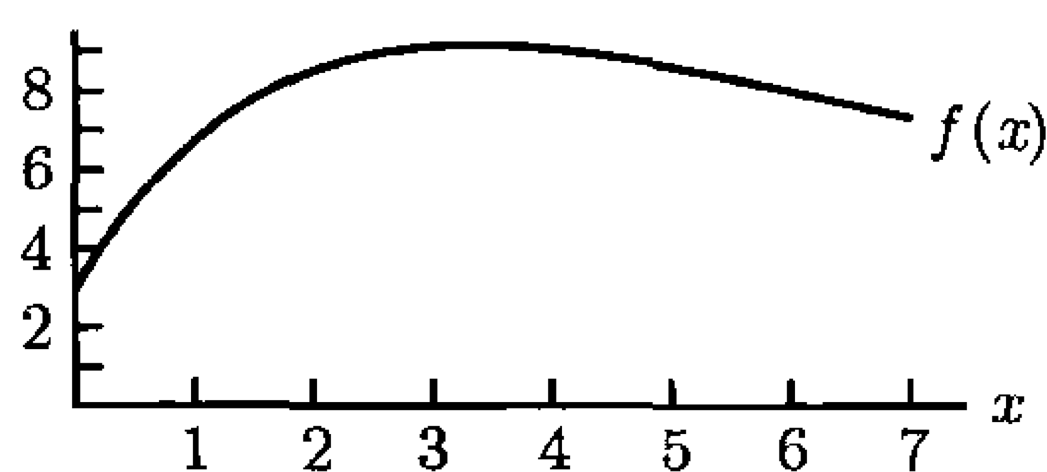
6. 求函数 $g(t)=\mathrm{e}^t$ 在区间 $0\leqslant t\leqslant 10$ 上的平均值.

在习题 7 和习题 8 中, 估计函数在 $x=0$ 与 $x=7$ 之间的平均值.

7.

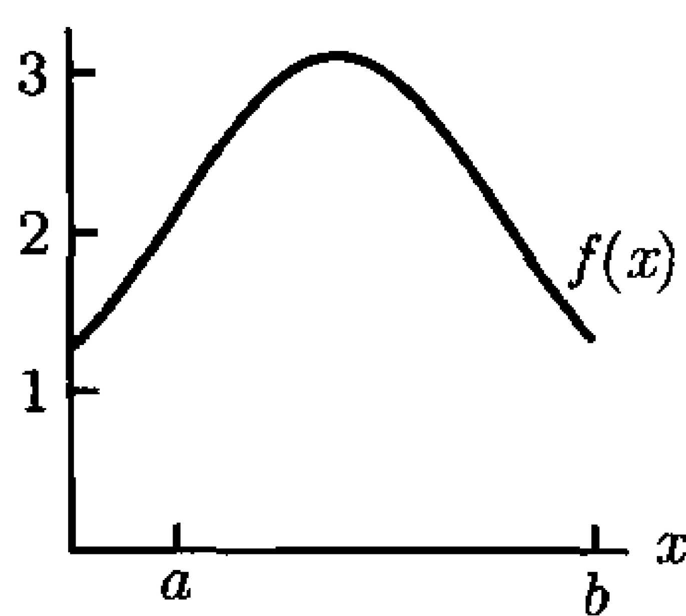


8.

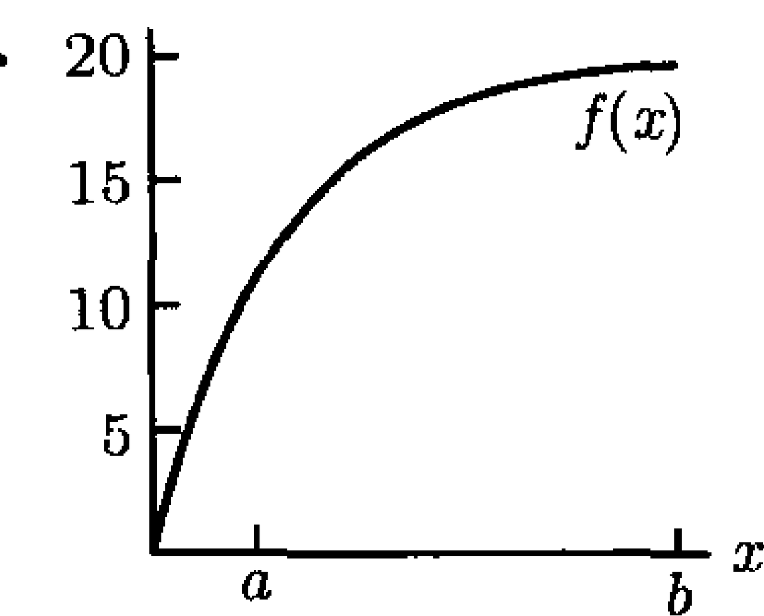


在习题 9 和习题 10 中, 估计 $f(x)$ 在 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的平均值.

9.



10.



11. 一个服务站每 6 个月定购 100 箱电动机润滑油. 订单到货后的 t 个月, 剩余润滑油的箱数可以表示为

$$f(t)=100\mathrm{e}^{-0.5t}.$$

(a) 在 6 个月初始时, 有多少箱润滑油? 6 个月结束时, 还剩多少箱?

(b) 求 6 个月期间内库存的平均箱数.

12. 假设 t 是 6 月 1 日以来的天数, 仓库中某种货物的库存量 $I(t)$ 可以表示为

$$I(t) = 5000(0.9)^t.$$

(a) 求 6 月 1 日以后的 90 天内仓库中的平均库存量.

(b) 画出 $I(t)$ 的图形, 用图形说明平均库存量.

习题 13 和习题 14 参考图 6-8, 它显示的是一次心跳过程中人的动脉血压.

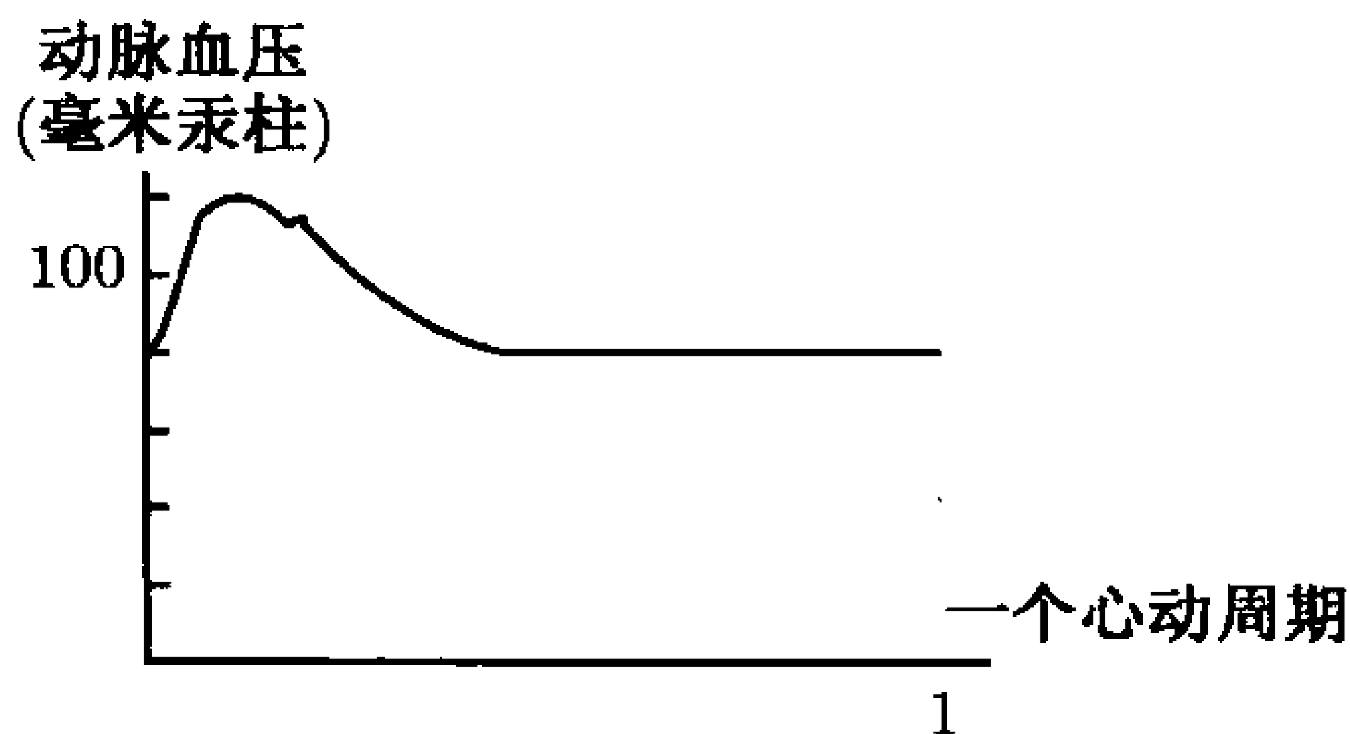


图 6-8

13. (a) 估计最高血压, 它被称为收缩压.

(b) 估计最低血压, 它被称为舒张压.

(c) 计算收缩压与舒张压的平均值.

(d) 整个周期内动脉的平均血压是大于, 小于, 还是等于 (c) 中的平均值?

14. 估计一个心动周期内动脉的平均血压.

15. 图 6-9 中的 $f(x)$, 表示水藻的生长速度, 单位是千个/小时, 其中 x 的单位是小时.

(a) 估计在 $x = -1$ 到 $x = 3$ 的区间内的平均生长速度.

(b) 估计在 $x = -3$ 到 $x = 3$ 的区间内的水藻总数的总变化量.

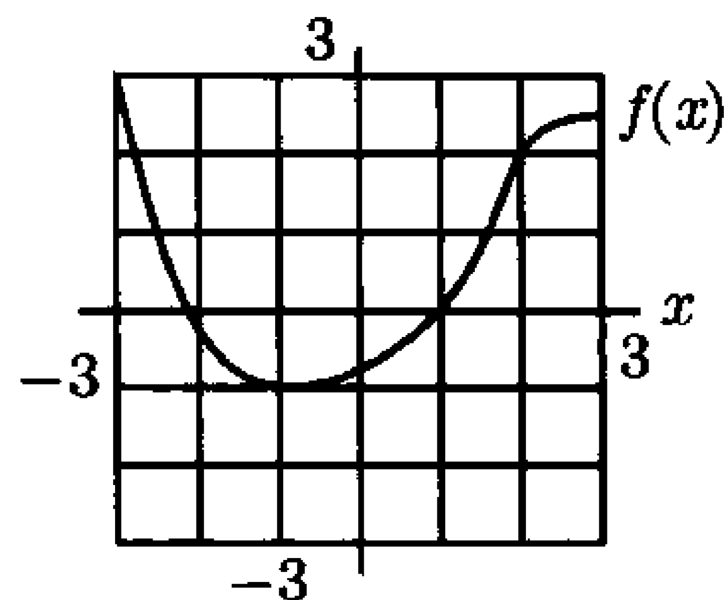


图 6-9

16. 2000 年以后的 t 年, 预计世界人口是 $P = 6.1e^{0.0125t}$ (单位: 十亿).

(a) 预计 2010 年世界人口是多少?

(b) 预计 2000~2010 年世界人口的平均值是多少?

17. 马德里的白昼时间 H, 作为日期的函数可以近似表示为

$$H = 12 + 2.4\sin[0.0172(t - 80)],$$

其中 H 以小时计, t 是当年开始以来的天数. 计算以下期间内马德里白昼的平均小时数:

(a) 一月 (b) 六月 (c) 一年

(d) 解释 (a), (b) 和 (c) 中给出的相关数量为什么是合理的.

18. 一根金属条从 1000°C 冷却到室温 20°C. 冷却开始后 t 分钟, 金属条的温度 H(单位: °C) 可以表示为

$$H = 20 + 980e^{-0.1t}.$$

(a) 求冷却 1 小时后金属条的温度.

(b) 求最初 1 小时内金属条的平均温度.

(c) (b) 中给出的值是大于, 还是小于冷却开始时和冷却 1 小时后两个温度的平均值? 用 H 的图形的凹性解释这一结果.

19. 2000 年以来的 t 年, 麦卡伦的人口 (以千人计) 可以表示为

$$P = 570(1.037)^t.$$

(a) 求 2000~2010 年麦卡伦的平均人口.

(b) 求 2000 年和 2010 年这两年麦卡伦的人口的平均值.

(c) 利用 P 的图形 (图 1-59) 的凹性, 解释 (b) 中的值大于或小于 (a) 中的值的原因.

20. 一个公司的销售速度 (以每月销售量为单位) 可以表示为

$$r(t) = t^4 - 20t^3 + 118t^2 - 180t + 200.$$

其中 t 是从 1 月 1 日以来的月数.

(a) 画出第一年间 ($t = 1$ 到 $t = 12$), 每个月的销售速度图形. 看上去是上半年销售的多还是下半年销售的多?

(b) 估计上半年总销售量和下半年总销售量.

(c) 全年的总销售量是多少?

(d) 求一年之中的月平均销售量.

21. 在 20 世纪的大部分时间里, 美国的年电消耗量以每年 7% 的连续速度呈指数形式增长. 假设这种趋势一直持续, 且 1900 年的电消耗量为 1.4 百万兆瓦时.

(a) 写出年电消耗量作为时间 t 的函数的表达式, 这里 t 是 1900 年以来的年数.

(b) 求整个 20 世纪的平均年电消耗量.

(c) 哪一年的年电消耗量最接近于本世纪平均年电消耗量?

(d) 不用进行 (c) 中的计算, 你如何预计结果会在哪半个世纪?

22. 利用图 6-10, 将下列值从小到大排列:

(a) $f'(1)$ (b) f 在 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 上的平均值

(c) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

23. 利用图 6-11, 将下列值从小到大排列:

(a) $f'(1)$

(b) $f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上的平均值

(c) $f(x)$ 的变化率在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上的平均值

(d) $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

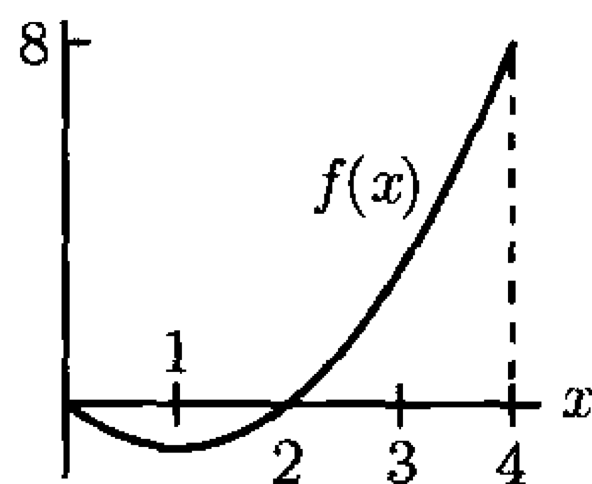


图 6-10

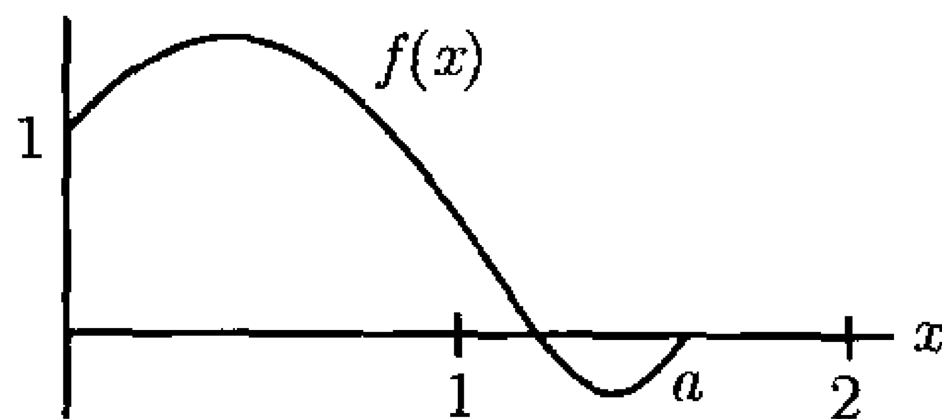


图 6-11

6.2 消费者剩余和生产者剩余

6.2.1 供给曲线和需求曲线

在第 1 章我们看到, 制造和销售某种产品的数量可以用这种产品的供给曲线和需求曲线来描述. *供给曲线*表明了在不同价格 p 下, 生产者提供的产品数量 q. 需求曲线用来反映消费者的行为, 它表明了在不同价格下, 货物购买的数量. 如图 6-12 所示.

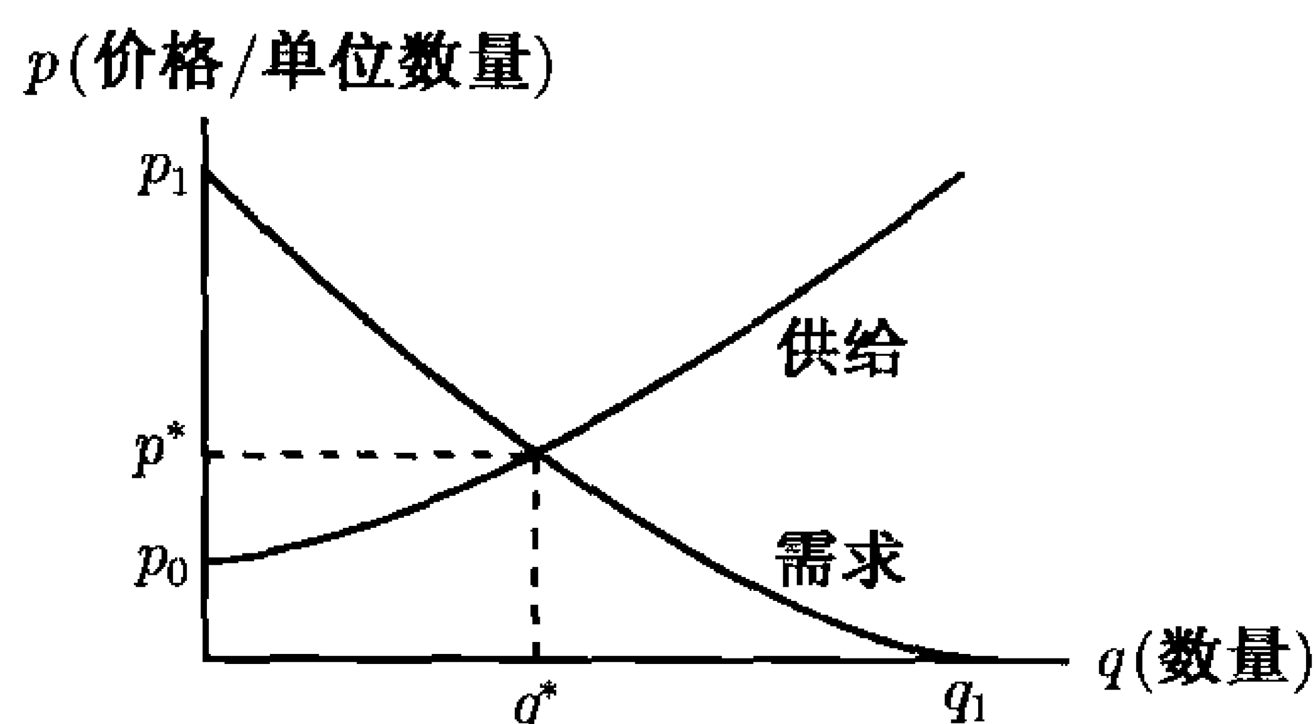


图 6-12 供给曲线和需求曲线

通常假设市场稳定于*均衡价格* p^* 和*均衡产量* q^* 之下, 即图中的交点处. 在均衡状态下, 数量为 q^* 的产品制造出来, 并以单位价格 p^* 销售出去.

6.2.2 消费者剩余和生产者剩余

注意在均衡状态下, 大量消费者是以低于他们原本愿意支付的价格购买了产品. (例如有些消费者, 他们原本愿意以更高直至 p_1 的价格来购买产品.) 同样地, 也有些生产者, 他们原本愿意以更低的价格 (事实上, 最低可到 p_0) 来生产产品. 我们定义如下术语.

- **消费者剩余**度量消费者的交易所得. 它是消费者以现在价格而不是他们原本愿意支付的价格购买产品后的所得总量.
- **生产者剩余**度量生产者的交易所得. 它是生产者以现在价格而不是他们原本愿意接受的价格卖出产品后的所得总量.

在缺乏价格管理的情形下, 现在价格假定就是均衡价格.

通过产品交易, 消费者和生产者都会赚取所得, 消费者剩余和生产者剩余用来度量他们的所得总量.

假设所有的消费者都按照他们愿意支付的最高价格来购买产品. 我们将从 0 到 q^* 的区间划分为长度为 Δq 的区间. 图 6-13 显示, 数量为 Δq 的产品以大约 p_1 的价格卖出, 接着另一个数量为 Δq 的产品以大约为 p_2 的稍低价格卖出, 下一个数量为 Δq 的产品又以大约 p_3 的价格卖出, 等等. 这样, 消费者的总支出额大约是

$$p_1\Delta q + p_2\Delta q + p_3\Delta q + \cdots = \sum p_i\Delta q.$$

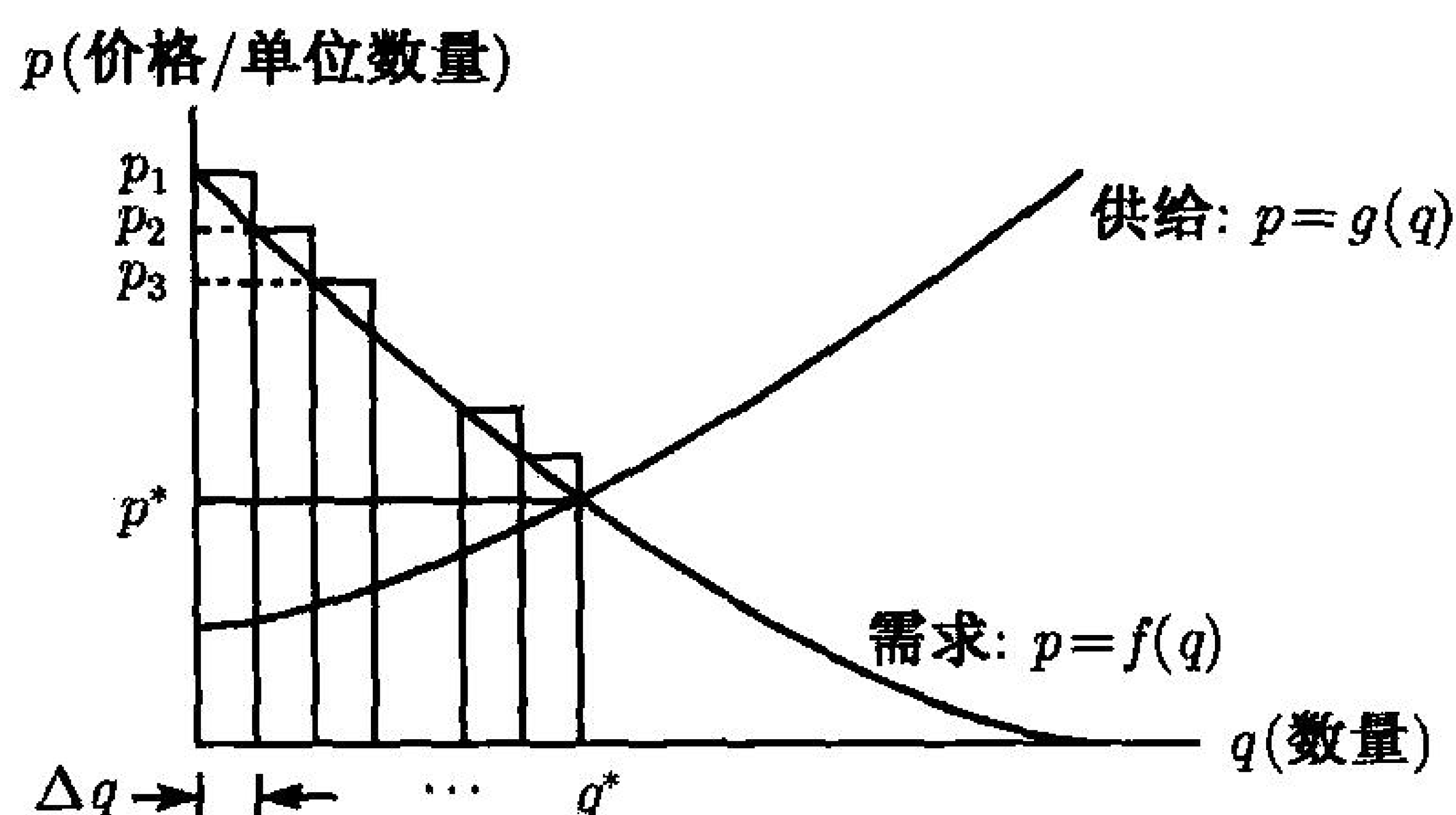


图 6-13　消费者剩余的计算

假设需求曲线的表达式①为 $p=f(q)$, 且所有那些原本愿意以高于 p^* 的价格购买的消费者如愿付款, 那么随着 $\Delta q \to 0$, 我们会得到

$$\text{消费者的总支出额} = \int_0^{q^*} f(q)\mathrm{d}q = \text{需求曲线从 0 到 } q^* \text{ 的下方面积}.$$

如果所有的产品以均衡价格卖出, 消费者的实际总支出额仅仅只是 p^*q^*, 它是 q 轴和直线 $p=p^*$ 从 $q=0$ 到 $q=q^*$ 所围成的矩形的面积. 消费者剩余是消费者的总支出额与消费者的实际总支出额的差. 这里, 消费者的总支出额是在假设所有消费者都支付了他们愿意的最高数额的情况下得到的, 消费者的实际总支出额是在假设所有消费者以现在价格支付的情况下得到的. 消费者剩余可用图 6-14 的阴影区域的面积来表示. 类似地, 生产者剩余可用图 6-15 的阴影区域的面积来表示. (参见习题 13 和习题 14.) 于是

价格为 p^* 时的消费者剩余 = 介于需求曲线和水平直线 $p=p^*$ 之间的区域面积.
价格为 p^* 时的生产者剩余 = 介于供给曲线和水平直线 $p=p^*$ 之间的区域面积.

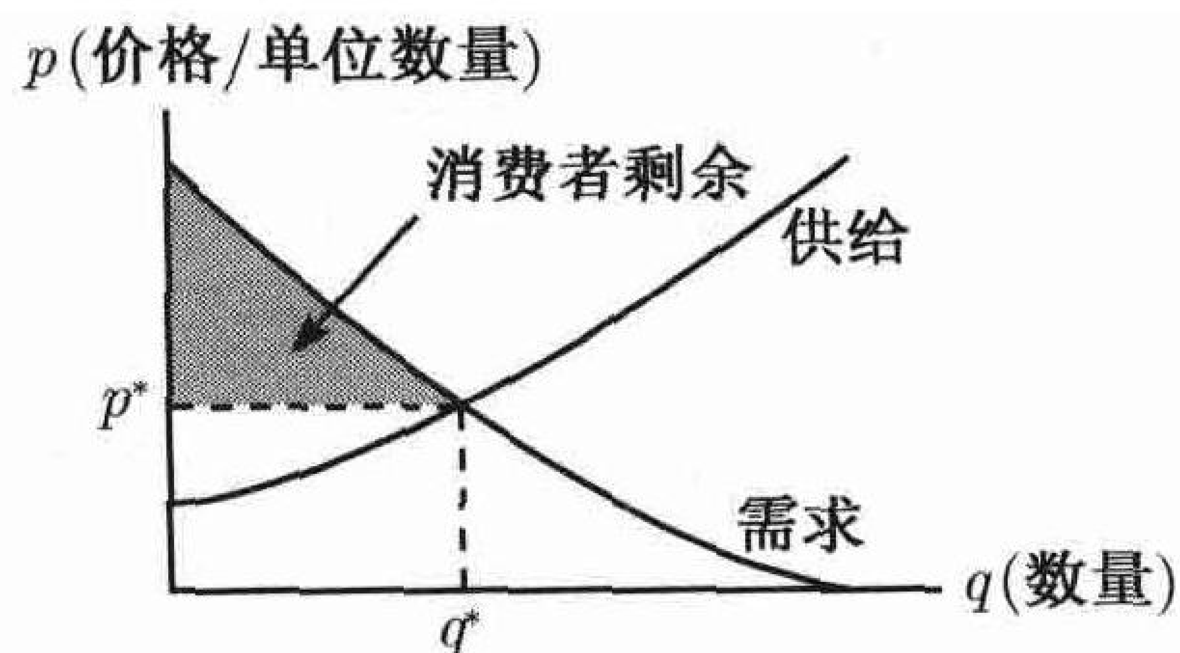


图 6-14　消费者剩余

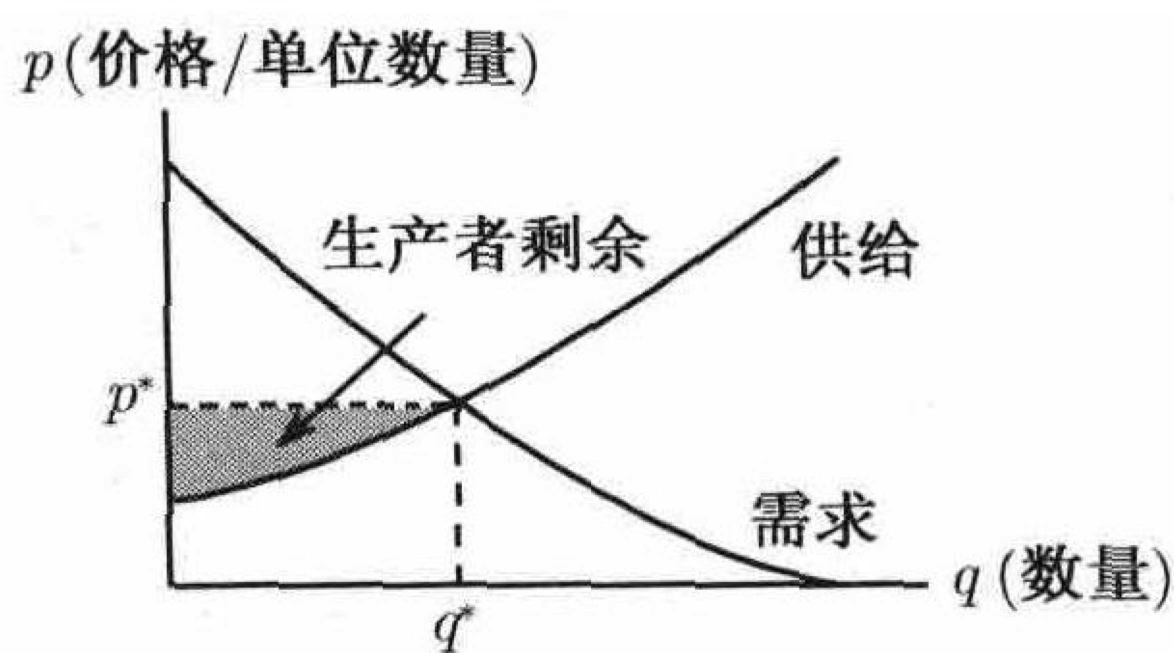


图 6-15　生产者剩余

例 1　图 6-16 给出了一种产品的供给曲线和需求曲线.

① 注意这里 p 写为 q 的函数.

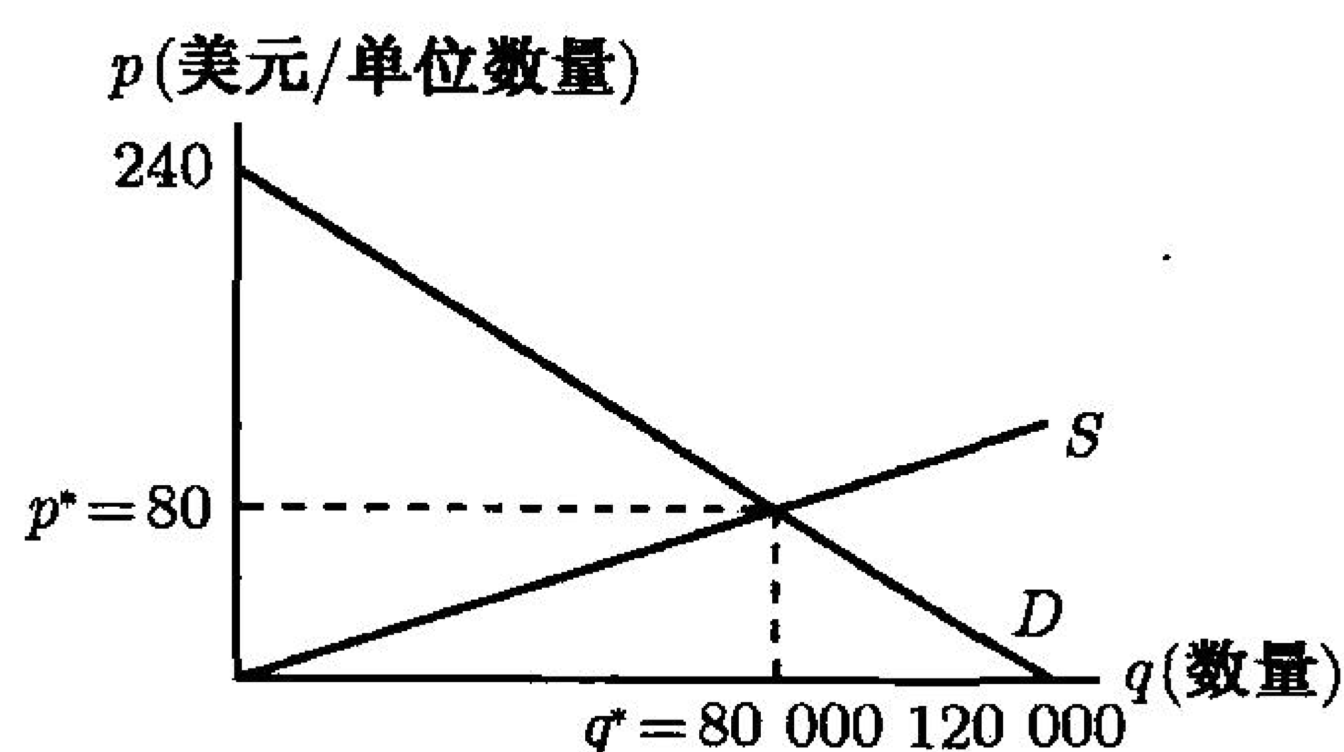


图 6-16 一种产品的供给曲线和需求曲线

(a) 均衡价格和均衡产量是多少?

(b) 在均衡价格下, 计算消费者剩余和生产者剩余, 并解释它们的意义.

解 (a) 均衡价格是 $p^* = 80$ 美元, 均衡产量是 $q^* = 80\ 000$ 单位.

(b) 消费者剩余是需求曲线的下方和直线 $p = 80$ 上方所围区域的面积. (参见图 6-17.) 则有

$$\text{消费者剩余} = \text{三角形的面积} = \frac{1}{2}\ \text{底} \cdot \text{高} = \frac{1}{2} 80\ 000 \cdot 160 = 6\ 400\ 000\ \text{美元}.$$

它告诉我们: 在均衡价格而不是在消费者原本愿意支付的价格下, 消费者购买产品赚取了 6 400 000 美元.

生产者剩余是供给曲线的上方和直线 $p = 80$ 下方所围区域的面积. (参见图 6-18.) 则有

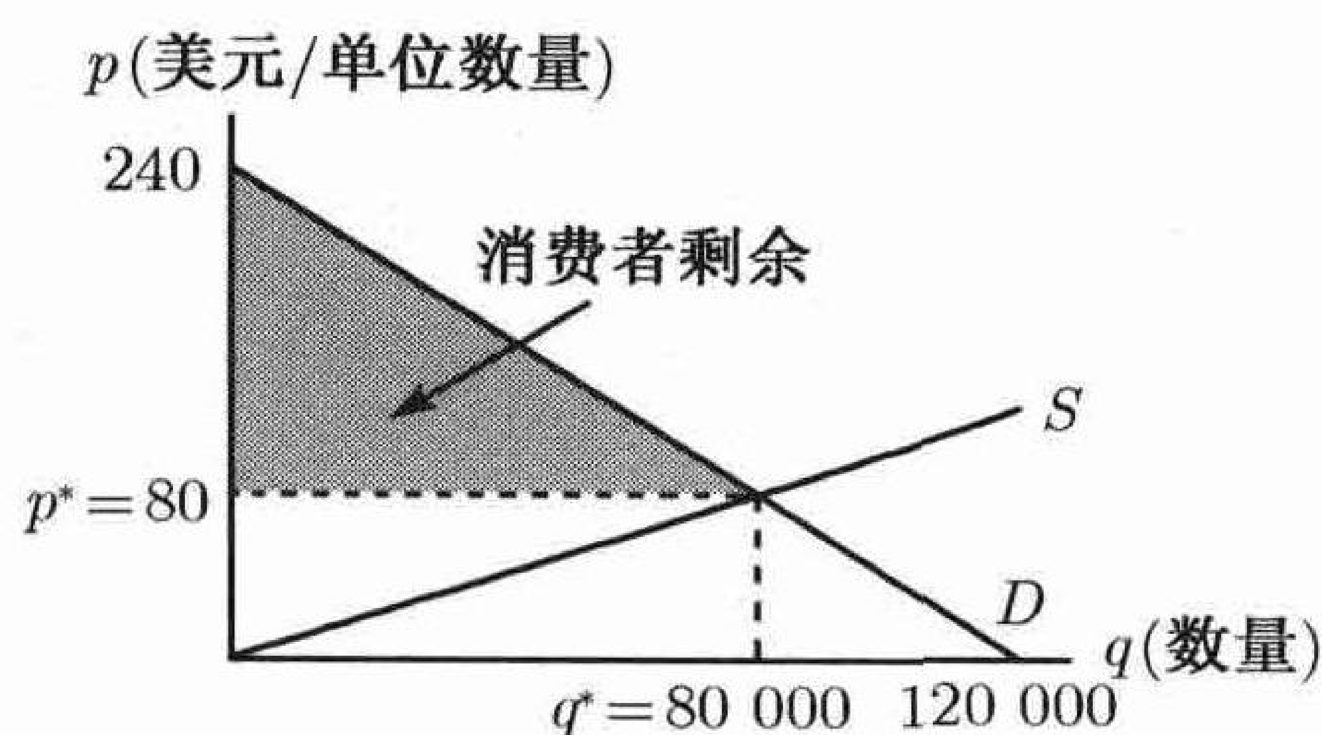


图 6-17 消费者剩余

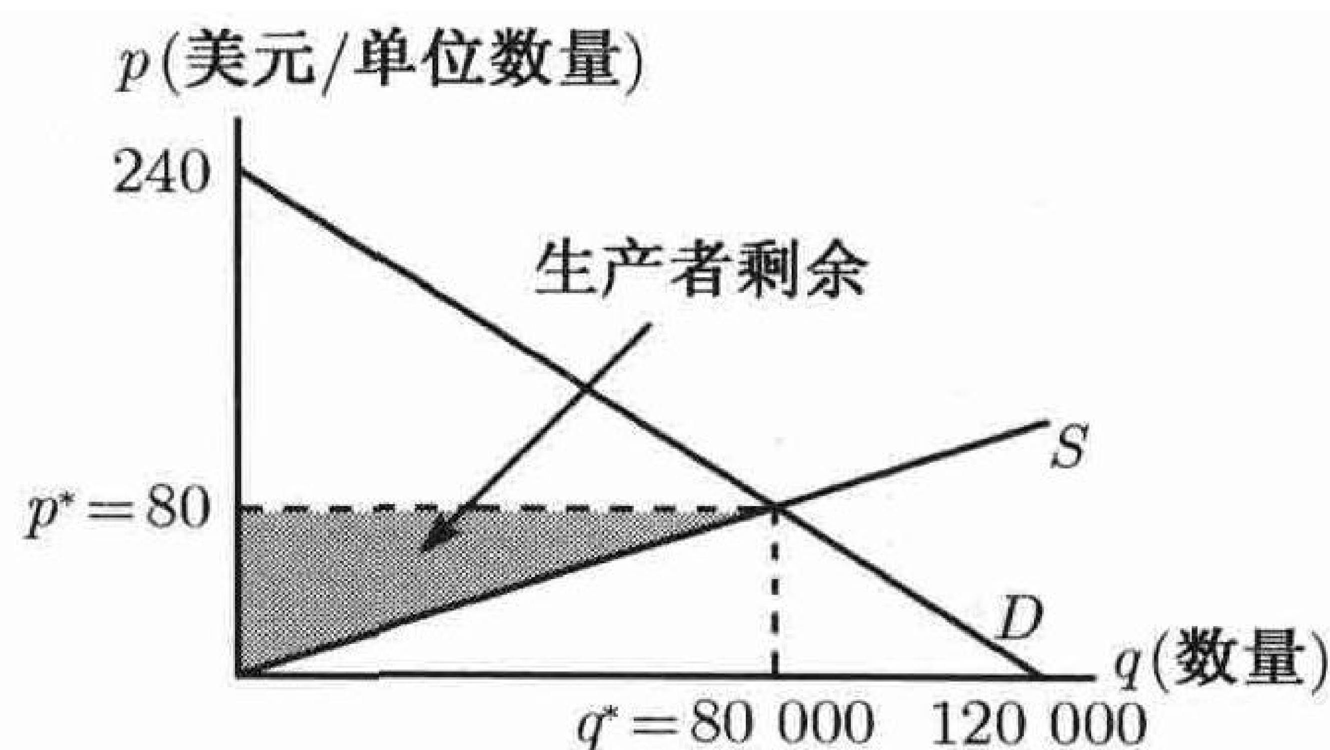


图 6-18 生产者剩余

$$\text{生产者剩余} = \text{三角形的面积} = \frac{1}{2}\ \text{底} \cdot \text{高} = \frac{1}{2} 80\ 000 \cdot 80 = 3\ 200\ 000\ \text{美元}.$$

同样地, 它告诉我们: 在均衡价格而不是生产者原本愿意供应产品的价格下, 生产者提供产品赚取了 3 200 000 美元. □

工资管理和价格管理

在自由市场中, 产品的价格一般会向均衡价格靠拢, 除非有外力维持价格虚高或虚低. 例如, 租金管制能将价格维持在市场价格之下, 而定价或最低工资法却将价格提升到市场价格之上. 在非均衡价格下, 消费者剩余和生产者剩余又会发生什么情况呢?

例 2 乳品加工业的定价: 政府虚高地规定牛奶的价格. 当价格从均衡价格提高到 p^+ 时, 对下面的量会有什么影响?

(a) 消费者剩余; (b) 生产者剩余;

(c) 交易的所得总量 (即消费者剩余+生产者剩余).

解 (a) 图 6-19 给出了奶品业可能的供给曲线和需求曲线的图形. 假设价格固定在均衡价格之上的 p^+, 消费者剩余是消费者在价格 p^+ 下的支出额与他们原本愿意支付的价格 (需求曲线上) 下的支出额的差, 也就是图 6-20 所示阴影部分的面积, 它小于在均衡价格下的消费者剩余, 参见图 6-21.

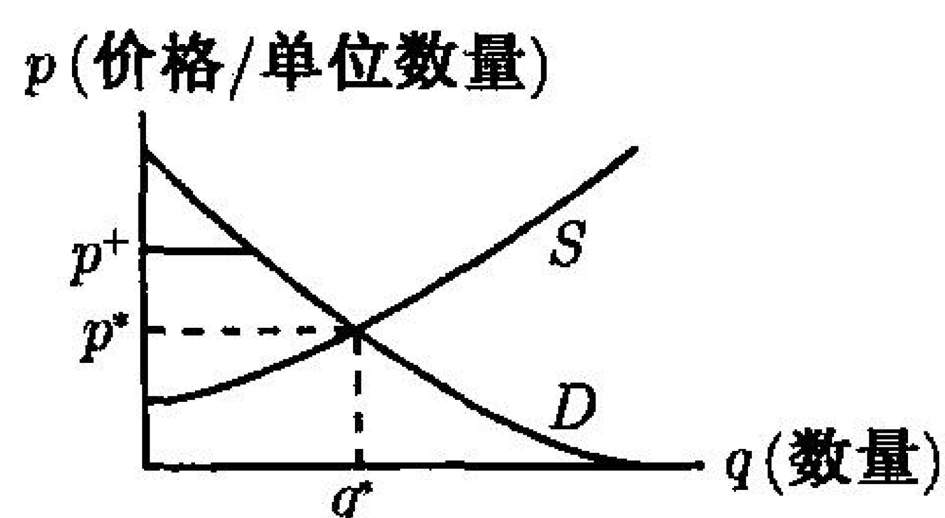


图 6-19 虚高的价格 p^+ 对消费者剩余和生产者剩余的有何影响? (p^* 和 q^* 分别是均衡价格和均衡产量)

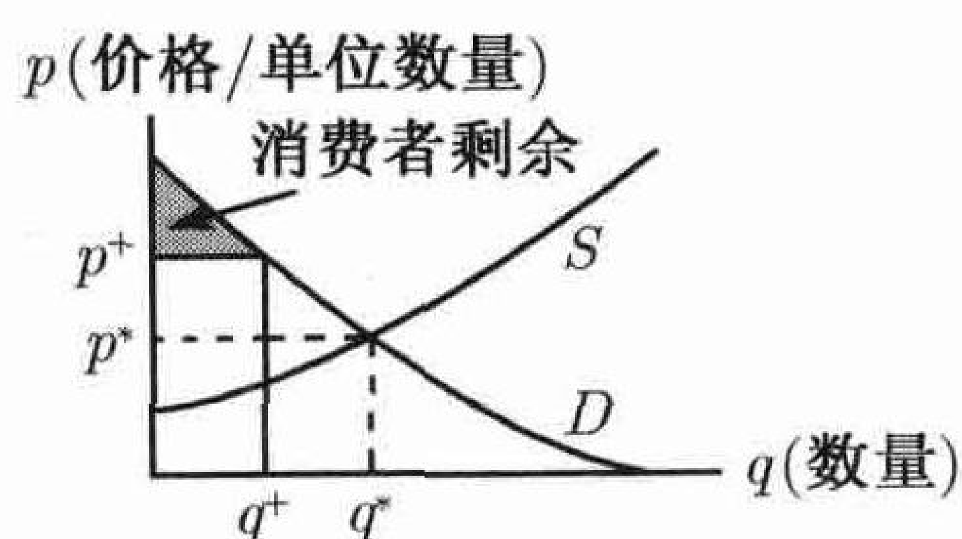


图 6-20 虚高价格下的消费者剩余

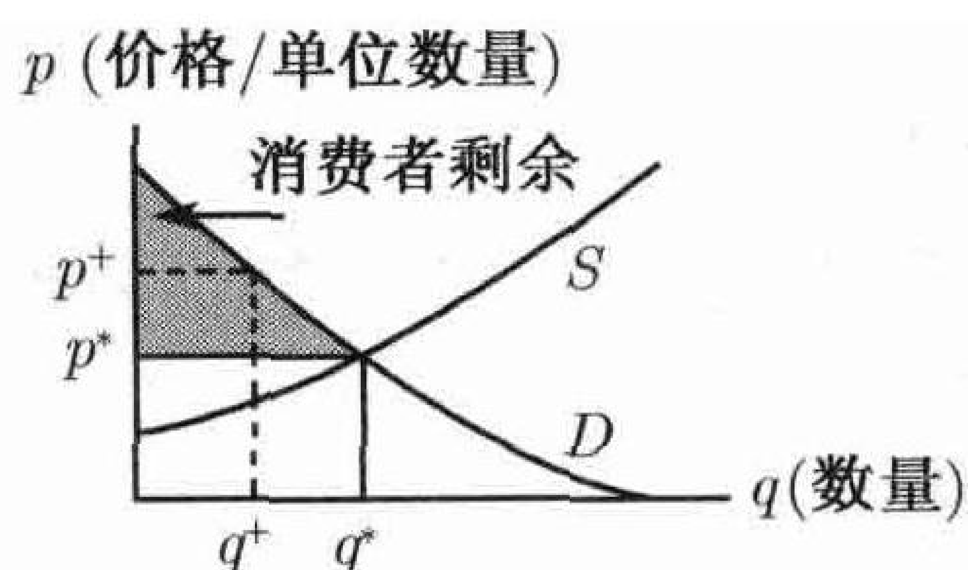


图 6-21 均衡价格下的消费者剩余

(b) 价格 p^+ 下的销售量 q^+, 低于假定在均衡价格下的销售量. 生产者剩余可以用处于这个减少的需求量间的直线 $p = p^+$ 和供给曲线所围成的区域面积来表示, 这个区域以阴影的形式表示在图 6-22 中. 比较这里的生产者剩余 (虚高价格下) 和图 6-23 的生产者剩余 (均衡价格下) 可知, 此时虚高价格下的生产者剩余好像要大于均衡价格下的生产者剩余. (不过, 不同的供给曲线和需求曲线可能会导致不同的结果.)

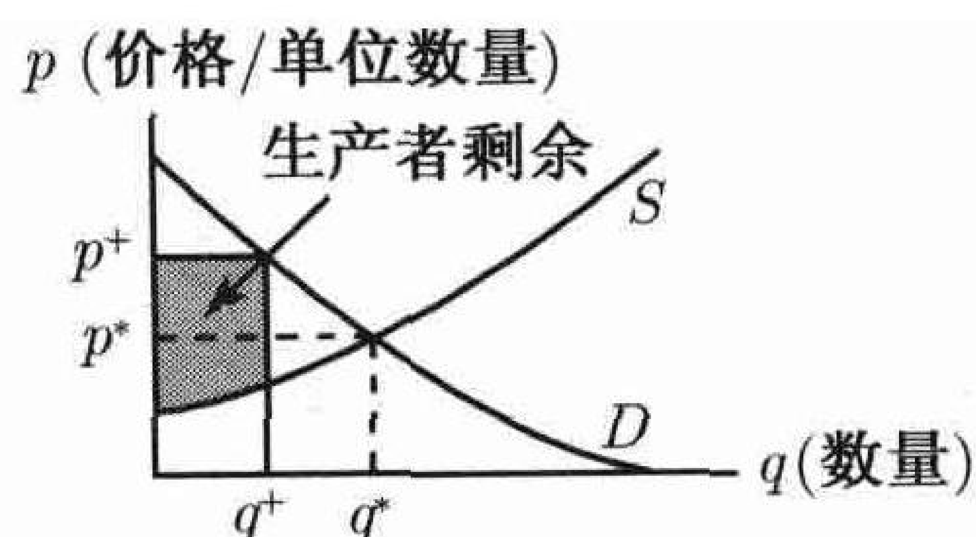


图 6-22 虚高价格下的生产者剩余

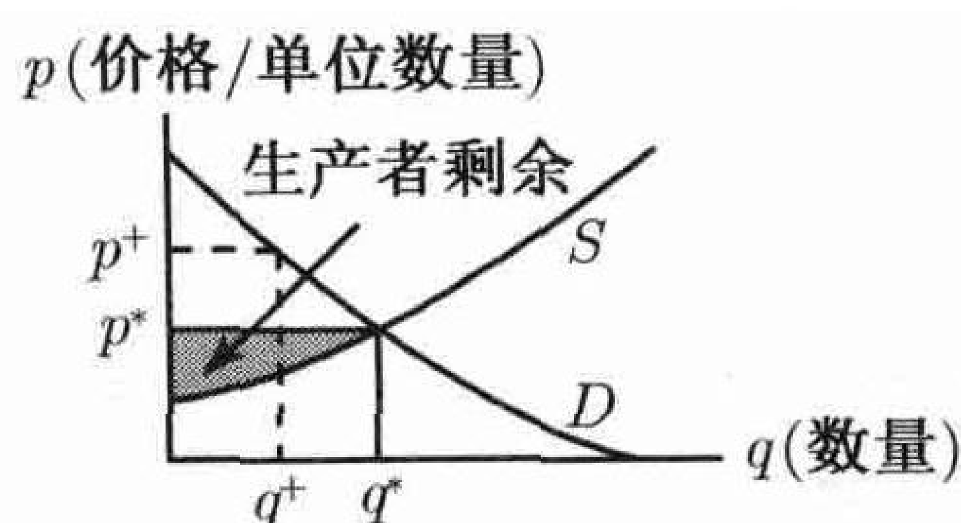


图 6-23 均衡价格下的生产者剩余

(c) 价格 p^+ 下交易的所得总量 (消费者剩余+生产者剩余) 可以用图 6-24 所示的阴影区域的面积来表示. 均衡价格 p^* 下交易的所得总量可以用图 6-25 所示

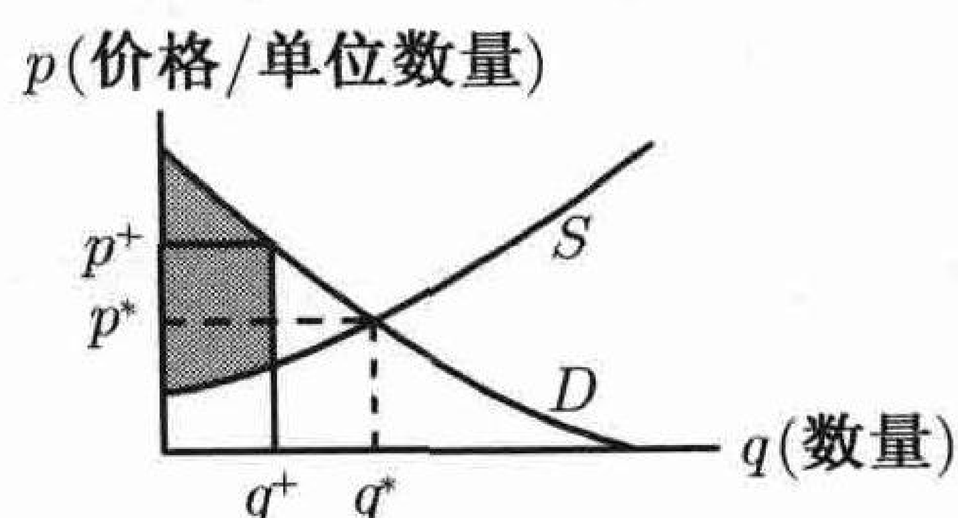


图 6-24 虚高价格下的交易的所得总量

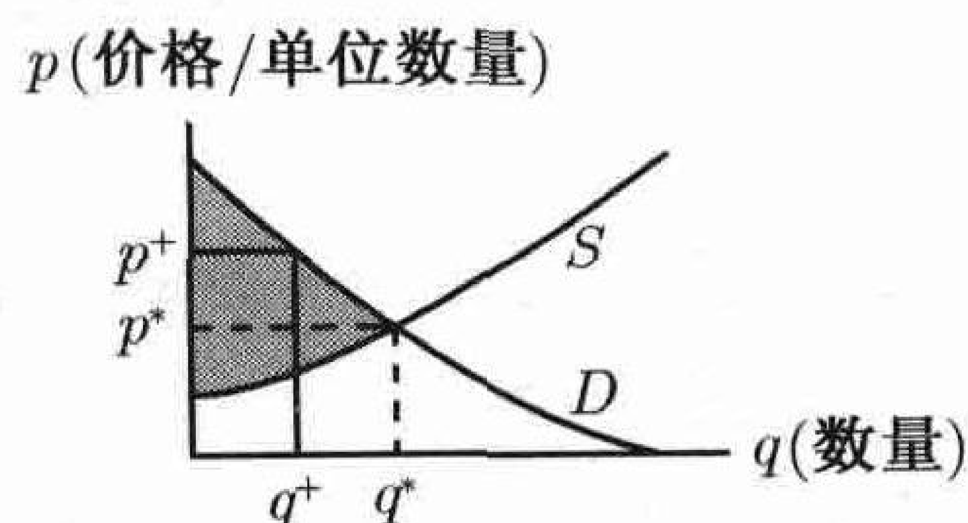


图 6-25 均衡价格下的交易的所得总量

的阴影区域的面积来表示. 在价格虚高的情形下, 交易的所得总量减少了. 对参与市场的所有生产者和消费者来讲, 虚高价格的总体影响是消极的. □

习题

1. 一种产品的供给曲线和需求曲线由图 6-26 给出. 估计均衡价格和均衡产量, 以及消费者剩余和生产者剩余. 将表示消费者剩余和生产者剩余的区域涂上阴影.
2. (a) 针对图 6-27 中的供给曲线和需求曲线, 均衡价格和均衡产量是多少?
   (b) 将表示消费者剩余和生产者剩余的区域涂上阴影, 并估计他们的值.

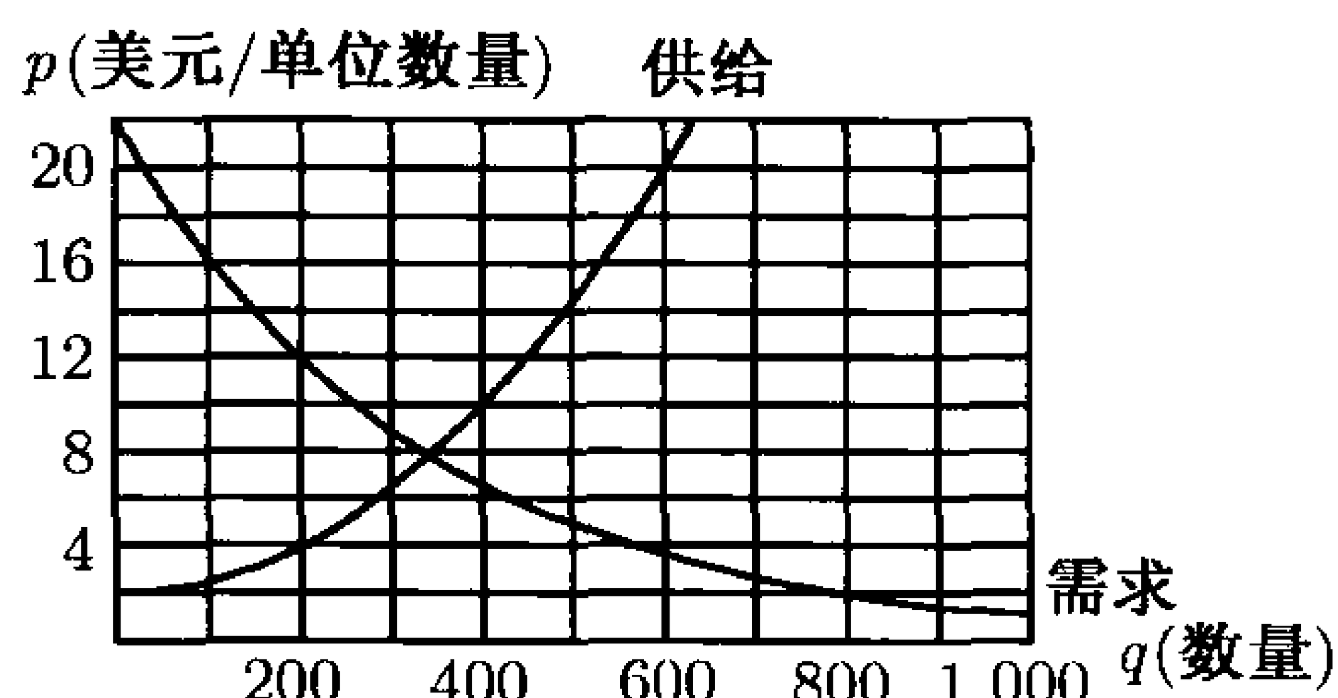


图 6-26

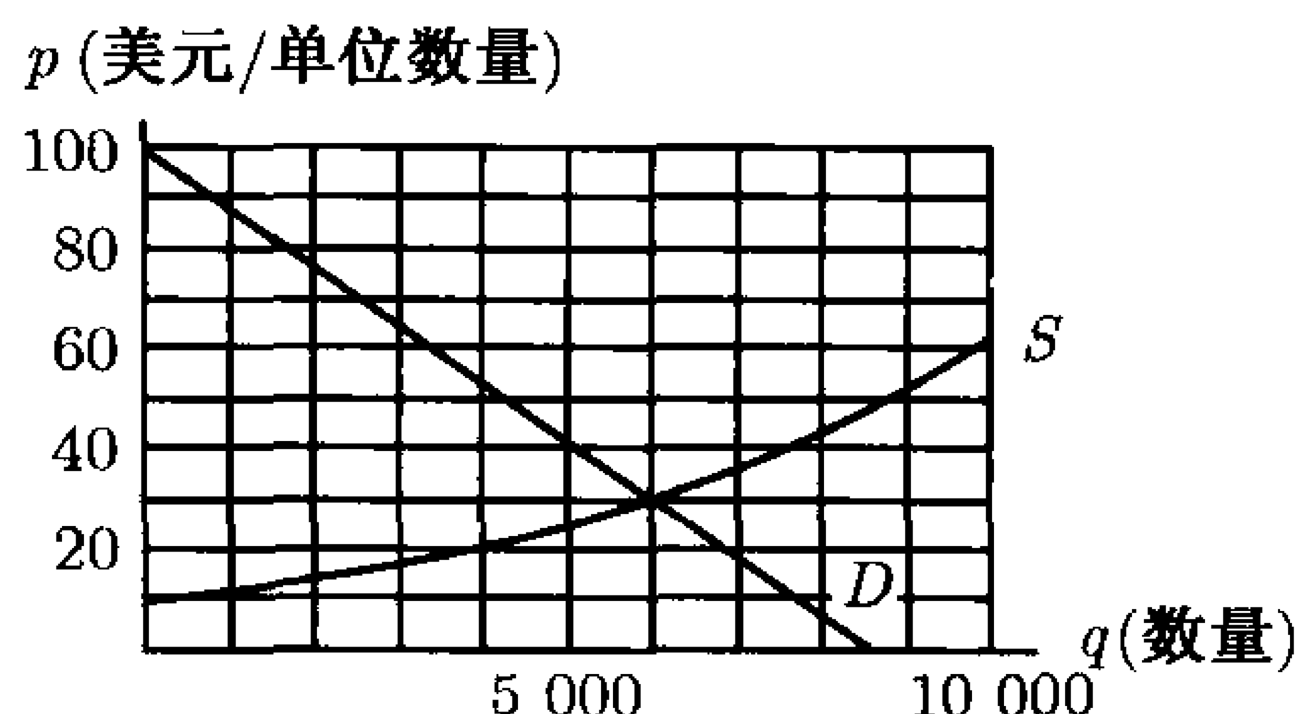


图 6-27

3. 已知 $p=35-q^2$ 为需求曲线, $p=3+q^2$ 为供给曲线, 求市场处于均衡状态下的生产者剩余.
4. 已知需求曲线为 $p=100-3q^2$, 求当销售量为 5 个单位时的消费者剩余.
5. 已知需求曲线为 $p=100-4q$, 求当销售量为 10 个单位时的消费者剩余.
6. 图 6-28 给出了一种产品的供给曲线和需求曲线.
   (a) 估计均衡价格和均衡产量.
   (b) 估计消费者剩余和生产者剩余, 并将表示它们的区域涂上阴影.
   (c) 这种产品的交易的所得总量是多少?
7. 供给曲线和需求曲线如图 6-28 所示, 价格被虚高地定为 40 美元.
   (a) 在 40 美元的价格下, 估计消费者剩余, 生产者剩余以及交易的所得总量.
   (b) 将这里的结果与习题 6 做比较, 讨论此种情况下, 价格管理对消费者剩余, 生产者剩余以及交易的所得总量的影响.
8. (a) 针对图 6-29 中的供给曲线和需求曲线, 估计均衡价格和均衡产量.

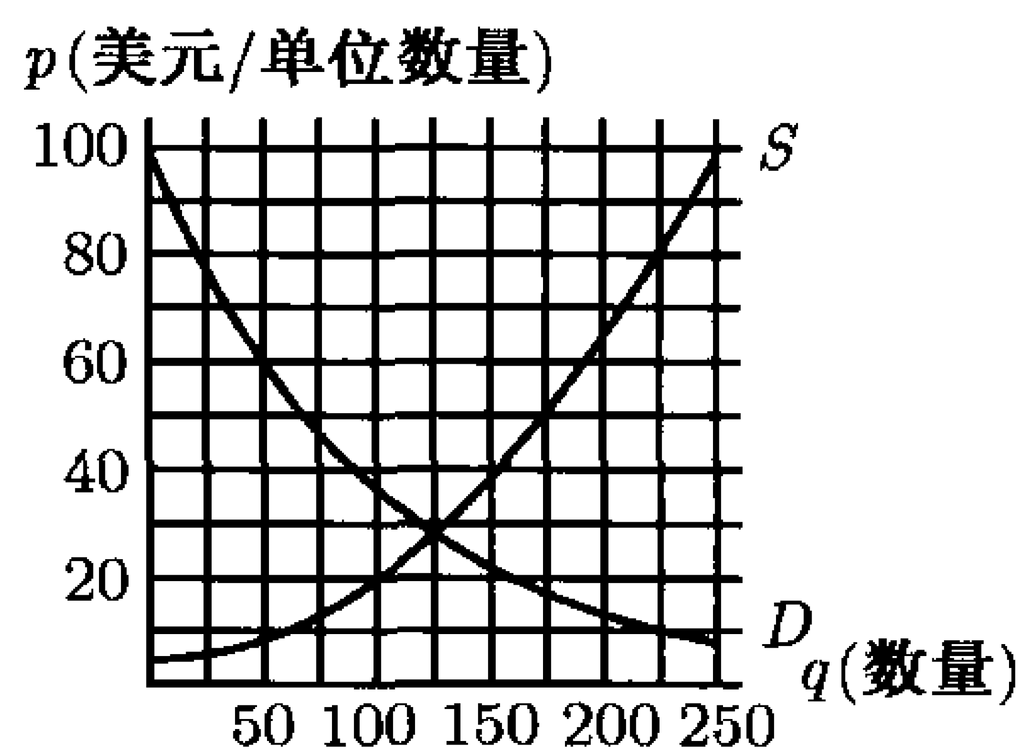


图 6-28

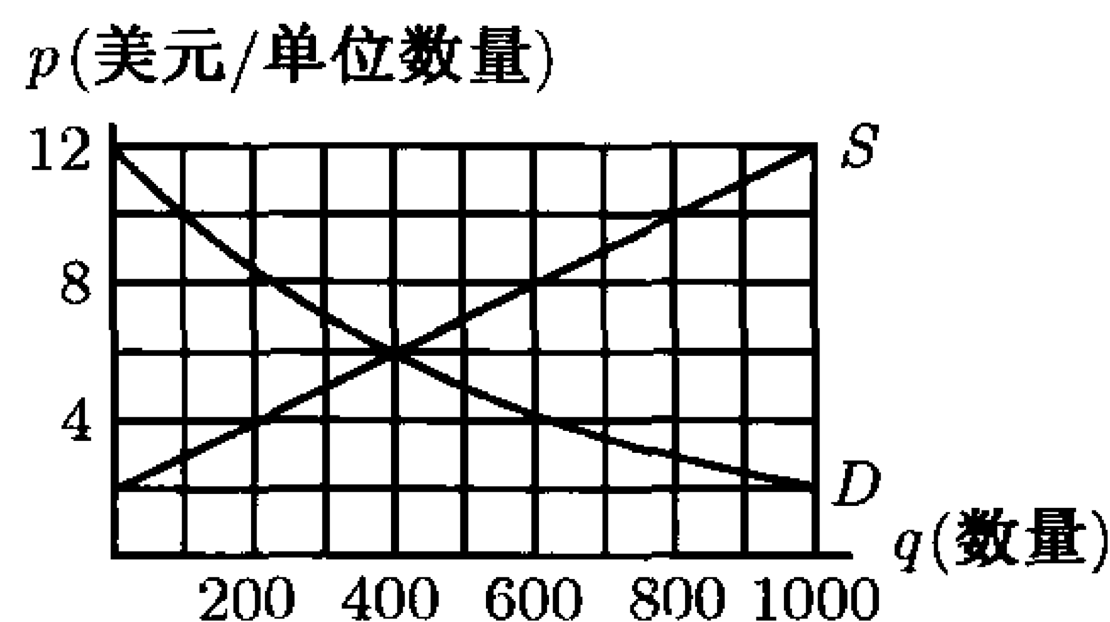


图 6-29

(b) 估计消费者剩余和生产者剩余.

(c) 价格被虚低地压至 $p^- = 4$ 美元/单位, 估计此价格下的消费者剩余和生产者剩余. 将此结果与均衡价格下的消费者剩余和生产者剩余进行比较.

9. 一种产品的供给曲线为 $p = 5 + 0.02q$, 需求曲线为 $p = 30e^{-0.003q}$, 其中 p 为价格, q 为此价格下的销售量. 求:

(a) 均衡价格和均衡产量.

(b) 消费者剩余和生产者剩余.

10. 画出可能的供给曲线和需求曲线的图形, 使得均衡价格下的消费者剩余.

(a) 大于生产者剩余.

(b) 小于生产者剩余.

11. 公寓的租金管制是商品价格管理的一个例子, 其价格被人为地压低 (在均衡价格以下). 画出一张供给曲线和需求曲线的草图, 并在图中标上一个低于均衡价格的价格 p^-. 压低价格至 p^- 对下面的量有怎样的影响?

(a) 生产者剩余.

(b) 消费者剩余.

(c) 交易的所得总量 (消费者剩余+生产者剩余).

12. 下面两张表给出了供给数据和需求数据.

(a) 哪一张表反映的是供给? 哪一张表反映的是需求?

(b) 估计均衡价格和均衡产量.

(c) 估计消费者剩余和生产者剩余.

q(数量)	0	100	200	300	400	500	600
p(美元/单位数量)	60	50	41	32	25	20	17

q(数量)	0	100	200	300	400	500	600
p(美元/单位数量)	10	14	18	22	25	28	34

对习题 13~15, 供给曲线和需求曲线的表达式分别为 $p = S(q)$, $p = D(q)$, (q^*, p^*) 为均衡点.

13. 利用黎曼和, 解释 $\int_0^{q^*} S(q)\mathrm{d}q$ 对于生产者的经济意义.

14. 利用黎曼和, 给出生产者剩余的描述, 说明 $\int_0^{q^*} (p^* - S(q))\mathrm{d}q$ 类似于消费者剩余的描述.

15. 针对图 6-14 和图 6-15, 标出表示下面量的区域, 并解释它们的经济意义.

(a) p^*q^* (b) $\int_0^{q^*} D(q)\mathrm{d}q$

(c) $\int_0^{q^*} S(q)\mathrm{d}q$ (b) $\int_0^{q^*} D(q)\mathrm{d}q - p^*q^*$

(e) $p^*q^* - \int_0^{q^*} S(q)\mathrm{d}q$ (f) $\int_0^{q^*} (D(q) - S(q))\mathrm{d}q$

6.3 现值和将来值

在第 1 章中, 我们介绍了整笔付款的现值和将来值, 本节我们来看怎样计算一个连续付款流的现值和将来值.

收入流

当付款被认为是由个人作出或接受时, 我们通常考虑的是*离散付款*, 也就是说, 这种付款只发生在时间上的特殊时刻. 不过, 我们可以将一个公司的付款看成是*连续的*. 例如, 一个庞大公司本质上始终在赚取收益, 因而这种收益可以用连续的*收入流*来表示. 由于赚取收益的速度会随着时间变化, 所以收入流可以描述为

$$S(t) \text{ 美元/年}.$$

注意 $S(t)$ 是付款产生的*速度* (例如, 它的单位是美元/年), 并且这种速度依赖于时间 t, 这里 t 常用从现在起的年份数来度量.

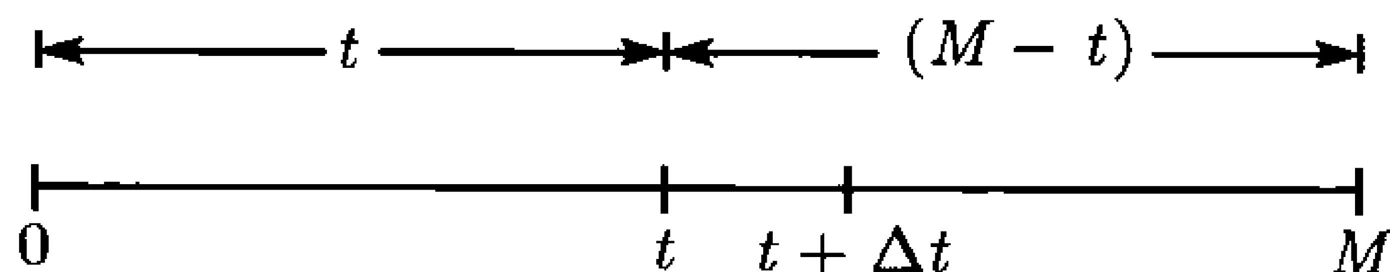
收入流的现值和将来值

正如可以求出整笔付款的现值和将来值一样, 我们也能求出付款流的现值和将来值. 假设你收到一个收入流后, 立即储蓄进银行账户并让它赚取利息, 同以前一样, 将来值表示直到将来某个日子你会拥有的金钱总量. 现值则表示为了获取将来你从收入流中得到的等量金钱, 你必须今天储蓄 (到一个附息银行账户) 的金钱数量.

当讨论一个连续的收入流时, 我们假定利息是连续复利的. 设 r 为利息率, 则将来 t 年后得到的储蓄额 B 的现值 P 是

$$P = Be^{-rt}.$$

假设我们要计算以速度 $S(t)$ 美元/年描述的收入流的现值, 并且关心的期限是从现在到将来的 M 年. 为了利用单笔储蓄下的结果来计算收入流的现值, 我们划分收入流为许多小储蓄, 并且想像每笔储蓄在瞬间发生. 将区间 $0 \leqslant t \leqslant M$ 划分为长度为 Δt 的子区间:



假设 Δt 很小, 那么在每个子区间上, 储蓄正在发生的速度 $S(t)$ 不会变化很大, 于是, 从 t 到 $t+\Delta t$ 之间:

$$\begin{aligned}\text{存款量} &\approx \text{储蓄速度} \times \text{时间}\\ &\approx (S(t)\ \text{美元/年})(\Delta t\ \text{年})\\ &= S(t)\Delta t\ \text{美元}.\end{aligned}$$

储蓄 $S(t)\Delta t$ 发生在将来的 t 年, 假设 r 是连续复利的, 则有

$$\text{区间 } t \text{ 到 } t+\Delta t \text{ 上储蓄的现值} \approx S(t)\Delta t e^{-rt}.$$

对所有子区间求和, 得到

$$\text{总现值} \approx \sum S(t)e^{-rt}\Delta t \text{ 美元}.$$

让 $\Delta t \to 0$ 取极限, 我们可以得到下面的积分:

$$\boxed{\text{现值} = \int_0^M S(t)e^{-rt}dt.}$$

同 1.7 节一样, M 年后的将来值可以表示为:

$$\boxed{\text{将来值} = \text{现值} \cdot e^{rM}.}$$

例 1 求每年 1000 美元的常值收入流在 20 年期间的现值和将来值, 假设 6% 的利息率是连续复利的.

解 由于 $S(t) = 1000$ 及 $r = 0.06$, 则有

$$\text{现值} = \int_0^{20} 1000e^{-0.06t}dt = 11\ 647 \text{ 美元}.$$

利用 $B = Pe^{rt}$, 我们可以从现值 P 得到将来值 B

$$\text{将来值} = 11\ 647e^{0.06(20)} = 38\ 699 \text{ 美元}.$$

注意, 由于 20 年期间钱款是以每年 1000 美元的速度储蓄的, 因而总储蓄额是 20 000 美元. 将来值是 38 669 美元, 由于利息的作用总储蓄额几乎翻了一倍. □

例 2 假设你要求 8 年后你的银行账户拥有 50 000 美元, 其中银行的利息为 2%, 它是连续复利的.

(a) 如果现在进行整笔存款, 你应该储蓄的存款总额是多少?

(b) 如果在 8 年期间连续存款, 你应该储蓄的速度是多少?

解 (a) 假设整笔存款的总额是 P 美元, 那么 P 美元就是 50 000 美元的现值. 于是, 利用 $B = Pe^{rt}$, $B = 50\ 000$ 且 $r = 0.02$, $t = 8$, 可得:

$$50\ 000 = Pe^{0.02(8)}$$
$$P = \frac{50000}{e^{0.02(8)}} = 42\ 607.$$

如果你现在储蓄 42 607 美元到银行账户, 8 年后你将会拥有 50 000 美元.

(b) 假设你以每年 S 美元的常值速度储蓄, 那么

$$\text{储蓄的现值} = \int_0^8 Se^{-0.02t}dt.$$

由于 S 为常数, 我们可以将它提到积分号的前面:

$$\text{现值} = S\int_0^8 e^{-0.02t}dt \approx S(7.3928).$$

但是连续储蓄的现值必须和整笔储蓄的现值一样, 即为 42 607 美元, 于是

$$42\ 607 \approx S(7.3928)$$

$$S \approx 5\ 763 \text{美元}.$$

为了达到 50 000 美元的目标, 你需要以每年 5763 美元的连续速度储蓄, 或者说, 每月需要储蓄大约 480 美元. □

习题

1. 计算每年 1000 美元的连续收益流在 5 年期间的现值, 假设利息率为每年 9%, 它是连续复利的.
2. 画出一个收入流的图形, 它可以看作是一个在美国东北部销售防晒霜的公司的收入流, 其中水平轴表示以年计的时间.
3. 求每年 12 000 美元的收入流在 20 年期间的现值和将来值, 假设利息率是 6%, 它是连续复利的.
4. (a) 求每年 6000 美元的收入流在 10 年期间的现值和将来值, 假设连续复利的利息率是 5%.
   (b) 从收入流中获得的将来值是多少? 从利息中赚取的金额是多少?
5. 一件小生意预期在 4 年期间获得每年 5000 美元的收入流.
   (a) 求此生意的现值, 假设连续复利的年利息率是
   (i) 3%　　(ii) 10%
   (b) 在每种情形下, 求 4 年后这件生意的总值.
6. 一种债券担保在 10 年期间每年支付 $100 + 10t$ 美元的收入, 其中 t 是从现在计的年份数. 求这个收入流的现值, 假设连续复利的利息率是 5%.
7. 假设连续复利的每年利息率是 5%, 为了等量提供 5000 美元的现值, 确定需要在 10 年期间投资的常值收入流.
8. (a) 一个银行账户的利息率是 10%, 它是连续复利的. 在这样的账户中, 为了在未来 10 年给孩子储蓄 100 000 美元的大学费用, 父母必须连续储蓄的常值速度是多少?
   (b) 假设为了实现 10 年后 100 000 美元的目标, 父母决定现在进行整笔存款, 那么现在必须储蓄的金额是多少?
9. 一家公司预期在 8 年期间以连续的速度每年赚取 50 000 美元, 你能够以 7% 的连续复利的利息率参与投资, 也有机会现在以 350 000 美元购买公司的收益权, 你是否应该购买? 解释原因.
10. 假设你的公司在今后的两年时间需要投资 500 000 美元用于整修, 并且能够赚取 9% 的投资利息.
    (a) 整修的现值是多少?
    (b) 假设你的公司在两年间以常值速度连续储蓄, 为了保证当你需要 500 000 美元时你能得到它, 你储蓄的速度应该是多少?
11. 1999 年 4 月 15 日, Maria Grasso 赢得了迄今为止当时最高的一笔彩票奖金. 她拥有两种选择: 在以后的 26 年间连续支付, 金额总计 197 百万美元, 或者立即支付 104 百万美元的一次性付款.

(a) 假设连续复利的利息率为 6%, 哪一种选择更好? 如果利息率是 5% 呢?

(b) 中奖者选择了一次性付款, 她这样选择对利息率的假定是什么?

12. Intel 公司是集成电路的主要制造商, 2004 年 Intel 的集成电路以每年 75 亿美元的连续速度赚取利润①. 假设利润的赚取速度是相同的, 且连续复利的利息率为 8.5%.

(a) 在一年期间, Intel 公司利润的现值是多少?

(b) 经过一年后, Intel 公司的利润的值是多少?

13. 一个电脑软件包的 6.0 版本的销量开始很大, 然后呈指数下降. 在以年计的时间 t 时的销量是 $s(t) = 50e^{-t}$ 千美元/年. 两年后, 软件包的 7.0 版本发布, 用来替代 6.0 版本. 你能够以 6% 的连续复利的利息率投资获取收益, 计算两年期间 6.0 版本销量的总现值.

14. 好时食品公司是美国最大的巧克力制造商. 在 2002~2003 年, 好时以每年大约 $54.0\,t+403.58$ 百万美元的速度赚取网络销售利润, 这里 t 是始于 2002 年 1 月 1 日的时间, 它的单位是年②. 假设这个速度一直延续到 2007 年, 并且连续复利的利息率是每年 2%. 求从 2002 年 1 月 1 日到 2007 年 1 月 1 日期间, 好时网络销售截止到 2007 年 1 月 1 日的总利润.

15. 麦当劳公司在全球批准并运营了 31 561 家快餐连锁店. 在 2000~2004 年, 麦当劳一直以每年 10 467 百万美元到 14 224 百万美元的连续速度赚取利润③. 假设麦当劳的收益稳定在这个范围, 利用每年 9% 的连续复利的利息率, 填写出下面的空白:

(a) 麦当劳公司在 5 年期间收益的现值是在 ________ 到 ________ 百万美元之间.

(b) 麦当劳公司在 25 年期间收益的现值是在 ________ 到 ________ 百万美元之间.

16. 你的公司正在考虑购买新的生产设备. 你想知道新设备支付自身需要多长的时间, 也就是说, 你想求出新设备赚取利润的现值, 经过多长的时间会等于它的成本. 假设新设备的成本是 130 000 美元, 并且能够以每年 80 000 美元的连续速度赚取利润, 连续复利的利息率是每年 8.5%.

17. 一家石油公司发现了 100 百万桶的石油储备. 针对以年计的时间 $t > 0$, 公司的开采计划是如下的一个时间的线性递减函数:

$$q(t) = a - bt,$$

这里 $q(t)$ 是时刻 t 时以石油的开采速度, 单位为百万桶/年, 且 $b = 0.1$, $a = 10$.

(a) 石油公司开采完整个储备需要多长时间?

(b) 石油价格是每桶 20 美元, 每桶石油的开采成本是 10 美元, 市场的连续复利的利息率是每年 10%, 公司利润的现值是多少?

18. 1980 年, 当时的西德向苏联提供了 200 亿德国马克的贷款, 用于建设一条连结西伯利亚到俄罗斯西部并延伸至西德的天然气管道 (Urengoi-Ushgorod-Berlin). 假设协议是这样的: 1985 年管道建设完工, 苏联以后将始终以固定的速度向西德输送天然气. 假设天然气的价格固定为每立方米 0.1 德国马克, 且西德希望获得 10% 的年投资回报率 (连续

---

① www.intel.com, 访问日期: 2005 年 5 月 28 日.

② http://media.corporate-ir.net/media_files/NYS/HSY/reports/HSY_MDA-2003.pdf, 访问日期: 2005 年 5 月 15 日.

③ http://64.26.27.40/interactive/mcd2004financialreport/md/page_01.php, 访问日期: 2005 年 5 月 15 日.

复利), 苏联必须按照什么样的速度 (单位: 十亿立方米/年) 向西德输送天然气? 记住: 只有管道竣工后天然气才能输送, 这样, 西德是在 5 年后才得到投资回报. (注: 两国间实际上签署了更复杂的协议.)

6.4 定积分求相对增长率

6.4.1 群体增长率

在第 5 章中, 我们看到了怎样利用微积分基本定理, 从群体 P 的导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 中计算 P 的变化.

然而, 群体增长率通常并不是以导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 的形式给出. 例如, 我们可能知道, 2004 年尼加拉瓜的人口 P 以每年 1.6%的速率增长. 这个每年 1.6%是人口的**相对变化率** (或相对增长率), 而不是导数. 导数有时称为**绝对变化率**. 相对变化率是绝对变化率除以群体, 于是我们有如下定义.

> 假设 P 是 t 的函数, 那么
>
> P 关于 t 的 (绝对) 变化率 $= \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ 且 P 关于 t 的相对变化率 $= \dfrac{1}{P}\cdot\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$

注意绝对变化率和相对变化率度量不同的量. 假设 P 是人口, t 是年份, 那么绝对变化率是每年的人口变化, 而相对变化率则是每年的人口百分比变化. 对一个线性增长的量来说, 绝对变化率是一个常数. 对一个指数增长的量来说, 相对变化率是一个常数.

如果没有更多的信息, 从相对增长率中我们不能求出群体的变化, 但是可以求出群体的百分比变化.

由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln P(t)) = \frac{P'(t)}{P(t)} = \text{相对增长率},$$

所以 P 的相对增长率是 $\ln(P)$ 的变化率. 由微积分基本定理可知, 相对增长率的积分可以得到 $\ln(P)$ 的总变化:

$$\int_a^b \frac{P'(t)}{P(t)}\mathrm{d}t = \ln(P(b)) - \ln(P(a)) = \ln\left(\frac{P(b)}{P(a)}\right).$$

例 1 图 6-30 给出了一个群体 $P(t)$ 为期 50 年的相对增长率 $P'(t)/P(t)$, 整个时期群体增长的乘数因子是多少?

解 我们有

$$\ln\left(\frac{P(50)}{P(0)}\right) = \int_0^{50} \frac{P'(t)}{P(t)}\mathrm{d}t.$$

这个积分等于 $P'(t)/P(t)$ 的图形介于 $t=0$ 到 $t=50$ 间下方区域的面积, 如图 6-31

所示. 该区域由一个矩形和一个三角形组成, 因此

$$面积 = 50 \times 0.01 + \frac{1}{2} \times 50 \times 0.01 = 0.75$$

于是,

$$\ln\left(\frac{P50}{P0}\right) = 0.75$$
$$\frac{P50}{P0} = e^{0.75} = 2.1$$
$$P50 = 2.1P(0).$$

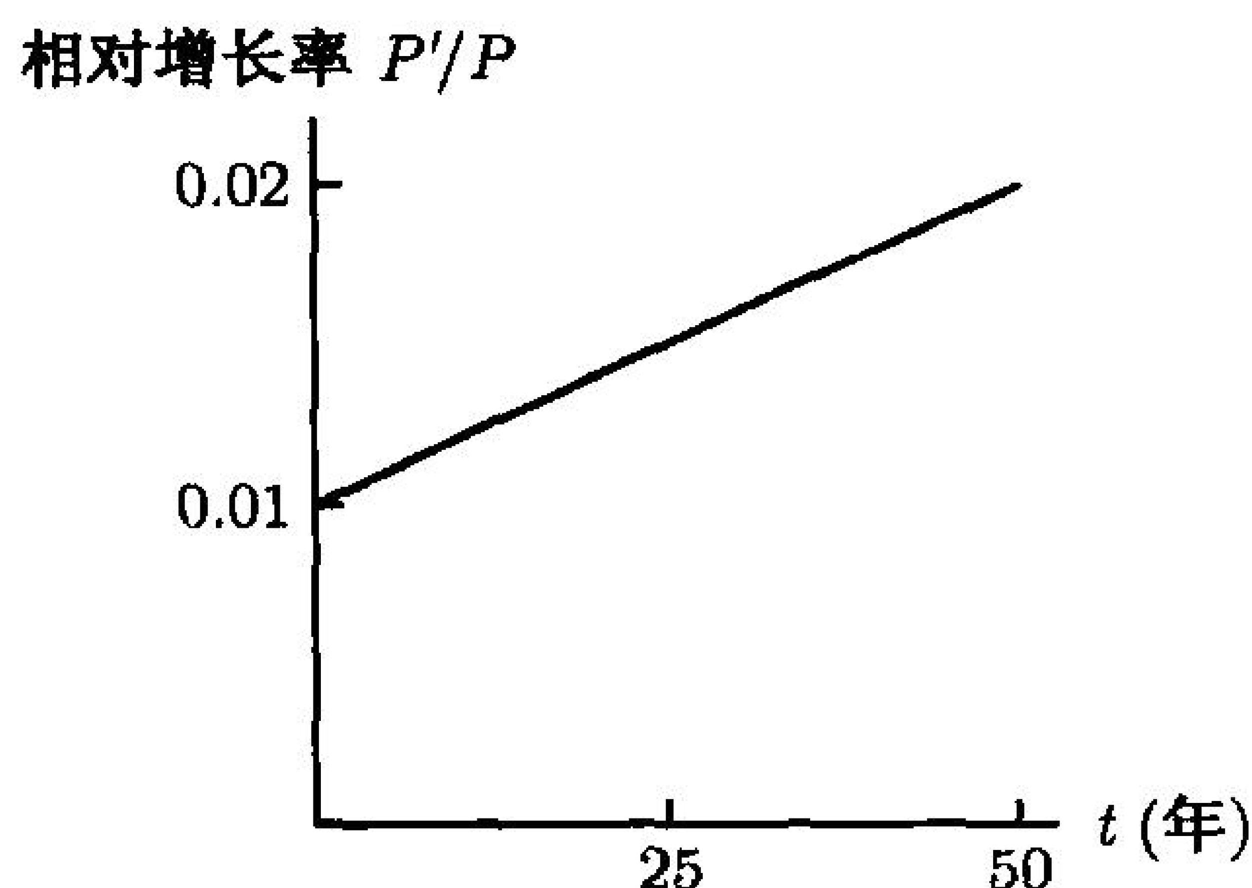


图 6-30　群体的相对增长率

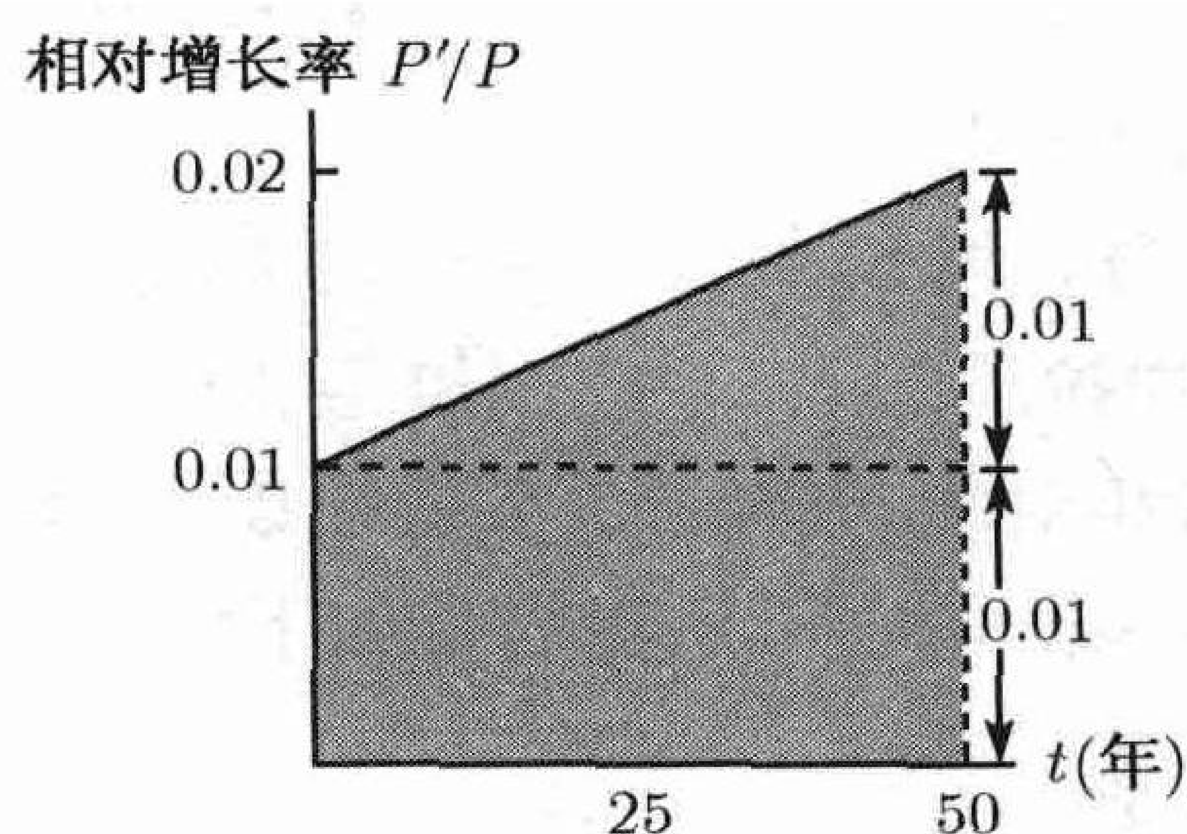


图 6-31　从相对增长率中计算群体的百分比变化

群体以大约 2.1 的乘数因子增长, 在 50 年期间增长超过 1 倍. 我们不能确定群体增长的总量, 除非我们知道最初的群体有多大. □

假设任何其他因素固定不变, 无论相对出生率上升还是相对死亡率下降, 相对增长率都会增长. 即使相对出生率下降, 如果相对死亡率下降得更快, 我们仍然能够看到相对增长率的增长, 这正是当今世界人口面临的情形, 出生率和死亡率的差是一个重要的变量.

例 2　图 6-32 给出了发达国家和发展中国家的相对出生率和相对死亡率的图形[①].

(a) 哪一个变化得更快, 是出生率还是死亡率? 它们能说明人口正在如何变化?

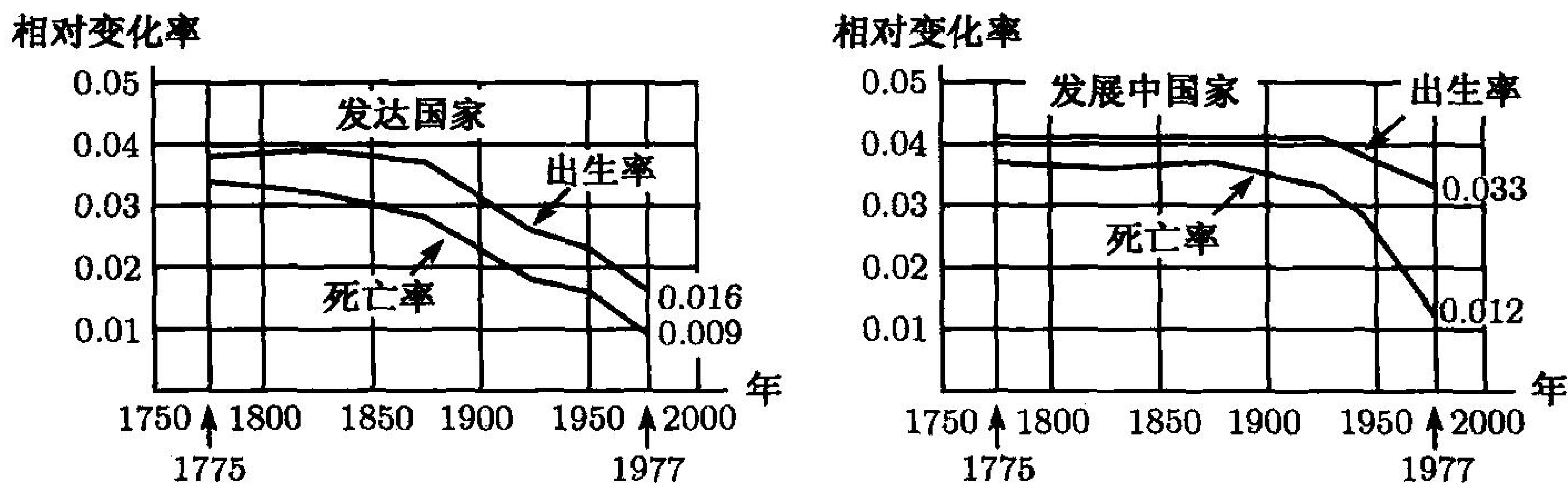


图 6-32　发达国家和发展中国家的出生率和死亡率, 1775–1977

① 《食物与人口: 全球性忧虑》, Elaine Murphy, 华盛顿特区: 人口资料局, 1984 年, 第 2 页.

(b) 1800~1900 年发展中国家的人口以多大的百分比增长?

(c) 1950~1977 年发展中国家的人口以多大的百分比增长?

解 (a) 发达国家的出生率高于死亡率, 于是人口在增长. 出生率和死亡率都在下降, 并且下降的速度近似相同, 因此发达国家的人口以固定相对率增长.

发展中国家的出生率高于死亡率, 出生率和死亡率都大致从 1925 年开始持续下降. 近些年, 死亡率下降的速度一直要快于出生率, 于是人口的相对增长率是递增的, 发展中国家近期的人口增长主要源于死亡率的明显下降.

(b) 人口的相对增长率是相对出生率和相对死亡率的差, 于是它可以用图 6-32 中的出生率曲线和死亡率曲线间的垂直距离来表示. 图 6-33 显示了从 1800~1900 年, 介于这两条曲线的区域, 它给出了 $\ln P(t)$ 的变化. 这个区域的面积近似等于一个高 0.005 宽 100 的矩形面积, 于是它的面积为 0.5. 我们得到

$$\ln\left(\frac{P(1900)}{P(1800)}\right)=\int_{1800}^{1900}\frac{P'(t)}{P(t)}\mathrm{d}t=0.5$$

$$\frac{P(1900)}{P(1800)}=\mathrm{e}^{0.5}=1.65$$

19 世纪发展中国家的人口增长了大约 65%, 乘数因子为 1.65.

(c) 图 6-33 标出了从 1950 到 1977 年间介于出生率曲线和死亡率曲线的阴影区域, 它大约由 1.5 个矩形组成, 每个矩形的面积是 (0.01)(27)=0.27, 这个区域的面积大约是 (1.5)(0.27)=0.405. 我们得到

$$\ln\left(\frac{P(1977)}{P(1950)}\right)=\int_{1950}^{1977}\frac{P'(t)}{P(t)}\mathrm{d}t=0.405,$$

于是

$$\frac{P(1977)}{P(1950)}=\mathrm{e}^{0.405}=1.50$$

从 1950~1977 年, 发展中国家的人口增长了大约 50%, 乘数因子为 1.5. □

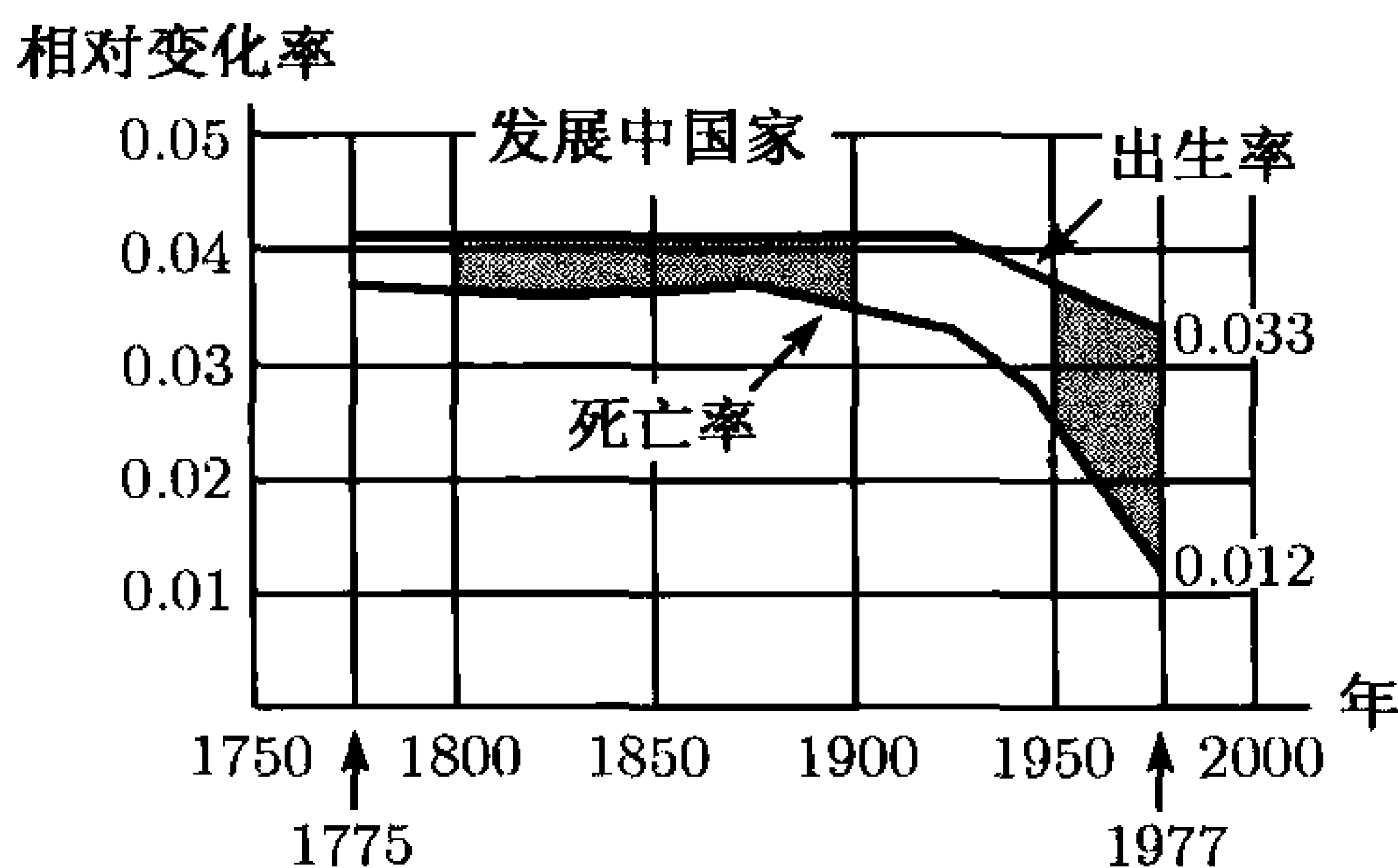


图 6-33 人口的相对增长率 = 相对出生率－相对死亡率

习题

1. 当 $t=0$ 时, 人口为 100, 其中 t 是以年计的时间.

(a) 假设人口以每年 10 人的固定绝对增长率增长, 给出表示时刻 t 时的人口数的公式.
(b) 假设人口以每年 10%的固定相对增长率增长, 给出表示时刻 t 时的人口数的公式.
(c) 在同一坐标系中画出这两个函数的图形.

2. 下表给出了世界范围 AIDS 的累积死亡人数①. 求 2000~2001 年和 2003~2004 年 AIDS 死亡人数的绝对增长率. 求 2000~2001 年和 2003~2004 年 AIDS 死亡人数的相对增长率.

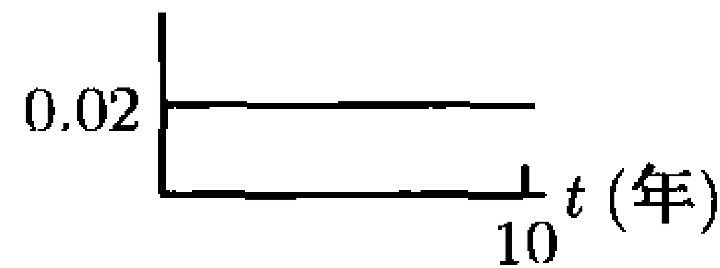
年	2000	2001	2002	2003	2004
数目 (百万)	21.8	24.6	27.7	30.2	33.3

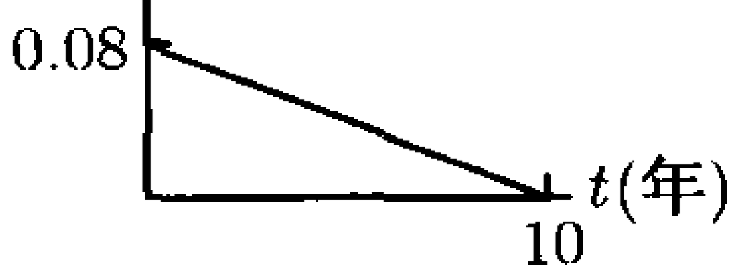
3. 一种细菌群的数量是 4000, 给出一个公式, 表示 t 小时后细菌的数量 P. 假设细菌群的减少速度是

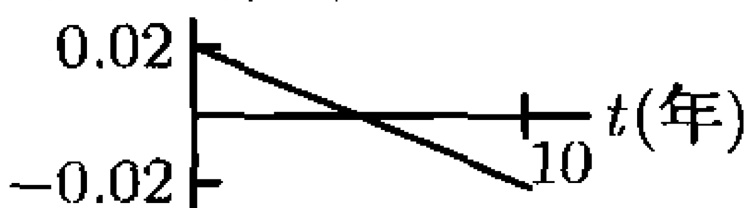
(a) 每小时 100 个细菌　　(b) 每小时 5%

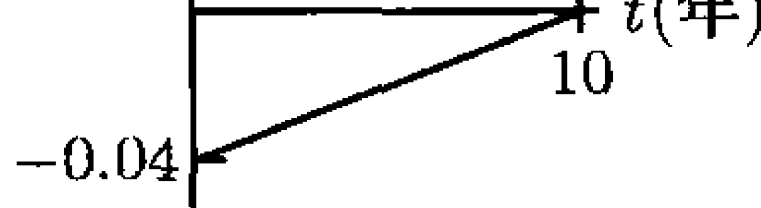
哪种情况下, 细菌群的数量最先降至 0?

对习题 4~7, 图中给出的是人口相对变化率的图形, 10 年期间人口变化的百分比大约是多少?

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 图 6-34 给出了人口 $P(t)$ 的相对增长率的图形, 8 年期间人口变化的百分比是多少? 假设 $t=0$ 时的人口数为 10 000, 8 年后的人口数是多少?

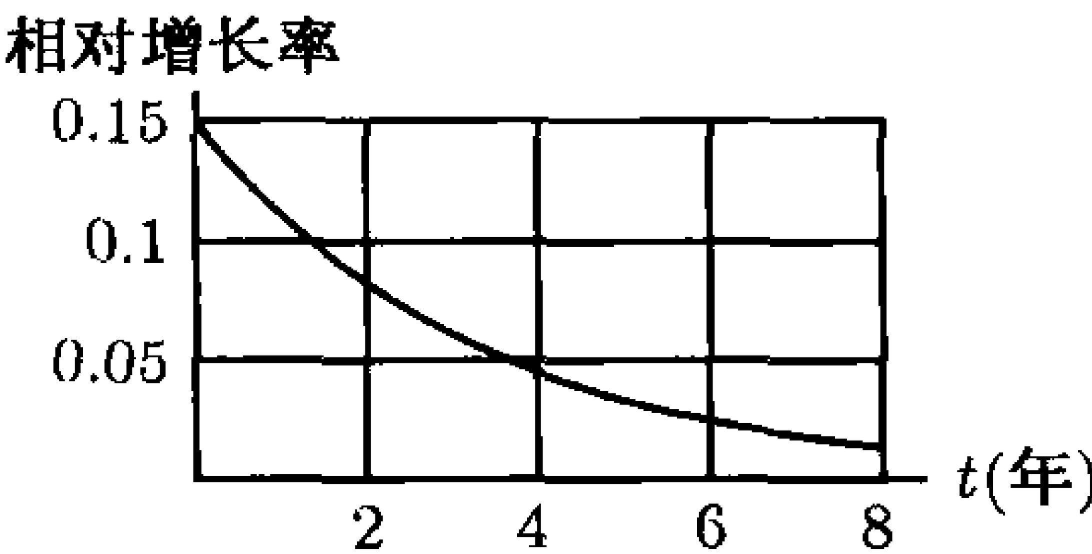
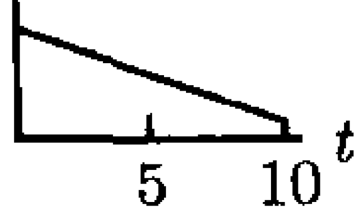


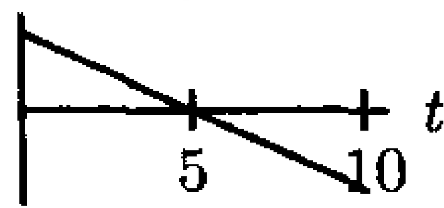
图 6-34

习题 9~12 均给出了函数 f 在 $0 \leqslant t \leqslant 10$ 上的相对变化率, 确定 f 的单调递增区间和单调递减区间.

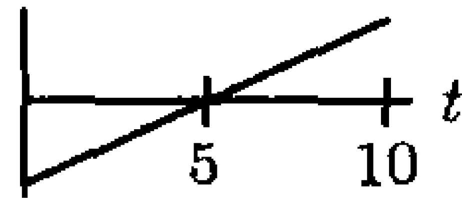
9. 相对变化率



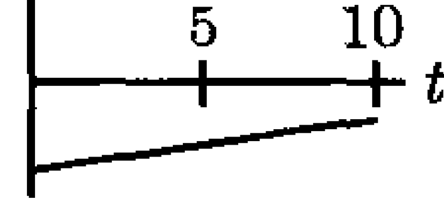
10. 相对变化率



11. 相对变化率



12. 相对变化率



---

① www.unaids.org, 2005 年 5 月.

13. 图 6-35 给出了人口的相对增长率.
   (a) 在哪个区间上人口是增加的? 人口增长的百分比是多少?
   (b) 在哪个区间上人口是减少的? 人口减少的百分比是多少?
   (c) 在图中给出的 15 年期间内, 人口变化的百分比是多少?

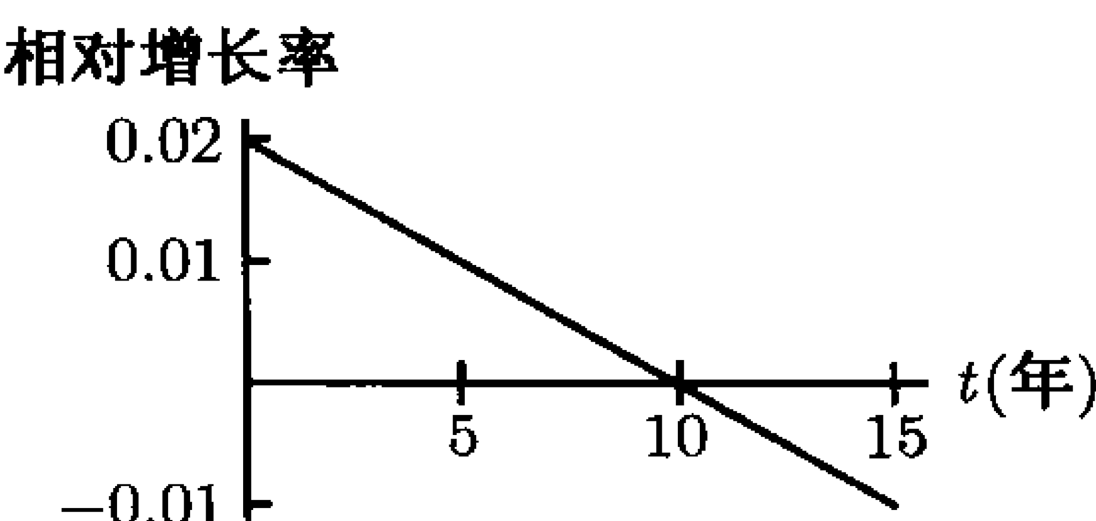
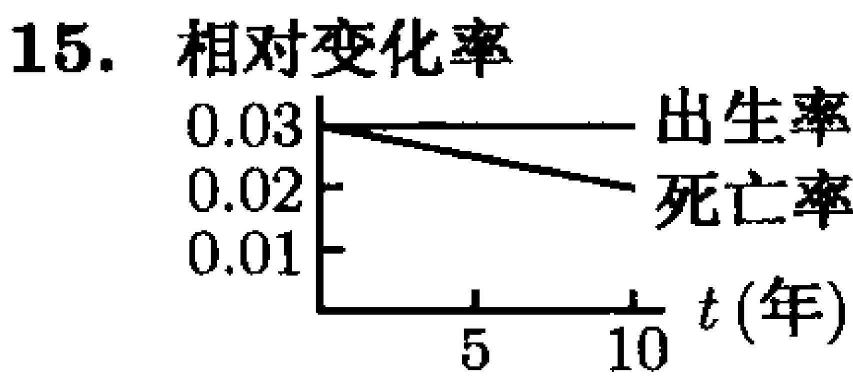
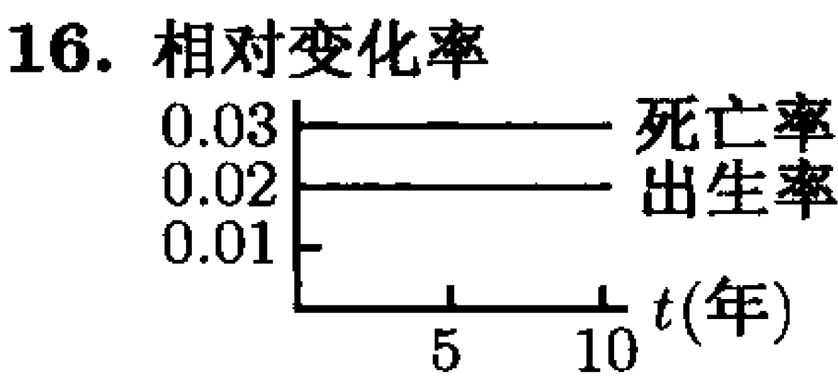


图 6-35

14. 2004 年, 尼加拉瓜以百万计的人口数 P 是 5.36 百万人, 且以每年 1.62% 的速度增长.
   (a) 写出 P 作为 t 的函数的表达式, 这里 t 是 2004 年以来的年数.
   (b) 分别求 2004~2005 年, 2005~2006 年尼加拉瓜人口的预期平均变化率 (或绝对增长率), 解释它们为什么不同.
   (c) 利用 (b) 中得到的结果, 证明这两个时期上人口的相对变化率 (或相对增长率) 是 1.62%.

习题 15~16 均给出了人口 $P(t)$ 的相对出生率和相对死亡率的图形, 确定人口是增加的还是减少的, 并求出 10 年间人口变化的百分比.

15. 

16. 

17. 在美国, 报告的盗窃犯罪的数量主要是从 1990 年开始持续减少[①]. 假设 $P(t)$ 是报告的盗窃犯罪的数量, 它是年份 t 的函数, 其每年的相对变化率 $P'(t)/P(t)$ 由下表给出.
   (a) 估计相对变化率的积分: $\int_{1990}^{2002} \frac{P'(t)}{P(t)} \mathrm{d}t$
   (b) 在 1990~2002 年, 盗窃犯罪的数量变化的百分比是多少?

年	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
相对变化率	−0.03	0.03	−0.06	−0.05	−0.04	−0.04	−0.03

年	1997	1998	1999	2000	2001	2002
相对变化率	−0.02	−0.05	−0.10	−0.02	0.03	0.02

18. 1990 年人们利用石油产生了 $1.4 \cdot 10^{20}$ 焦耳的能量. 当时, 据估计地球上所有的石油会产生大约 10^{22} 焦耳的能量. 假设对石油产生的能量的消耗以每年 2% 的速度增长, 那么需要多长时间我们就会用光自己的石油资源?

本章概要

- **平均值**
- **消费者剩余和生产者剩余**

  工资管理和价格管理

① 世界年鉴, 2005 年, 第 162 页 (纽约).

- **现值和将来值**
  收入流
- **相对增长率**

复 习 题

1. 图 6-36 中的函数 f, 在区间 $1 \leqslant x \leqslant 6$ 上的平均值是多少?

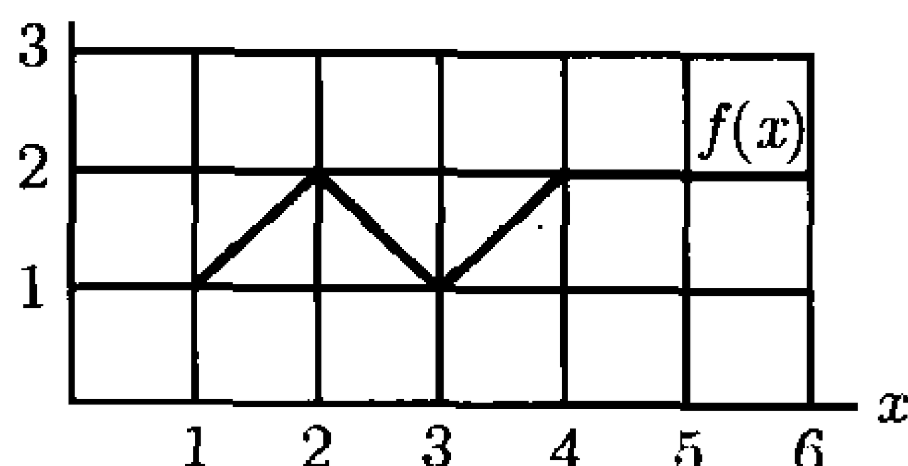


图 6-36

2. 求 $g(t) = 2^t$ 在区间 $[0, 10]$ 上的平均值.

3. **(a)** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的平均值是多少?
(b) 不做任何计算, 你能说明这个平均值是大于还是小于 0.5 吗?

4. 1965 年一盏蒂凡尼灯的价值是 225 美元, 且以每年 15% 的速度升值. 1965 年后的 t 年, 它以美元计的价值可以表示为

$$V = 225(1.15)^t.$$

求 1965~2000 年一盏蒂凡尼灯的平均价值.

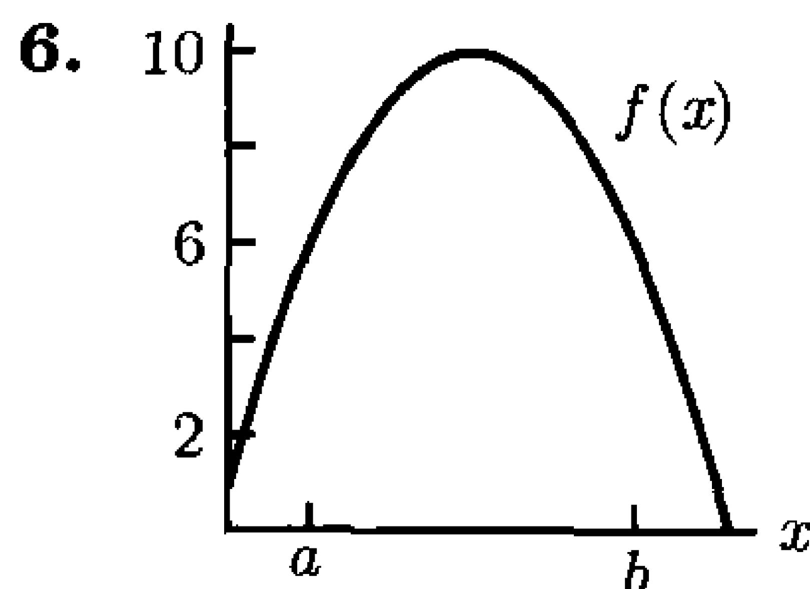
5. 一种放射性物质在时刻 t 的数量是

$$Q(t) = 4 \times (0.96)^t \text{ 克}.$$

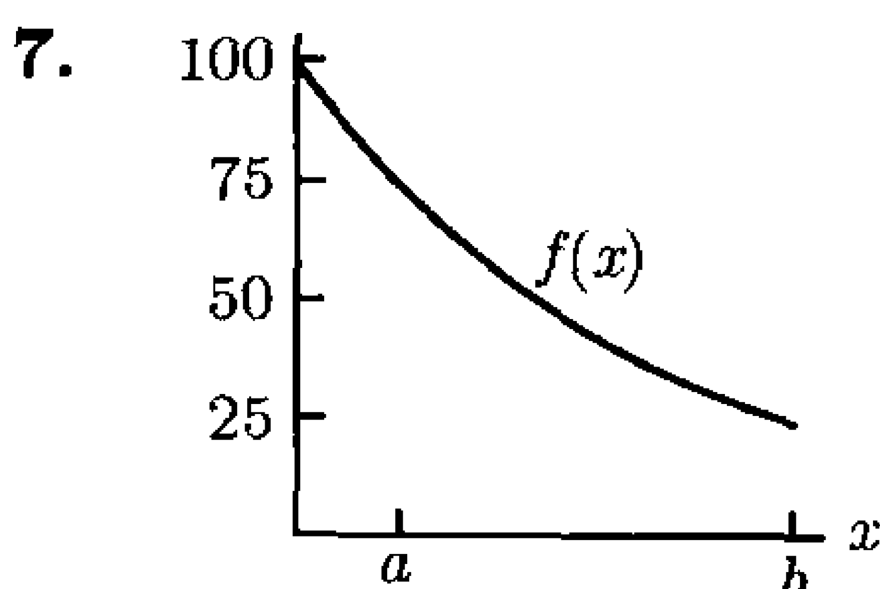
(a) 求 $Q(10)$ 和 $Q(20)$.
(b) 求 $Q(10)$ 和 $Q(20)$ 的平均值.
(c) 求 $Q(t)$ 在区间 $10 \leqslant t \leqslant 20$ 上的平均值.
(d) 利用 $Q(t)$ 的图形, 解释 (b) 和 (c) 中结果的相对大小.

对习题 6 和习题 7, 估计函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 到 $x = b$ 区间上的平均值.

6.



7.



8. 针对图 6-37 中的函数 f, 写出含有一个或多个定积分的表达式来表示:
(a) f 在 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 上的平均值.
(b) $|f|$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 上的平均值.

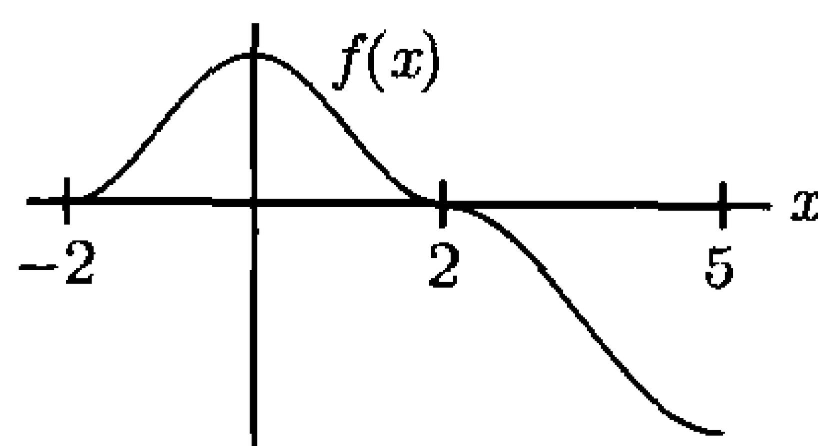


图 6-37

9. 图 6-37 中的函数 f 关于 y 轴是对称的, 考虑 f 在下列区间上的平均值:

I. $0 \leqslant x \leqslant 1$　　II. $0 \leqslant x \leqslant 2$

III. $0 \leqslant x \leqslant 5$　　IV. $-2 \leqslant x \leqslant 2$

(a) 哪一个区间上 f 的平均值最小?

(b) 哪一个区间上 f 的平均值最大?

(c) 哪两个区间上 f 的平均值相等?

10. 一种产品当 $0 \leqslant q \leqslant 1000$ 时, 需求曲线的表达式是 $p = 20\mathrm{e}^{-0.002q}$, 供给曲线的表达式是 $p = 0.02q + 1$, 这里 q 是数量, p 是价格, 单位是美元/单位数量.

(a) 供给为 300 时的价格和需求为 300 时的价格, 哪一个大些? 求出这两个价格.

(b) 画出供给曲线和需求曲线的草图, 求出均衡价格和均衡产量.

(c) 利用均衡价格和均衡产量, 计算消费者剩余和生产者剩余, 并说明它们的意义.

11. 从图形上证明, 最大的交易的所得总量是在均衡价格下产生的. 可以这样来证明: 如果有外力维持价格虚高或虚低, 此时交易的所得总量 (消费者剩余+生产者剩余) 会低于均衡价格下的总量.

12. 1991 年五月,《人车志》杂志介绍了一种售价 980 000 美元的美洲虎轿车. 按此价格, 它只卖出了 50 辆. 据估计, 如果价格是 560 000 美元的话, 早就会卖出 350 辆. 假设需求曲线是条直线, 且 560 000 美元和 350 辆分别是均衡价格和均衡产量, 求均衡价格下的消费者剩余.

13. 当 $0 \leqslant q \leqslant 500$ 时, 一种产品的需求曲线是 $p = 100\mathrm{e}^{-0.008q}$, 供给曲线是 $p = 4\sqrt{q} + 10$, 这里 q 是数量, p 是价格, 单位是美元/单位数量.

(a) 价格为 50 美元时, 消费者愿意购买的产品数量是多少? 生产者愿意提供的数量是多少? 市场会向上还是向下推动价格?

(b) 求均衡价格和均衡产量. (a) 给出的答案是否支持这样的论断, 即市场力量倾向于推动价格向均衡价格靠拢?

(c) 在均衡价格下, 计算消费者剩余和生产者剩余, 并说明它们的意义.

14. 在均衡价格下, 交易所得的总量 (消费者剩余+生产者剩余) 是最大的. 在什么情况下, 消费者剩余和生产者剩余各自取得最大?

(a) 假设价格虚高, 此时的消费者剩余是否能够大于在均衡价格下的消费者剩余? 生产者剩余的情况呢? 画出可能的供给和需求曲线来说明结论.

(b) 假设价格虚低, 此时的消费者剩余是否能够大于在均衡价格下的消费者剩余? 生产者剩余的情况呢? 画出可能的供给和需求曲线来说明结论.

15. 求每年 3000 美元的收入流在 15 年期间的现值和将来值, 假设年利息率为 6%, 它是连续复利的.

16. 假设一个账户赚取 6% 的连续复利, 如果需要 5 年后账户上的金额达到 20 000 美元, 应该按照何种连续的常值速度储蓄?

17. 哈雷–戴维森公司制造摩托车. 在 1996~1997 年, 它的销售速度大约是 $1431\mathrm{e}^{0.134t}$ 百万美元每年, 其中 t 是从 1996 年 1 月 1 日开始的时间, 单位是年. 假设这种速度一直持续到 2003 年 1 月 1 日 (公司成立 100 周年). 求从 1996 年 1 月 1 日到 2003 年 1 月 1 日, 哈雷–戴维森公司的销售额在 1996 年 1 月 1 日的现值, 假设连续复利的利息率为每年 7%.

18. 一个新近安装的机器在运行的最初 6 个月间, 以 $60\ 000t + 45\ 000$ 美元/年的连续速度为公司赚取收益, 6 个月后的连续速度为 75 000 美元/年. 机器的成本是 150 000 美元, 利息率是每年 7%, 且连续复利, t 是机器安装后的时间, 单位是年.

(a) 求运行的第 1 年期间, 机器为公司赚取的利润的现值.

(b) 求机器支付自身需要多长的时间, 也就是说, 利润的现值需要经过多长时间才会等于它的成本.

19. 上等葡萄酒的价值会随着贮藏时间升值. 如果你是一个葡萄酒商人, 你就会遇到一个决策难题: 是现在以每瓶 P 美元卖出你的葡萄酒, 还是等将来以更高的价格卖出. 假设你知道从现在开始的 t 年, 饮酒者愿意购买这种葡萄酒的价格是 $P\left(1+20\sqrt{t}\right)$ 美元. 如果连续复利的通行利息率是每年 5%, 什么时候是卖出你的葡萄酒的最佳时间?

20. 1996 年七月,《芝加哥论坛》上一篇题为 "职业前景: 未来 10 年, 热门职业和非热门职业" 的文章, 针对 1995 到 2005 年的职业变化, 提出了如下预测:

- 就业岗位预计将从 127 百万增加到 144.7 百万 —— 仅仅增长 14%, 1983 到 1994 年的增长率是 24%.
- 服务和零售行业的职位预计增加 16.2 百万, 商业服务, 健康和教育行业将提供 9.1 百万个新职位.
- 制造业继续持续下降, 减少 1.3 百万个职位.
- 提供给具有硕士学位人士的职位会增长得最快, 达到 28%.

(a) 第一个黑体数字是 14, 它是一个绝对变化, 相对变化, 绝对变化率还是相对变化率? 求出对应于 14 的其他三个度量变化的值.

(b) 确定每个黑体数字是绝对变化, 相对变化, 绝对变化率还是相对变化率.

21. 一个城镇有 1000 人, 假设这个城镇的人口以速度

(a) 每年 50 人　　(b) 每年 5%

增长, 填写下表.

年	0	1	2	3	4	···	10
人口数	1000					···	

22. 出生率和死亡率通常用每千人中的出生或死亡的人数来报告. 假设出生率为 30 人/千人, 死亡率为 20 人/千人, 那么人口的相对增长率是多少?

23. 图 6-38 给出了人口的相对增长率, 10 年间人口变化的百分比是多少?

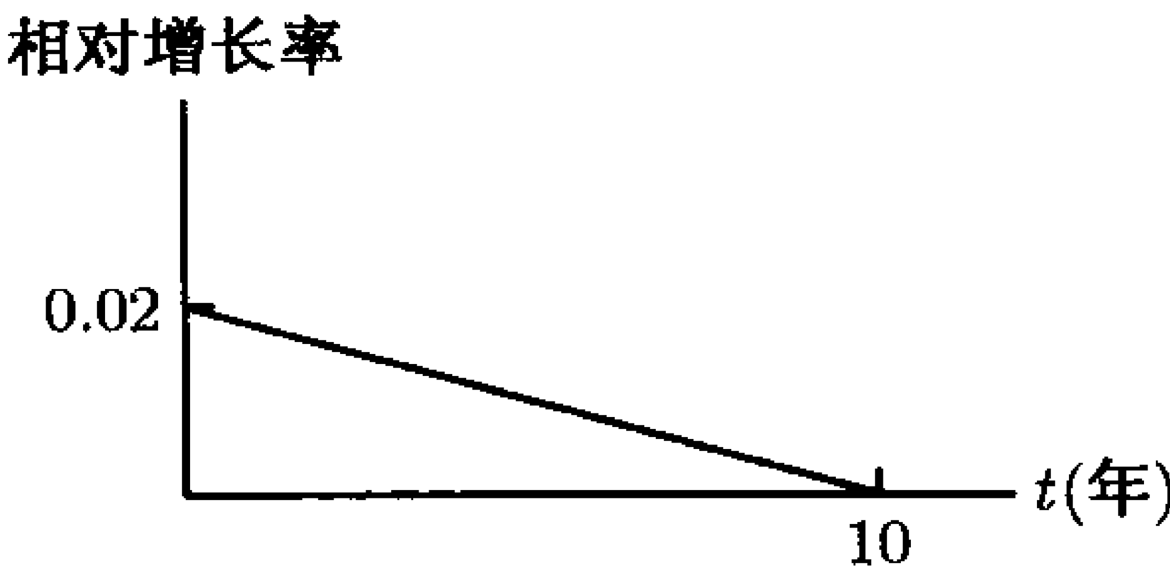


图 6-38

24. 通俗地讲, 指数增长意味着非常快速的增长. 下面问题中你将看到, 任何一个呈指数增长的函数最终会比任何一个幂函数增长得更快.

(a) 对给定的 $n>0$, 当 $x>0$ 时, 证明: 函数 $f(x)=x^n$ 的相对增长率, 随着 x 的增加是下降的.

(b) 假定 $k>0$ 是固定常数, 当 x 很大时, 函数 $g(x)=\mathrm{e}^{kx}$ 的相对增长率会大于 $f(x)$ 的相对增长率, 解释原因.

课外自修项目

1. 资源分布

资源在群体成员当中是否呈均匀分布, 这经常是一个重要的政治或经济问题. 我们如何来度量呢? 怎样才能判断随着时间的逝去, 这个国家的财富分布正在变得更合理还是更不合理呢? 我们如何度量哪一个国家拥有最为合理的收入分布? 这里的问题描述了衡量的方式. 假设资源是均匀分布的, 那么占群体 20% 的任一部分将会拥有 20% 的资源, 类似地, 占群体 30% 的任一部分将会拥有 30% 的资源, 等等. 然而, 如果资源不是均匀分布的, 那么群体中最贫穷 (从资源角度看, 意指占有资源最少) 的 $p\%$ 部分, 将不会拥有 $p\%$ 的资源. 假设 $F(x)$ 表示群体中最贫穷的 x 部分拥有的资源的比例, 则 $F(0.4)=0.1$ 意味着群体中最贫穷的 40% 部分仅拥有 10% 的资源.

(a) 假设资源是均匀分布的, F 会是怎样的?

(b) 对任何这样的 F, 有什么结论? $F(0)$ 和 $F(1)$ 必须等于多少? F 是单调递增的, 还是单调递减的? F 的图形是向上凹的, 还是向下凹的?

(c) 基尼系数 G, 提供了一个衡量资源分布均匀程度的方式. 它的定义为

$$G=2\int_0^1[x-F(x)]\mathrm{d}x.$$

从图形上说明 G 表示的意义.

(d) 图 6-39 和图 6-40 给出了两个国家基尼系数的图形表示, 哪一个国家有着更为合理的财富分布? 分别讨论每个国家的财富分布情况.

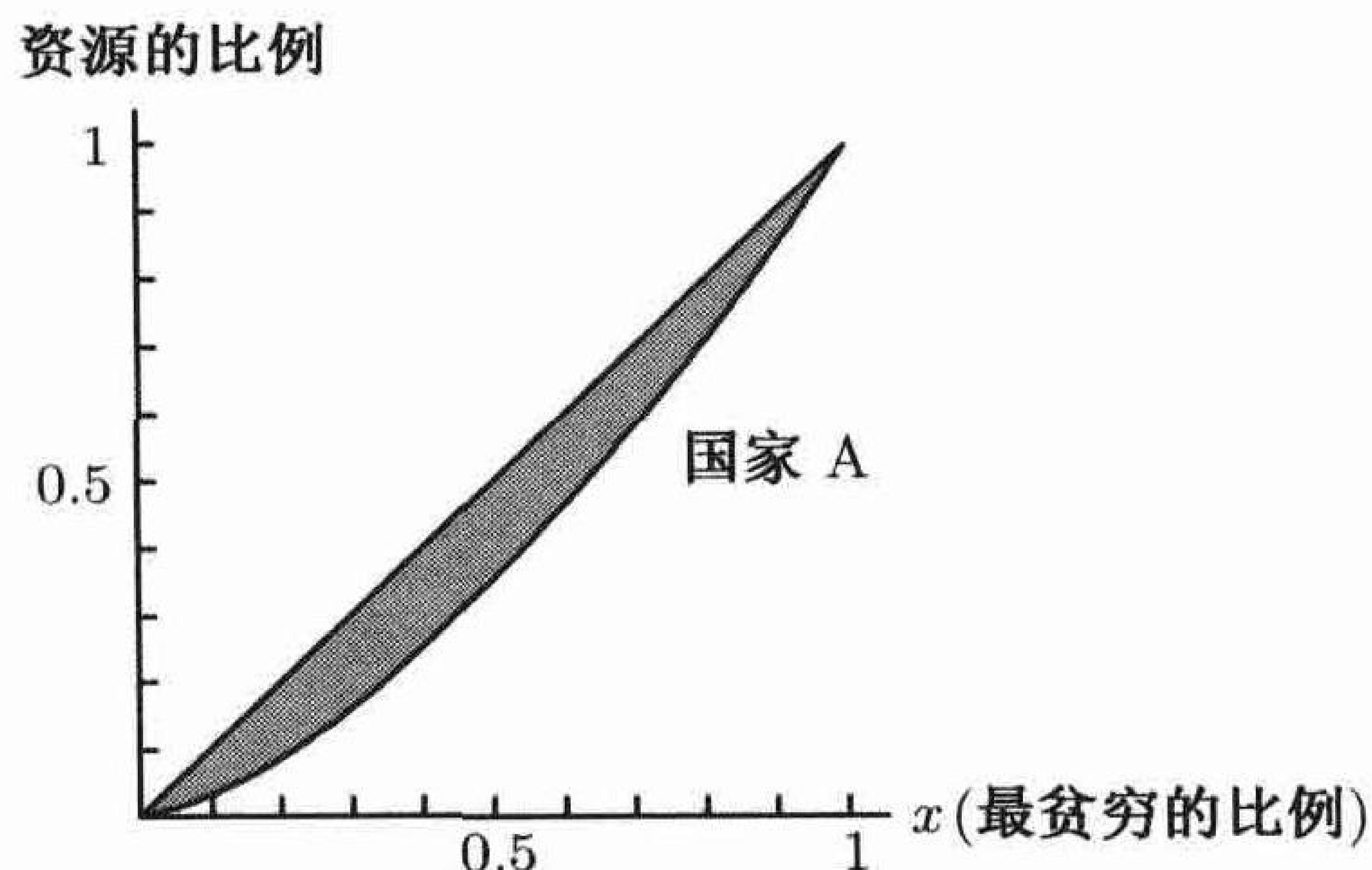


图 6-39 国家 A

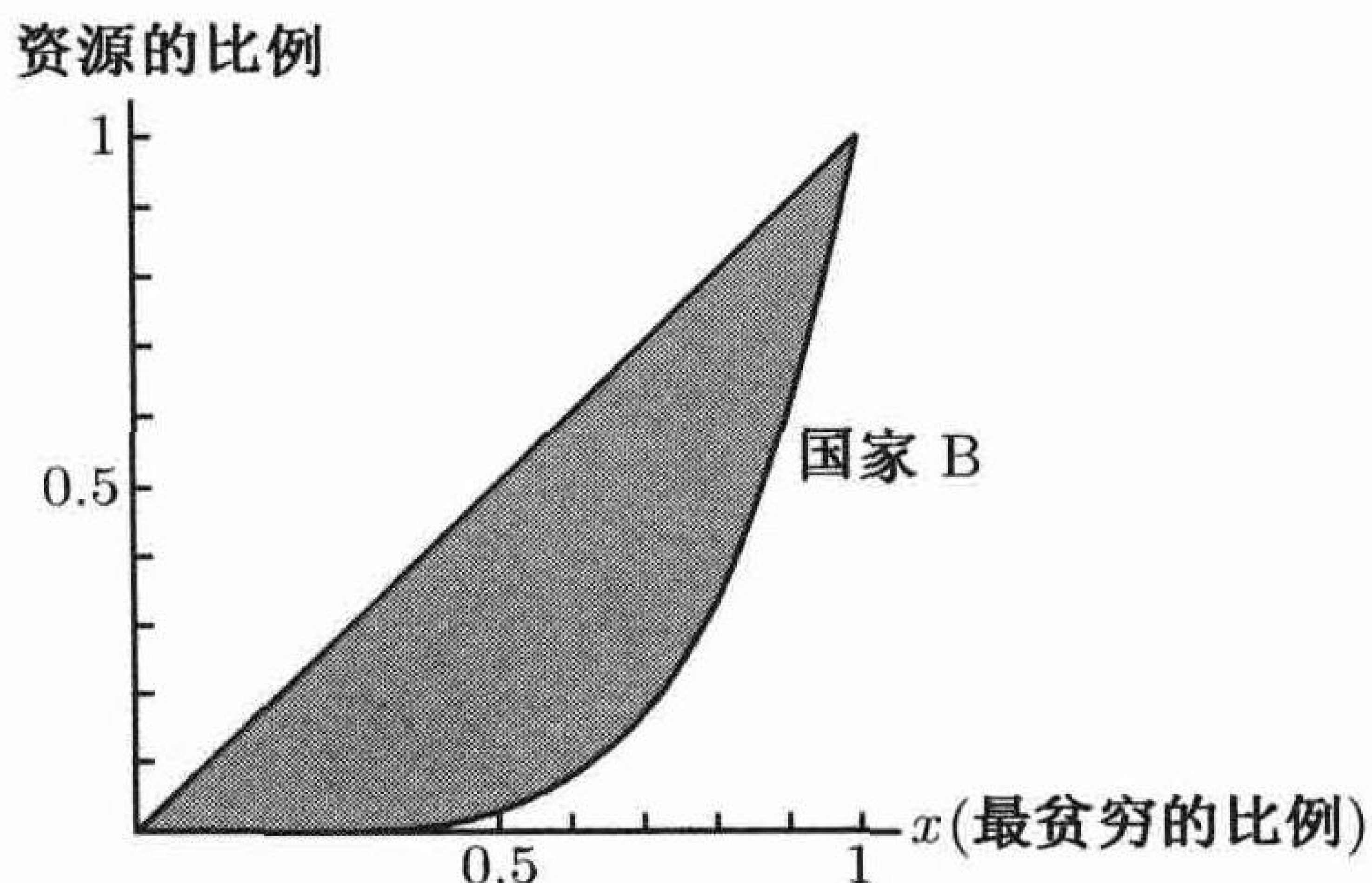


图 6-40 国家 B

(e) 基尼系数 G 最大的可能值是多少? 最小的可能值是多少? 针对每种情况, 画出图形. 在这两种情况下, 资源是怎样分布的?

2. 苹果园的产量

一个苹果园, 栽种 t 年后的年产量 $y(t)$ 以蒲式耳/年计, 其图形由图 6-41 给出. 果树虽然需要大约 10 年才能成材, 但在随后的 20 年间可以获得可观的产量. 不过, 大约 30 年后, 树龄和病害开始危害果树, 造成年产量迅速减少[①].

(a) 在图 6-41 中, 用图形表示 M 年间的总产量 $F(M)$, 其中 $0 \leqslant M \leqslant 60$. 以 $y(t)$ 形式给出 $F(M)$ 的表达式.

(b) 画出 $F(M)$ 关于 M 的图形, 这里 $0 \leqslant M \leqslant 60$.

(c) 写出 M 年间的平均年产量 $a(M)$ 的表达式.

(d) 果园应该何时砍掉果树并重新栽种? 假设水果的价格保持固定, 我们需要极大化每年的平均收益, 它可以通过极大化平均年产量来实现. 利用 $y(t)$ 的图形, 估计平均年产量达到最大值的时间, 从几何上与象征意义上解释你的结果.

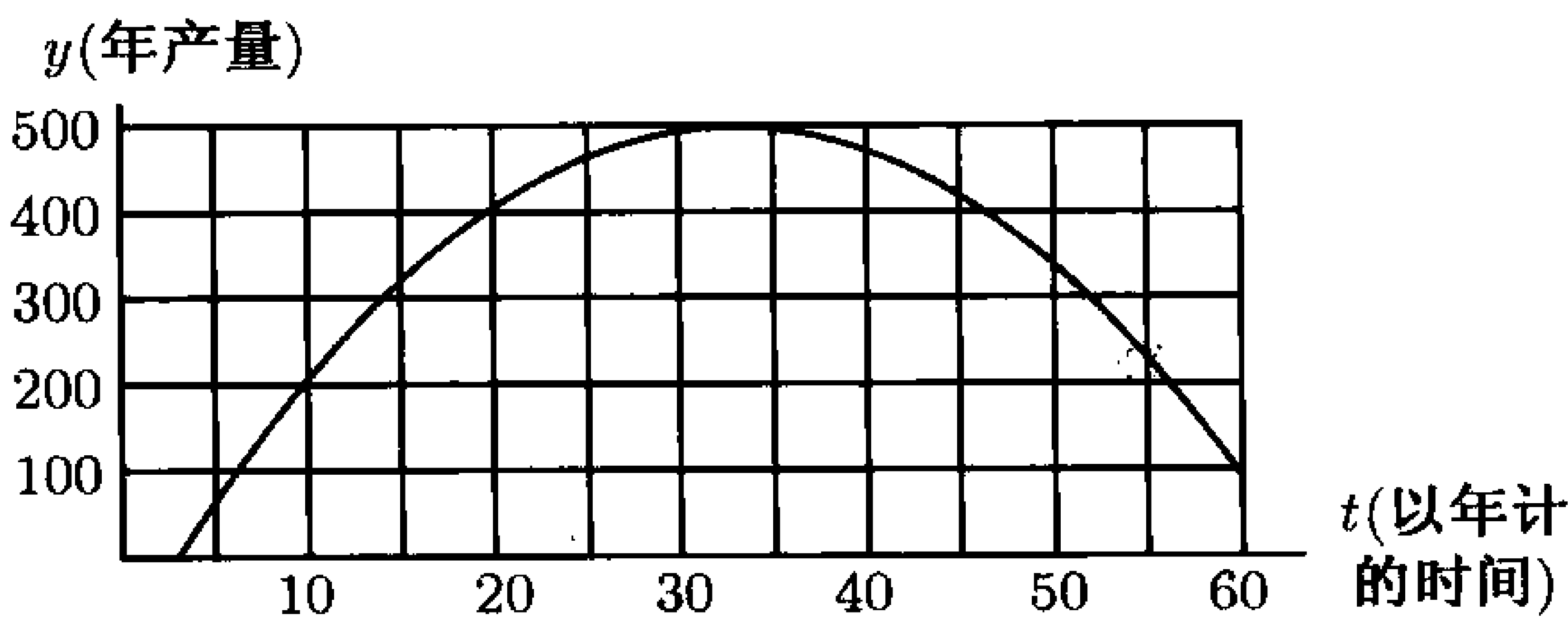


图 6-41

① 选自 Peter D. Taylor,《微积分: 函数分析》(多伦多: Wall & Emerson 公司, 1992 年).

第 7 章　原　函　数

在这一章, 我们运用微积分基本定理, 进一步研究怎样通过一个函数的导数来重建这个函数. 我们介绍原函数, 并说明如何从解析上, 数值上以及图形上构造原函数.

7.1　构造原函数的解析表达式

什么是原函数

如果 $F(x)$ 的导数是 $f(x)$, 即 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 例如, x^2 的导数是 $2x$, 于是我们称

$$x^2 \text{ 是 } 2x \text{ 的一个原函数.}$$

你能否想出另一个函数, 它的导数也是 $2x$? x^2+1? 或者 x^2+17? 由于对任意常数 C,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+C) = 2x+0 = 2x,$$

因此, 形如 x^2+C 的任何一个函数都是 $2x$ 的原函数. 可以证明, 所有 $2x$ 的原函数都具有这种形式, 于是我们称

$$x^2+C \text{ 是 } 2x \text{ 的原函数族.}$$

这样, 对区间上的函数 $f(x)$, 一旦我们知道它的一个原函数 $F(x)$, 那么 $f(x)$ 的其他所有原函数都具有形式 $F(x)+C$.

不定积分

针对原函数族, 我们引入一个概念, 它看起来像是没有上下限的定积分. 如果 $f(x)$ 的所有原函数都具有形式 $F(x)+C$, 则称 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的不定积分, 且记为

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C.$$

理解两式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \text{ 和 } \int f(x)\mathrm{d}x$$

的区别是很重要的. 第 1 式表示一个数, 第 2 式表示一个函数族. 由于概念相似, 术语 “积分” 经常既用于定积分的求解过程, 也用于原函数的求解过程. 通常看上

下文就能确定.

求原函数公式

求函数的原函数与求数的平方根相像. 假设随机地挑选出一个数, 例如 7 或 493, 如果没有计算器, 我们会很难说出它的平方根. 然而如果碰巧选到一个数, 例如 25 或 64, 它是一个数的平方, 我们就能准确地求出它的平方根. 类似地, 如果我们选出的函数, 是一个我们熟悉的函数的导数, 我们就能很容易地求出它的原函数.

例如, 注意到 $2x$ 是 x^2 的导数, 于是 x^2 是 $2x$ 的一个原函数. 如果除以 2, 我们猜想

$$x \text{ 的一个原函数是 } \frac{x^2}{2}.$$

对 $\frac{x^2}{2}$ 求导, 可以验证结果:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = \frac{1}{2}\cdot 2x = x.$$

那么, 怎样求 x^2 的一个原函数呢? x^3 的导数是 $3x^2$, 于是 $x^3/3$ 的导数是 $3x^2/3 = x^2$. 因此

$$x^2 \text{ 的一个原函数是 } \frac{x^3}{3}.$$

你看出模式了吗? 看起来

$$x^n \text{ 的一个原函数是 } \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(我们假定 $n \neq -1$, 不然会得到 $\frac{x^0}{0}$, 它是没有意义的.) 利用微分很容易验证:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

这样, 以不定积分的形式来表示, 我们有

$$\boxed{\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1.}$$

你能想到函数 $f(x) = 5$ 的一个原函数吗? 我们知道 $5x$ 的导数是 5, 于是 $F(x) = 5x$ 是 $f(x) = 5$ 的一个原函数. 一般地, 如果 k 是一个常数, kx 的导数是 k, 于是我们得到结果:

> 如果 k 为常数,
> $$\int k\mathrm{d}x = kx + C.$$

例 1 求 $\int (3x + x^2)\mathrm{d}x$.

解 我们知道, $x^2/2$ 是 x 的一个原函数, 而 $x^3/3$ 是 x^2 的一个原函数, 于是我们预计

$$\int(3x+x^2)\mathrm{d}x=3\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{x^3}{3}+C.$$

再次地, 利用微分验证你的原函数 —— 这很容易做到. 这里

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{x^3}{3}+C\right)=\frac{3}{2}\cdot 2x+\frac{3x^2}{3}=3x+x^2.$$ □

上面例子表明, 微分的函数和与数乘运算规则可以反向运用.

> **原函数的性质: 函数和与数乘运算**
>
> 以不定积分的形式表示,
>
> (1) $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$
>
> (2) $\int cf(x)\mathrm{d}x=c\int f(x)\mathrm{d}x.$
>
> 用语言表示,
>
> (1) 两个函数的和 (或差) 的原函数是它们各自原函数的和 (或差).
>
> (2) 数乘函数的原函数是这个数与这个函数的原函数的乘积.

例 2 求下列函数的原函数: (a) x^5 (b) t^8 (c) $12x^3$ (d) q^3-6q^2

解 (a) $\int x^5\mathrm{d}x=\frac{x^6}{6}+C.$

(b) $\int t^8\mathrm{d}t=\frac{t^9}{9}+C.$

(c) $\int 12x^3\mathrm{d}x=12\left(\frac{x^4}{4}\right)+C=3x^4+C.$

(d) $\int(q^3-6q^2)\mathrm{d}q=\frac{q^4}{4}-6\left(\frac{q^3}{3}\right)+C=\frac{q^4}{4}-2q^3+C.$ □

为验证结果, 对原函数求微分, 你应该得到被积函数.

当 $n=-1$ 时, x^n 的不定积分是什么呢? 换句话说, $1/x$ 的一个原函数是什么? 多亏我们知道一个函数, 它的导数是 $1/x$, 这就是自然对数函数. 这样, 由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\frac{1}{x},$$

我们得到

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C,\quad 若\ x>0.$$

如果 $x<0$, $\ln x$ 无意义, 因此它不可能是 $1/x$ 的一个原函数. 针对此情形, 我们考虑 $\ln(-x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x)=(-1)\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}$$

于是

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(-x) + C, \quad \text{若 } x < 0.$$

这表明如果 $x > 0$, $\ln x$ 是 $1/x$ 的一个原函数, 如果 $x < 0$, 则 $\ln(-x)$ 是 $1/x$ 的一个原函数. 由于当 $x > 0$ 时, $|x| = x$, 当 $x < 0$ 时, $|x| = -x$, 我们可以将两式合并为: 在任何一个不包含 0 的区间上,

$$\frac{1}{x} \text{ 的一个原函数是 } \ln|x|.$$

因此

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.}$$

由于指数函数 e^x 的导数是它本身, 因此它的原函数也是它自己; 于是

$$\boxed{\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.}$$

那么 e^{kx} 呢? 我们知道 e^{kx} 的导数是 $k\mathrm{e}^{kx}$, 于是对 $k \neq 0$, 我们有

$$\boxed{\int \mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\mathrm{e}^{kx} + C.}$$

例 3　求下列函数的原函数: (a) $8x^3 + \dfrac{1}{x}$　(b) $12\mathrm{e}^{0.2t}$

解　(a) $\displaystyle\int \left(8x^3 + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = 8\left(\frac{x^4}{4}\right) + \ln|x| + C = 2x^4 + \ln|x| + C.$

(b) $\displaystyle\int 12\mathrm{e}^{0.2t}\mathrm{d}t = 12\left(\frac{1}{0.2}\mathrm{e}^{0.2t}\right) + C = 60\mathrm{e}^{0.2t} + C.$

利用微分验算你的结果. □

周期函数的原函数

很容易猜想到函数 sine 和 cosine 的原函数. 因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x,$$

我们得到

$$\boxed{\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C \quad \text{和} \quad \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.}$$

由于 $\sin(kx)$ 的导数是 $k\cos(kx)$, $\cos(kx)$ 的导数是 $-k\sin(kx)$, 对 $k \neq 0$, 我们有

$$\boxed{\int \cos(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin(kx) + C \quad \text{和} \quad \int \sin(kx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{k}\cos(kx) + C.}$$

例 4　求 $\displaystyle\int(\sin x + 3\cos(5x))\mathrm{d}x.$

解 我们将原函数分解为两项:

$$\int(\sin x+3\cos(5x))\mathrm{d}x=\int\sin x\mathrm{d}x+3\int\cos(5x)\mathrm{d}x=-\cos x+\frac{3}{5}\sin(5x)+C.$$

利用微分验算:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\cos x+\frac{3}{5}\sin(5x)+C\right)=\sin x+3\cos(5x).$$

□

习题

对习题 1~26, 分别求一个原函数.

1. $f(x)=5$

2. $f(x)=5x$

3. $f(x)=x^2$

4. $g(t)=t^2+t$

5. $f(x)=x^4$

6. $g(t)=t^7+t^3$

7. $f(q)=5q^2$

8. $g(x)=6x^3+4$

9. $h(y)=3y^2-y^3$

10. $f(t)=2t^2+3t^3+4t^4$

11. $f(x)=3x^2+5$

12. $f(x)=6x^2-8x+3$

13. $h(t)=3t^2+7t+1$

14. $g(z)=\sqrt{z}$

15. $f(x)=5x-\sqrt{x}$

16. $p(z)=(\sqrt{z})^3$

17. $p(t)=t^3-\frac{t^2}{2}-t$

18. $h(z)=\frac{1}{z}$

19. $r(t)=\frac{1}{t^2}$

20. $q(y)=y^4+\frac{1}{y}$

21. $f(x)=x^6-\frac{1}{7x^6}$

22. $p(y)=\frac{1}{y}+y+1$

23. $g(t)=\mathrm{e}^{-3t}$

24. $g(t)=\sin t$

25. $g(t)=5+\cos t$

26. $g(\theta)=\sin\theta-2\cos\theta$

对习题 27~32, 分别求一个原函数 $F(x)$, 满足 $F'(x)=f(x)$ 且 $F(0)=0$. $F(x)$ 是否唯一?

27. $f(x)=3$

28. $f(x)=-7x$

29. $f(x)=x^2$

30. $f(x)=\sqrt{x}$

31. $f(x)=2+4x+5x^2$

32. $f(x)=\mathrm{e}^x$

对习题 33~62, 求不定积分.

33. $\int 3x\mathrm{d}x$

34. $\int(4t+7)\mathrm{d}t$

35. $\int 6x^2\mathrm{d}x$

36. $\int t^{12}\mathrm{d}t$

37. $\int(x^3-x)\mathrm{d}x$

38. $\int(x^2+1)\mathrm{d}x$

39. $\int(x^3+4x+8)\mathrm{d}x$

40. $\int 5\mathrm{e}^z\mathrm{d}x$

41. $\int(q^2+5q+2)\mathrm{d}q$

42. $\int(x^5-12x^3)\mathrm{d}x$

43. $\int(6\sqrt{x})\mathrm{d}x$

44. $\int(x^2+4x-5)\mathrm{d}x$

45. $\int\left(\frac{5}{t^2}+\frac{6}{t^3}\right)\mathrm{d}t$

46. $\int\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

47. $\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

48. $\int(t^2-6t+5)\mathrm{d}t$

49. $\int\mathrm{e}^{-0.05t}\mathrm{d}t$

50. $\int\left(8x^3+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

51. $\int\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t$

52. $\int\cos\theta\mathrm{d}\theta$

53. $\int\sin t\mathrm{d}t$

54. $\int 30\mathrm{e}^{-0.2t}\mathrm{d}t$

55. $\int 100\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x$

56. $\int(4x+2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

57. $\int(5\cos x-3\sin x)\mathrm{d}x$

58. $\int\sin(3x)\mathrm{d}x$

59. $\int\cos(4x)\mathrm{d}x$

60. $\int 6\cos(3x)\mathrm{d}x$

61. $\int(10+8\sin(2x))\mathrm{d}x$

62. $\int(12\sin(2x)+15\cos(5x))\mathrm{d}x$

对习题 63~66, 分别求一个原函数 $F(x)$, 满足 $F'(x)=f(x)$ 且 $F(0)=5$.

63. $f(x)=x^2+1$

64. $f(x)=6x-5$

65. $f(x)=6\mathrm{e}^{3x}$

66. $f(x)=8\sin(2x)$

67. 一个垄断生产商的边际收益函数为 $MR=20-4q$.

(a) 求总收益函数.

(b) 求对应的需求曲线.

68. 一个公司的边际成本函数为 $MC=3q^2+4q+6$. 假设固定成本为 200, 求总成本函数.

7.2 换元积分法

在第 3 章中, 针对任何一个由常值函数, x 的幂函数, $\sin x$, $\cos x$, e^x 和 $\ln x$ 经过加减, 乘, 除运算或函数复合得到的函数, 我们研究了微分规则. 这样的函数称为初等函数. 然而, 求导数与求原函数之间有很大的不同. 每一个初等函数都有初等的导函数, 许多初等函数却没有初等的原函数. 比如 $\sqrt{x^3+1}$, $(\sin x)/x$ 和 e^{-x^2}, 这些函数都是很自然得到的普通函数, 并不是奇特的函数, 但是它们都没有初等的原函数.

本节我们介绍换元积分法. 换元积分法是链式法则的反向运用. 根据链式法则,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \underbrace{f'}_{\text{外函数的导数}}\overbrace{(g(x))}^{\text{内函数}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{内函数的导数}}.$$

于是, 任何一个利用链式法则微分得到的函数都是两个因数——“外函数的导数”与“内函数的导数”——的乘积. 如果一个函数具有这种形式, 它的原函数就是 $f(g(x))$.

例 1 运用链式法则求 $f'(x)$, 然后写出对应的不定积分式.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+1)^6$ (c) $f(x) = \ln(x^2+4)$

解 (a) 运用链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{x^2}) = \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x \quad \text{于是} \quad \int \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C.$$

(b) 运用链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{6}(x^2+1)^6\right) = (x^2+1)^5 \cdot 2x \quad \text{于是} \quad \int (x^2+1)^5 \cdot 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + C.$$

(c) 运用链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x^2+4)) = \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x \quad \text{于是} \quad \int \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x\mathrm{d}x = \ln(x^2+4) + C.$$ □

例 1 中, 每个内函数的导数都是 $2x$. 注意在每个积分式中, 内函数的导数都是被积函数的因数.

换元法的关键是寻找一个内函数, 它的导数作为因数出现在被积函数中. 我们将这种方法归纳如下.

> **在积分中运用换元**
> 设 w 是“内函数”且 $\mathrm{d}w = w'(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, 然后用 w 的形式来表示被积函数.

例 2 利用换元求下列积分:

(a) $\int \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x\mathrm{d}x$ (b) $\int (x^2+1)^5 \cdot 2x\mathrm{d}x$ (c) $\int \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x\mathrm{d}x$

解 (a) 我们来找一个内函数, 它的导数是被积函数的因数. 本例中, 内函数是 x^2, 其导数是 $2x$. 令 $w = x^2$, 则有 $\mathrm{d}w = w'(x)\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x$. 现在原被积函数可用 w 的形式改写:

$$\int \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^w \mathrm{d}w = \mathrm{e}^w + C = \mathrm{e}^{x^2} + C.$$

我们将变量改为 w, 简化了被积函数. 先求出关于 w 的积分, 最后一步是将变量替换回原变量 x.

(b) 这里, 内函数是 x^2+1, 其导数是 $2x$. 令 $w=x^2+1$, 则有 $\mathrm{d}w=w'(x)\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x$. 用 w 的形式改写原积分, 可得

$$\int(x^2+1)^5\cdot 2x\mathrm{d}x=\int w^5\mathrm{d}w=\frac{1}{6}w^6+C=\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C.$$

同样地, 通过将变量改为 w, 我们简化了被积函数.

(c) 内函数是 x^2+4, 于是令 $w=x^2+4$, 则有 $\mathrm{d}w=w'(x)\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x$. 换元我们得到

$$\int\frac{1}{(x^2+4)}\cdot 2x\mathrm{d}x=\int\frac{1}{w}\mathrm{d}w=\ln(w)+C=\ln(x^2+4)+C.$$ □

注意, 为了确保换元积分法的使用, 内函数的导数必须在积分中出现. 不过, 即使内函数的导数部分缺失了一个常数, 换元积分法仍然有效. 下面的两个例子就是这种情形.

例 3 求 $\int t\mathrm{e}^{(t^2+1)}\mathrm{d}t$.

解 这里内函数是 t^2+1, 其导数是 $2t$. 因为被积函数中有 t 这一部分, 我们尝试 $w=t^2+1$, 于是 $\mathrm{d}w=w'(t)\mathrm{d}t=2t\mathrm{d}t$. 然而, 注意原积分中只有 $t\mathrm{d}t$, 不是 $2t\mathrm{d}t$, 因此我们表示

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}w=t\mathrm{d}t$$

然后换元:

$$\int t\mathrm{e}^{(t^2+1)}\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^{\overbrace{(t^2+1)}^{w}}\cdot\underbrace{t\mathrm{d}t}_{\frac{1}{2}\mathrm{d}w}=\int\mathrm{e}^w\frac{1}{2}\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^w\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^w+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(t^2+1)}+C.$$ □

为什么我们不在上例中表述 $\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^w\mathrm{d}w=\frac{1}{2}\mathrm{e}^w+\frac{1}{2}C$ 呢? 由于常数 C 是任意的, 加上 C 或 $\frac{1}{2}C$ 都无所谓. 作为约定, 求出积分后, 我们通常在后面加上 C.

例 4 求 $\int x^3\sqrt{x^4+5}\,\mathrm{d}x$.

解 内函数是 x^4+5, 其导数是 $4x^3$. 被积函数中有 x^3 这一部分, 且只缺失了一个常数, 我们尝试

$$w=x^4+5.$$

于是

$$\mathrm{d}w=w'(x)\mathrm{d}x=4x^3\mathrm{d}x,$$

这样

$$\frac{1}{4}\mathrm{d}w=x^3\mathrm{d}x.$$

则有

$$\int x^3\sqrt{x^4+5}\mathrm{d}x=\int\sqrt{w}\frac{1}{4}\mathrm{d}w=\frac{1}{4}\int w^{1/2}\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{w^{3/2}}{3/2}+C=\frac{1}{6}(x^4+5)^{3/2}+C.$$ □

注意

从前面的例子中, 我们看到: 被积函数中只缺失内函数导数的一个常数时, 换元积分法仍然可以使用. 然而如果缺失的不仅仅是一个常数时, 换元就不能进行. 例如, 令 $w=t^4+5$ 去求

$$\int x^2\sqrt{x^4+5}\mathrm{d}x$$

是不行的, 因为 $x^2\mathrm{d}x$ 不是 $\mathrm{d}w=4x^3\mathrm{d}x$ 的常数倍. 为了运用换元, 被积函数中必须包含内函数的导数, 可以允许相差一个常数.

例 5 求 $\displaystyle\int\frac{t^2}{1+t^3}\mathrm{d}t$.

解 注意 $1+t^3$ 的导数是 $3t^2$, 令 $w=1+t^3$, $dw=3t^2dt$, 于是 $\dfrac{1}{3}dw=t^2dt$. 则有

$$\int\frac{t^2}{1+t^3}\mathrm{d}t=\int\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}w}{w}=\frac{1}{3}\ln|w|+C=\frac{1}{3}\ln|1+t^3|+C.$$

由于分子是 $t^2\mathrm{d}t$, 我们可能会取 $w=t^3$. 通过换元得到积分 $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int 1/(1+w)\mathrm{d}w$. 为求出这个积分, 我们还需要进行第二次换元 $u=1+w$. 运用换元计算积分, 经常不止一种方法. □

7.2.1 用周期函数作换元

这个方法可以适用于所有积分. 尤其是, 它可以用于有关周期函数的积分.

例 6 求 $\displaystyle\int 3x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x$.

解 我们来找一个内函数, 它的导数应在被积函数中出现 —— 这里就是 x^3. 令 $w=x^3$, 则有 $\mathrm{d}w=w'(x)\mathrm{d}x=3x^2\mathrm{d}x$. 原被积函数现在完全可用新变量 w 的形式改写:

$$\int 3x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x=\int\cos\underbrace{(x^3)}_{w}\cdot\underbrace{3x^2\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}w}=\int\cos w\mathrm{d}w=\sin w+C=\sin(x^3)+C.$$

我们将变量改为 w, 简化了被积函数. 现在的被积函数是 $\cos w$, 它更容易求出原函数. 先求出关于 w 的积分, 最后一步是将变量替换回原变量 x. □

例 7 求 $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

解 令 $w=\cos\theta$, 它的导数是 $-\sin\theta$, 被积函数中已有 $\sin\theta$ 这一部分. 这样

$$dw = w'(\theta)d\theta = -\sin\theta d\theta,$$

于是

$$-dw = \sin\theta d\theta.$$

因此

$$\int e^{\cos\theta}\sin\theta d\theta = \int e^{w}(-dw) = (-1)\int e^{w}dw = -e^{w} + C = -e^{\cos\theta} + C. \quad \square$$

习题

求习题 1~40 中的积分, 利用微分验证你的结果.

1. $\int 2x(x^2+1)^5 dx$

2. $\int \frac{4x^3}{x^4+1} dx$

3. $\int (x+10)^3 dx$

4. $\int 5e^{5t+2} dt$

5. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

6. $\int e^{-x} dx$

7. $\int xe^{-x^2} dx$

8. $\int y(y^2+5)^8 dy$

9. $\int t^2(t^3-3)^{10} dt$

10. $\int x^2(1+2x^3)^2 dx$

11. $\int x(x^2-4)^{7/2} dx$

12. $\int x(x^2+3)^2 dx$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$

14. $\int \frac{dy}{y+5}$

15. $\int t\cos(t^2) dt$

16. $\int (2t-7)^{73} dt$

17. $\int (x^2+3)^2 dx$

18. $\int \sin(3-t) dt$

19. $\int y^2(1+y)^2 dy$

20. $\int \sin\theta(\cos\theta+5)^7 d\theta$

21. $\int \sqrt{\cos 3t}\sin 3t dt$

22. $\int \frac{t}{1+3t^2} dt$

23. $\int \sin^6\theta\cos\theta d\theta$

24. $\int x^2 e^{x^3+1} dx$

25. $\int \sin^6(5\theta)\cos(5\theta) d\theta$

26. $\int \sin^3\alpha\cos\alpha d\alpha$

27. $\int x\sin(x^2) dx$

28. $\int e^{3x-4} dx$

29. $\int xe^{3x^2} dx$

30. $\int x\sqrt{x^2+1} dx$

31. $\int \frac{q}{5q^2+8} dq$

32. $\int \frac{(\ln z)^2}{z} dz$

33. $\int \frac{e^t+1}{e^t+t} dt$

34. $\int \frac{y}{y^2+4} dy$

35. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

36. $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy$

37. $\int \frac{1+e^x}{\sqrt{x+e^x}}dx$ **38.** $\int \frac{e^x}{2+e^x}dx$

39. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+19}dx$ **40.** $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

41. 下列积分中, 如果适合换元, 运用换元计算. 如果不适合, 不用求解.

(a) $\int x\sin(x^2)dx$ (b) $\int x^2\sin x dx$

(c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ (d) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

(e) $\int x^3e^{x^2}dx$ (f) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

42. 用两种方法求 $\int 4x(x^2+1)dx$:

(a) 先乘出来, 然后积分.

(b) 运用换元 $w=x^2+1$.

(c) 解释为什么得到的 (a) 和 (b) 的表达式是不同的. 它们都是正确的吗?

43. **(a)** 用两种方法求 $\int (x+5)^2dx$:

(i) 乘开求解

(ii) 运用换元 $w=x+5$

(b) 结果相同吗? 解释原因.

7.3 利用基本定理求定积分

上一节计算了原函数, 本节我们揭示怎样利用原函数精确地计算定积分. 这种计算的依据是微积分基本定理:

> **微积分基本定理** 如果 F 的导函数 F' 是连续的, 则有
> $$\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a).$$

迄今为止, 我们都是利用函数的图形或左手和与右手和来逼近定积分. 微积分基本定理则为我们提供了计算定积分的另一种方法. 为了求 $\int_a^b F'(x)dx$, 我们先试图去求 $F(x)$, 然后计算 $F(b)-F(a)$. 这种计算定积分的方法有个重要优点: 它得到的是积分的精确值. 不过要使用它, 需要我们能够找到一个原函数 $F(x)$ 的表达式.

例 1 用数值法与基本定理计算 $\int_1^3 2xdx$.

解 利用计算器, 我们可以得到

$$\int_1^3 2xdx = 8.0\cdots.$$

利用基本定理则可以精确地计算积分. 令 $F'(x)=2x$, 则 $F(x)=x^2$. 我们得到

$$\int_1^3 2x\mathrm{d}x = F(3)-F(1) = 3^2-1^2 = 8.$$ □

例 1 中, 我们使用了原函数 $F(x)=x^2$, 其实对任意常数 C, 函数 $F(x)=x^2+C$ 都可行, 因为执行 $F(b)$ 减去 $F(a)$ 的运算时, 常数可以消除:

$$\int_1^3 2x\mathrm{d}x = F(3)-F(1) = (3^2+C)-(1^2+C) = 8.$$

针对 $F(b)-F(a)$, 引入一个简单记号是有用的. 我们记

$$F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

例如:

$$\int_1^3 2x\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^3 = 3^2-1^2 = 8.$$

例 2 利用基本定理计算下列定积分.

(a) $\int_0^2 6x^2\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^2 t^3\mathrm{d}t$ (c) $\int_1^2 (8x+5)\mathrm{d}x$ (d) $\int_0^1 8\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$

解 (a) 由于 $F'(x)=6x^2$, 取 $F(x)=6(x^3/3)=2x^3$. 于是

$$\int_0^2 6x^2\mathrm{d}x = 6\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 2x^3\Big|_0^2 = 2\cdot 2^3-2\cdot 0^3 = 16.$$

(b) 由于 $F'(t)=t^3$, 取 $F(t)=t^4/4$. 于是

$$\int_0^2 t^3\mathrm{d}t = F(t)\Big|_0^2 = F(2)-F(0) = \frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4} = \frac{16}{4}-0 = 4.$$

(c) 由于 $F'(x)=8x+5$, 取 $F(x)=4x^2+5x$. 于是

$$\begin{aligned}\int_1^2 (8x+5)\mathrm{d}x = (4x^2+5x)\Big|_1^2 &= (4\cdot 2^2+5\cdot 2)-(4\cdot 1^2+5\cdot 1)\\ &= 26-9 = 17.\end{aligned}$$

(d) 由于 $F'(t)=8\mathrm{e}^{2t}$, 取 $F(t)=(8\mathrm{e}^{2t})/2=4\mathrm{e}^{2t}$. 于是

$$\int_0^1 8\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = 8\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\right)\Big|_0^1 = 4\mathrm{e}^{2t}\Big|_0^1 = 4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}^0 = 25.556.$$ □

例 3 用定积分表示 $f(t)=\mathrm{e}^{0.5t}$ 的图形介于 $t=0$ 与 $t=4$ 间的下方的区域面积. 利用基本定理计算这个面积.

解 函数图形如图 7-1 所示, 我们有

$$\begin{aligned}\text{面积} &= \int_0^4 \mathrm{e}^{0.5t}\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{0.5t}\Big|_0^4 = 2\mathrm{e}^{0.5(4)}-2\mathrm{e}^{0.5(0)}\\ &= 2\mathrm{e}^2-2 = 12.778.\end{aligned}$$

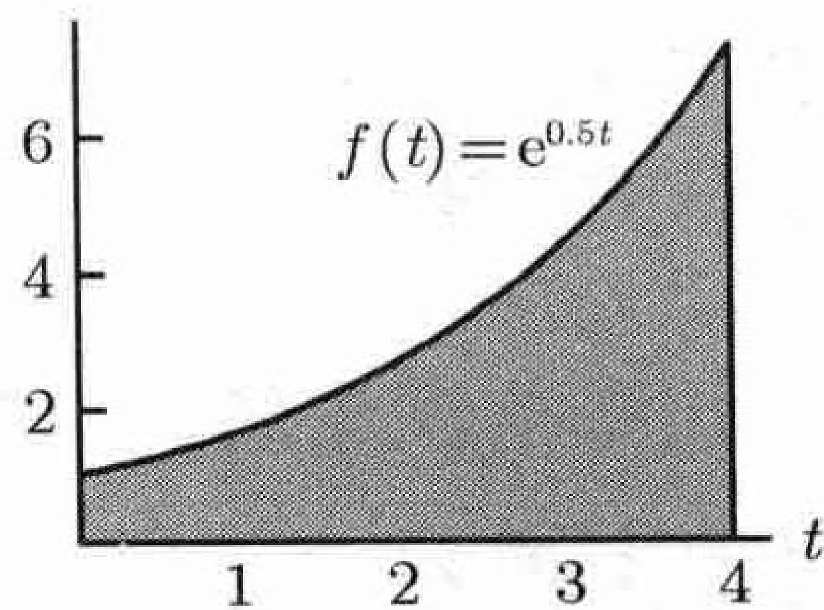


图 7-1 阴影面积 $=\int_0^4 \mathrm{e}^{0.5t}\mathrm{d}t$ □

7.3.1 运用换元求定积分

正如下面的例子中将要看到的, 运用换元, 我们可有两种方法计算定积分.

例 4 计算 $\int_0^2 xe^{x^2}dx$.

解 利用基本定理计算这个定积分, 必须首先找到 $f(x)=xe^{x^2}$ 的一个原函数. 内函数是 x^2, 这样我们令 $w=x^2$, 于是 $dw=2xdx$, 则有 $\frac{1}{2}dw=xdx$. 从而,

$$\int xe^{x^2}dx=\int e^w\frac{1}{2}dw=\frac{1}{2}e^w+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

现在来求定积分

$$\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\bigg|_0^2=\frac{1}{2}(e^4-e^0)=\frac{1}{2}(e^4-1).$$

同是这个定积分的计算, 还有另一种考虑方法. 我们先得到

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^w+C,$$

下一步是将 w 用 x^2 替换, 然后代入 2 和 0 计算. 我们应该是能够用对应的 w 的限, 直接替换原积分的限 $x=0$ 和 $x=2$ 的. 因为 $w=x^2$, w 的限是 $w=0^2=0$(当 $x=0$ 时) 和 $w=2^2=4$(当 $x=2$ 时), 于是我们得到

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{w=0}^{w=4}e^w dw=\frac{1}{2}e^w\bigg|_0^4=\frac{1}{2}(e^4-e^0)=\frac{1}{2}(e^4-1).$$

正如我们希望的, 两种方法都得到同一结果. □

运用换元求定积分

可有两种方法

- 求出不定积分, 以原变量的形式来表示一个原函数, 然后用原变量的限计算定积分.
- 将原变量的限换为新变量的限, 并不将原变量替换回原函数.

7.3.2 反常积分

迄今为止, 在对定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的讨论中, 我们假定区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 有限而且被积函数 f 是连续的. 一个定积分, 如果它的一个 (或两个) 限是无穷大, 或者被积函数是无界的, 则称它是反常积分. 反常积分的一个例子是

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$$

这个积分表示 $\frac{1}{x^2}$ 从 $x=1$ 向右无限延伸而形成的下方图形的面积. (如图 7-2 所示.)

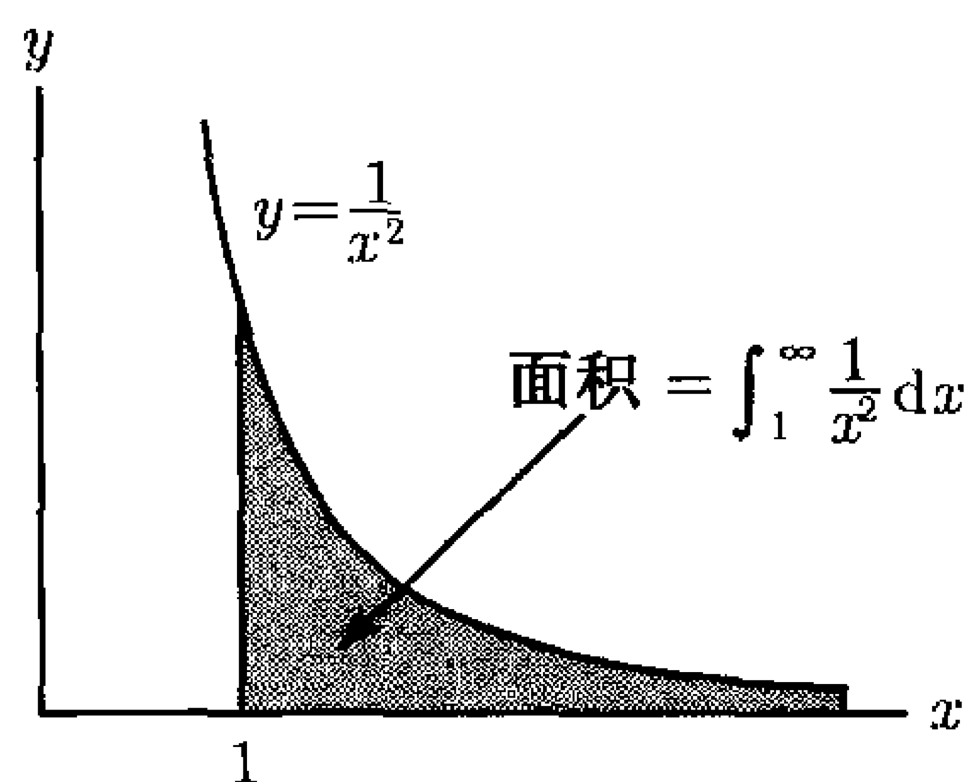


图 7-2　反常积分的面积表示

我们让积分上限变得越来越大, 以此来估计这个面积. 可以看到

$$\int_1^{10}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=0.9,\quad \int_1^{100}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=0.99,$$

$$\int_1^{1000}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=0.999,$$

等等. 这些计算暗示: 随着积分上限趋向于无穷大, 面积趋向于 1. 我们称反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 收敛于 1. 为了说明积分精确地收敛到 1(比如, 不是 1.0001), 我们需要利用微积分基本定理. (参见习题 39.) 看上去很奇怪的是, 图 7-2 中的阴影区域 (其长度是无限的) 会有有限的面积. 它的面积有限, 是因为随着 $x\to\infty$, 函数 $1/x^2$ 的值很快地减小为 0. 在其他的一些例子中 (那里, 被积函数不是很快地减小为 0), 用一个反常积分表示的面积可以不是有限的. 在这种情况下, 我们称反常积分是发散的. (参见习题 43.)

习题

利用基本定理, 精确求出习题 1～20 中的定积分.

1. $\int_1^3 5\mathrm{d}x$　　**2.** $\int_0^4 6x\mathrm{d}x$

3. $\int_1^2 (2x+3)\mathrm{d}x$　　**4.** $\int_0^2 (12x^2+1)\mathrm{d}x$

5. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　**6.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

7. $\int_1^3 t^3\mathrm{d}t$　　**8.** $\int_0^5 3x^2\mathrm{d}x$

9. $\int_1^3 6x^2\mathrm{d}x$　　**10.** $\int_1^2 5t^3\mathrm{d}t$

11. $\int_0^1 (y^2+y^4)\mathrm{d}y$　　**12.** $\int_4^9 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

13. $\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　**14.** $\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\mathrm{d}x$

15. $\int_0^1 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$　　**16.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{-0.2t}\mathrm{d}t$

17. $\int_0^1 \sin\theta\mathrm{d}\theta$　　**18.** $\int_0^{\pi/4} (\sin t+\cos t)\mathrm{d}t$

19. $\int_0^1 (6q^2+4)\mathrm{d}q$　　**20.** $\int_0^3 \mathrm{e}^{0.05t}\mathrm{d}t$

21. 运用换元, 将下列积分表示为有关 a 和 b 的常数与 $\int_a^b (1/w)\mathrm{d}w$ 的乘积, 然后求出积分.

(a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

利用换元积分法和基本定理, 求出习题 22~25 中的定积分.

22. $\int_0^2 x(x^2+1)^2\mathrm{d}x$ **23.** $\int_0^1 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

24. $\int_0^3 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ **25.** $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{t+1}}\mathrm{d}t$

26. 用定积分表示 $f(x)=6x^2+1$ 介于 $x=0$ 与 $x=2$ 间图形下方的面积. 利用基本定理求出定积分.

27. 利用基本定理求 $f(x)=x^2$ 介于 $x=1$ 与 $x=4$ 间图形下方的面积.

28. 利用基本定理求 $f(x)=x^2+1$ 在 $x=0$ 到 $x=10$ 的区间上的平均值. 在 $f(x)$ 图形上说明你的结果.

29. 利用微积分基本定理求 $f(x)=\mathrm{e}^{0.5x}$ 在 $x=0$ 到 $x=3$ 的区间上的平均值. 在 $f(x)$ 图形上说明这个平均值.

30. 求由 x 轴与 $y=x^3-x$ 的图形所围区域的精确面积.

31. 利用微积分基本定理求 $f(x)=1/(x+1)$ 介于 $x=0$ 与 $x=2$ 间图形下方的面积.

32. 设 $b>1$, 且 $f(x)=8x$ 介于 $x=1$ 与 $x=b$ 间图形下方的面积等于 192, 利用微积分基本定理确定 b 的值.

33. 设 $b>0$, 且 $f(x)=x^2$ 介于 $x=0$ 与 $x=b$ 间图形下方的面积等于 100, 利用微积分基本定理确定 b 的值.

34. 设 $b>1$, 且 $f(x)=4x$ 介于 $x=1$ 与 $x=b$ 间图形下方的面积等于 240, 利用微积分基本定理确定 b 的值.

35. 假设 t 是从 1990 年起的年份数, 以十亿人记的世界人口 P 的函数模型为 $P=5.3\mathrm{e}^{0.014t}$.

(a) 这个模型给出的 1990 年的世界人口是多少? 2000 年呢?

(b) 利用基本定理求 20 世纪 90 年代世界的平均人口.

36. 从一个破裂的油箱中, 油以 $r(t)=50\mathrm{e}^{-0.02t}$ 千升/分钟的速度往外泄漏.

(a) 当 $t=0$ 时, 油泄漏的速度是多少? $t=60$ 时呢?

(b) 在最初的 1 个小时内, 油泄漏了多少升?

37. (a) 画出反常积分 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 所表示区域面积的草图.

(b) 对给定的 $b=5,10,20$, 计算 $\int_0^b x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

(c) (a) 中给出的反常积分是收敛的, 利用 (b) 的结果估计它的值.

38. 在同一坐标系中, 画出 $y=1/x^2$ 与 $y=1/x^3$ 的图形. 你认为 $\int_1^\infty 1/x^2\mathrm{d}x$, $\int_1^\infty 1/x^3\mathrm{d}x$ 哪一个更大些? 为什么?

39. 本题中将会证明, 下面的反常积分收敛到 1.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

(a) 利用基本定理求 $\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, 结果包含 b.

(b) 现在, 计算 $b\to\infty$ 时的极限. 对这个反常积分, 极限结果说明了什么?

40. 判断反常积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t$ 是否收敛, 如果收敛, 用下面的方法, 指出收敛的值.

(a) 对给定的 $b=3,5,7,10$, 求出 $\int_0^b \mathrm{e}^{-2t}dt$. 你观察到什么? 对这个反常积分的收敛性作出推测.

(b) 利用基本定理求 $\int_0^b \mathrm{e}^{-2t}dt$, 结果包含 b.

(c) 计算 $b\to\infty$ 时的极限. 你的结果证实了推测吗?

41. (a) 对给定的 $b=10,50,100,200$, 求出 $\int_0^b x\mathrm{e}^{-x/10}\mathrm{d}x$.

(b) 估计 $\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x/10}\mathrm{d}x$ 的值, 假设它是收敛的.

42. 假设流感流行期间, 人群的患病速度 r 可以近似表示为

$$r=1000t\mathrm{e}^{-0.5t}.$$

其中 r 的计量单位是人数/天, t 是从流感流行起的天数.

(a) 用一个反常积分表示患病的总人数.

(b) 在 r 的图形中, 用对应的面积来表示 (a) 中的反常积分.

43. 研究反常积分

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(a) 对给定的 $b=100\ 100\ 010\ 000$, 利用计算器或电脑, 求 $\int_1^b 1/(\sqrt{x})\mathrm{d}x$. 你观察到什么?

(b) 利用基本定理求 $\int_1^b 1/(\sqrt{x})\mathrm{d}x$, 结果包含 b.

(c) 现在, 计算 $b\to\infty$ 时的极限. 对这个反常积分, 极限结果说明了什么?

44. 求由 x 轴与曲线 $y=x^2(1-x)^2$ 所围区域的精确面积.

45. 求由曲线 $y=x^3(1-x)$ 的下方与 x 轴的上方所围区域的精确面积.

46. 一个岛具有承载 1 百万只兔子的能力. (也就是说, 这个岛可以供养不超过 1 百万只兔子.) 当 $t=1$ 天时, 兔子数量是两只, 并且以 $r(t)$ 的速度增长直到达到承载极限, 其中 r 的单位是千只/天. 针对下面给出的 $r(t)$ 的每个表达式, 试问承载极限是否能够达到? 解释你的结果.

(a) $r(t)=1/t^2$ (b) $r(t)=t$ (c) $r(t)=1/\sqrt{t}$

47. 一辆汽车以速度 v 行驶, 在时刻 t 时的速度为

$$v(t)=\frac{60}{50^t}\quad 公里/小时$$

其中 t 的单位是小时.

(a) 汽车会停下来吗?

(b) 给定 $t\geqslant 0$, 用一个定积分表示汽车行驶的总距离.

(c) 你认为对给定的 $t\geqslant 0$, 汽车行驶的总距离是有限的吗? 如果你是这样认为的, 估计

这个总距离的值.

48. (a) 在 20 世纪 70 年代期间, ACME 装饰物以 $R = R_0 e^{0.15t}$ 套/年的连续速度销售, 其中 t 是从 1970 年 1 月 1 日起的年份数. 假设在整个十年的第一天, 他们的销售速度是 1000 套/年, 整个十年他们买出了多少套? 如果 1970 年 1 月 1 日的销售速度是 150 000 000 套/年, 他们买出了多少套?

(b) 在上面的第一种情况下 (1970 年 1 月 1 日的销售速度是 1000 套/年), 他们买完整个十年销售量的一半用了多长时间? 在上面的第二种情况下 (1970 年 1 月 1 日的销售速度是 150 000 000 套/年), 什么时间他们买完整个十年销售量的一半?

(c) 在 1980 年, ACME 开始了广告战. 他们宣称, 有半数他们过去十年间卖出的装饰物现在仍然在使用. 基于你求得的 (b) 的结果, 为了证实这一言论, 一套装饰物必须使用多长时间?

7.4　从图形上和数值上分析原函数

在这一节中, 当 F 的变化率 F' 和 F 的一个值 $F(a)$ 已知时, 我们将利用基本定理去逼似 F 的值.

例 1　假设 $F'(t) = (1.8)^t$ 且 $F(0) = 2$, 求 $F(b)$ 的值, 这里 $b = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 1.0$.

解　将基本定理应用到 $F'(t) = (1.8)^t$ 且 $a = 0$, 可以得到 $F(b)$ 的值. 因为

$$F(b) - F(0) = \int_0^b F'(t)\mathrm{d}t = \int_0^b (1.8)^t \mathrm{d}t$$

且 $F(0) = 2$, 我们有

$$F(b) = 2 + \int_0^b (1.8)^t \mathrm{d}t$$

对每个 b, 可以使用计算器或电脑估计定积分 $\int_0^b (1.8)^t \mathrm{d}t$. 例如, 当 $b = 0.1$ 时, 我们求得 $\int_0^b (1.8)^t \mathrm{d}t = 0.103$, 于是 $F(0.1) = 2.103$. 反复使用这种方法可以得到表 7-1 中的所有值.

表 7-1　F 的近似值

b	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$F(b)$	2	2.103	2.212	2.328	2.451	2.581	2.719	2.866	3.021	3.186	3.361

从表中观察, $b = 0$ 到 $b = 1$ 间函数 $F(b)$ 是递增的. 这是因为当 t 介于 0 和 1 间时, 导函数 $F'(t) = (1.8)^t$ 是大于 0 的. □

例 2　图 7-3 是某个函数 F 的导函数 F' 的图形, 假设 $F(20) = 150$, 估计函数 F 取得的最大值.

解　我们知道当 $x<50$ 时, $F(x)$ 是单调递增的, 因为当 $x<50$ 时, F 的导函数大于 0. 类似地, 当 $x>50$ 时, $F(x)$ 是单调递减的, 因为当 $x>50$ 时, $F'(x)$ 小于 0. 因此, F 的图形在 $x=50$ 之前是上升的, 然后开始下降. 于是 F 的图形的最高点在 $x=50$ 处, F 取得的最大值是 $F(50)$. 由基本定理:

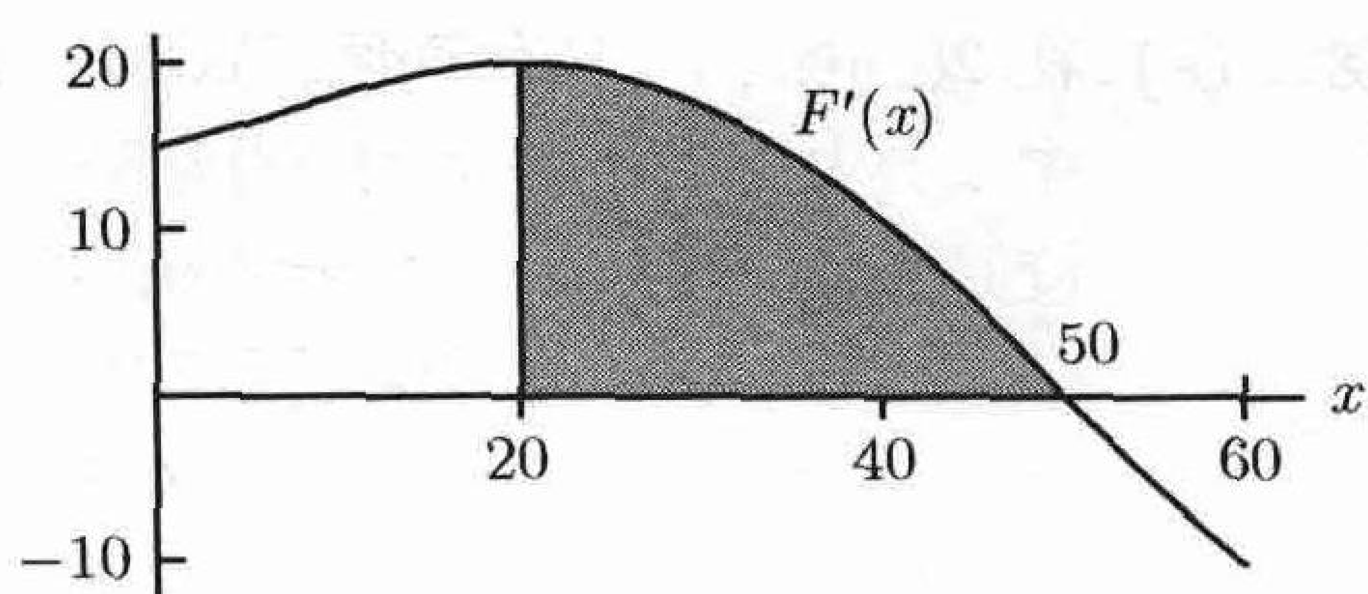


图 7-3　某个函数 F 的导函数 F' 的图形

$$F(50)-F(20)=\int_{20}^{50}F'(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $F(20)=150$, 我们有

$$F(50)=F(20)+\int_{20}^{50}F'(x)\mathrm{d}x=150+\int_{20}^{50}F'(x)\mathrm{d}x.$$

这里, 定积分是 F' 的图形下方阴影区域的面积, 这个阴影区域可以粗略地看作一个底为 30, 高为 20 的三角形. 因此, 阴影区域的面积大约是 300, F 取得的最大值是 $F(50)\approx 150+300=450$. □

已知导函数的图形, 画出函数图形

假设已知 f' 的图形, 我们需要画出 f 的草图. 我们知道当 f' 大于 0 时, f 是单调递增的, 当 f' 小于 0 时, f 是单调递减的. 如果想要知道 f 上升或者下降的程度, 我们可以计算一个定积分.

例 3　图 7-4 是人体内肾上腺素浓度的变化率, 单位是微克每毫升每分钟. 画出作为时间函数的肾上腺素浓度的草图, 其中浓度的单位是微克每毫升, 时间的单位是分钟.

解　由于没有给出最初的药物浓度, 我们可以从垂直轴正向上的任意一点开始作图. 当 $t<5$ 时, 变化率是负的, 当 $t>5$ 时, 变化率是正的, 于是肾上腺素浓度在 $t=5$ 之前是下降的, 然后上升. 由于 t 轴下方区域的面积大于 t 轴上方区域的面积,

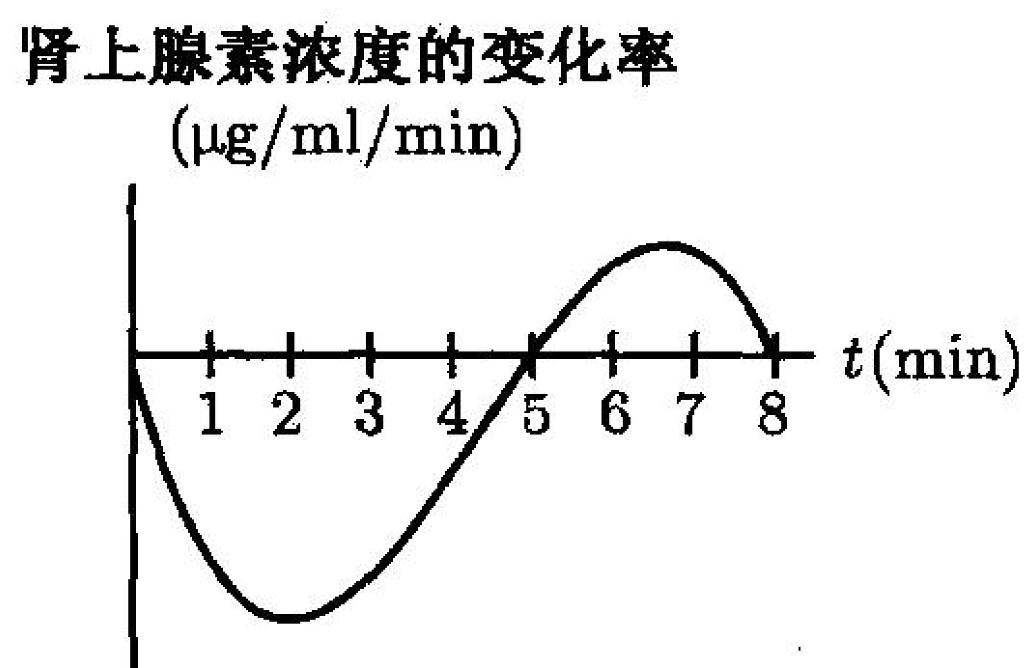


图 7-4　肾上腺素浓度的变化率

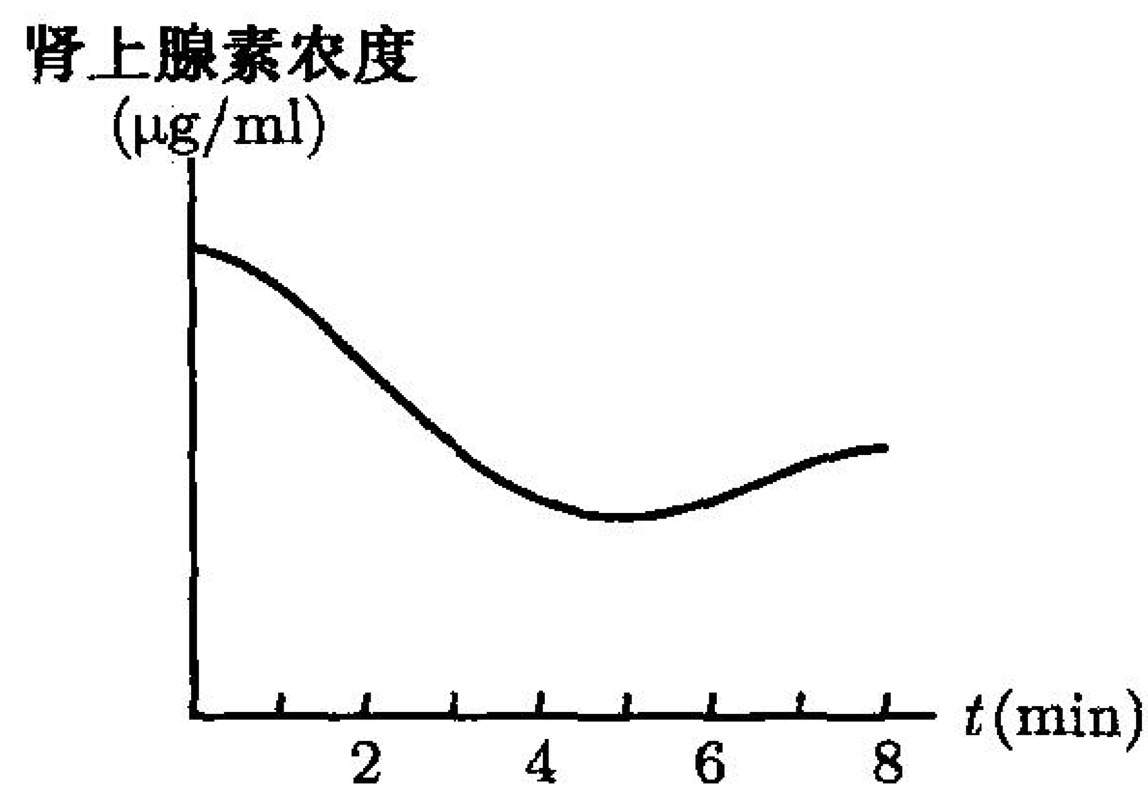


图 7-5　肾上腺素浓度

□

肾上腺素浓度下降的程度会比上升的多，这样 $t=8$ 时的浓度要比 $t=0$ 时的浓度小. 由于浓度的变化率在 $t=0,5$ 和 8 时均为 0, 在这些点上浓度的图形是水平的. 如图 7-5 所示.

例 4 图 7-6 显示的是函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 及一些区域的面积, 假设 $f(0)=10$, 画出 $f(x)$ 的草图. 给出局部极大值与极小值的坐标.

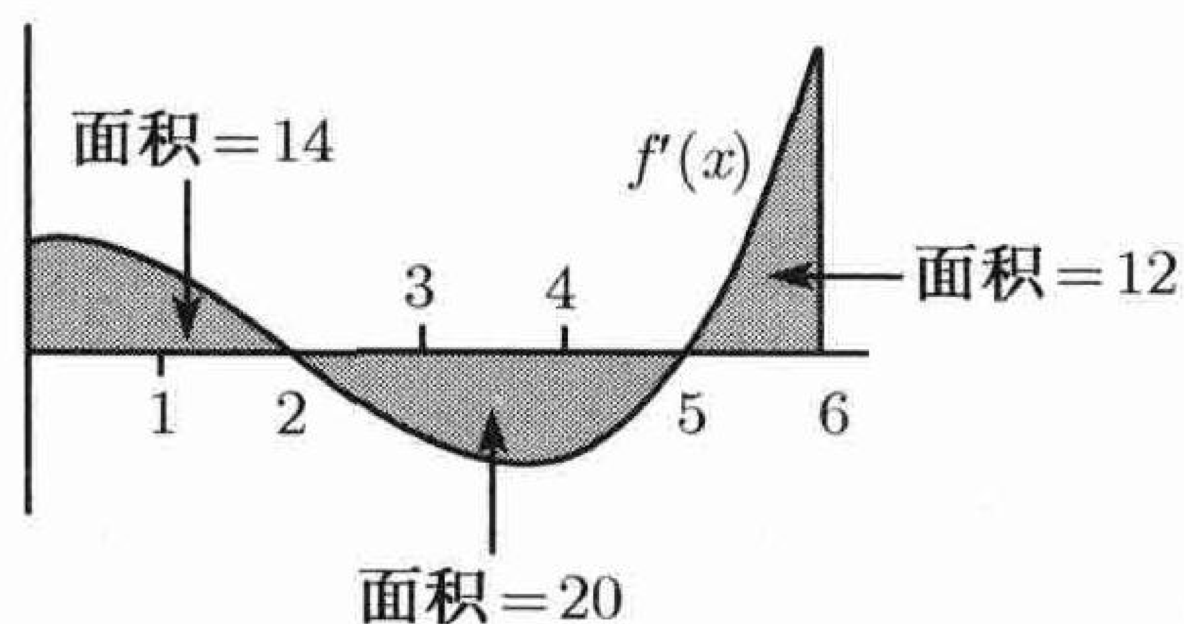


图 7-6 导函数 f' 的图形

解 图 7-6 表明在 0 与 2 之间, 导数 f' 是正的, 在 2 与 5 之间, 导数 f' 是负的, 在 5 与 6 之间, 导数 f' 是正的. 因此, 函数 f 在 0 与 2 之间上升, 在 2 与 5 之间下降, 在 5 与 6 之间上升. (参见图 7-7.) 在 $x=2$ 处有一个局部最大值, 在 $x=5$ 处有一个局部最小值.

注意我们不用知道任何面积就可以画出 f 的大致草图. 这些面积常用来使得作图更为精细. 已知 $f(0)=10$, 我们在图 7-8 中 f 的图形上描上点 (0,10). 基本定理及图 7-6 表明

$$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)\mathrm{d}x=14.$$

因此, f 在 $x=0$ 与 $x=2$ 之间的总变化是 14. 由于 $f(0)=10$, 我们有

$$f(2)=10+14=24.$$

点 (2,24) 出现在 f 的图形上, 参见图 7-8.

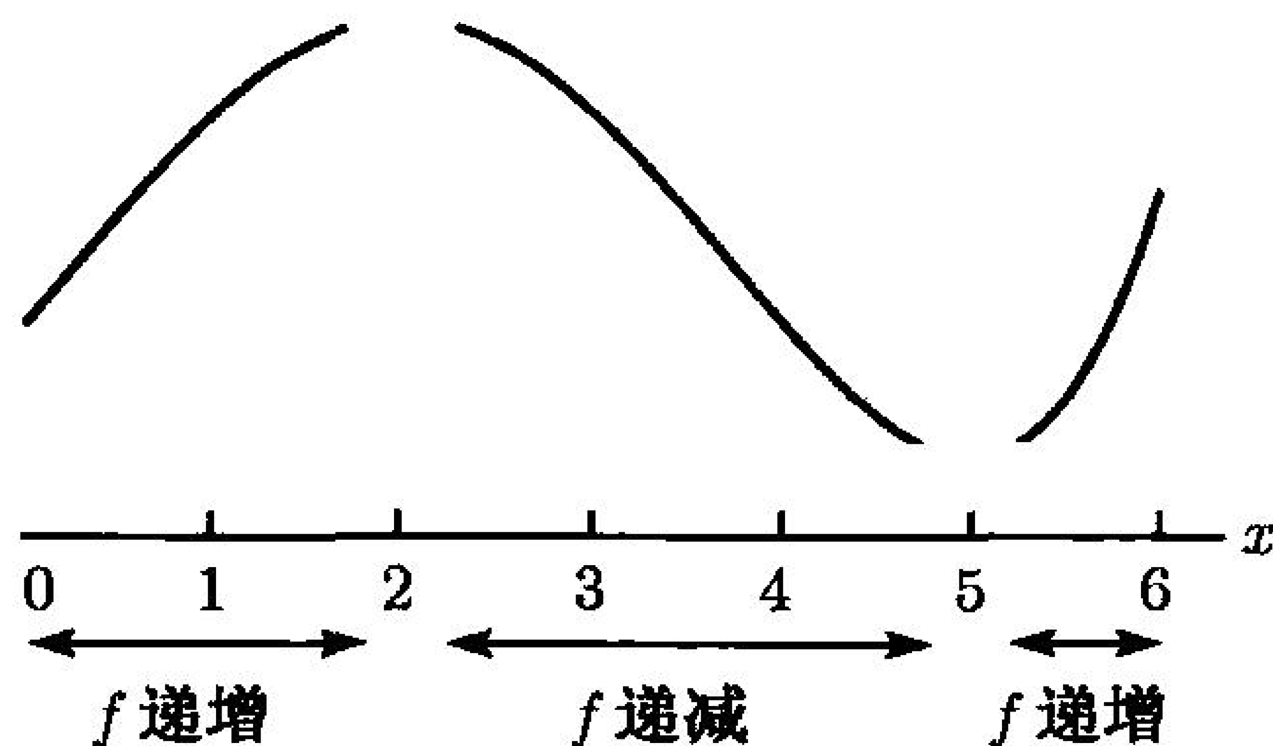


图 7-7 f 的形状

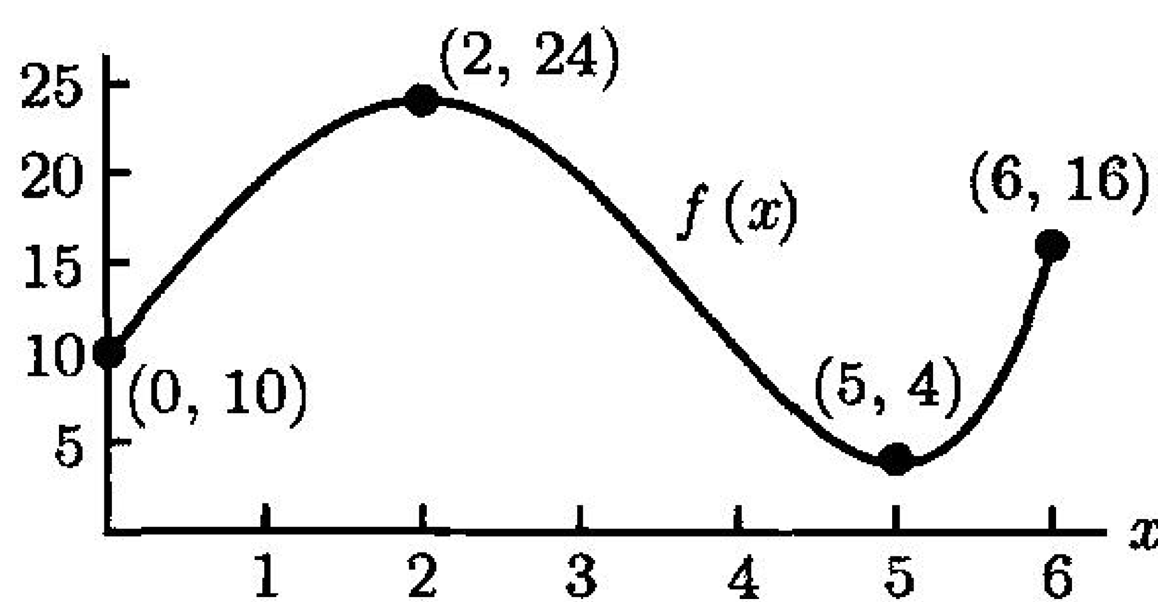


图 7-8 f 的图形

图 7-6 表明在 $x=2$ 与 $x=5$ 间的面积是 20. 由于这个面积整个处于 x 轴下方, 由基本定理得到

$$f(5)-f(2)=\int_2^5 f'(x)\mathrm{d}x=-20.$$

在 $x=2$ 与 $x=5$ 间 f 的总变化是 -20. 由于 $f(2)=24$, 则有

$$f(5) = 24 - 20 = 4.$$

这样, 点 (5,4) 出现在 f 的图形上. 最后,

$$f(6) = f(5) + \int_5^6 f'(x)\mathrm{d}x = 4 + 12 = 16,$$

于是 (6,16) 出现在 f 的图形上. □

本节中我们看到了如何以形式

$$F(b) = F(0) + \int_0^b F'(t)\mathrm{d}t.$$

利用微积分基本定理, 来分析原函数. 在 8.2 节中我们将看到, 利用第 5 章中介绍的第二基本定理如何来构造原函数. 第二基本定理可以叙述为: 如果在一个区间上 f 是连续函数, a 是区间内的任何一个数, 则如下定义的函数 F,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是 f 的一个原函数; 也就是说, $F' = f$.

习题

1. 已知当 $t = 0$ 时, $P = 2$, 利用图 7-9, 求当 $t = 1, 2, 3, 4$ 和 5 时 P 的值.
2. 图 7-10 给出了 f 的图形, 假设 $F' = f$ 且 $F(0) = 0$, 求当 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 时 $F(b)$ 的值.

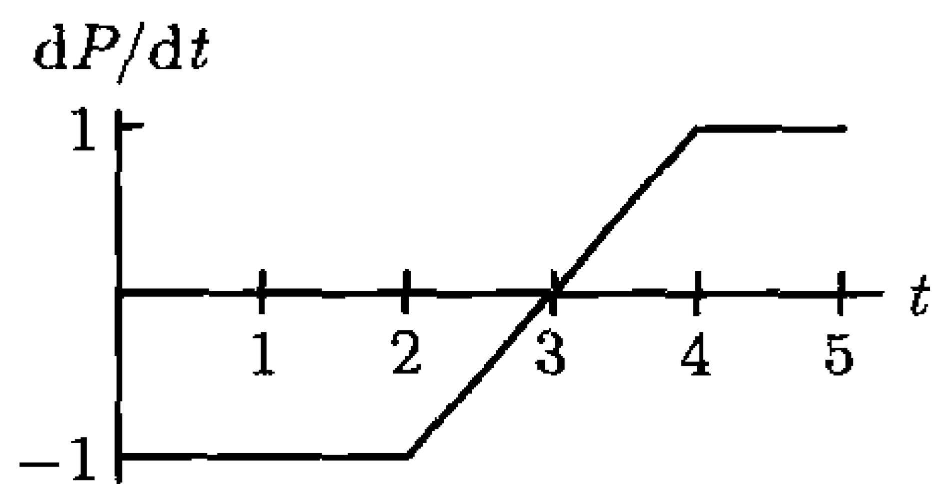


图　7-9

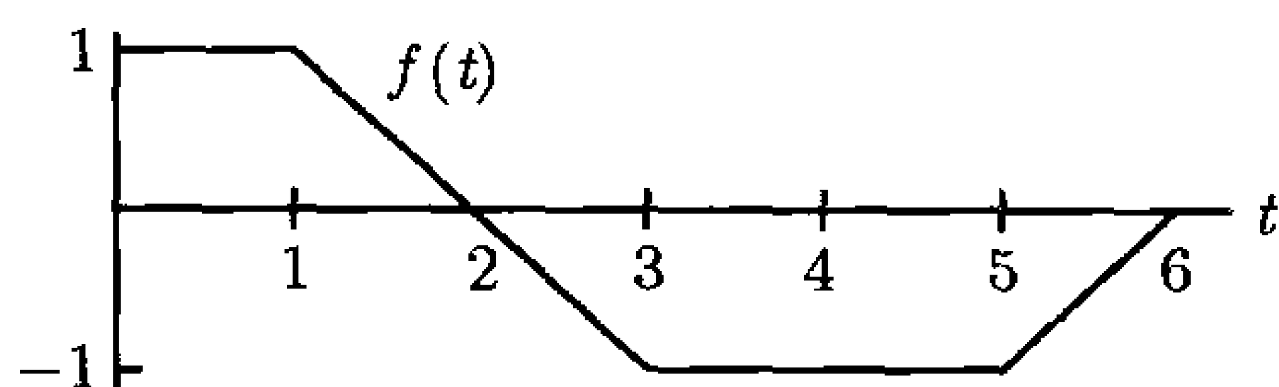


图　7-10

3. 图 7-11 给出了 g 的导数 g' 的图形, 假设 $g(0) = 0$, 画出 g 的图形, 给出它的所有局部极大值和极小值的坐标 (x, y).
4. (a) 利用图 7-12, 估计 $\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

   (b) 假设 F 是同一函数 f 的一个原函数, 且 $F(0) = 25$, 估计 $F(7)$.

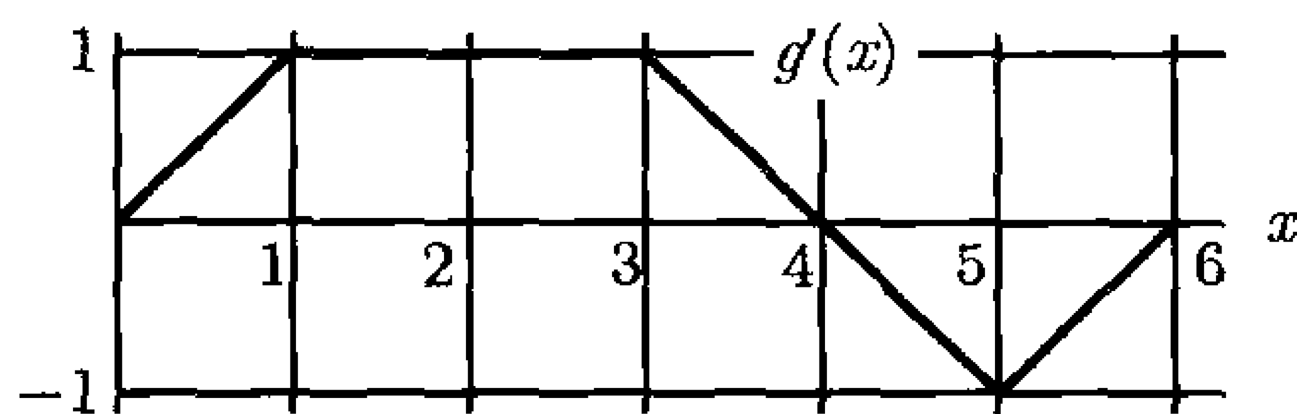


图　7-11

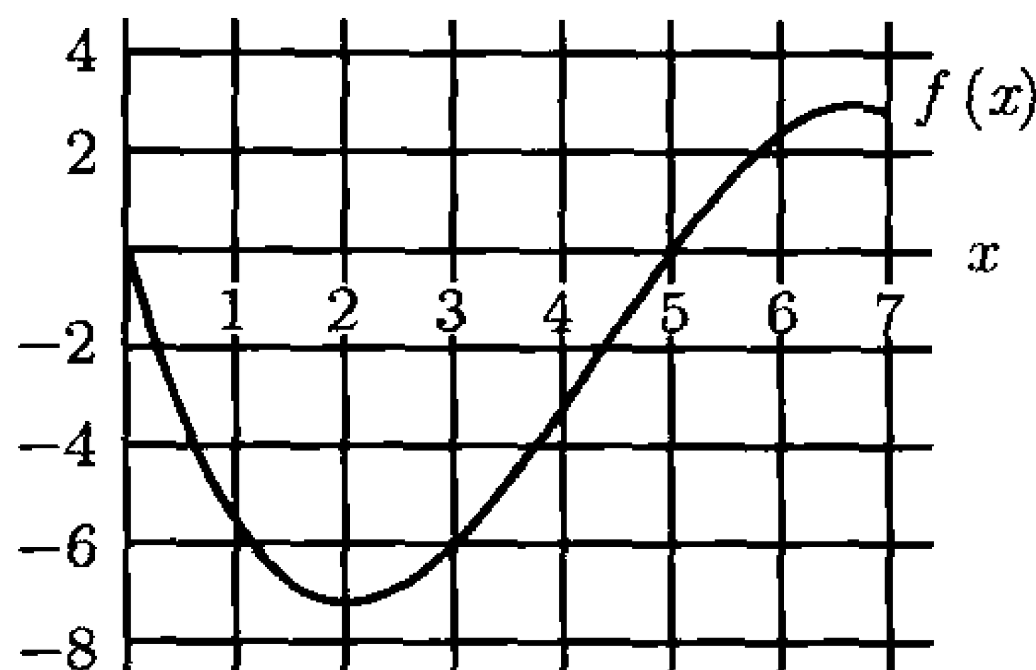
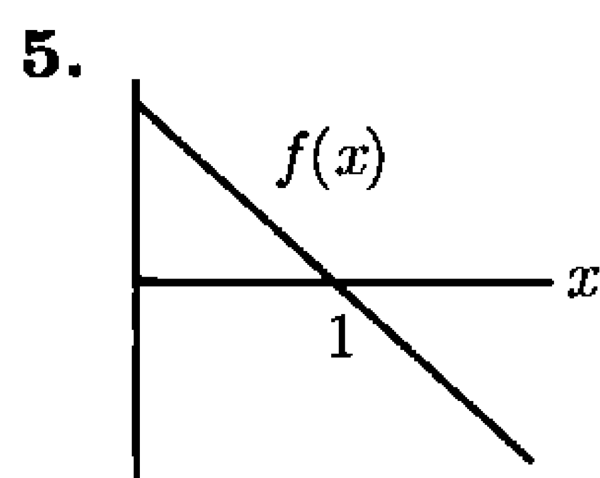


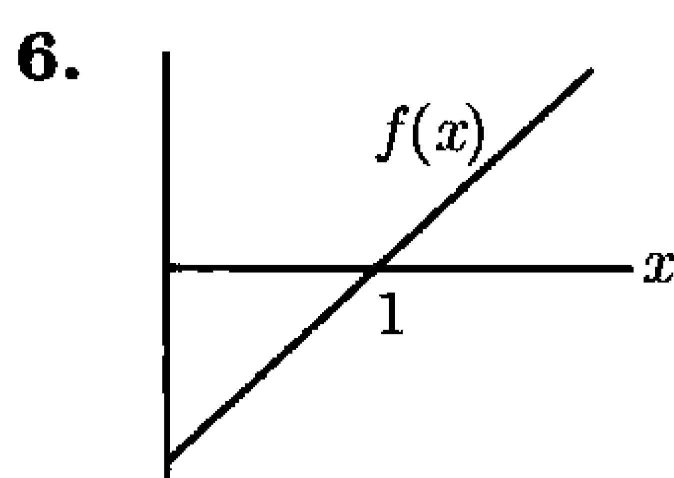
图　7-12

对习题 5~8, 画出满足 $F' = f$ 条件的两个 F 的草图, 一个使得 $F(0) = 0$, 另一个使得 $F(0) = 1$.

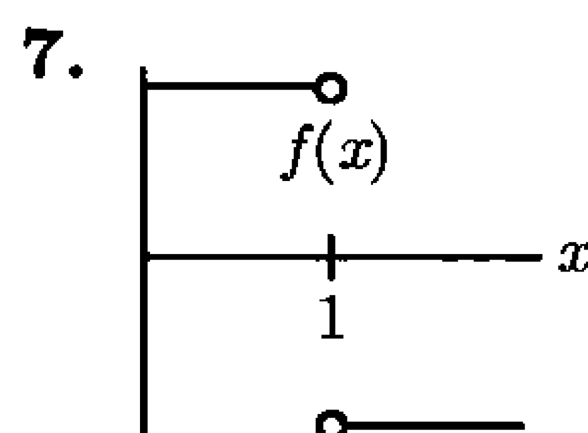
5.



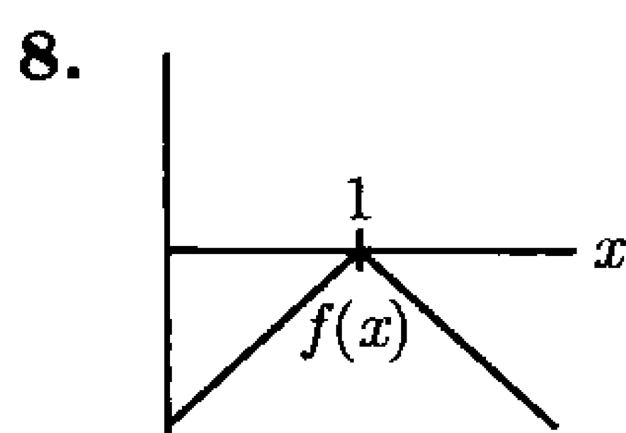
6.



7.



8.

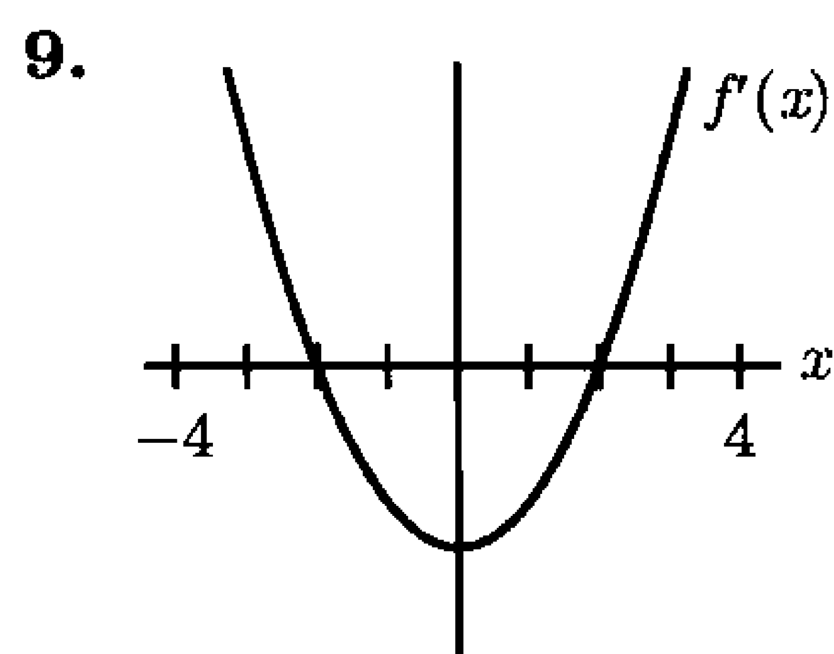


习题 9~12 中均给出了 f 的导数 f' 的图形.

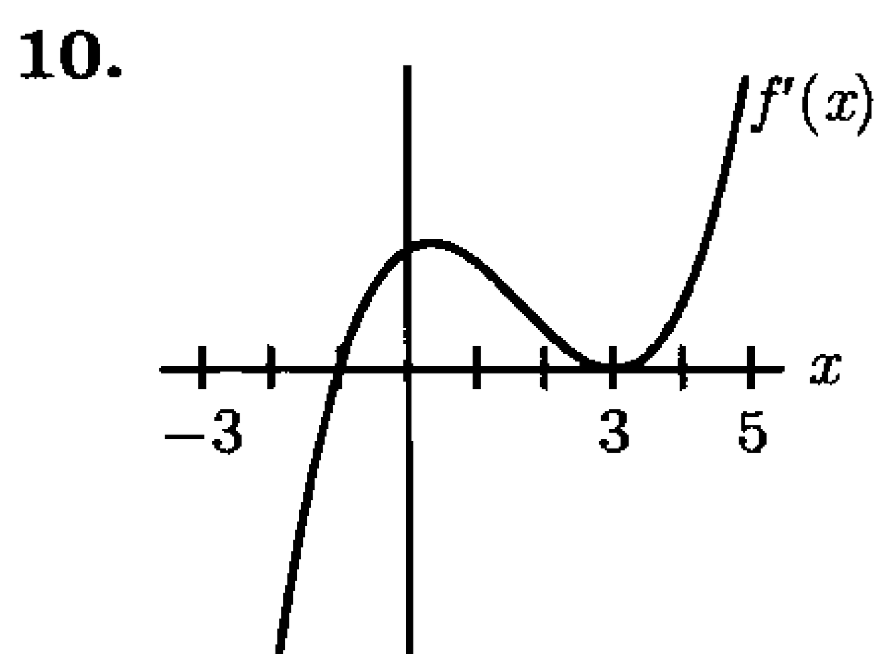
(a) 何处 f 单调递增, 何处 f 单调递减? f 取得局部最大值和局部最小值时 x 的坐标是什么?

(b) 画出 f 的可能图形. (不必标出垂直轴上的刻度.)

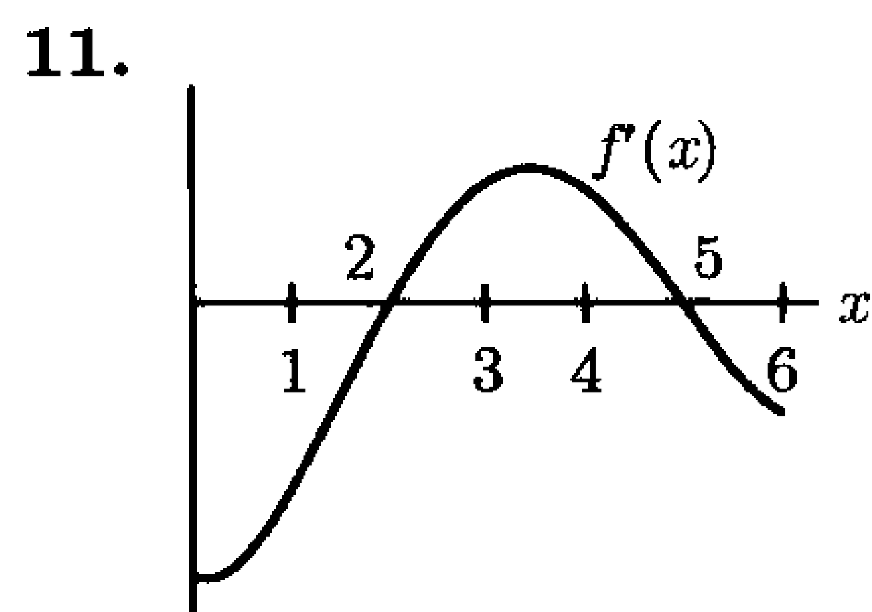
9.



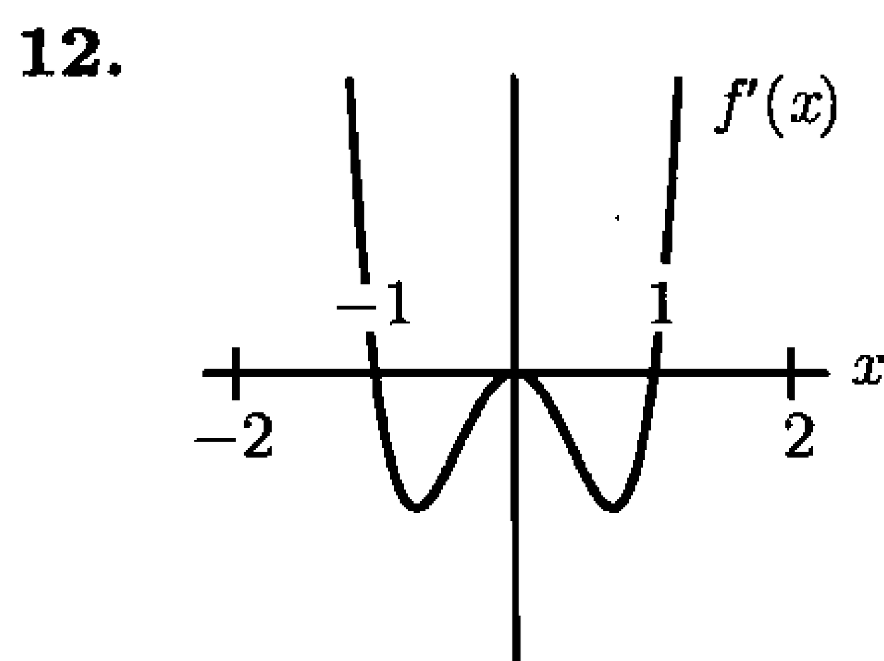
10.



11.



12.



13. 图 7-13 显示的是一片叶子进行光合作用的速度, 叶子的生长速度与光合作用的速度近似成比例. 画出 100 天内叶子的尺寸随时间变化的草图.

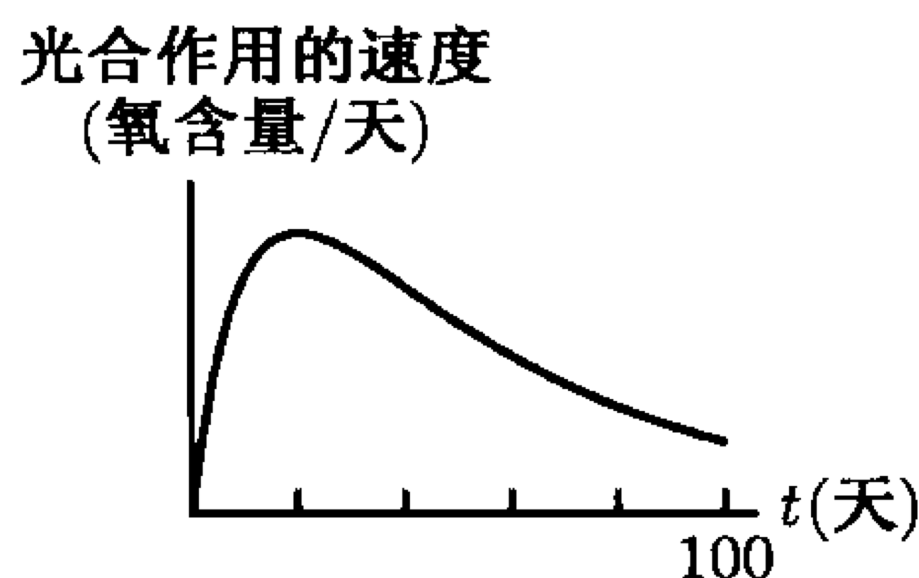


图 7-13

14. 泌尿科医师是专门从事膀胱健康工作的内科医生. 在一种常规检查中, 泌尿科医师利用一种可以输出两张图的仪器来监测膀胱的排空过程. 其中的一张图中, 记录的是流动速度 (单位: ml/s), 它是时间 (单位: s) 的函数. 另一张图中, 记录的是从膀胱中的排出量 (单位: ml), 它也是时间 (单位: s) 的函数. 参见图 7-14.

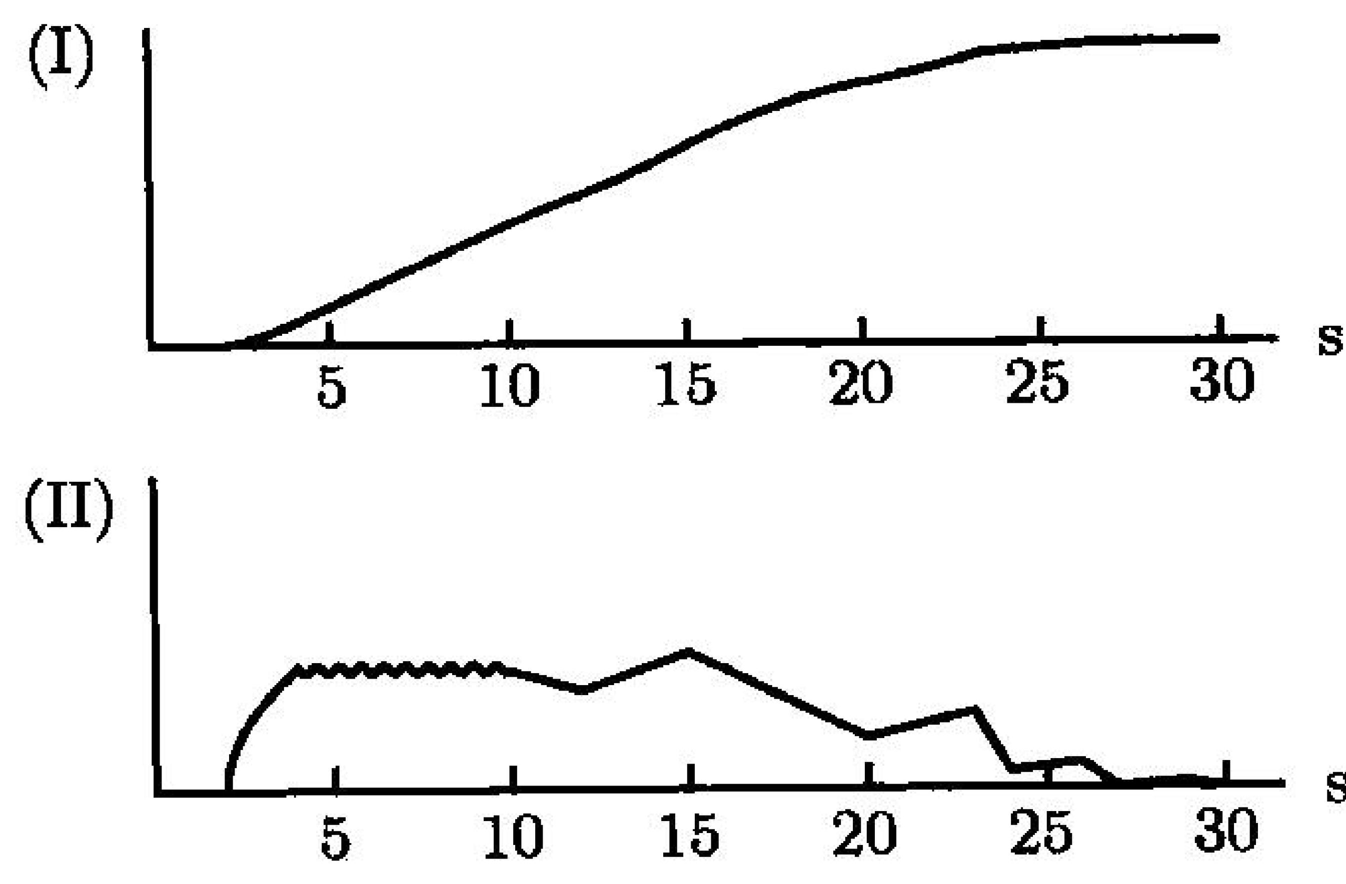


图 7-14

(a) 哪一张图是流动速度图? 哪一张图是排出量图?

(b) 两张图中, 哪一张图是另一张图中的函数的原函数图?

15. 图 7-15 给出了 F 的导数 F' 的图形. 设 $F(0)=0$, 在 $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ 和 $F(4)$ 这四个值中, 哪一个最大? 哪一个最小? 这些值中有多少个是负数?

16. 图 7-16 给出了导数 $F'(x)$ 的图形. 设 $F(0)=5$, 求 $F(1)$, $F(3)$ 和 $F(4)$ 的值.

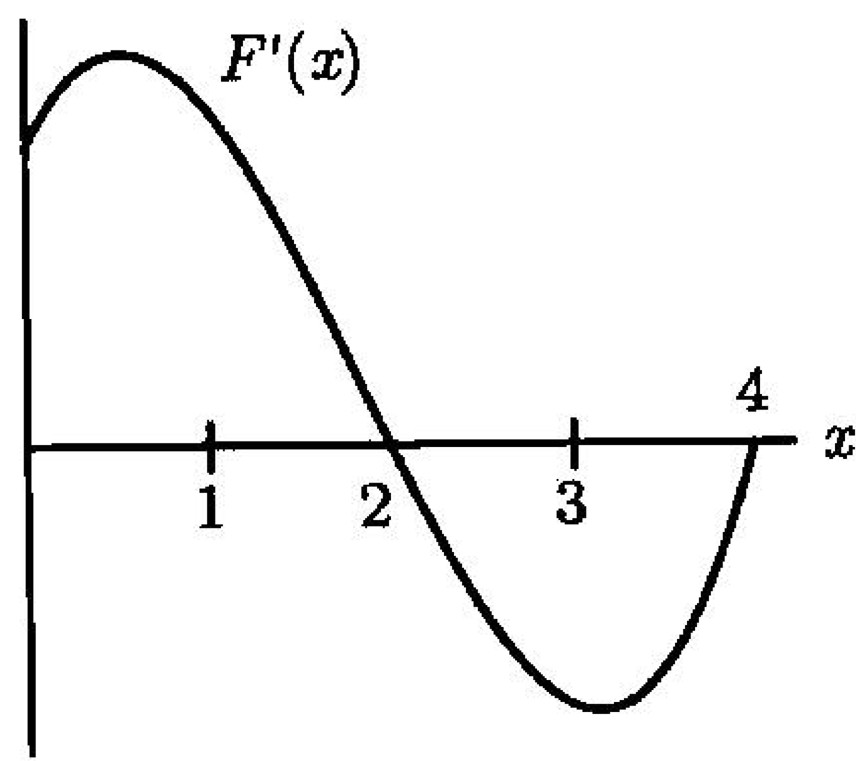


图 7-15

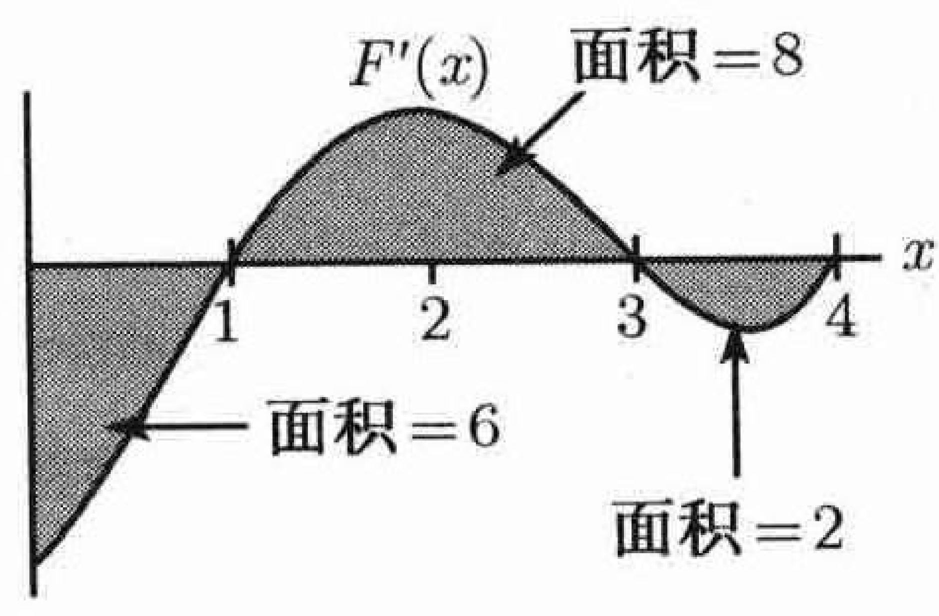


图 7-16

17. 利用图 7-17, 画出 $g(t)$ 的一个满足 $G(0)=5$ 条件的原函数 $G(t)$ 的草图, 标出 $G(t)$ 的每个附有坐标的临界点.

18. 图 7-18 给出了导数 F' 的图形. 设 $F(0)=14$, 画出 F 的图形. 给出它的所有达到局部极大值和极小值时的坐标 (x,y).

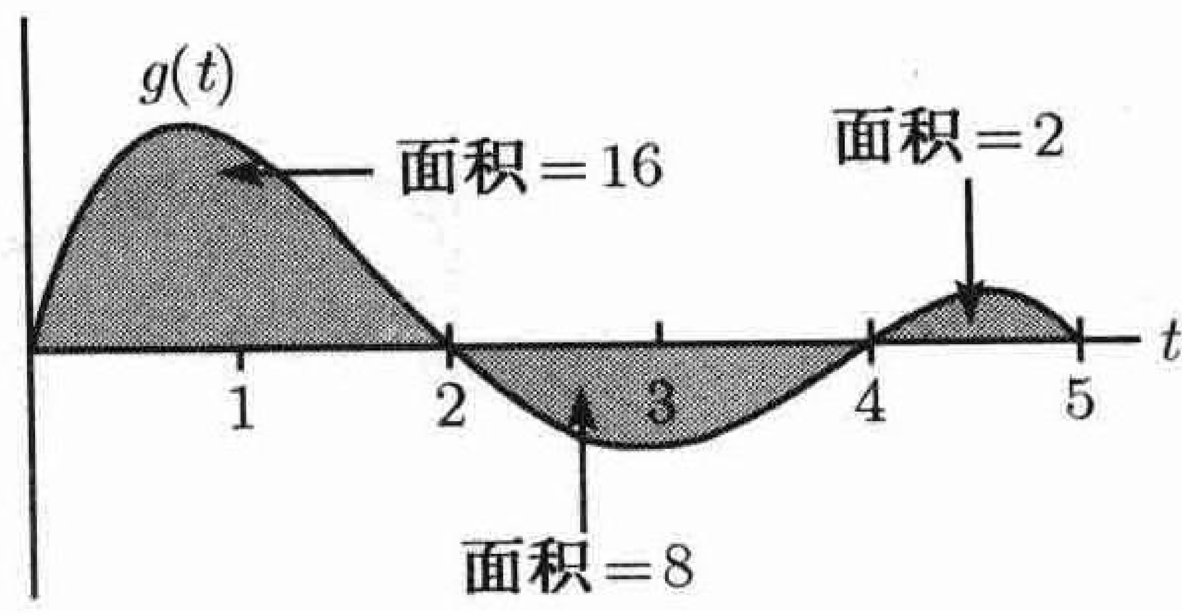


图 7-17

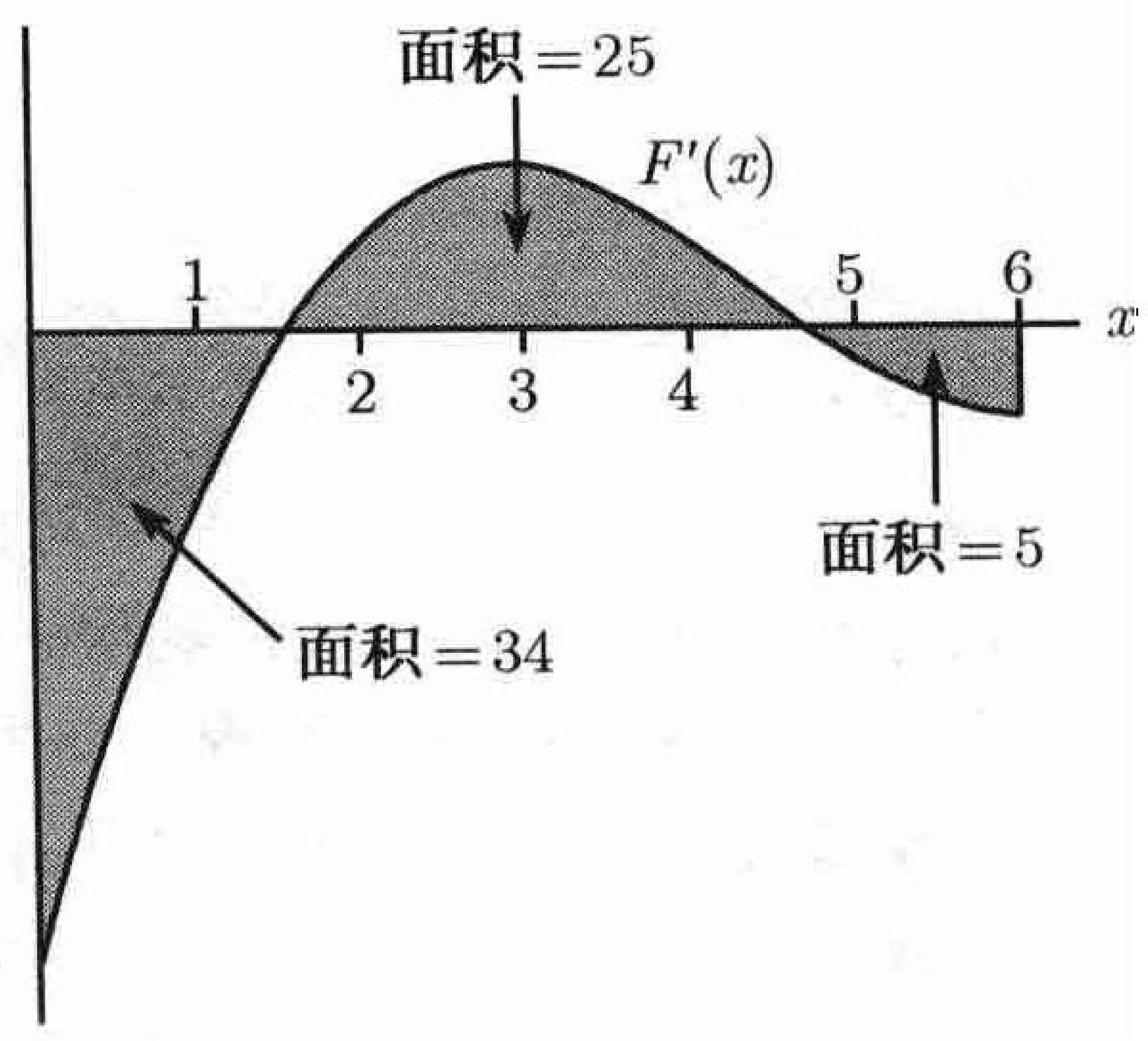


图 7-18

19. 图 7-19 给出了导数 $F'(t)$ 的图形. 设 $F(0)=3$, 求 $F(2)$, $F(5)$, $F(6)$ 的值. 画出 $F(t)$ 的图形.

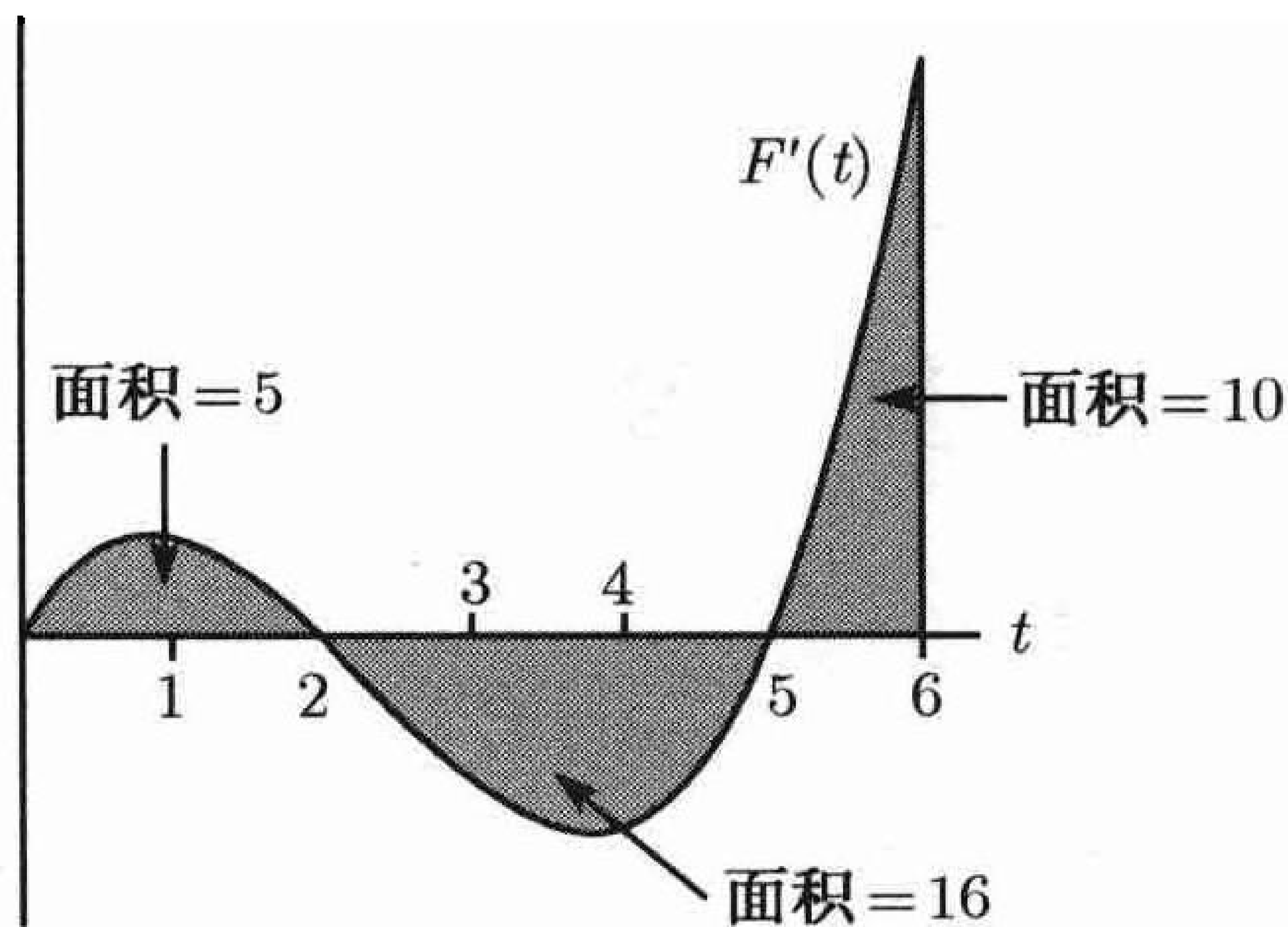
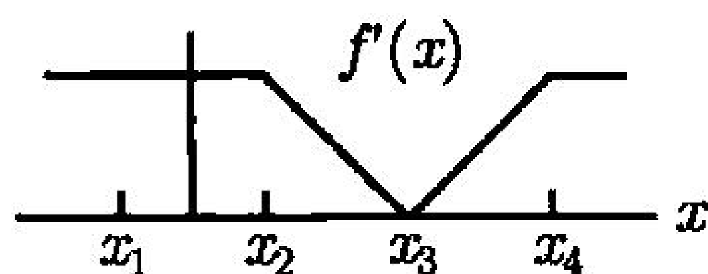


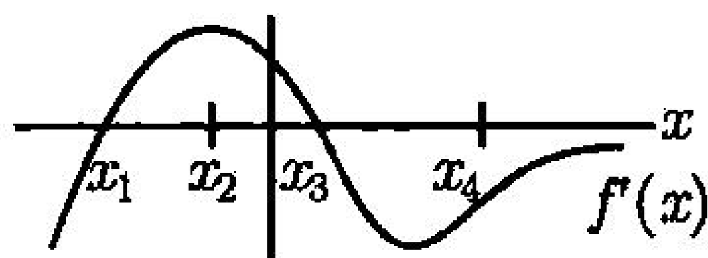
图 7-19

习题 20 和习题 21 中均给出了 $f'(x)$ 的图形, 画出 $f(x)$ 的图形, 在图上标记点 $x_1, \cdots, x_4$, 并标出局部极大值, 局部极小值和拐点.

20.



21.



习题 22 和习题 23 与图 7-20 给出的 f' 的图形有关.

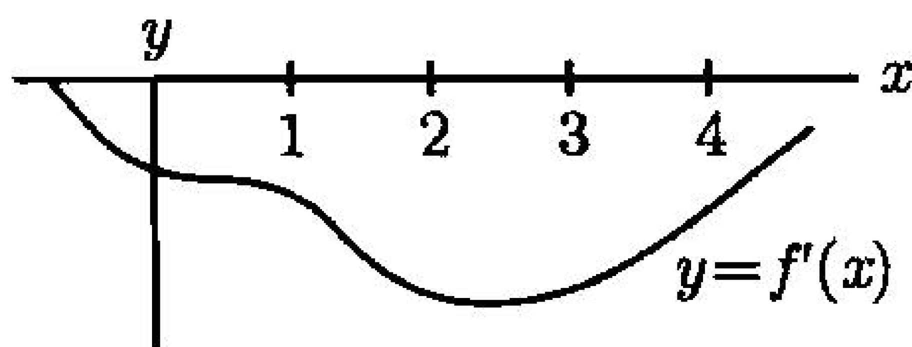


图 7-20 注意: 这是 f' 的图形, 不是 f 的图形

22. $f(0)$ 与 $f(1)$, 哪一个值大些?

23. 按递增顺序为下值排序:

$$\frac{f(4)-f(2)}{2}, \quad f(3)-f(2), \quad f(4)-f(3).$$

针对习题 24~27, 在图 7-21 中标出下列量.

24. 一个长度, 表示 $f(b)-f(a)$.

25. 一个斜率, 表示 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

26. 一个面积, 表示 $F(b)-F(a)$, 这里 $F'=f$.

27. 一个长度, 近似表示 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$, 这里 $F'=f$.

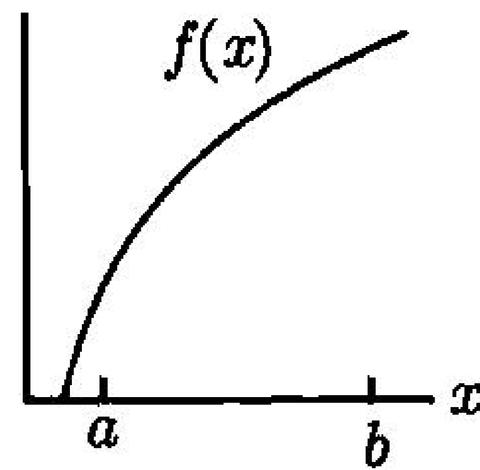


图 7-21

本章概要

- **计算原函数**

  幂函数和多项式函数, e^{kx}, $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ 的原函数, 换元积分法

- 利用原函数, 从解析上计算定积分
- 利用定积分, 从数值上和图形上计算原函数
- 反常积分

复 习 题

对习题 1~10, 分别求出一个原函数.

1. $k(x) = 10 + 8x^3$

2. $p(x) = x^2 - 6x + 17$

3. $f(x) = x + x^5 + x^{-5}$

4. $f(z) = e^z + 3$

5. $p(r) = 2\pi r$

6. $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

7. $g(z) = \frac{1}{z^3}$

8. $h(t) = \cos t$

9. $g(x) = (x+1)^3$

10. $f(x) = (2x+1)^3$

对习题 11~22, 求不定积分.

11. $\int 9x^2 dx$

12. $\int (5x+7) dx$

13. $\int (x+1)^2 dx$

14. $\int (e^x + 5) dx$

15. $\int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t^2}\right) dt$

16. $\int \left(\frac{x+1}{x}\right) dx$

17. $\int (8t+3) dt$

18. $\int \left(1 + \frac{1}{p}\right) dp$

19. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

20. $\int (3\cos x - 7\sin x) dx$

21. $\int \left(\frac{2}{x} + \pi \sin x\right) dx$

22. $\int (2e^x - 8\cos x) dx$

对习题 23~28, 利用基本定理, 求定积分.

23. $\int_0^2 (3t^2 + 4t + 3) dt$

24. $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{r^3} dr$

25. $\int_{-1}^{1} \cos t dt$

26. $\int_1^2 \frac{1}{2t} dt$

27. $\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt$

28. $\int_2^5 (x^3 - \pi x^2) dx$

对习题 29~31, 分别求一个原函数 $F(x)$, 满足 $F'(x) = f(x)$ 且 $F(0) = 0$. $F(x)$ 是否唯一?

29. $f(x) = 2x$ **30.** $f(x) = \frac{1}{4}x$ **31.** $f(x) = \sin x$

对习题 32~41, 利用换元求积分.

32. $\int 3x^2(x^3+1)^4 dx$

33. $\int 2qe^{q^2+1} dq$

34. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

35. $\int \frac{1}{(3x+1)^2} dx$

36. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$

37. $\int (5x-7)^{10}\mathrm{d}x$

38. $\int 100\mathrm{e}^{-0.2t}\mathrm{d}t$

39. $\int x\sqrt{3x^2+4}\mathrm{d}x$

40. $\int x\sin(4x^2)\mathrm{d}x$

41. $\int 12x^2\cos(x^3)\mathrm{d}x$

42. 求 $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ 的图形介于 $x=0$ 与 $x=2$ 间下方区域的精确面积.

43. 假设 t 的单位是年, $t=0$ 对应于 2000 年 1 月 1 日, 世界范围的石油消耗量 r, 可用函数模型表示为

$$r=155\mathrm{e}^{0.015t},$$

其中 r 的单位是 10^{15} 百万英热单位/年.

(a) 写出一个定积分, 表示从 2000 年的第一天, 到 2005 年的第一天, 这一时期的石油消耗量.

(b) 利用微积分基本定理求出这个定积分, 并给出单位.

44. 图 7-22 给出了导数 $F'(t)$ 的图形. 设 $F(0)=5$, 计算当 $t=1,2,3,4,5$ 时, $F(t)$ 的值.

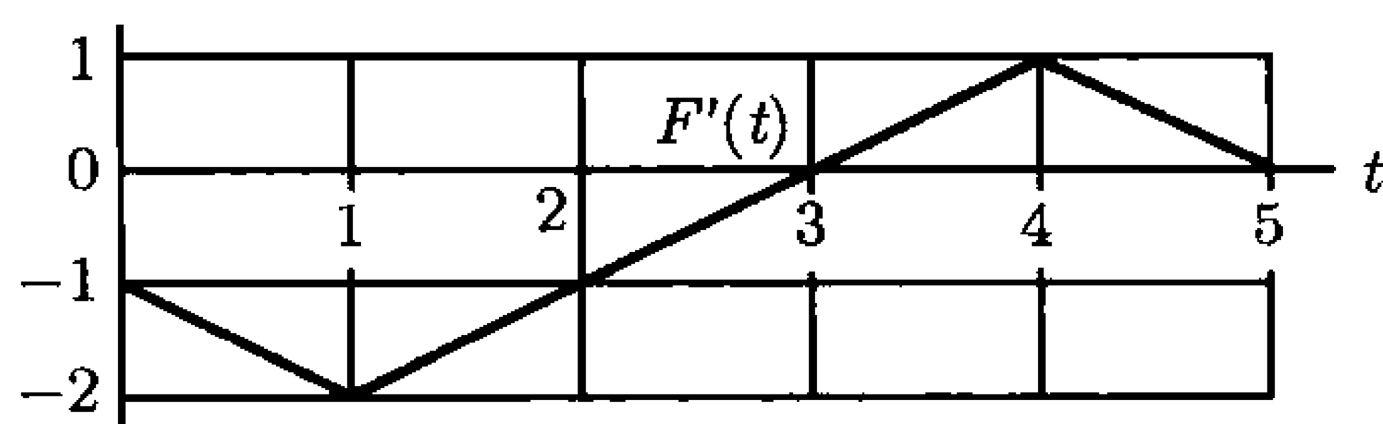


图 7-22

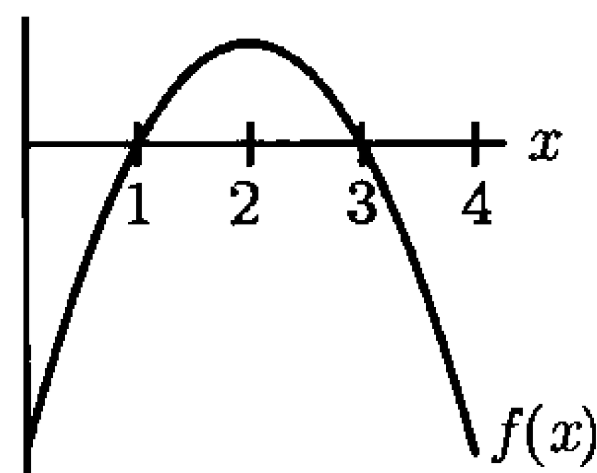
习题 45 和习题 46 中均给出了 f 的图形, 假设 $F'(x)=f(x)$.

(a) 哪些点是 $F(x)$ 的临界点?

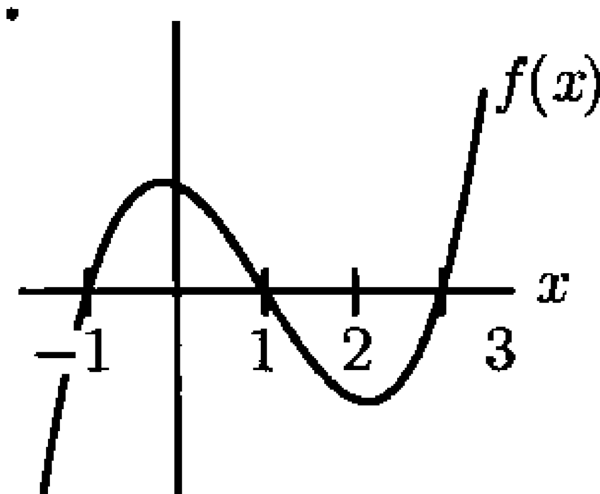
(b) 哪些临界点是局部最大值, 哪些点是局部最小值, 哪些点既不是局部最大值也不是局部最小值?

(c) 画出 $F(x)$ 的可能图形.

45.



46.



47. 已知 $F(2)=3$, 利用图 7-23 画出 $F(x)$ 的草图, 在图上至少标出四个点的值.

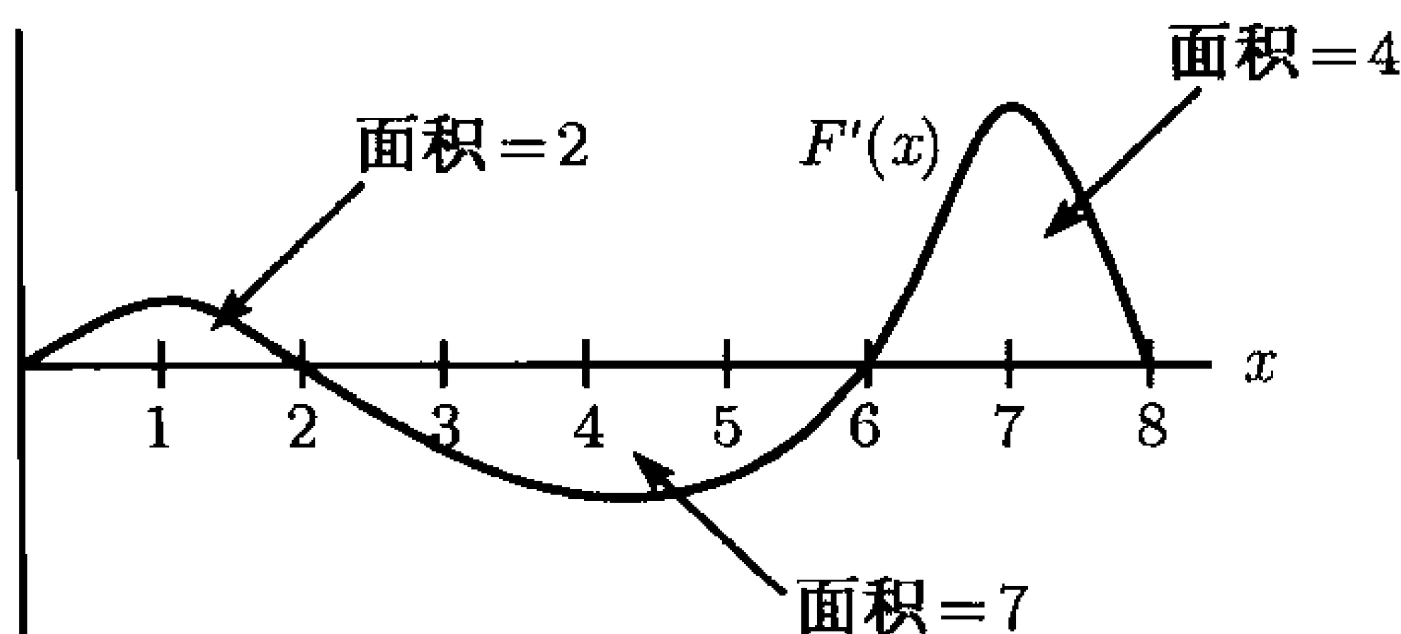


图 7-23

48. 假设 $\int_0^2 g(t)\mathrm{d}t = 5$, 计算下列值:

(a) $\int_0^4 g(t/2)\mathrm{d}t$ **(b)** $\int_0^2 g(2-t)\mathrm{d}t$

49. (a) 画出 $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ 的图形, 将反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 表示的区域涂上阴影.

(b) 针对 $a = 1, a = 2, a = 3$ 和 $a = 5$, 求 $\int_{-a}^{+a} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

(c) 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛于一个有限值, 利用 (b) 中得到的结果估计这个值.

50. 服用一种药片后的 t 小时, 药物的代谢排除速度为

$$r(t) = 50(\mathrm{e}^{-0.1t} - \mathrm{e}^{-0.2t}) \text{ 毫克/小时}.$$

假设所有药物最终都被排除, 计算最初的药剂量.

课外自修项目

Quabbin 水库

Quabbin 水库位于美国马萨诸塞州的西部, 它为波士顿提供大部分水源. 图 7-24 中的曲线表示的是在整个 2004 年流入和流出 Quabbin 水库的水流量.

(a) 画出作为时间函数的水库水量的可能图形.

(b) 在 2004 年期间, 什么时候水库的水量最大? 什么时候最小? 在 (a) 画出的图中标记出这些点.

(c) 什么时候水量增加得最快? 什么时候减少得最快? 在两张图中标记出这些时间点.

(d) 到 2005 年 7 月, 水库的水量和 2004 年 1 月大致相当. 画出 2005 年上半年水库的流入量和流出量的仿真图, 并解释你的图形.

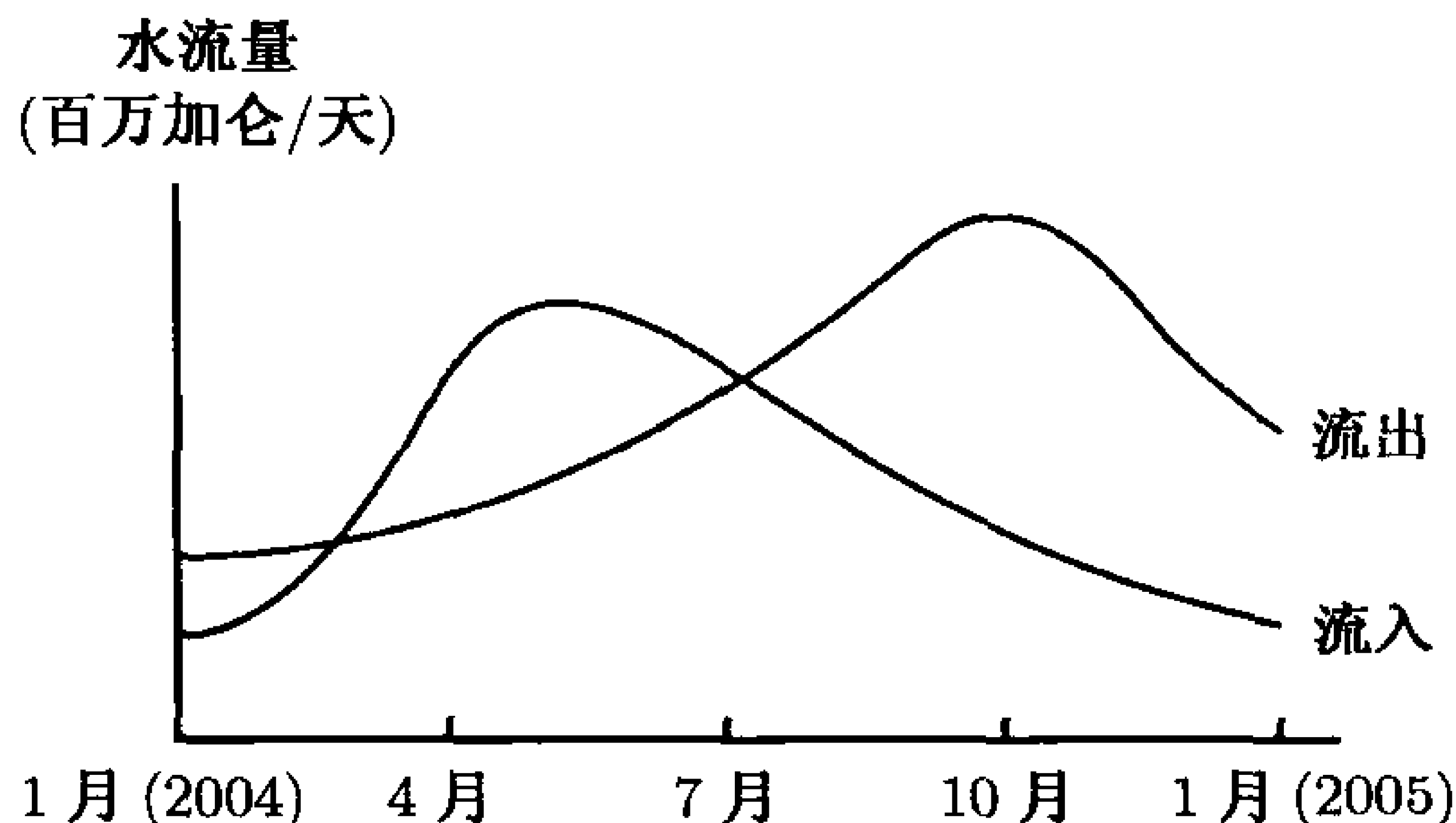


图 7-24

集中练习

对习题 1~45, 求出积分. 假设 a, b, A, B, P_0, h 和 k 均是常数.

1. $\int(t^3+6t^2)\mathrm{d}t$

2. $\int(u^4+5)\mathrm{d}u$

3. $\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

4. $\int \mathrm{e}^{3r}\mathrm{d}r$

5. $\int 3\sqrt{w}\mathrm{d}w$

6. $\int(ax^2+b)\mathrm{d}x$

7. $\int(t^2+5t+1)\mathrm{d}t$

8. $\int 100\mathrm{e}^{-0.5t}\mathrm{d}t$

9. $\int(w^4-12w^3+6w^2-10)\mathrm{d}w$

10. $\int\left(p^2+\frac{5}{p}\right)\mathrm{d}p$

11. $\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{q}}$

12. $\int 3\sin\theta\mathrm{d}\theta$

13. $\int\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

14. $\int P_0\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t$

15. $\int(q^3+8q+15)\mathrm{d}q$

16. $\int 1000\mathrm{e}^{0.075t}\mathrm{d}t$

17. $\int(5\sin x+3\cos x)\mathrm{d}x$

18. $\int(10+5\sin x)\mathrm{d}x$

19. $\int \pi r^2 h\mathrm{d}r$

20. $\int\left(q+\frac{1}{q^3}\right)\mathrm{d}q$

21. $\int 15p^2q^4\mathrm{d}p$

22. $\int 15p^2q^4\mathrm{d}q$

23. $\int(3x^2+6\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x$

24. $\int\frac{5}{w}\mathrm{d}w$

25. $\int 5\mathrm{e}^{2q}\mathrm{d}q$

26. $\int\left(p^3+\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}p$

27. $\int(Ax^3+Bx)\mathrm{d}x$

28. $\int(6\sqrt{x}+15)\mathrm{d}x$

29. $\int(x^2+8+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

30. $\int 25\mathrm{e}^{-0.04q}\mathrm{d}q$

31. $\int(x^3+5x^2+6)\mathrm{d}x$

32. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

33. $\int(Aq+B)\mathrm{d}q$

34. $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+8\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

35. $\int(\mathrm{e}^{2t}+5)\mathrm{d}t$

36. $\int\sin(3x)\mathrm{d}x$

37. $\int 12\cos(4x)\mathrm{d}x$

38. $\int A\sin(Bt)\mathrm{d}t$

39. $\int x(x^2+9)^6 \mathrm{d}x$ **40.** $\int x\cos(x^2+4)\mathrm{d}x$

41. $\int \frac{1}{y+2}\mathrm{d}y$ **42.** $\int \sqrt{3x+1}\mathrm{d}x$

43. $\int \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t$ **44.** $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$

45. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\mathrm{d}x$

第8章　概　　率

这一章介绍概率密度函数和累积分布函数, 它们可以描述像收入这样的量, 是如何在人群中分布的. 我们将揭示它们之间的联系, 以及怎样利用它们计算概率. 本章还会介绍均值, 中位数以及正态分布.

8.1　密度函数

对决策者来说, 理解各种不同的量在群体中的分布是非常重要的. 举例来说, 收入分布会向我们提供有关社会经济结构方面的有用信息. 本节将研究美国的年龄分布. 为了向教育, 卫生保健以及社会保险部门拨款, 政府必须知道每个年龄段的人数情况. 我们来看看怎样利用密度函数来描述这种信息.

8.1.1　美国的年龄分布

假设我们有了表 8-1 的数据, 它描述的是 2000 年美国人口的年龄分布[1]. 为了从图形上反映这些信息, 我们使用一种*直方图*[2]. 在直方图中的每个年龄段上, 我们放置一个直方条, 使得每个直方条的*面积*代表对应年龄段占总人口的百分比, 所有矩形的总面积是 100%=1. 我们只考虑年龄在 100 岁以下的人[3]. 对 0~20 年龄段, 矩形的底为 20, 要保证它的面积为 29%, 这样矩形的高必须是 29%/20=1.45%. 我们将年龄看作是连续分布的, 例如 0~20 年龄段, 就包括那些只差一天就年满 20 周岁的人. 注意, 垂直轴的计量单位是百分比/年. (参见图 8-1.)

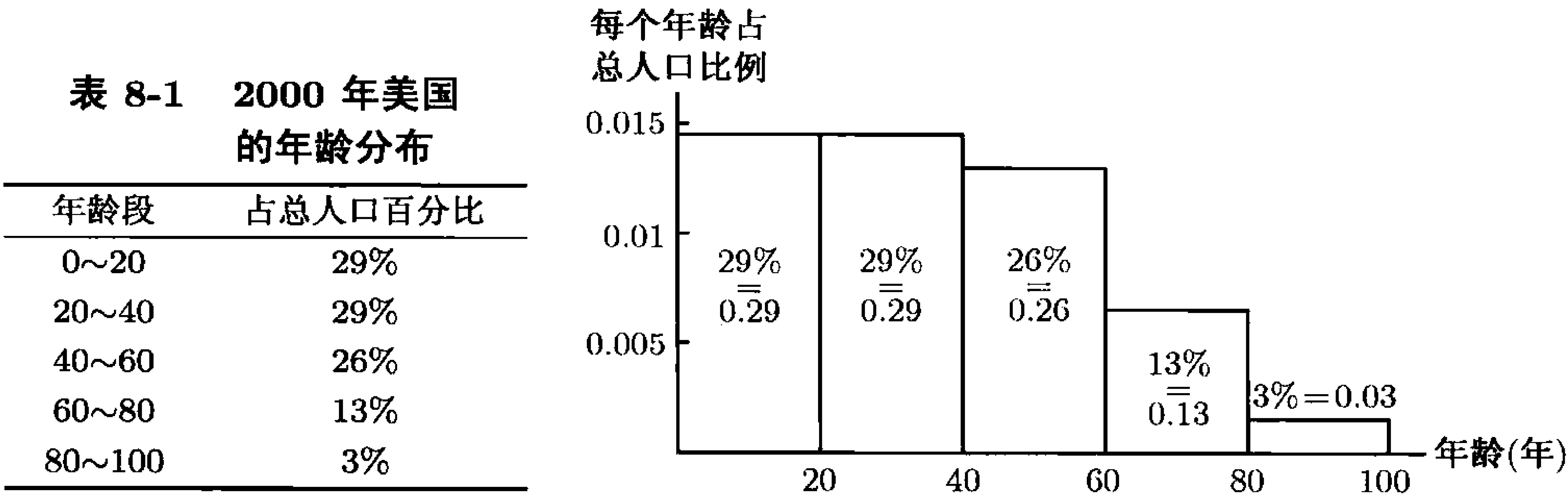


表 8-1　2000 年美国的年龄分布

年龄段	占总人口百分比
0~20	29%
20~40	29%
40~60	26%
60~80	13%
80~100	3%

图 8-1　2000 年美国的年龄是如何分布的

---

① www.censusscope.org/us/chart_age.html, 访问日期: 2005 年 5 月 10 日.

② 存在其他类型的直方图, 它们的垂直轴表示频率.

③ 事实上, 有 0.02% 的人年龄超过 100 岁, 比例太小在直方图中是不可见的.

例 1 估计 2000 年时, 下列年龄段的美国人占总人口百分比:

(a) 20 岁到 60 岁之间; (b) 10 岁以下;

(c) 75 岁到 80 岁之间; (d) 80 岁到 85 岁之间.

解 (a) 将百分比相加, 得到 $29\% + 26\% = 55\%$.

(b) 为了求出 10 岁以下的美国人所占的百分比, 我们可以假设, 0~20 年龄段上的人数是均匀分布的. (这意味着, 我们假定在过去的 20 年间, 小孩的出生率一直是个常数, 这基本是合理的.) 如果作此假设, 那么可以认为, 10 岁以下所占的百分比大约是 0~20 年龄段所占的百分比的一半, 即 14.5%. 注意, 我们也可以通过计算从 0 到 10 的矩形面积, 得到同样的结果. (参见图 8-2.)

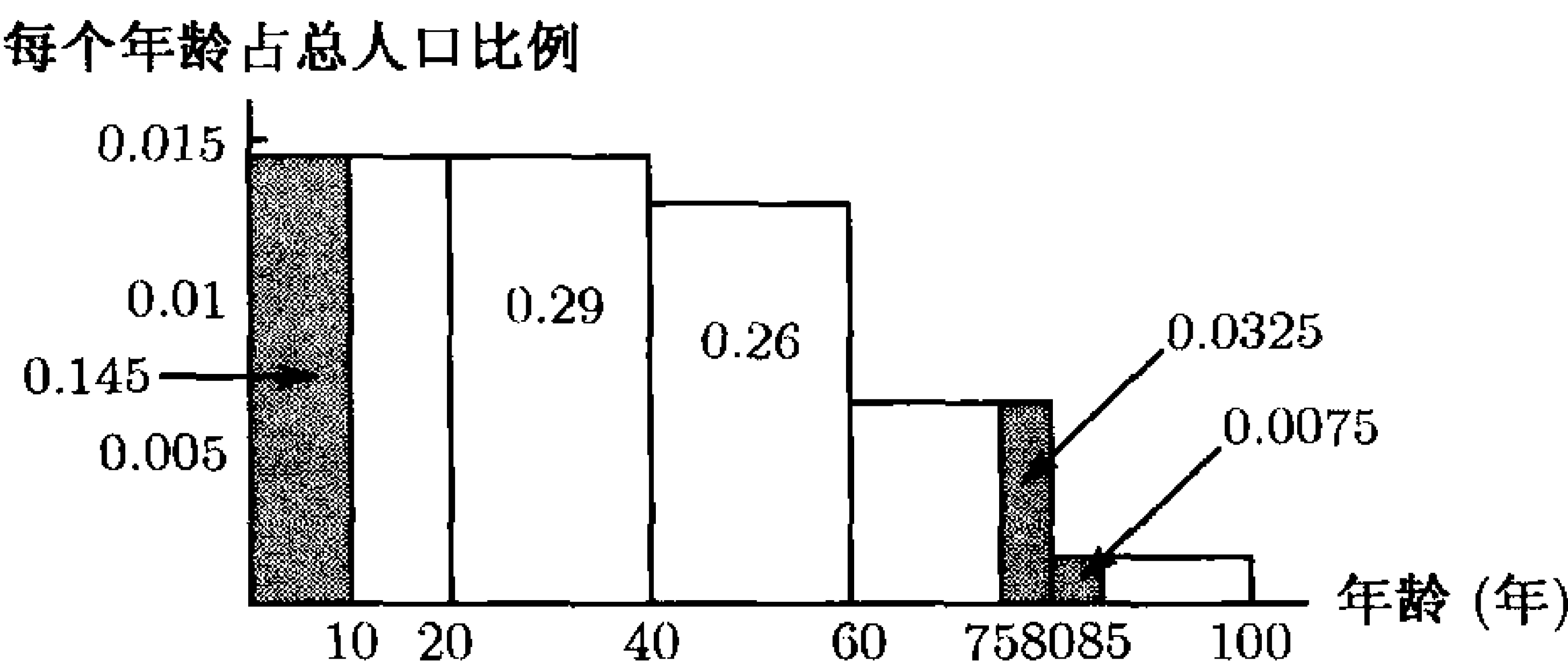


图 8-2 2000 年美国的年龄——若干年龄段 (针对例 1)

(c) 为了求出 75 岁到 80 岁之间的美国人所占百分比, 我们可能会应用同样的假设, 既然 2000 年有 13% 的美国人处于 60~80 年龄段, 我们得到所占百分比为 $\frac{1}{4}(13\%) = 3.25\%$. 这一结果可用图 8-2 的一个灰色区域的面积表示. 这里, 假设年龄段上的人数是均匀分布的并不妥当, 处于 60 到 65 岁的人明显要比处于 75 岁到 80 岁的多. 这样, 3.25% 的估计肯定是太高了.

(d) 我们再次利用人数在年龄段上均匀分布这一 (有缺陷的) 假设, 可以求出 80 岁到 85 岁之间的美国人所占百分比为 $\frac{1}{4}(3\%) = 0.75\%$. (参见图 8-2.) 这个估计也不好——处于 80 到 85 岁的人明显要比处于 95 岁到 100 岁的多. 这样, 0.75% 的估计肯定也是太低了. □

平滑直方图

如果年龄段划分得更细 (图 8-1 的每个年龄段的间隔是 20 年, 这个间隔相当大), 或者直方图更为平滑, 我们就可以得到更好的估计. 如表 8-2 所示, 假设我们有了更详细的数据, 就可以得到新的直方图, 如图 8-3 所示.

一旦我们获得了更为详细的信息, 直方图的上部轮廓会变得平滑起来, 不过, 任何一个直方条的面积仍然表示该年龄段占总人口的百分比. 想象一下, 当这个过程无限进行下去, 直方图的上部轮廓会被一条光滑的曲线所代替. 在这种情形下, 曲

线下方介于每个年龄段的区域面积就等于对应矩形的面积. 整个曲线下方的总面积还是 $100\% = 1$. (参见图 8-3.)

表 8-2 2000 年美国的年龄分布 (较表 8-1 更为详细数据)

年龄段	占总人口百分比	年龄段	占总人口百分比
0~10	14%	50~60	11%
10~20	15%	60~70	7%
20~30	14%	70~80	6%
30~40	15%	80~90	2%
40~50	15%	90~100	1%

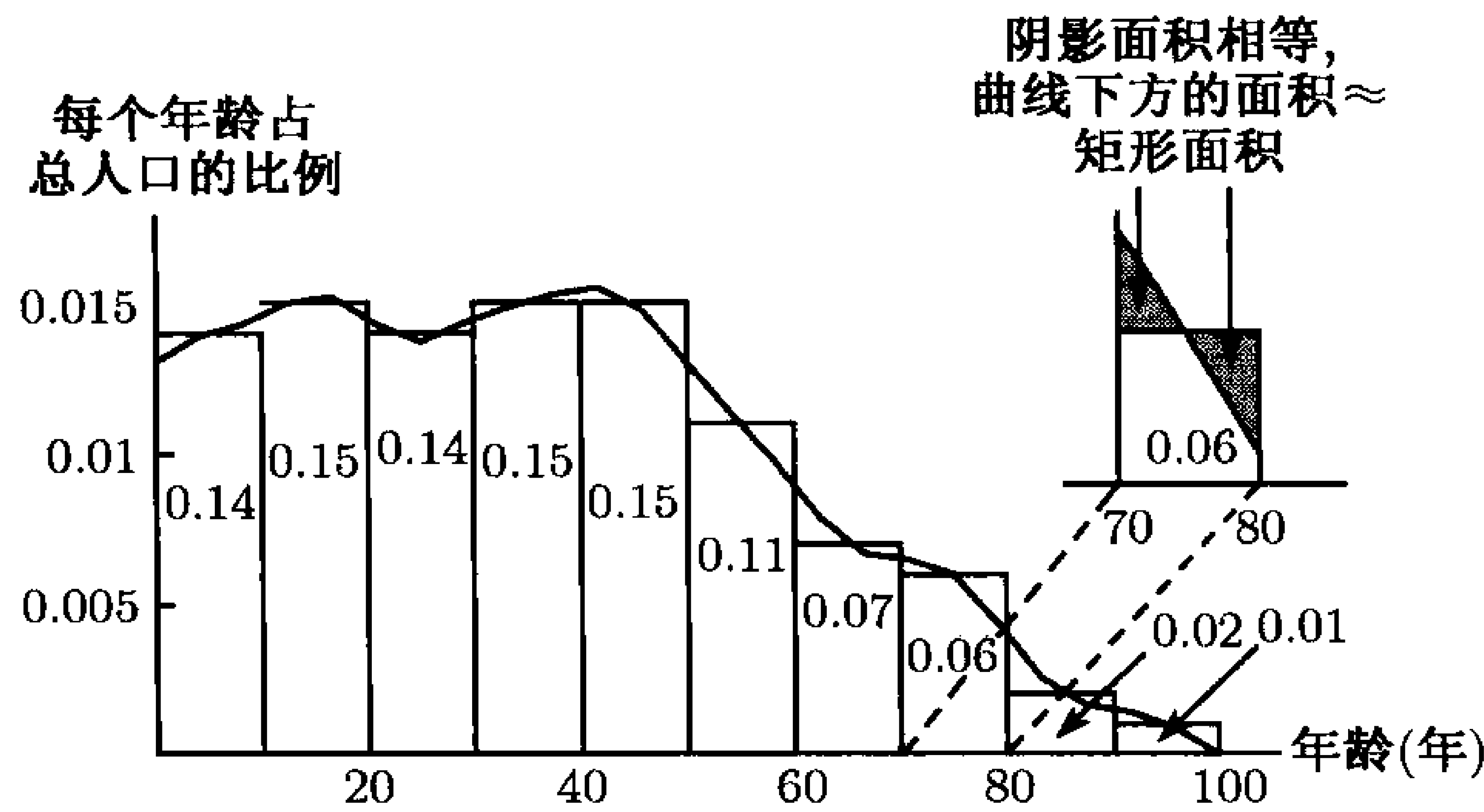


图 8-3 平滑的年龄直方图

年龄密度函数

设 t 是以年数计的年龄, $p(t)$ 是从年龄直方图 "平滑" 后的函数, 我们定义为年龄密度函数. 这个函数具有性质

$$\text{年龄介于 } a \text{ 到 } b \text{ 之间的占总人口比例}$$
$$= p \text{ 的图形介于 } a \text{ 到 } b \text{ 之间的下方面积} = \int_a^b p(t)\mathrm{d}t.$$

假设 a 和 b 是可能的最小年龄和最大年龄 (比如, $a = 0$, $b = 100$), 这样所有人的年龄都在 a 和 b 之间, 于是

$$\int_a^b p(t)\mathrm{d}t = \int_0^{100} p(t)\mathrm{d}t = 1.$$

密度函数说明了什么? 注意我们只是说明了积分 $\int_a^b p(t)\mathrm{d}t$ 的意义, 还没有说明密度函数本身的意义. 我们进一步来看. 例如, 假设 $p(10) = 0.014 = 1.4\%$ 每年, 这并不意味着占总人口 1.4% 的人, 他们的年龄准确地是 10 岁 (这里 10 岁是指精确的 10 岁, 而不是 $10\frac{1}{2}$, 或 $10\frac{1}{4}$, 或 10.1). $p(10) = 0.014$ 意味着, 在 10 附近的某个 Δt

小区间上, 年龄处于这个区间上的人, 占总人口的百分比近似是 $p(10)\Delta t = 0.014\Delta t$. 另外, 可以观察到 $p(t)$ 的单位是 % 每年, 这样 $p(t)$ 必须和年数相乘才能得到一个占总人口的百分比.

8.1.2 密度函数

假设我们感兴趣于某个数值特征 x, 是如何在一个总体上分布的. 例如, 如果总体是人群, x 可能是身高或年龄; 如果总体是电灯泡, x 可能是灯泡的功率. 于是, 我们通过下面的性质来定义一般的密度函数.

> 函数 $p(x)$ 称为**密度函数**, 如果
>
> $$x \text{ 介于 } a \text{ 到 } b \text{ 间的占总体比例} = p \text{ 的图形介于 } a \text{ 到 } b \text{ 间的下方面积} = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \quad \text{且} \quad \text{对任意 } x, \quad p(x) \geqslant 0.$$

密度函数的积分通常得到的是一个占总体比例, 因此密度函数必须是非负的. 整个总体的数值特征 x 都是从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的, 因此 x 介于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的占总体比例是 1. 经常用于平滑年龄直方图的函数 p, 就满足这种密度函数的定义. 注意我们不会直接针对 $p(x)$ 的值给出意义, 而是将 $p(x)\Delta x$ 解释为: 在 x 附近的一个长度为 Δx 的小区间上, 所有个体占总体的比例.

例 2 针对病人在医生办公室候诊的时间, 图 8-4 给出了它的密度函数.

(a) 病人必须等待的最长时间是多少?

(b) 大约多大比例的病人等待时间在 1 小时到 2 小时?

(c) 大约多大比例的病人等待时间不超过 1 小时?

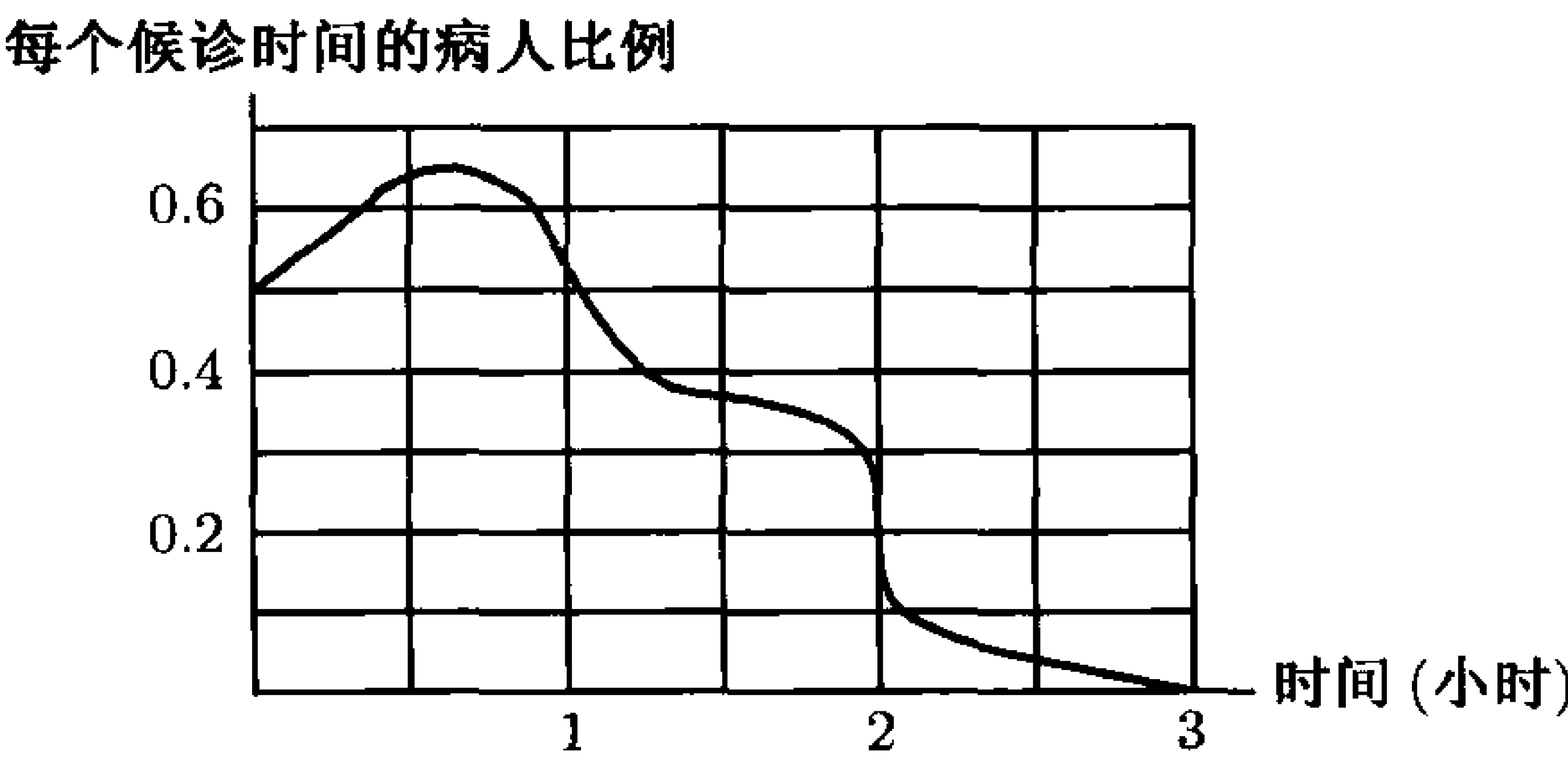


图 8-4 在医生办公室候诊时间的分布

解 (a) 对一切 $t > 3$, 密度函数均为 0, 因此没有任何病人候诊超过 3 个小时. 病人必须等待的最长时间是 3 小时.

(b) 等待时间在 1 小时到 2 小时的病人比例, 等于密度函数的曲线介于 $t=1$ 到 $t=2$ 间的下方面积. 我们可以通过对方格计数来估计这个面积：这个区域近似有 7.5 个方格, 每个方格的面积是 (0.5)(0.1)=0.05, 总面积大约是 (7.5)(0.05)=0.375. 这样, 大约有 37.5%的病人等待时间在 1 小时到 2 小时.

(c) 这个比例等于当 $t<1$ 时密度函数的下方区域面积. 该区域近似有 12 个方格, (b) 中指出每个方格的面积是 0.05, 于是我们对面积的估计是 (12)(0.05)= 0.60. 因此, 大约有 60% 的病人候诊不超过 1 小时. □

习题

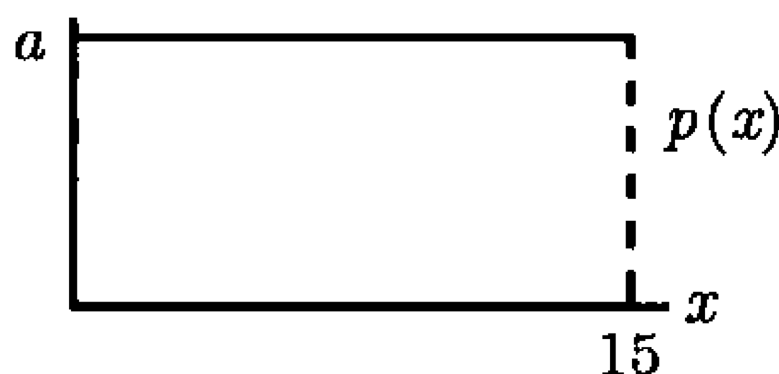
对习题 1 和习题 2, 针对给出的分布, 画出密度函数的图形.

1. 一个社区中的年龄分布. 这个社区中, 婴儿的死亡率高, 而且成年人通常死于 40 岁到 60 岁之间.

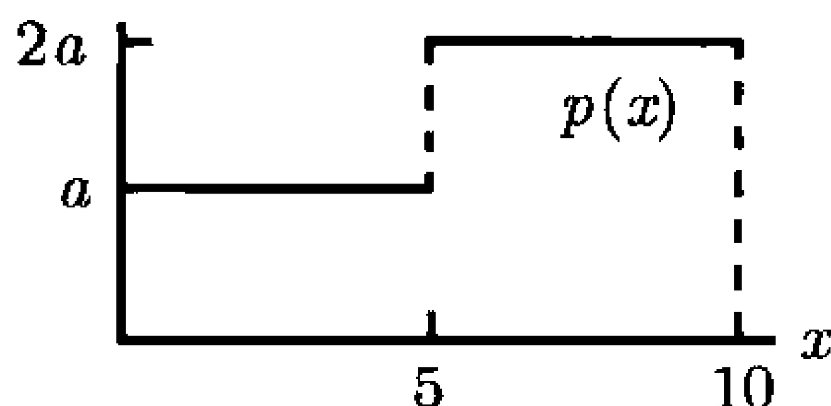
2. 一个初级中学的学生身高的分布.

对习题 3~6, 已知 $p(x)$ 是密度函数, 求 a 的值.

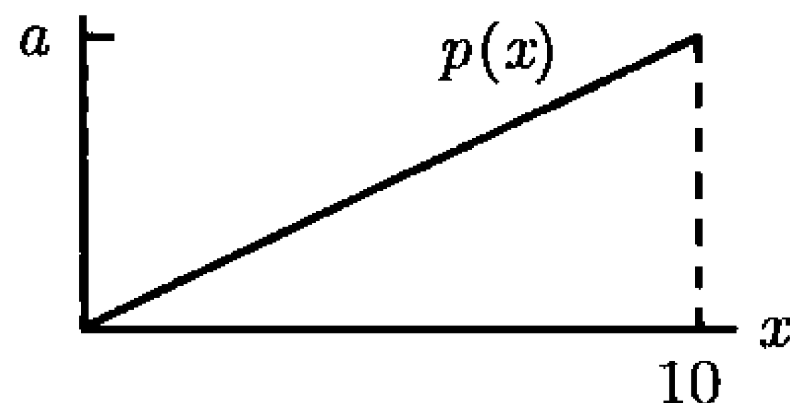
3.



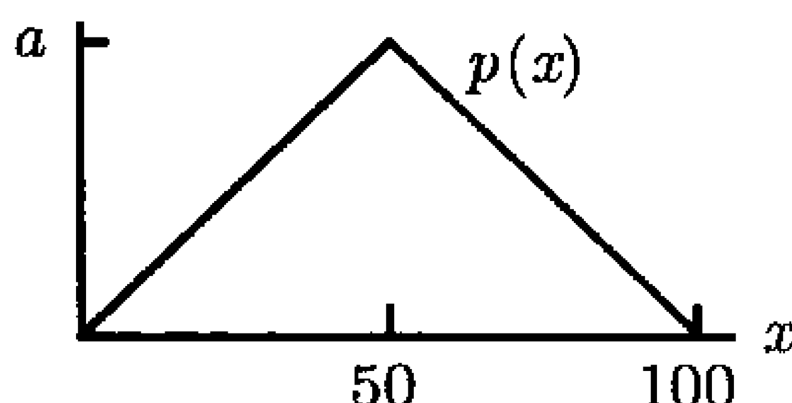
4.



5.



6.



7. 图 8-5[①] 给出了地球表面的海拔高度的分布, 计量单位是 km, 正的海拔表示陆地高出海平面, 负的海拔则说明陆地低于海平面.

(a) 用语言描述大部分地球表面的海拔分布情况.

(b) 大约有多大比例的地球表面低于海平面?

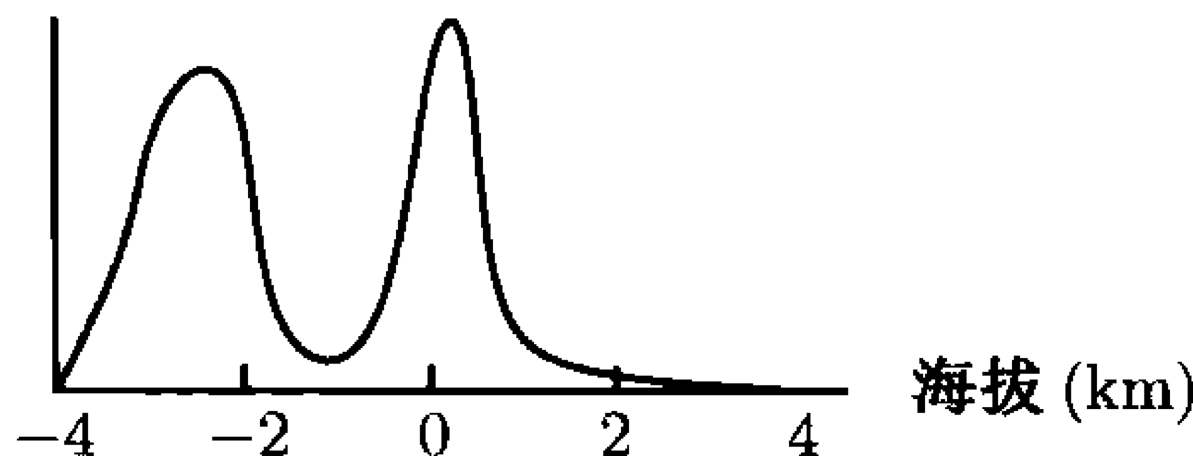


图 8-5

对习题 8~11, 以米计树的高度 x 的分布, 用密度函数 $p(x)$ 来描述. 在密度函数的每种情况下, 计算下列情形下树的所占比例:

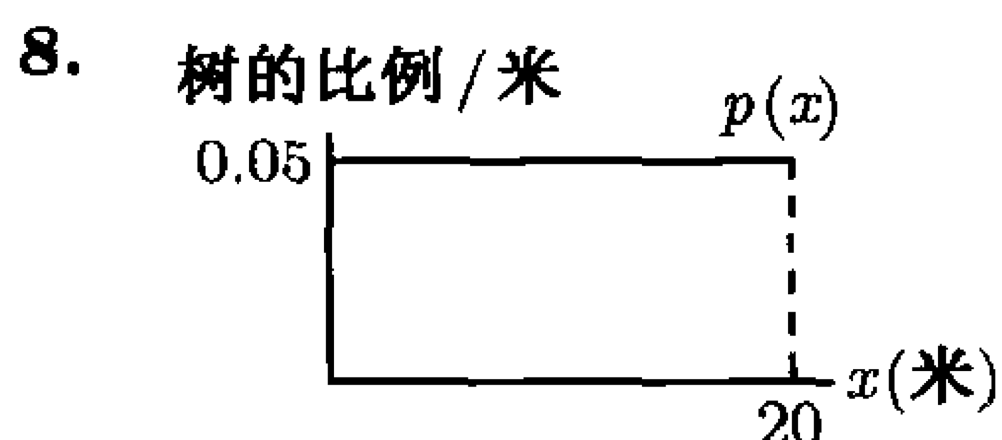
(a) 树的高度在 5 米以下

(b) 树的高度在 6 米以上

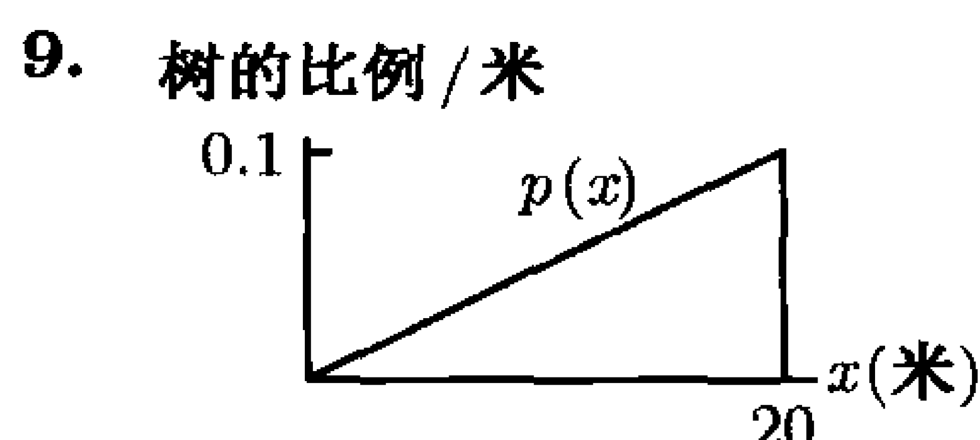
(c) 树的高度在 2 米到 5 米之间

① 改编自《统计学》, Freedman, Pisani, Purves 和 Adikhari 著 (纽约: 诺顿).

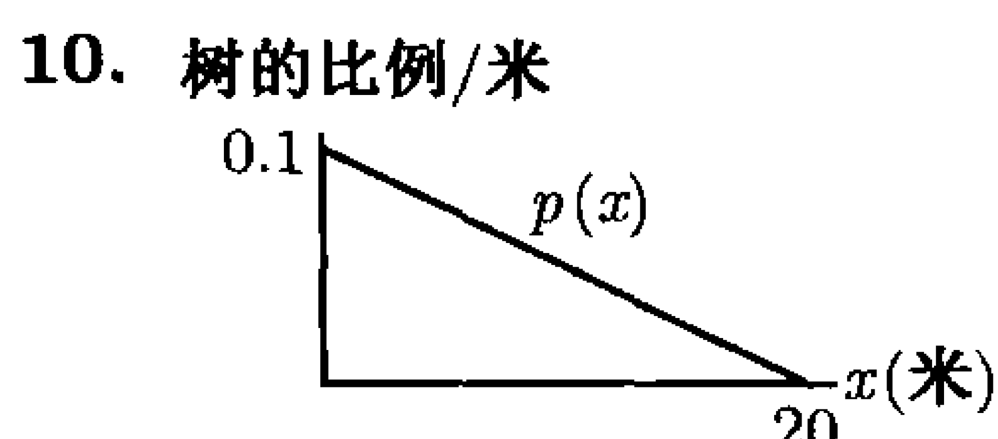
8.



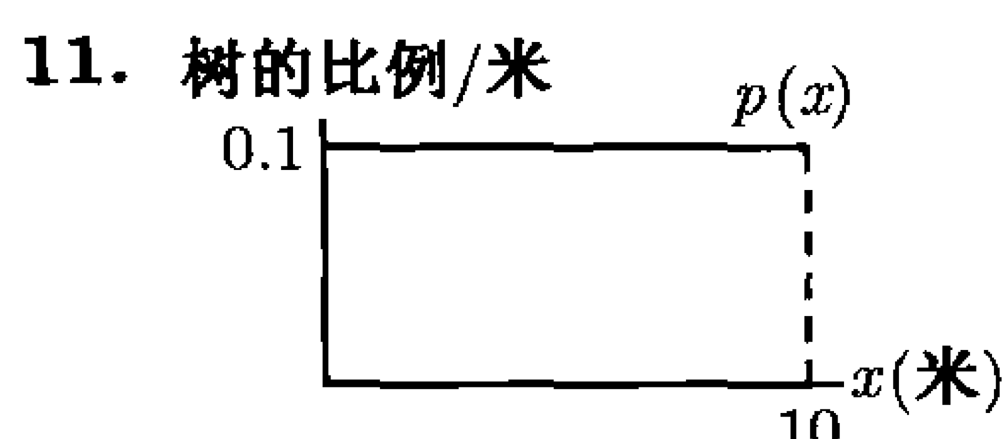
9.



10.



11.



12. 一种昆虫的寿命不超过 1 年, 图 8-6 显示的是其寿命的密度函数 $p(t)$ 的图形.

(a) 更多的昆虫是死于第 1 个月, 还是死于第 12 个月?

(b) 活不过 6 个月的昆虫比例是多少?

(c) 寿命超过 9 个月的昆虫比例是多少?

13. 针对一种昆虫以天计幼虫期的时间, 图 8-7 给出了密度函数 $p(t)$. 幼虫期的时间在 10 天到 20 天的比例是多少? 少于 8 天的比例是多少? 在 12 天以上的比例是多少? 以一天为时间间隔, 幼虫期处于那一天内的比例最有可能回落?

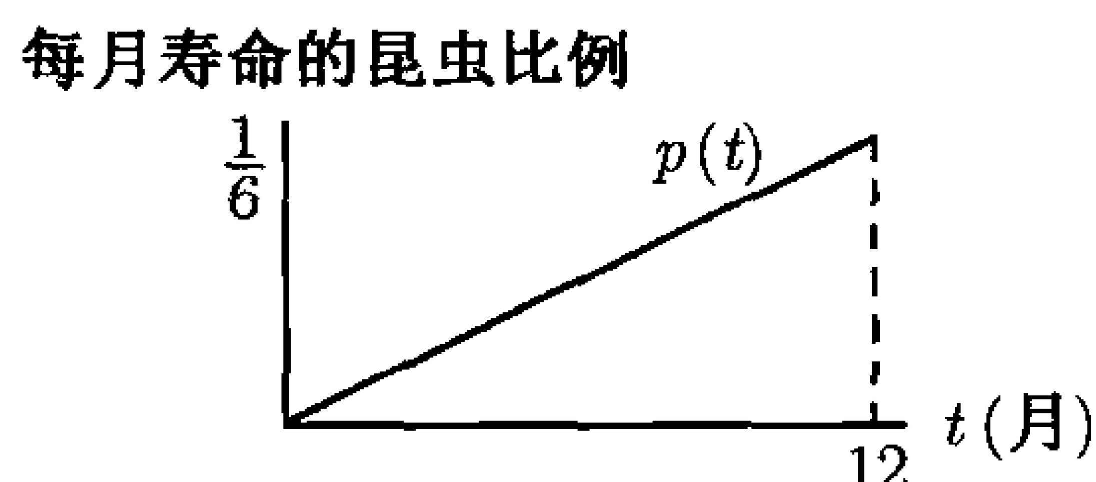


图 8-6

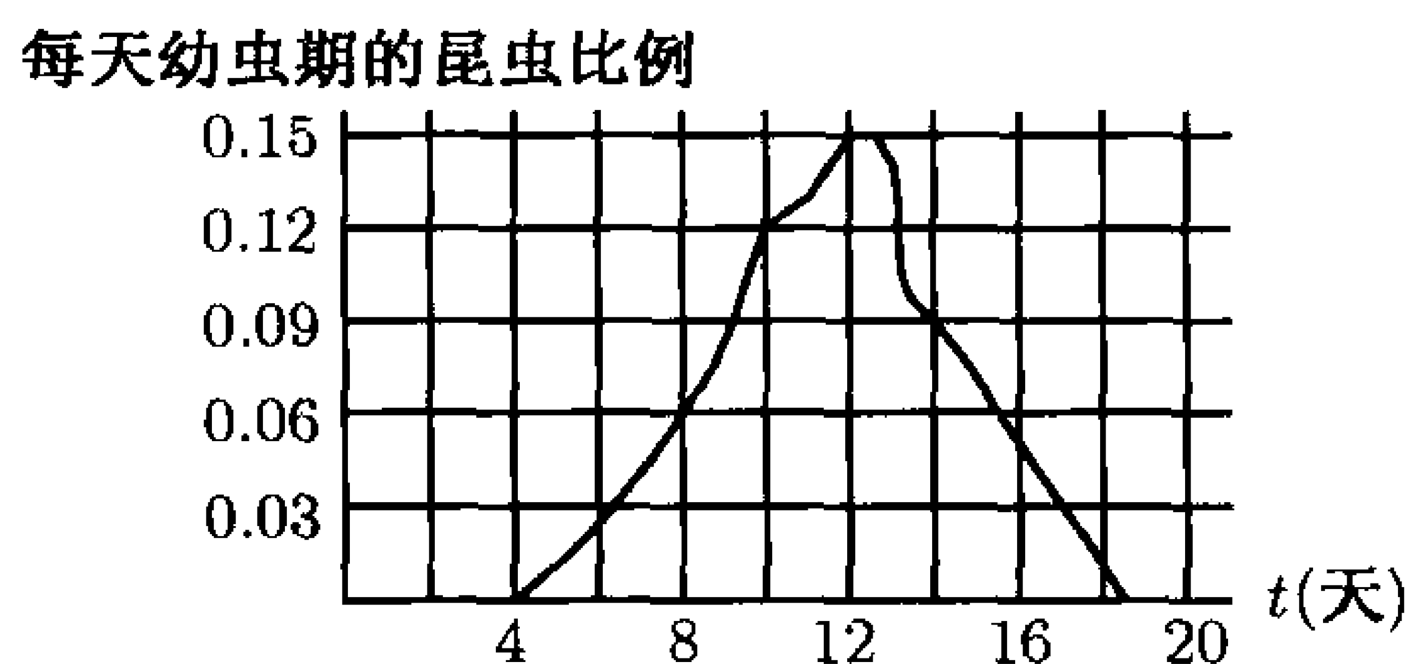


图 8-7

14. 图 8-8 给出的是一个群体中的成年人接受教育的年数的分布. 图形的形状说明了什么? 估计接受教育时间在 10 年以下的成年人所占的比例.

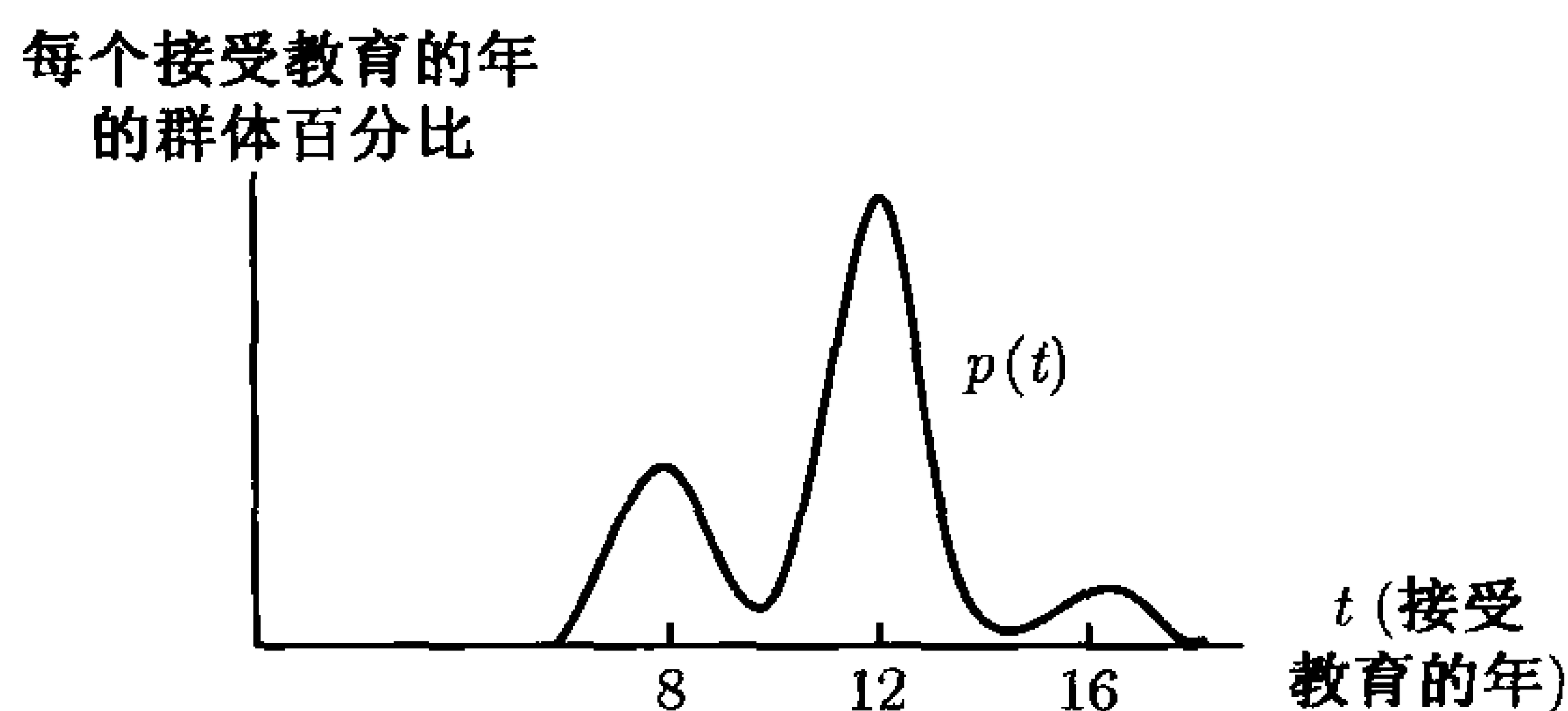


图 8-8

对习题 15~17, 针对一块地在给定的环境下的农作物产量 (单位: kg), 画出可能的密度函数图形.

15. 从 0~100 kg 的所有产量等可能; 这块地的产量从未超过 100 kg.

16. 高产的可能性比低产更大, 最大产量为 200 kg.

17. 干旱造成普遍低产, 产量不会超过 30 kg.

8.2 累积分布函数和概率

8.1 节介绍了密度函数, 它可以用来描述数值特征在总体上的分布情况. 本节我们研究用另一种方法来反映同样的信息.

年龄的累积分布函数

反映美国年龄的分布情况的另一种方法是利用**累积分布函数** $P(t)$, 它定义为

$$P(t) = \text{年龄不超过 } t \text{ 的占总人口比例} = \int_0^t p(x)\mathrm{d}x.$$

于是, P 是 p 的满足条件 $P(0)=0$ 的原函数, 因此 $P(t)$ 是密度函数曲线介于 0 与 t 间的下方面积, 如图 8-9 的左侧部分所示.

注意累积分布函数是非负的并且是递增的 (或者说, 至少是不减的), 因为随着 t 的增加, 年龄不超过 t 的人数也在增加. 另外一个原因是, $P'=p$, 而且 p 是正的 (或者说, 是非负的). 这样, 累积年龄分布函数是以 $P(0)=0$ 开始, 并且随着 t 的增加而增加的. 当 $t<0$ 时, $P(t)=0$. 这是因为当 $t<0$ 时, 没有任何人的年龄小于 t. 由于当 t 变得非常大时 (比如说, 100), 每个人的年龄都不会超过 t, 于是年龄不超过 t 的人数比例趋向于 1, 因此当 $t\to\infty$ 时, P 的极限值是 1.

我们来求图 8-3 中给出的年龄密度函数的累积分布函数. 图 8-3 显示占总人口 14% 的人的年龄介于 0 到 10 岁之间, 我们得到 $P(10)$ 等于 0.14. 同样地,

$$P(20) = \text{年龄介于 0 到 20 岁之间的人占总人口比例} = 0.14+0.15=0.29$$

类似地

$$P(30) = 0.14+0.15+0.14=0.43.$$

继续利用这种方法, 我们能得到表 8-3 中的所有 $P(t)$ 的值. 这些值可以用来画出 $P(t)$ 的图形, 如图 8-9 的右侧部分所示.

表 8-3 累积分布函数 $P(t)$, 给出的是年龄不超过 t 岁的人占美国人口的比例

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$P(t)$	0	0.14	0.29	0.43	0.58	0.73	0.84	0.91	0.97	0.99	1.00

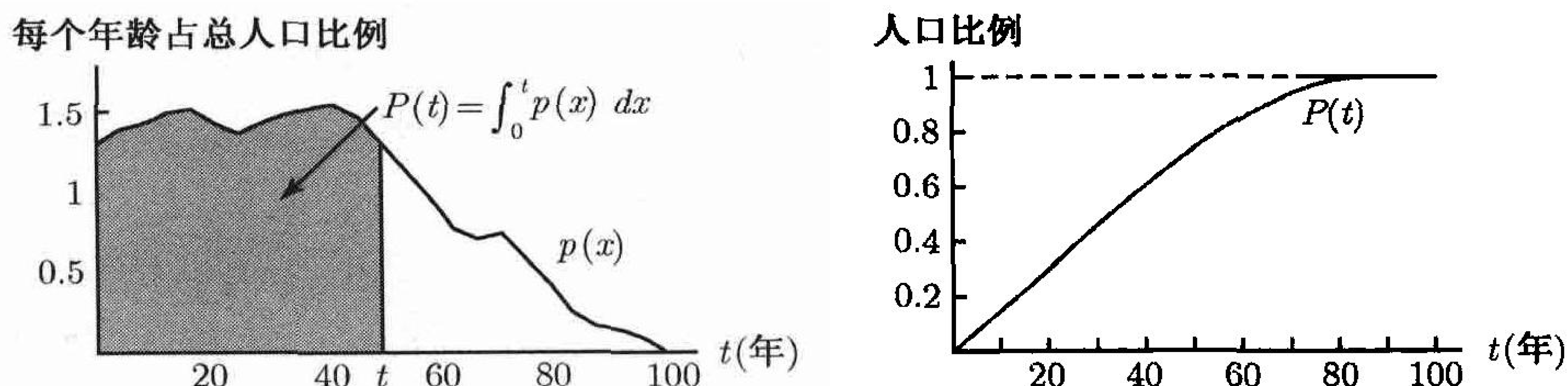


图 8-9 年龄密度函数 $p(x)$ 及对应的累积年龄分布函数 $P(x)$ 的图形

8.2.1 累积分布函数

密度函数 p 的**累积分布函数** $P(t)$, 定义为

$$P(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\mathrm{d}x = x \text{ 取值不超过 } t \text{ 的占总体比例}.$$

这样, P 是 p 的一个原函数, 即 $P' = p$.

任何一个累积分布函数都具有下面的性质:

- P 是递增的 (或者是不减的).
- $\lim_{t\to\infty} P(t) = 1$ 且 $\lim_{t\to-\infty} P(t) = 0$.
- x 取值介于 a 到 b 间的部分占总体的比例 $= \int_a^b p(x)\mathrm{d}x = P(b) - P(a)$.

例 1 对机器实施日常保养检查, 其所需时间的累积分布函数为 $P(t)$, 它给出的是保养检查在小于或等于 t 分钟内完成的比例, 表 8-4 给出了 $P(t)$ 的值.

表 8-4 实施保养检查所需时间的累积分布函数

时间 (分钟)	0	5	10	15	20	25	30
$P(t)$ (完成的比例)	0	0.03	0.08	0.21	0.38	0.80	0.98

(a) 有多大比例的保养检查是在不超过 15 分钟内完成的?

(b) 有多大比例的保养检查需要花费至少 30 分钟?

(c) 有多大比例的保养检查花费时间介于 10 到 15 分钟之间?

(d) 画出一个直方图, 用来表示保养检查的时间是如何分布的.

(e) 以每 5 分钟为时间间隔, 保养检查的时间最有可能落入哪一个时间间隔?

(f) 画出密度函数的草图.

(g) 画出累积函数的草图.

解 (a) 不超过 15 分钟内完成的保养检查的比例是 $P(t) = 0.21$ 或者 21%.

(b) 由于 $P(30) = 0.98$, 可知 98% 的保养检查花费不超过 30 分钟, 因此仅有 2% 的保养检查需要花费至少 30 分钟.

(c) 由于 8% 的保养检查花费不超过 10 分钟, 21% 不超过 15 分钟, 因此花费时间在 10 到 15 分钟之间的保养检查的比例是 $0.21 - 0.08 = 0.13$, 或者说是 13%.

(d) 我们首先制作一张表来反映时间的分布. 表 8-4 表明在 0 到 5 分钟之间完成的保养检查的比例是 0.03, 5 到 10 分钟之间是 0.05, 等等. 如表 8-5 所示.

图 8-10 给出的是直方图, 图中每个直方条的面积等于在对应时间间隔内完成的保养检查的比例. 例如, 第一个直方条的面积是 0.03, 宽度为 5, 于是它的高度为 $0.03/5=0.006$.

表 8-5 实施保养检查所需时间的分布

时间 (分钟)	0~5	5~10	10~15	15~20	20~25	25~30	> 30
$P(t)$ (完成的比例)	0.03	0.05	0.13	0.17	0.42	0.18	0.02

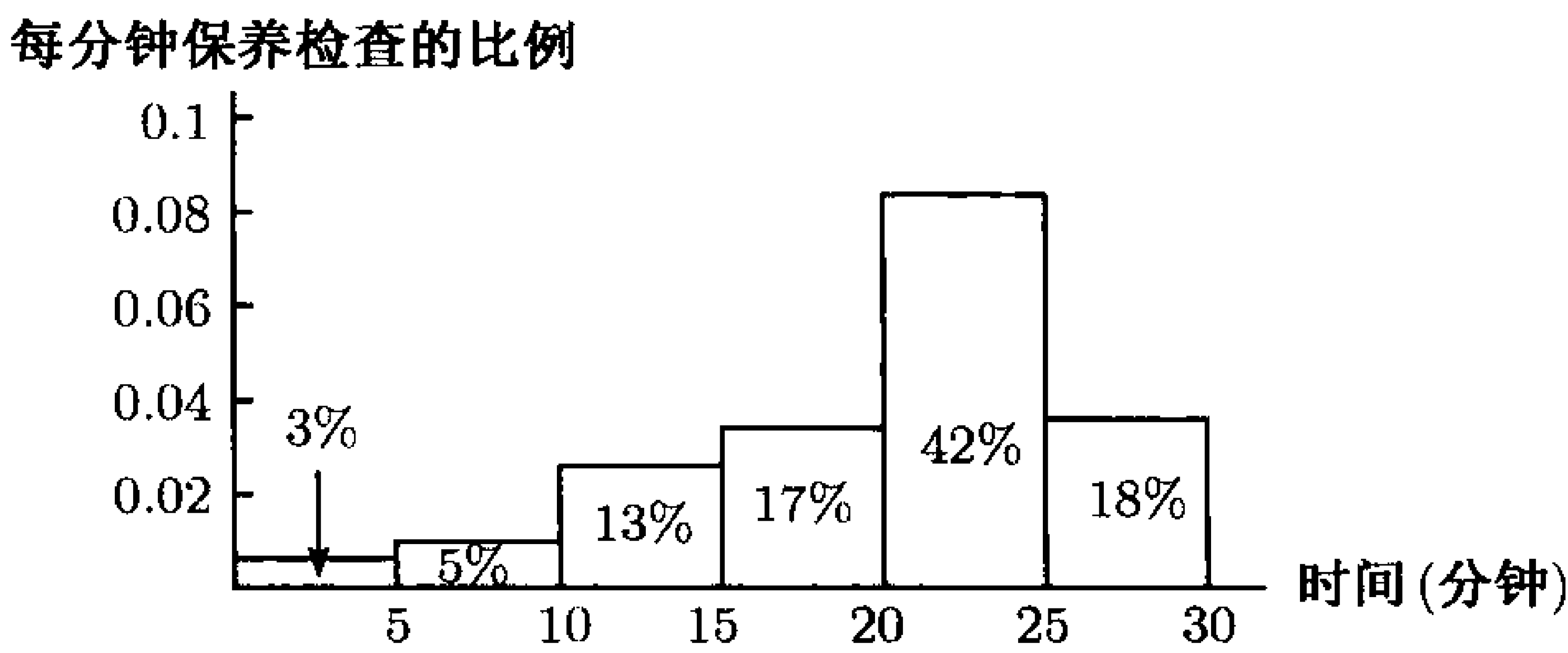


图 8-10 保养检查所需时间的直方图

(e) 从图 8-10 中可以看出, 大多数的保养检查在 20 到 25 分钟之间完成, 它就是最有可能落入的时间间隔.

(f) 密度函数 $p(t)$ 是图 8-10 所示直方图的平滑形式, 图 8-11 给出了它的一张合理的草图.

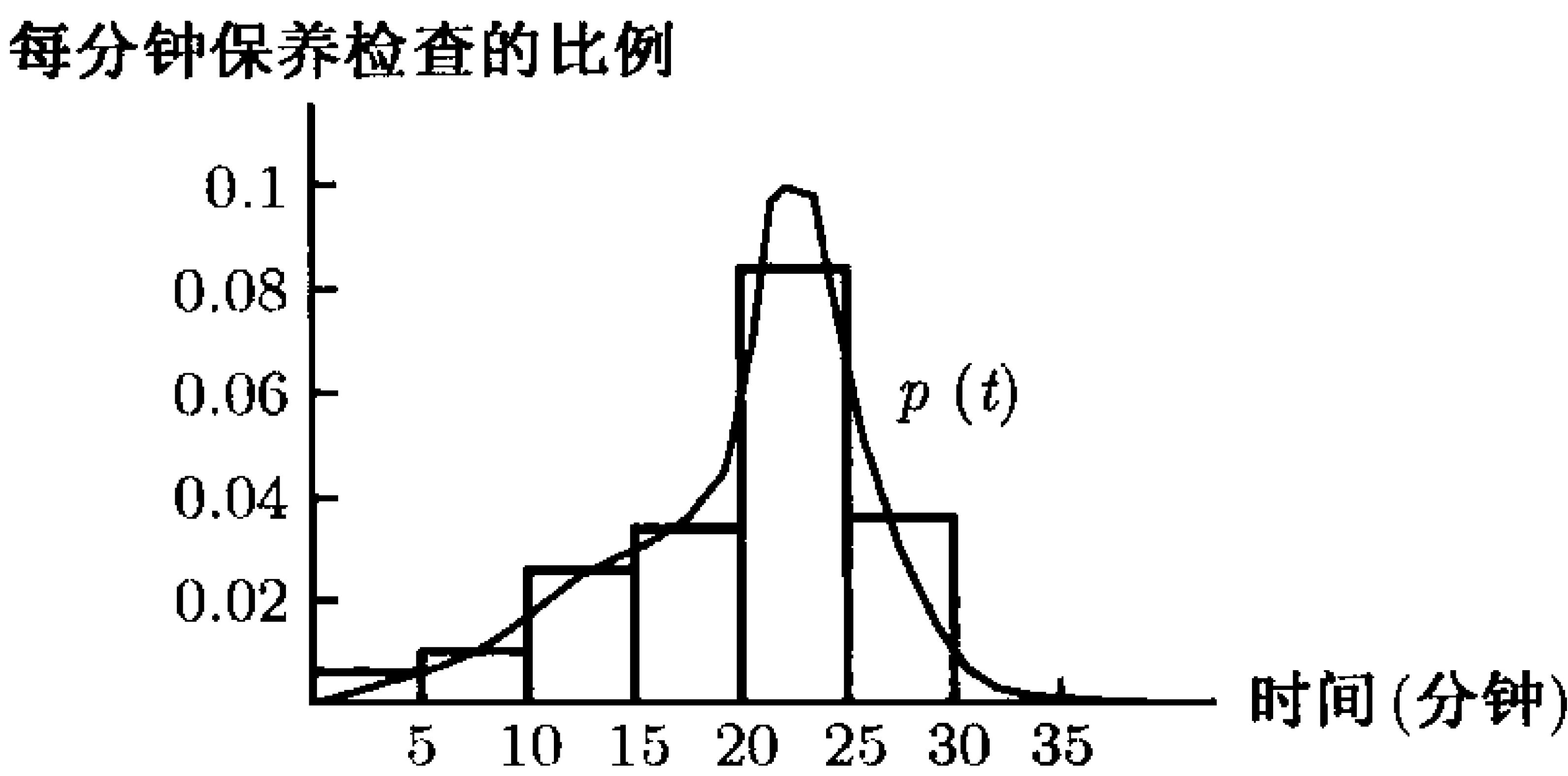


图 8-11 实施保养检查所需时间的密度函数

(g) 图 8-12 给出了 $P(t)$ 的图形, 由于 $P(t)$ 是一个累积分布函数, 随着 t 的增大, $P(t)$ 会向 1 靠近, 然而它永远不会大于 1.

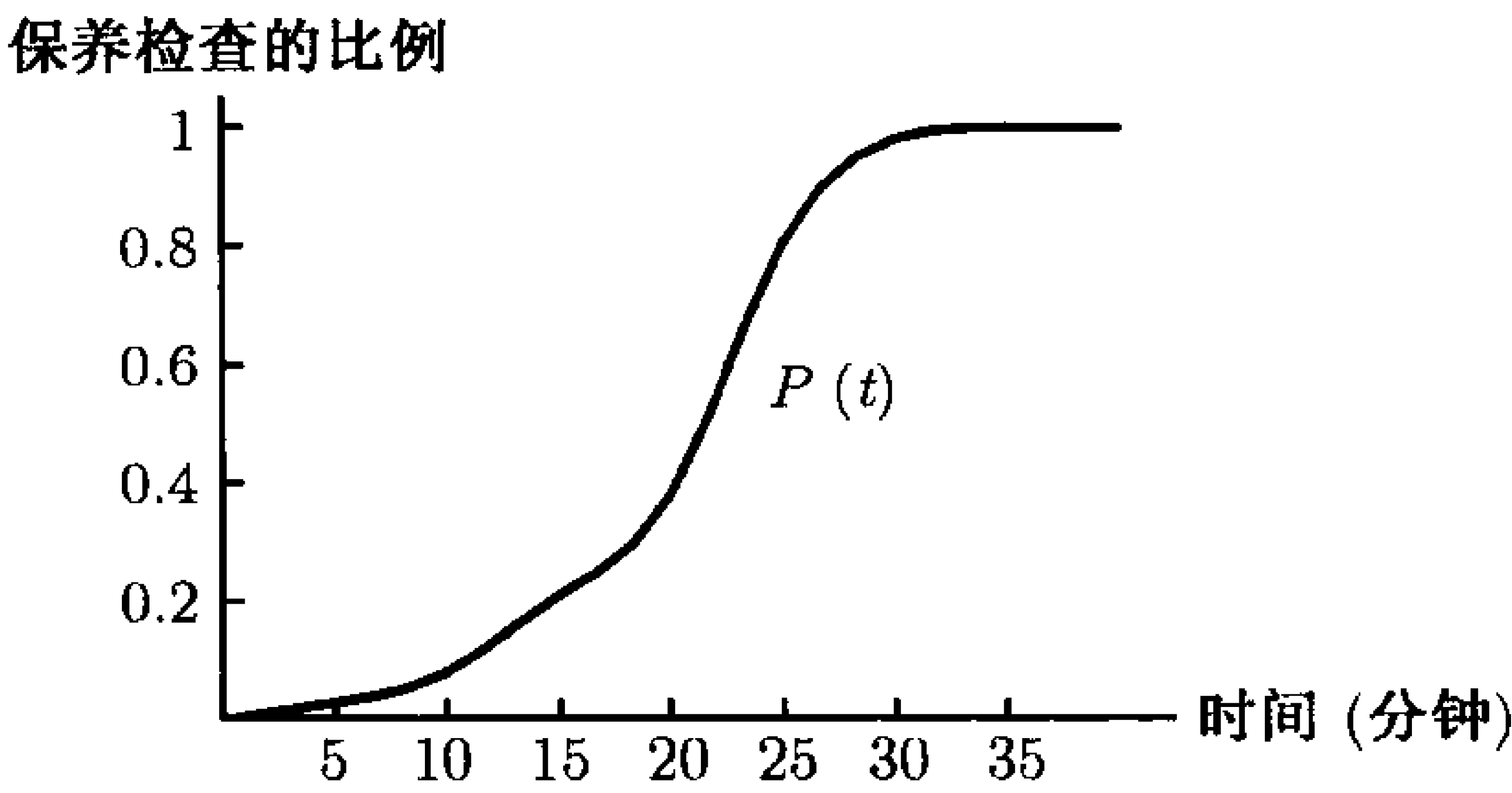


图 8-12 实施保养检查所需时间的累积分布函数 □

8.2.2 概率

假设随机地从美国人中挑出一个, 我们有多大概率保证挑出来的这个人, 他的年龄在 70 到 80 岁之间? 从表 8-2 中可以看到, 占总人口 6% 的人处在这个年龄段, 我们说人的年龄在 70 到 80 岁之间的概率或者机会是 0.06. 利用年龄密度函数 $p(t)$, 我们将概率定义如下.

$$\text{人的年龄介于 } a \text{ 到 } b \text{ 之间的概率} = \text{年龄介于 } a \text{ 到 } b \text{ 之间的人数占总人口的比例} = \int_a^b p(t)\mathrm{d}t.$$

由于累积分布函数给出了年龄不超过 t 的总人口比例, 因此它也可以用于计算一个随机挑出的人, 其年龄落入某个给定年龄段的概率.

$$\text{人的年龄不超过 } t \text{ 的概率} = \text{年龄不超过 } t \text{ 的人数占总数的百分比} = P(t) = \int_0^t p(x)\mathrm{d}x.$$

下例中针对同一情形, 我们既可以利用密度函数来描述, 也可以利用分布函数来描述.

例 2 假设你要分析一个小镇的渔业情况. 每天, 渔船带回的鱼不少于 2 吨, 但是从不超过 8 吨.

(a) 利用图 8-13 描述的日捕鱼量的密度函数图形, 求出对应的累积分布函数, 画出图形, 并解释其意义.

(b) 日捕鱼量在 5 到 7 吨之间的概率是多少?

解 (a) 累积分布函数 $P(t)$, 等于捕鱼量不超过 t 吨的天数占总天数的比例. 因为捕鱼量从不少于 2 吨, 所以对一切 $t \leqslant 2$, $P(t) = 0$. 因为捕鱼量总是少于 8 吨, 所以对一切 $t \geqslant 8$, $P(t) = 1$. 对 $2 < t < 8$ 范围内的 t, 我们需要求出积分

$$P(t) = \int_{-\infty}^t p(x)\mathrm{d}x = \int_2^t p(x)\mathrm{d}x.$$

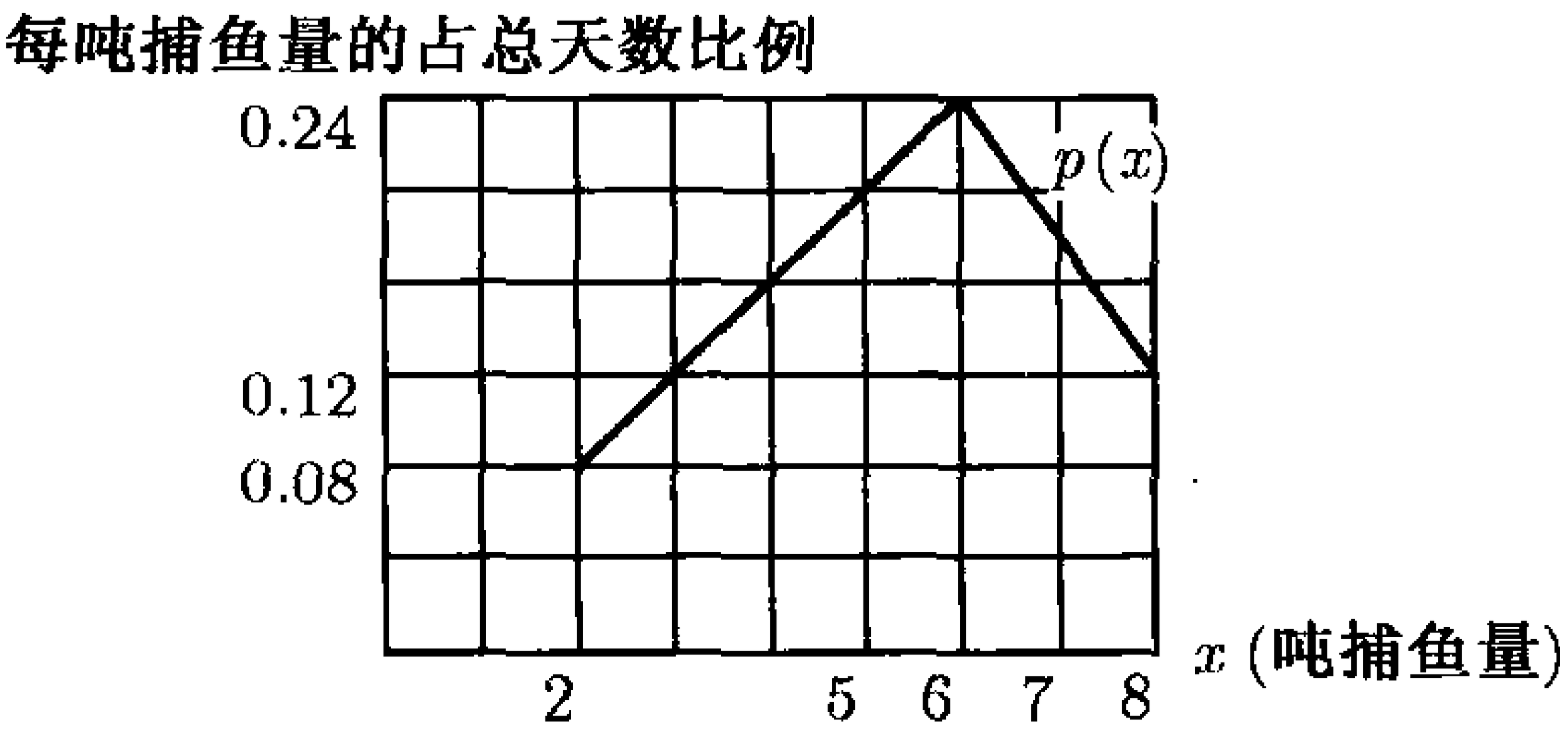


图 8-13 日捕鱼量的密度函数

这个积分等于 $p(x)$ 的图形介于 $x=2$ 与 $x=t$ 之间的下方区域面积. 通过计算图 8-13 中的方格的数目, 我们可以得到这个面积. 例如, 每个方格的面积是 0.04, 于是,

$$P(3)=\int_2^3 p(x)\mathrm{d}x\approx 2.5 \text{ 个方格的面积 } = 2.5(0.04)=0.10.$$

表 8-6 给出了 $P(t)$ 的值, 图 8-14 显示了它的图形.

表 8-6　日捕鱼量的 $P(t)$ 的估计

t (捕鱼吨数)	$P(t)$ (占总天数的比例)
2	0
3	0.10
4	0.24
5	0.42
6	0.64
7	0.85
8	1

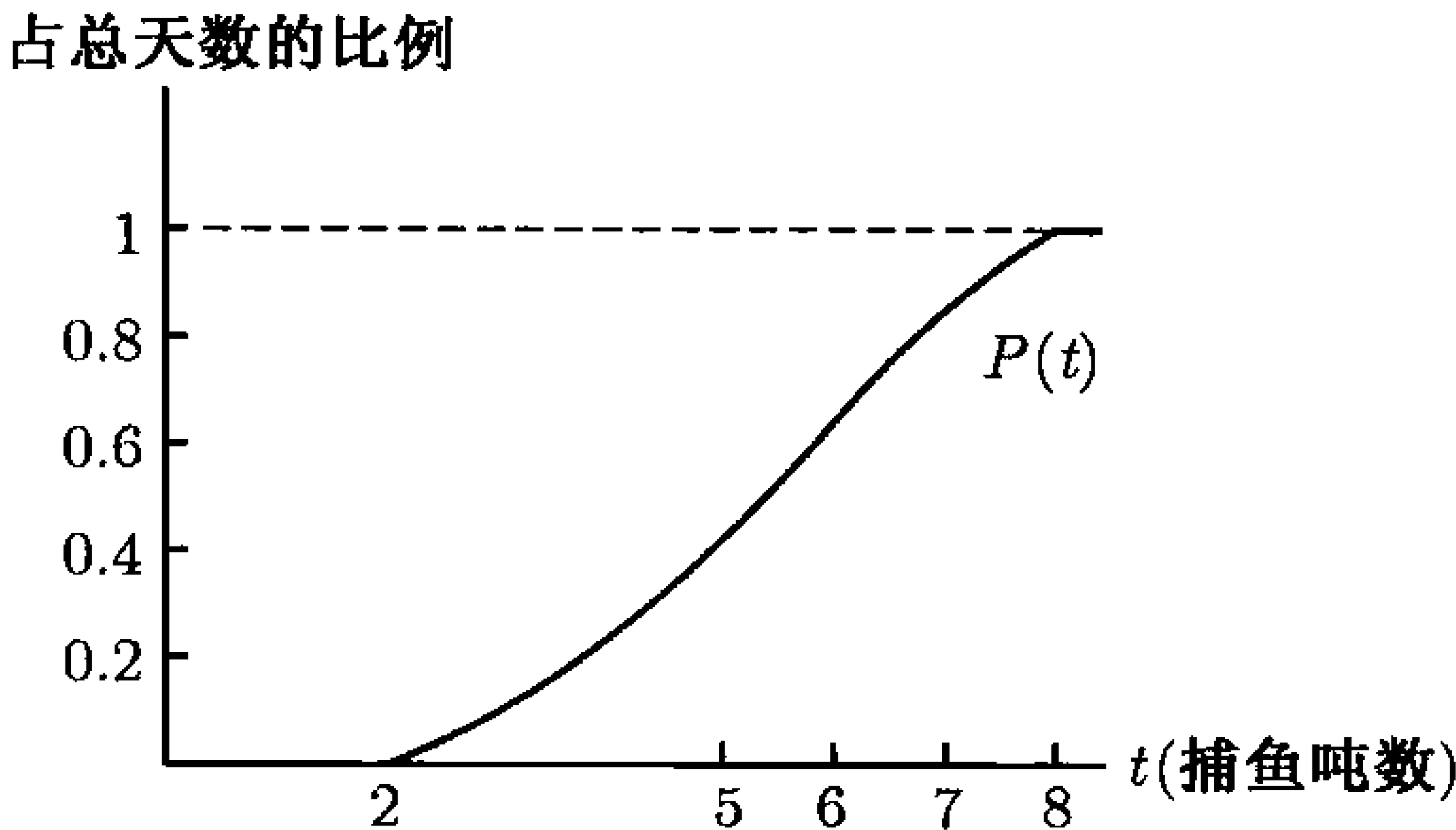


图 8-14　日捕鱼量的累积分布函数 $P(t)$

(b) 日捕鱼量在 5 到 7 吨之间的概率, 既可以利用密度函数 p 得到, 也可以利用分布函数 P 得到. 利用密度函数, 它可以用图 8-15 中的阴影区域的面积表示, 这个区域大约有 10.75 个方格, 于是

$$\begin{aligned}\text{日捕鱼量在 5~7 吨之间的概率} &= \int_5^7 p(x)\mathrm{d}x\approx 10.75 \text{ 个方格的面积}\\ &= 10.75(0.04)=0.43.\end{aligned}$$

利用累积分布函数, 其概率可以如下求得:

$$\text{日捕鱼量在 5~7 吨之间的概率 } = P(7)-P(5)=0.85-0.42=0.43.$$

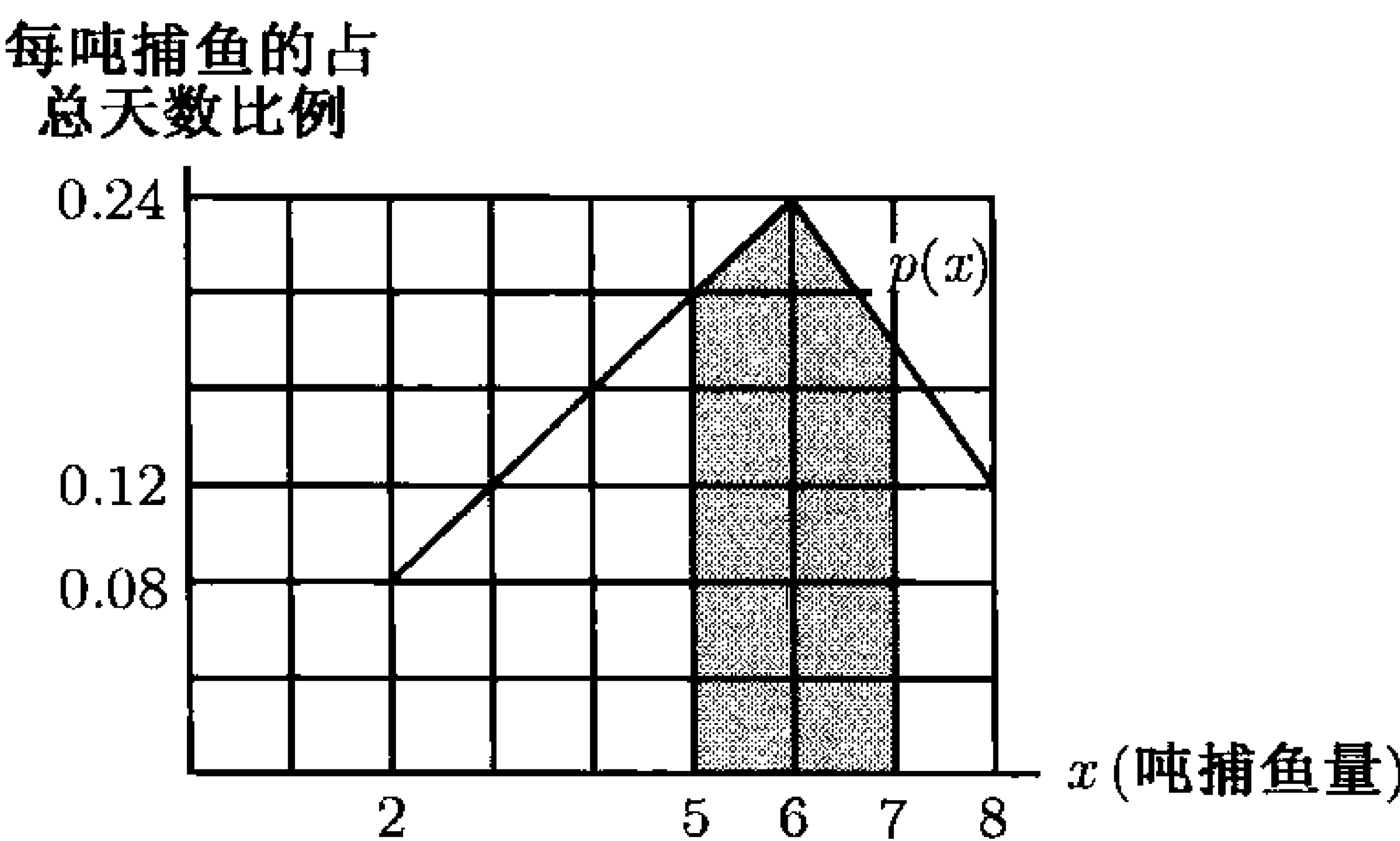


图 8-15　阴影区域的面积表示日捕鱼量在 5~7 吨之间的概率　□

习题

1. 国会的一个委员会正在调查一个国防承包商, 它承建的项目经常费用超支. 下表给出了费用超支最大为 C% 的项目占所有承建项目的比例 y.

(a) 在以 C 为水平轴的图上, 标出这些数据点. 表 8-7 给出的是密度函数, 还是累积分布函数? 画出经过这些点的一条曲线.

(b) 如果你认为在 (a) 中画出的是密度函数的图形, 在另一个坐标系中画出对应的累积分布函数的图形. 如果你认为在 (a) 中画出的是累积分布函数的图形, 那么请画出对应的密度函数的图形.

(c) 基于这张表, 费用超支在 50% 或 50% 以上的概率是多少? 费用超支在 20% 到 50% 之间的概率是多少? 费用超支最有可能在哪一个百分比附近?

C	−20%	−10%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
y	0.01	0.08	0.19	0.32	0.50	0.80	0.94	0.99

2. 针对一个草甸的草植物的高度, 图 8-16 和图 8-17 分别给出了密度函数和累积分布函数.

(a) 这个草甸上有两种草植物, 一种矮草, 一种高草. 说明密度函数的图形是如何反映这一事实的?

(b) 说明累积分布函数的图形是如何反映有两种草植物这一事实的?

(c) 这个草甸上矮草所占的草地比例大约是多少?

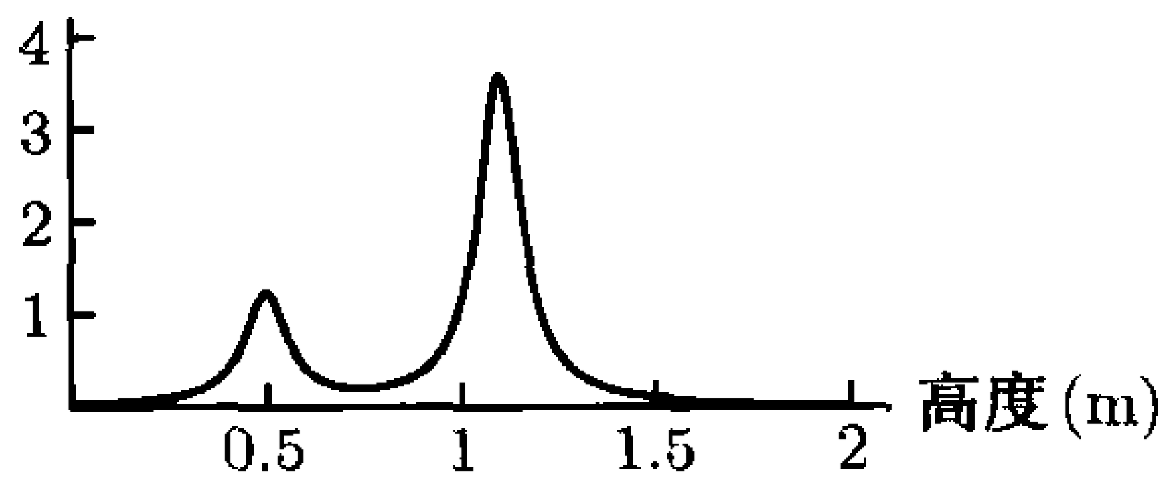


图 8-16

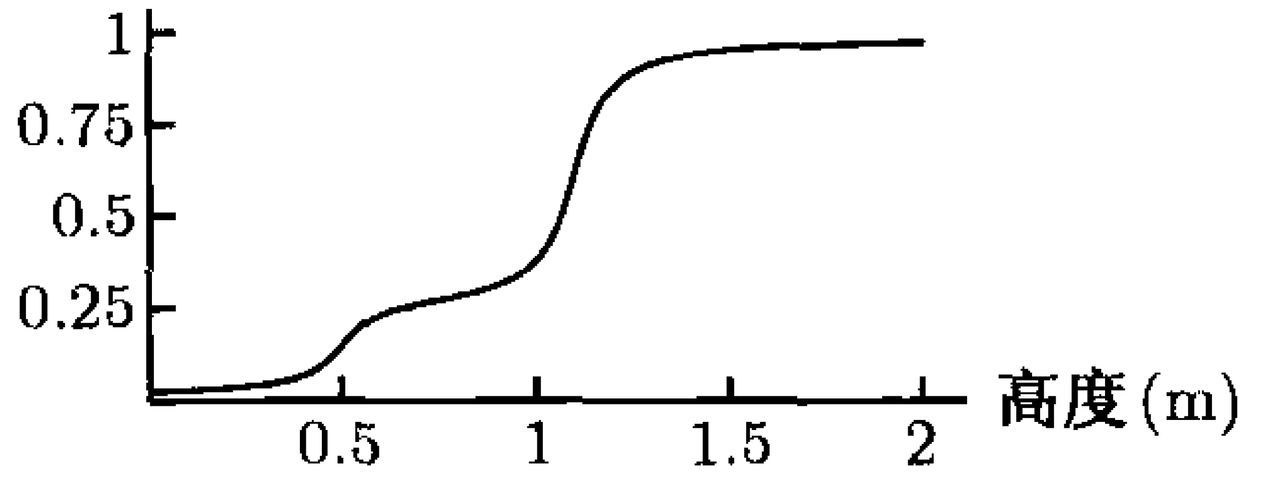


图 8-17

3. (a) 利用 8.1 节例 2 中给出的密度函数, 填写病人候诊时间的累积分布函数 $P(t)$ 的值.

t (小时)	0	1	2	3	4
$P(t)$ (候诊的病人比例)					

(b) 画出 $P(t)$ 的图形.

4. 在一次农业试验中, 统计了给定面积的田地的谷物产量. 这个产量可以是 0~50 kg 之间的任何值. 从给出的函数图形中, 挑选出最准确反映 (a), (b) 和 (c) 每种情形的:

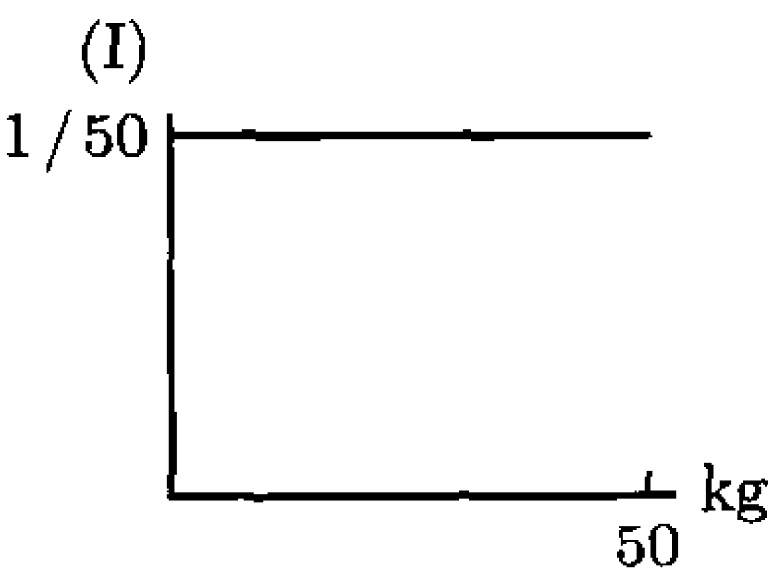
(i) 概率密度函数.

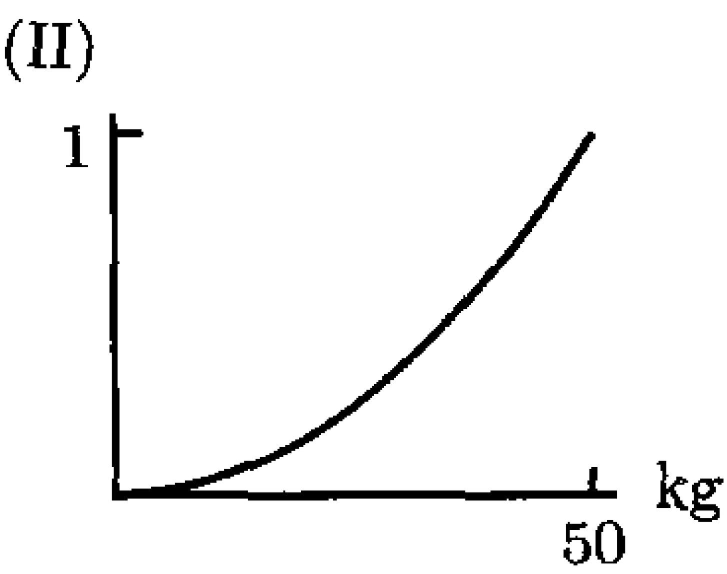
(ii) 累积分布函数.

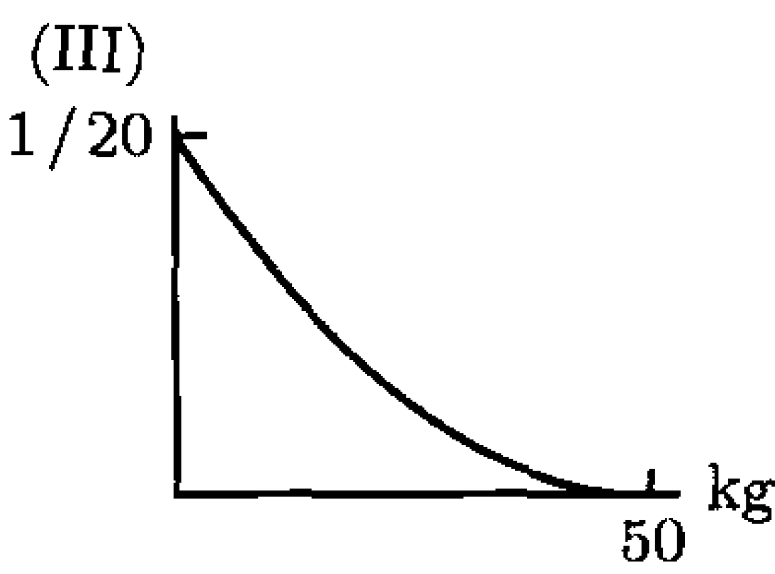
(a) 低产比高产更有可能.

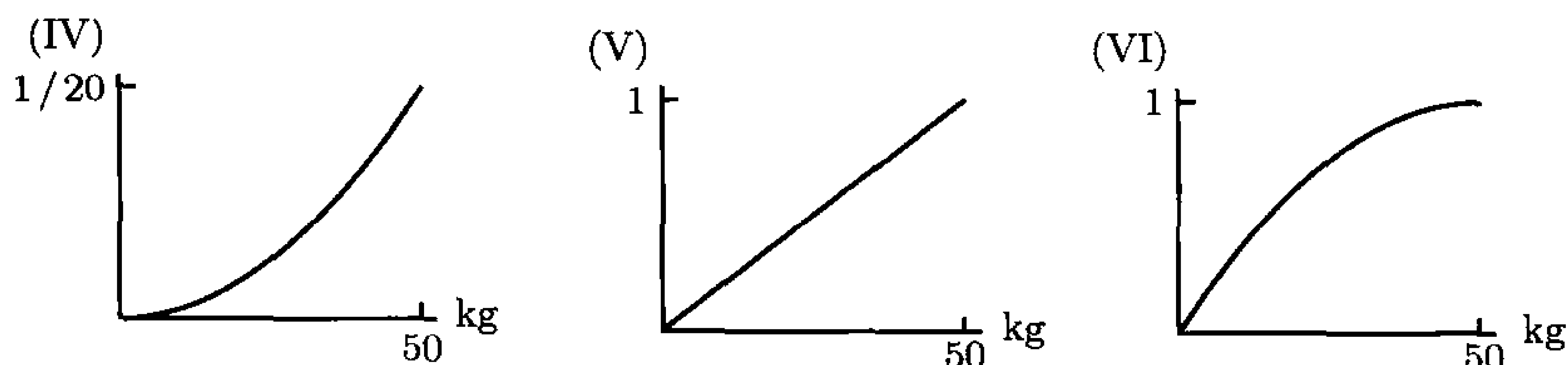
(b) 所有的产量都是等可能的.

(c) 高产比低产更有可能.









5. 说明图 8-13 中, 日捕鱼量的密度函数的图形的下方面积为 1, 为什么这是可以预期的?

6. 在一场暴风雨中, 雨滴的球面半径 r(mm) 的密度函数在 $0 < r < 5$ 的范围内是一个常数, 在其他点上均为 0.
   (a) 求半径的密度函数 $f(r)$.
   (b) 求累积分布函数 $F(r)$.

对习题 7~9, 画出密度函数和累积分布函数的图形, 对所给的特征群体, 它们可以表示群体上的收入分布.

7. 具有一个大规模的中产阶层.

8. 具有小规模的中上产阶层, 以及许多穷人.

9. 具有小规模的中产阶层, 以及许多穷人和富人.

10. 假设 $F(x)$ 是一片森林中树的高度 (单位: m) 的累积分布函数.
   (a) 从树群的角度, 解释 $F(7) = 0.6$ 的意义.
   (b) $F(6)$ 和 $F(7)$ 哪一个更大? 从树群的角度说明结论的合理性.

11. 人们已经得到报告, 同种药物的不同商品形式之间存在着严重的吸收差异. 一项研究比较了三种不同商品形式的缓释茶碱胶囊的吸收情况[①], 其中还引入了茶碱溶剂作为对照. 图 8-18 给出了累积分布函数 $P(t)$, 它表示截止时间为 t 时的药物吸收率. 哪一条曲线

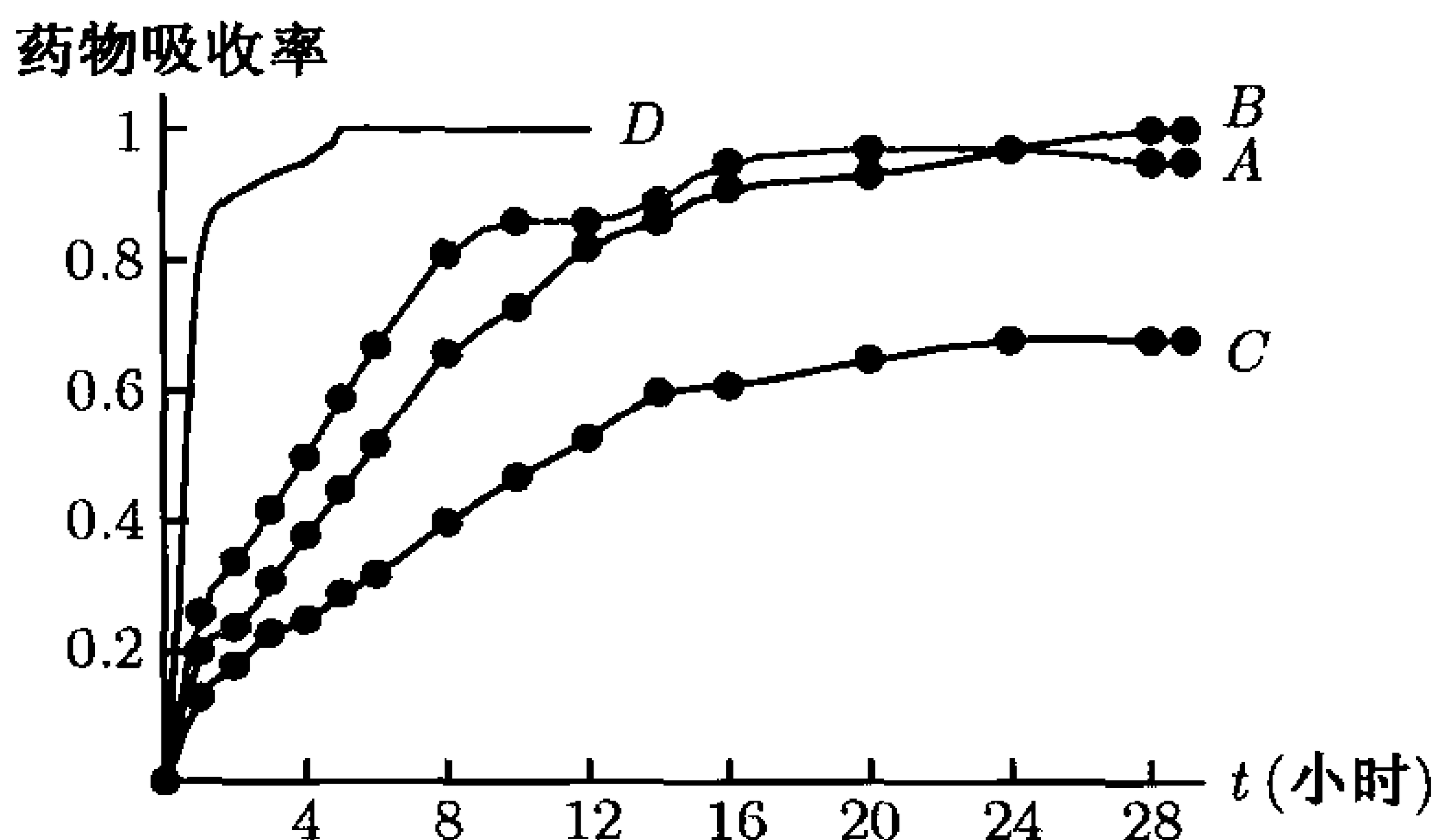


图 8-18

表示茶碱溶剂? 比较四种形式药物的吸收率.

12. 图 8-19 给出了截止时间为 t 时, 已售出的产品占产品清单的百分比 $P(t)$, 其中 t 以天计, 且 $t = 1$ 表示 1 月 1 日.
   (a) 第一件产品何时售出? 最后一件产品何时售出?
   (b) 到 5 月 1 日 (第 121 天), 已售出的产品占多大百分比?

① 《药物代谢进展》, Bridges and Chasseaud 有限公司 (纽约: 威莱出版社, 1980 年)

(c) 从 5 月到 6 月 (第 121 天到第 181 天), 售出的产品占清单的百分比大约是多少?

(d) 半年 (第 181 天) 过后, 还留在清单上的产品占多大百分比?

(e) 估计产品上市销售后维持在高峰时的时间.

13. 针对图 8-19 给出的累积分布函数, 画出密度函数的图形.

14. 为了确定两种新的肥料 A, B 对某种豌豆生长的影响, 进行了一项试验. 针对没有施肥的, 以及分别施用 A, B 肥料的成熟豌豆的高度, 图 8-20 给出了累积分布函数的图形.

(a) 大多数没有施肥的豌豆的高度大概是多少?

(b) 用语言解释肥料 A, B 对成熟的豌豆高度的影响.

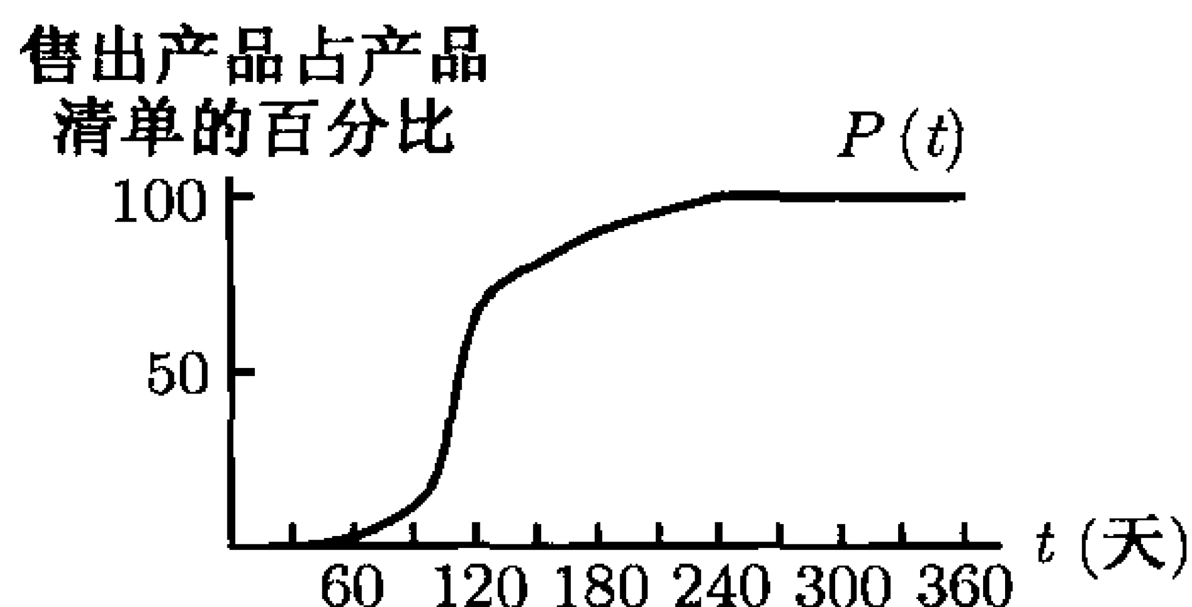


图 8-19

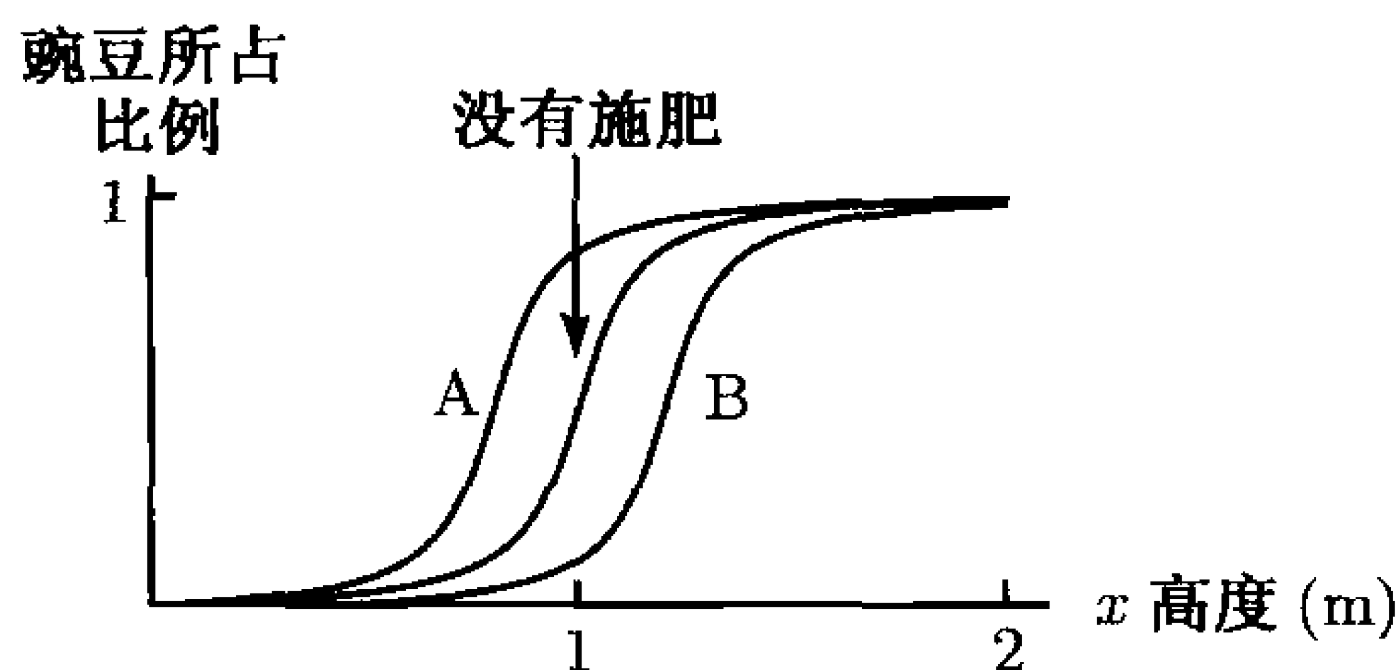


图 8-20

15. 在记录了许多电话的通话时间以后, 电话公司发现, 这些数据可以用密度函数 $p(x) = 0.4e^{-0.4x}$ 来恰当近似, 这里 x 为通话的时间, 它的单位是分钟.

(a) 电话通话的时间在 1 到 2 分钟间的百分比是多少?

(b) 电话通话的时间不超过 1 分钟的百分比是多少?

(c) 电话通话的时间在 3 分钟以上的百分比是多少?

(d) 求出累积分布函数.

16. 一批病人因癌症接受了治疗, 假设 t 是生存时间, 它是病人接受治疗以后存活的年数. t 的分布由密度函数 $p(t) = Ce^{-Ct}$ 确定, 其中 C 为某个正常数. 累积分布函数 $P(t) = \int_0^t p(x)\mathrm{d}x$ 的实际意义是什么?

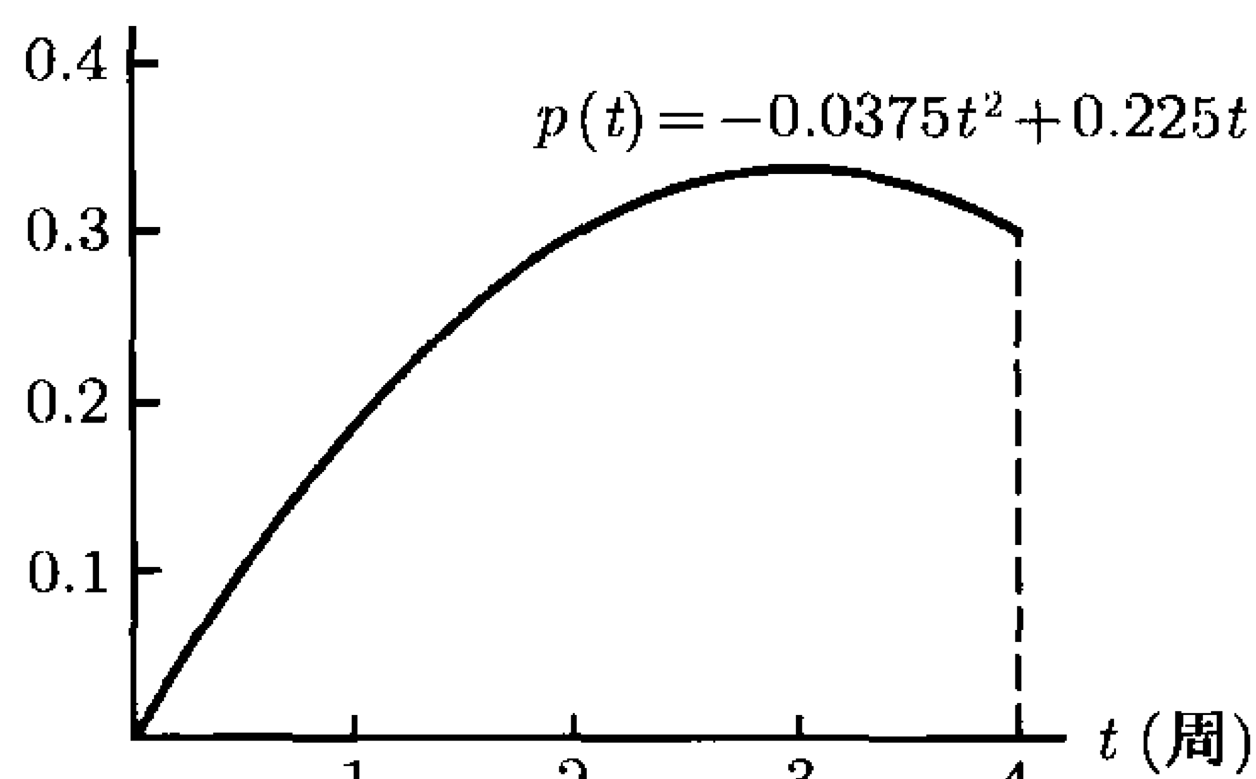


图 8-21

对习题 17 和 18, 假设 $p(t) = -0.0375t^2 + 0.225t$ 是一种香蕉储存期限的密度函数, 这里 t 是以周计的时间, 且 $0 \leqslant t \leqslant 4$. 参见图 8-21.

17. 求香蕉储存期限处于下列时间的概率

(a) 介于 1 周至 2 周之间.

(b) 3 周以上.

(c) 4 周以上.

18. (a) 画出香蕉储存期限的累积分布函数的图形. (注意: 函数范围应该是所有实数, 包括 $t = 0$ 的左侧和 $t = 4$ 的右侧的所有实数.)

(b) 利用累积分布函数, 估计香蕉储存期限介于 1 周至 2 周之间的概率, 用 17(a) 验证结果.

8.3 中位数和均值

对一个分布给出"平均值", 往往是非常有用的. 通常采用的两个"平均值"是**中位数和均值**.

中位数

> 分布在一个总体上的数值特征 x 的**中位数**, 定义为一个值 T, 它能够使得半数总体的 x 小于 (或等于) T, 半数总体的 x 大于 (或等于) T. 这样, 如果 p 是密度函数, 中位数 T 满足
>
> $$\int_{-\infty}^{T} p(x)\mathrm{d}x = 0.5.$$
>
> 也就是说, p 的图形下方的区域的一半位于 T 的左侧. 等价地, 如果 P 是累积分布函数, 则有
>
> $$P(T) = 0.5.$$

例 1 假设 t 是一套牛仔服卖出前滞留在商店中的时间, 图 8-22 图示了 t 的密度函数, 其函数关系是

$$p(t) = 0.04 - 0.0008t.$$

(a) 一套牛仔服卖出前滞留在商店中的最长时间是多少?

(b) 你预计牛仔服卖出前滞留的中位时间会小于 25 天, 等于 25 天, 还是大于 25 天?

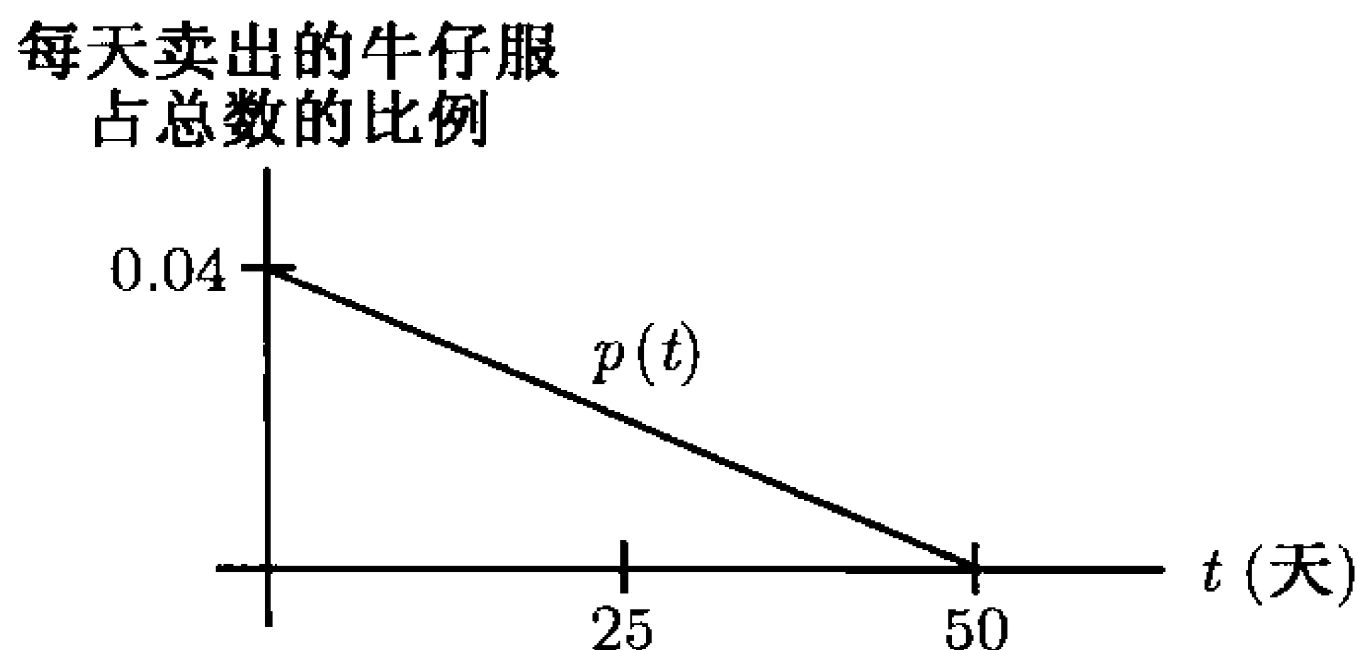


图 8-22 牛仔服卖出前滞留时间的密度函数

(c) 求卖出一套牛仔服需要的中位时间.

解 (a) 对一切 $t > 50$, 密度函数都为 0, 因此所有的牛仔服都会在 50 天内卖出.

(b) 密度函数的图形介于区间 $0 \leqslant t \leqslant 25$ 的下方区域的面积, 大于介于区间 $25 \leqslant t \leqslant 50$ 的下方区域的面积, 因此, 半数以上的牛仔服会在商店的第 25 天之前卖出, 卖出前滞留的中位时间会小于 25 天.

(c) 假设 P 是累积分布函数, 我们需要求出 T 的值, 使得

$$P(T)=\int_{-\infty}^{T}p(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}p(t)\mathrm{d}t=0.5.$$

利用计算器求出积分, 得到 P 的值, 如表 8-7 所示.

表 8-7 卖出时间的累积分布函数

T(天)	0	5	10	15	20	25
$P(T)$ (截止 T 天时卖出牛仔服占的比例)	0	0.19	0.36	0.51	0.64	0.75

由于近半数的牛仔服在 15 天内卖出, 卖出的中位时间大约是 15 天, 参见图 8-23 和图 8-24. 我们也可以利用微积分基本定理精确地求出中位时间, 参见习题 11.

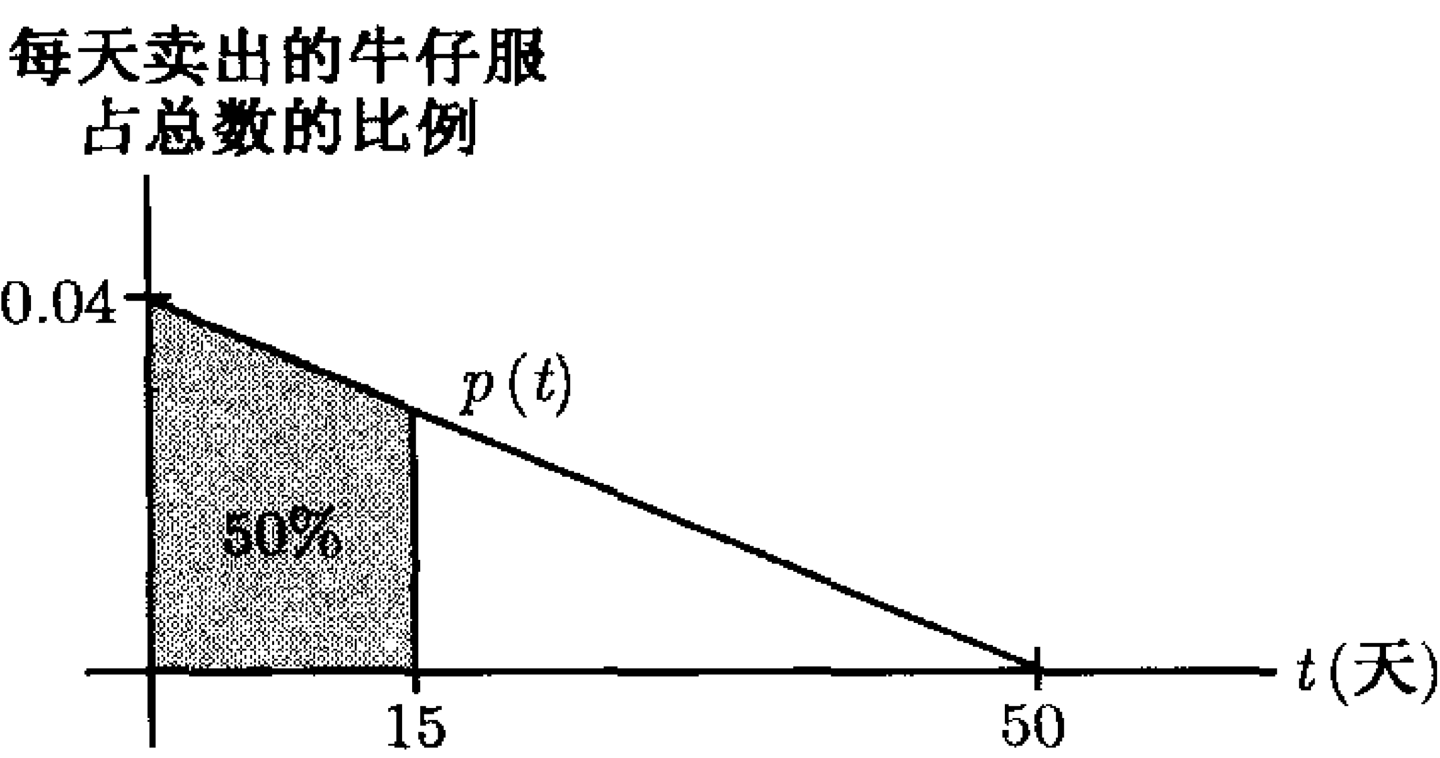


图 8-23 中位数和密度函数

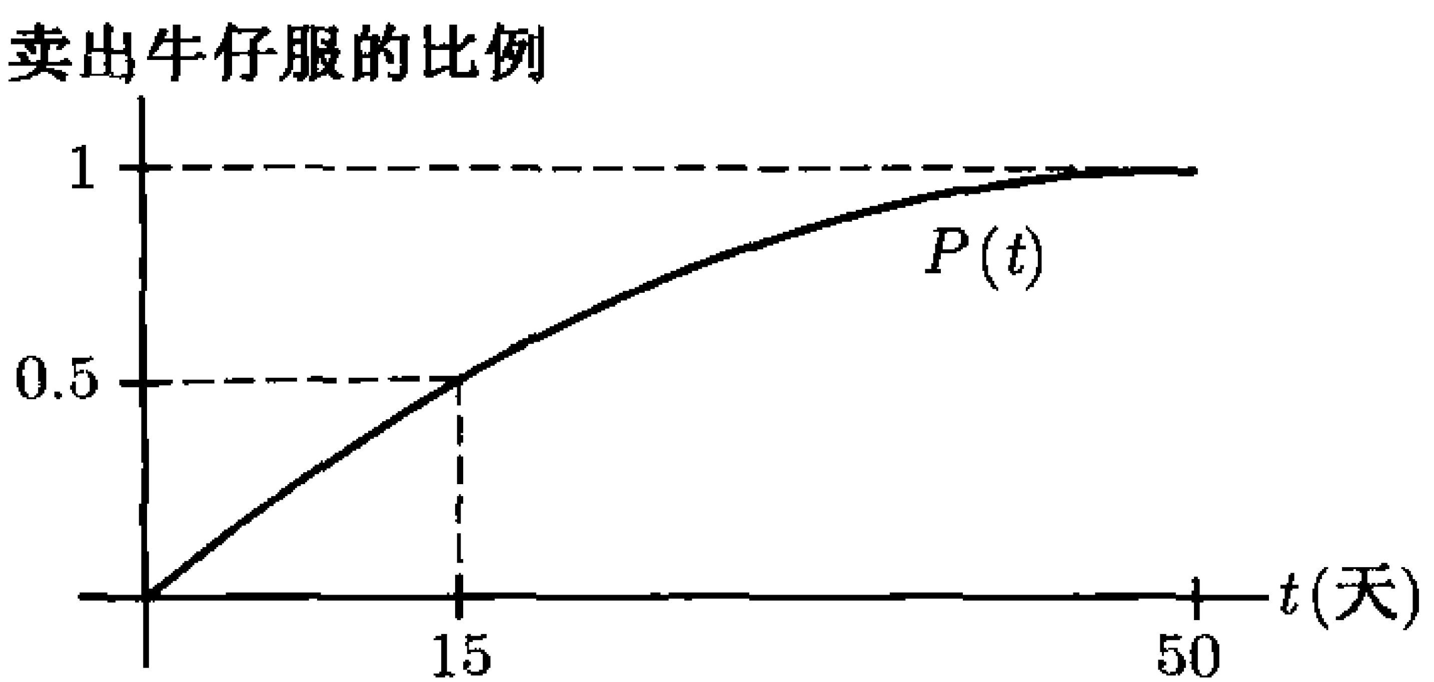


图 8-24 中位数和累积分布函数 □

均值

另一个常用的平均值是均值. 为了求出 N 个数的均值, 我们将它们相加后除以 N. 例如, 1, 2, 7 和 10 的均值是 $(1+2+7+10)/4=5$. 整个美国人口的均值年龄因而可以定义为

$$\text{均值年龄}=\frac{\sum \text{所有美国人的年龄}}{\text{美国人口总数}}.$$

直接计算所有人的年龄和会是一件庞大的工作; 我们利用积分来近似. 考虑年龄在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的那些人, 他们有多少呢?

年龄在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的人口比例, 等于 p 的图形介于这些点之间的下方区域的面积, 这个面积可以用矩形的面积 $p(t)\Delta t$ 来近似. (参见图 8-25.) 假设人口总数是 N, 那么

$$\text{年龄在 } t \text{ 与 } t+\Delta t \text{ 之间的人数} \approx p(t)\Delta t N.$$

这些人中每一个的年龄都近似为 t, 于是

$$\text{年龄在 } t \text{ 与 } t+\Delta t \text{ 之间的人的年龄和} \approx tp(t)\Delta t N.$$

因此, 相加并提出 N, 我们得到

$$\text{所有人的年龄和} \approx \left(\sum tp(t)\Delta t\right)N.$$

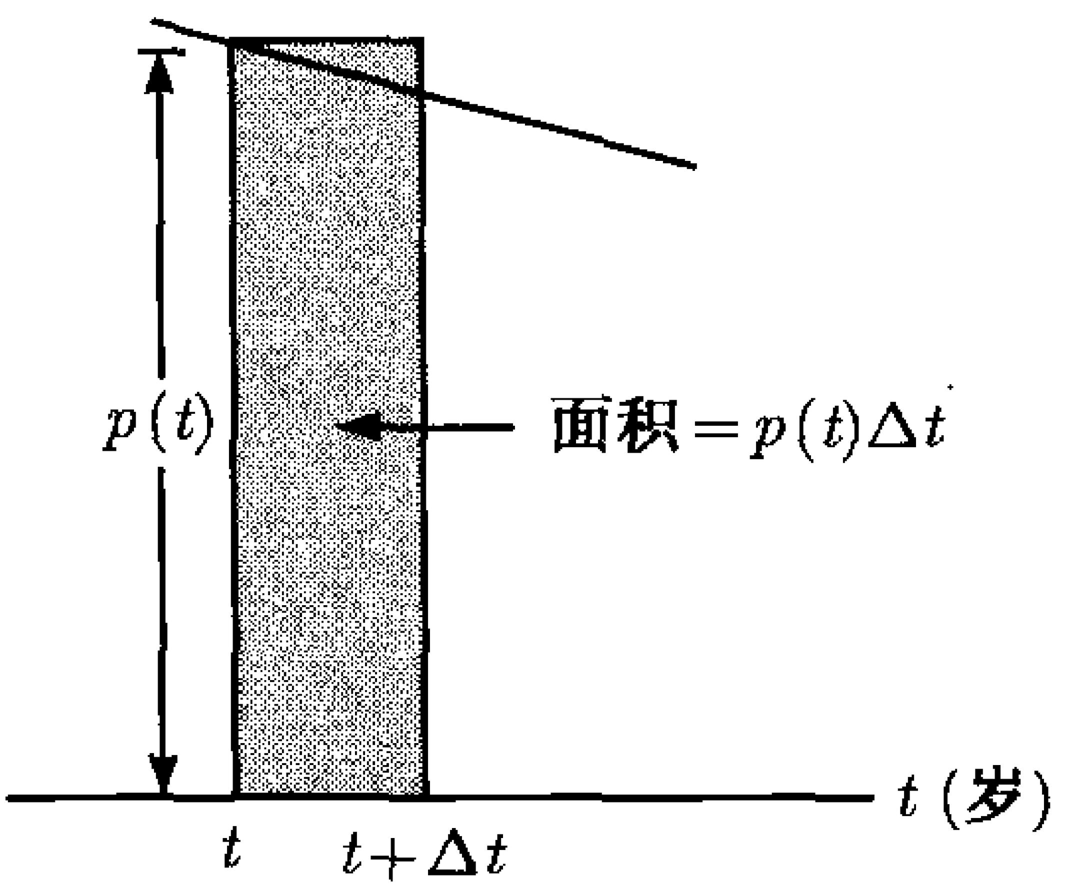


图 8-25 阴影区域的面积等于年龄在 t 与 $t+\Delta t$ 之间的人口比例

当 Δt 趋于 0, 取极限随着 Δt 向 0 收缩, 其和变成一个积分. 假设所有人的年龄都不超过 100 岁, 我们得到

$$\text{所有人的年龄和} = \left(\int_0^{100} tp(t)\mathrm{d}t\right) N.$$

由于 N 是美国的人口总数, 所以

$$\text{均值年龄} = \frac{\text{所有美国人的年龄和}}{N} = \int_0^{100} tp(t)\mathrm{d}t.$$

对任何一个密度函数 $p(x)$[①], 我们可以给出同样的论证.

> 假设一个数值特征具有密度函数 $p(x)$, 则
>
> $$\text{数值特征的**均值**} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\mathrm{d}x.$$

可以说明均值是水平轴上的点, 在那个点处密度函数图形下方的区域, 如果假定由硬纸板做成, 将会保持平衡.

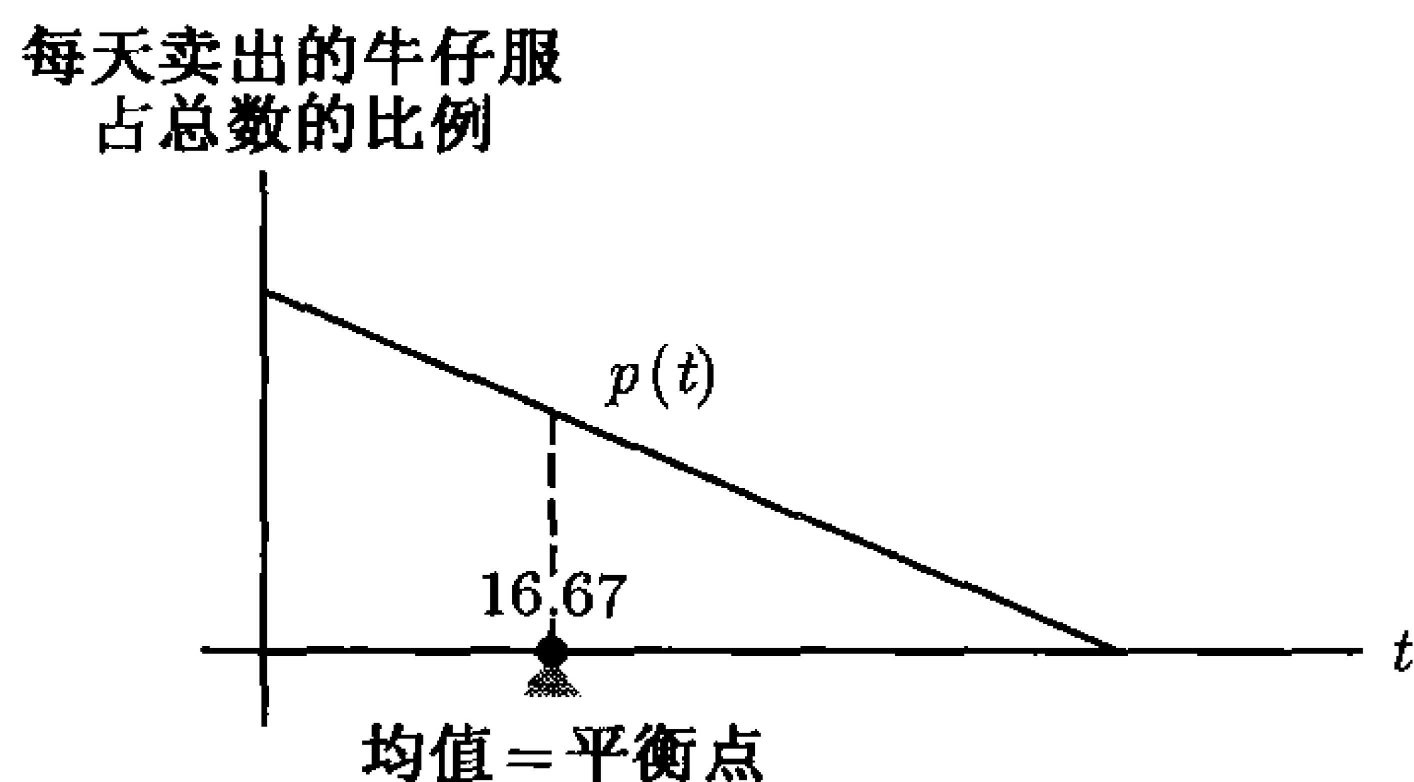


图 8-26 牛仔服的平均销售时间

例 2 利用例 1 中的密度函数, 求牛仔裤销售的均值时间.

解 p 的表达式是 $p(t) = 0.04 - 0.0008t$, 我们计算

$$\text{均值时间} = \int_0^{50} tp(t)\mathrm{d}t = \int_0^{50} t(0.04 - 0.0008t)\mathrm{d}t = 16.67 \text{ 天}.$$

均值时间作为平衡点, 标出在图 8-26 上. 注意均值时间和例 1 中求得的中位时间是不同的. □

正态分布

你预计今年家乡的降雨量会是多少? 如果你生活在美国阿拉斯加的安克雷齐, 答案是接近于 15 in(包括降雪). 当然, 你不要完全指望恰好是 15 in. 有些年降雨量会超过 15 in, 有些年会低于 15 in. 然而, 大多数年份的降雨量会接近于 15 in, 仅有极少年份的降雨量会大大高于或低于 15 in. 从图形上看降雨量的密度函数会是什么样的呢? 为了回答这个问题, 我们来考察历年的降雨量数据. 记录显示, 降雨量的分布可以很好地用一个*正态分布*近似, 它的密度函数的图形是一个铃状的曲线, 曲线的极值在 15 in 处达到, 且近似对称地沿着两侧倾斜下降.

正态分布经常用于模型化实际问题, 这些问题可以是一次考试的分数, 一条特

① 假设所有相关的反常积分都是收敛的.

殊航线上的飞机乘客数量等等. 一个正态分布可以用它的**均值** μ 和**标准差** σ 来刻画. 均值指出了中心顶峰的位置, 标准差说明了数据围绕均值聚集的程度. σ 越小数据会越靠近均值; σ 越大数据会越分散. 下面给出正态分布的密度函数, 其中 $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ 部分是为了确保图形下方的面积等于 1.

> **正态分布**具有密度函数
> $$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)},$$
> 其中 μ 是分布的均值, σ 为标准差, 且 $\sigma>0$.

我们利用 $\mu=15, \sigma=1$ 的正态分布, 来刻画安克雷齐的降雨量. (参见图 8-27.)

例 3　针对安克雷齐的降雨量, 利用 $\mu=15, \sigma=1$ 的正态分布, 计算降雨量落在下列范围的年份的所占比例.

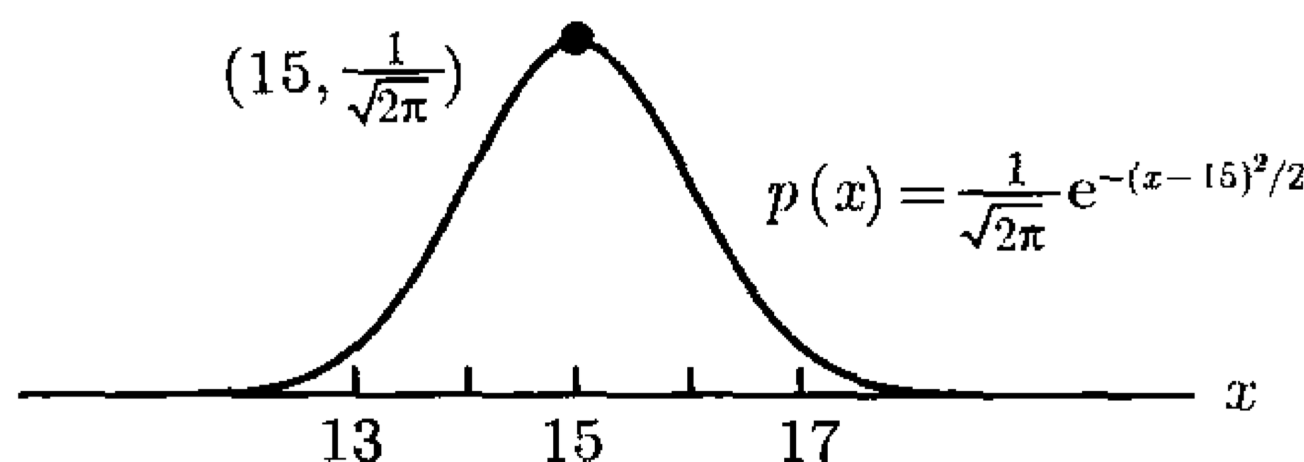


图 8-27　$\mu=15, \sigma=1$ 的正态分布

(a) 14~16 in,　　(b) 13~17 in,　　(c) 12~18 in.

解　(a) 年降雨量在 14~16 in 的年份所占比例是 $\int_{14}^{16}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-15)^2/2}\mathrm{d}x$. 由于 $\mathrm{e}^{-(x-15)^2/2}$ 没有初等的原函数, 我们从数值上计算积分, 得到它的值大约是 0.68.

$$\text{年降雨量在 14~16 in 的年份所占比例}=\int_{14}^{16}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-15)^2/2}\mathrm{d}x\approx 0.68.$$

(b) 再次从数值上计算积分, 得到:

$$\text{年降雨量在 13~17 in 的年份所占比例}=\int_{13}^{17}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-15)^2/2}\mathrm{d}x\approx 0.95.$$

(c)

$$\text{年降雨量在 12~18 in 的年份所占比例}=\int_{12}^{18}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-15)^2/2}\mathrm{d}x\approx 0.997.$$

由于 0.95 很接近于 1, 我们预计大多数年份的降雨量会在 13~17 in 之间.　□

在所有正态分布中, $\mu=0, \sigma=1$ 的正态分布称为**标准正态分布**, 它对应的累积分布函数的值列出在表中.

习题

1. 针对 8.2 节例 2 中给出的捕鱼量数据, 估计日捕鱼量的中位数.

2. (a) 利用图 8-28 给出的累积分布函数, 估计中位数.
   (b) 描述对应密度函数的特征: 在哪些点上, 密度函数是正的? 在哪些点上, 是单调递增的? 在哪些点上, 是单调递减的? 指出所有的局部最大值和局部最小值.

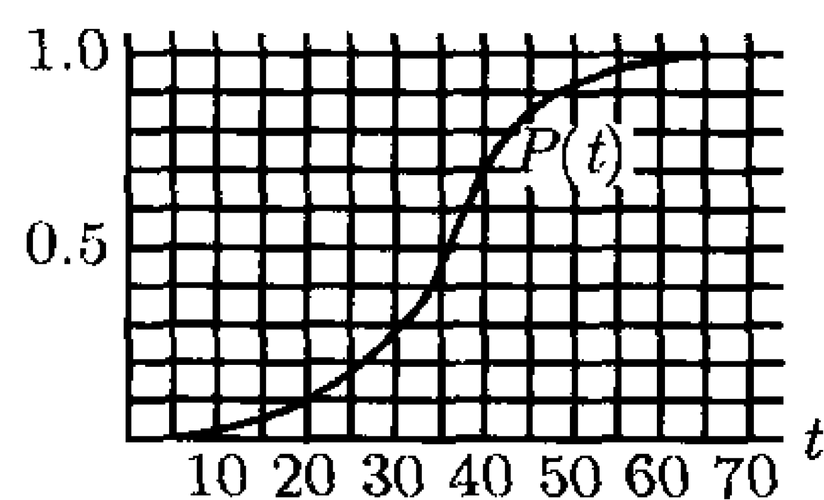


图 8-28

对习题 3 和 4, 假设 $p(t) = -0.0375t^2 + 0.225t$ 是一种香蕉储存期限的密度函数, 这里储存期限一直持续到 4 个星期, t 是以周计的时间, 且 $0 \leqslant t \leqslant 4$.

3. 利用 $p(t)$ 求出香蕉储存期限的中位数, 并在 $p(t)$ 的图形上标出这个中位数. $p(t)$ 的图形看起来是否一半在它的左边, 一半在它的右边?
4. 利用 $p(t)$ 求出香蕉储存期限的均值, 并在 $p(t)$ 的图形上标出这个均值. $p(t)$ 的图形看起来是否在均值处平衡?
5. 设 $p(t) = 0.1\mathrm{e}^{-0.1t}$ 是一个地铁站候车时间的密度函数, 这里 t 的单位是分钟, $0 \leqslant t \leqslant 60$.
   (a) 画出 $p(t)$ 的图形, 利用图形直观估计中位数和均值.
   (b) 求出中位数和均值, 把它们都标出在 $p(t)$ 的图形上.
   (c) 根据候车时间解释中位数和均值的意义.
6. 1950 年人们进行了一项试验, 观察在 Arrogo Seco 高速公路上连续经过的的汽车时间间隔. 试验数据[①]表明: 假设 x 是以秒计的时间且 $0 \leqslant x \leqslant 40$, 那么时间间隔的密度函数是

$$p(x) = 0.122\mathrm{e}^{-0.122x}.$$

   求时间间隔的中位数和均值, 从高速公路上行驶汽车的角度来解释它们的意义.
7. 假设 x 记录的是学生在一次考试中的所用时间 (单位: h), 所有学生都在 2 h 内做完. x 的密度函数是

$$p(x) = \begin{cases} x^3/4 & \text{若 } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

   (a) 有多大比例的学生考试用时在 1.5~2.0 h 之间?
   (b) 学生完成考试所用时间的均值是多少?
   (c) 计算这个分布的中位数.
8. 假设 $P(x)$ 是 1973 年美国的收入 (以千美元计) 分布的累积分布函数, 下表给出了 $P(x)$ 的一些值:

收入 x (千美元)	1	4.4	7.8	12.6	20	50
$P(x)$(%)	1	10	25	50	75	99

   (a) 收入在 20 000 美元到 50 000 美元之间的人占多大的人口比例?
   (b) 收入的中位数是多少?
   (c) 针对这个分布, 画出密度函数的图形. 密度函数近似在什么地方取得最大值? 从收入分布的角度来看, 这个点有什么重要意义? 怎样从密度函数和累积分布函数的图形上找出这个点?

① Daniel Furlough 和 Frank Barnes 报道.

9. 智商 IQ 分值的分布可以利用一个均值为 100, 标准差为 15 的正态分布来刻画.

(a) 写出 IQ 分值的密度函数的表达式.

(b) 估计 IQ 分值在 115~120 的人所占的人口比例.

10. 一条公路上的汽车速度近似服从均值 $\mu = 58$ km/h, 及标准差 $\sigma = 4$ km/h 的正态分布.

(a) 随机选出一辆汽车, 它正以 60~65 km/h 的速度行驶的概率是多少?

(b) 所有汽车中, 正以低于 52 km/h 的速度行驶的汽车占多大比例?

11. 给定密度函数 $p(t) = 0.04 - 0.0008t$, 其中 $0 \leqslant t \leqslant 50$, 利用微积分基本定理求出中位数.

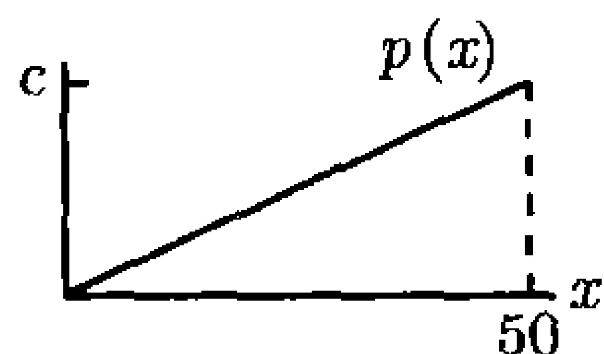
本章概要

- **密度函数**
- **累积分布函数**
- **概率**
- **中位数**
- **均值**
- **正态分布**

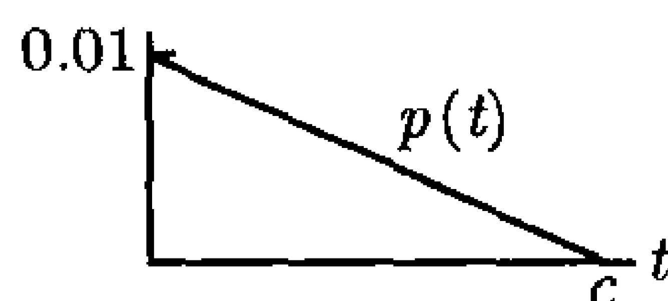
复 习 题

对习题 1~4, 假设 p 为密度函数, 计算 c 的值.

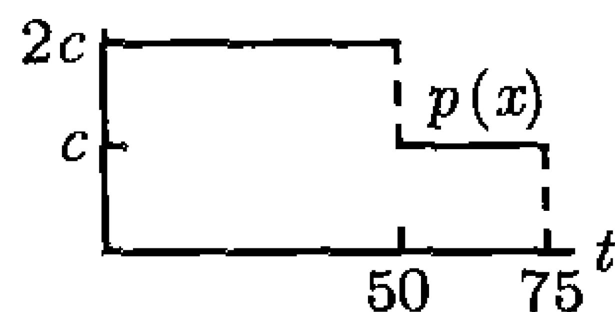
1.



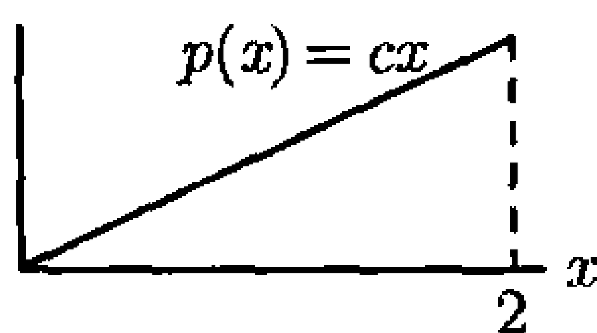
2.



3.



4.



5. 假设 $p(x)$ 是美国人身高 (单位: in) 的密度函数, 表述 $p(68) = 0.2$ 的意义是什么?

6. 很多人参加了一次标准化测试, 他们获得的分数可以用密度函数 p 来描述, p 的图形由图 8-29 给出. 密度函数是否暗示着大多数人的得分在 50 附近? 解释原因.

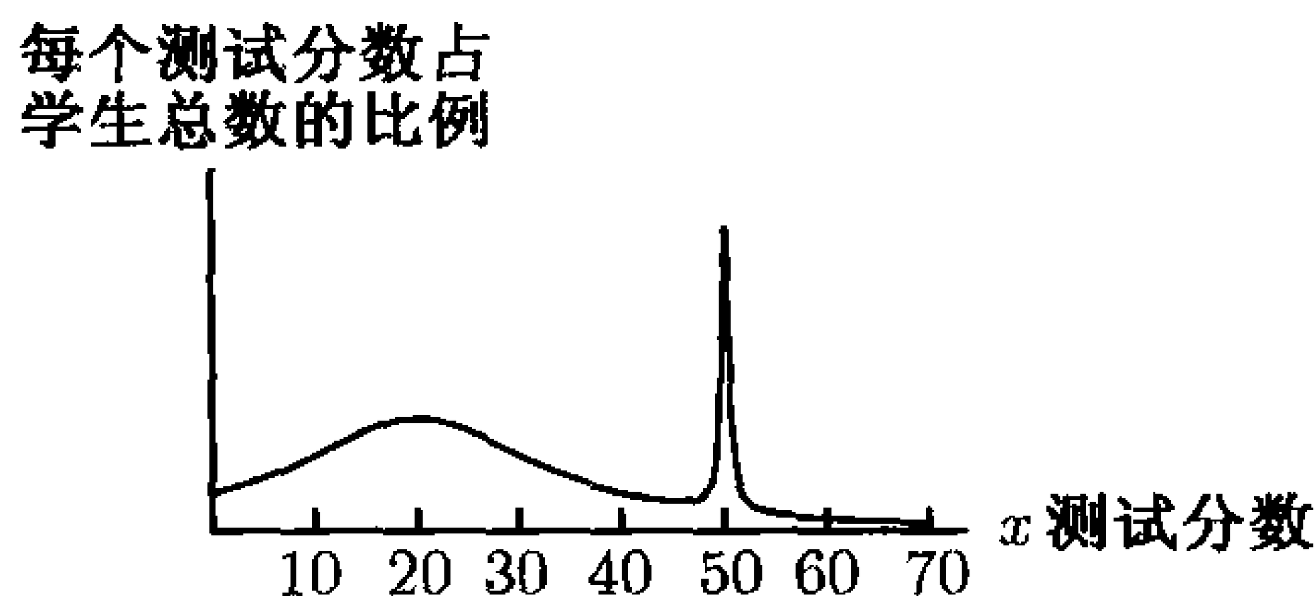


图　8-29

7. 一种机器可以持续工作 10 年, 图 8-30 给出了它持续工作时间的密度函数 $p(t)$ 的图形.

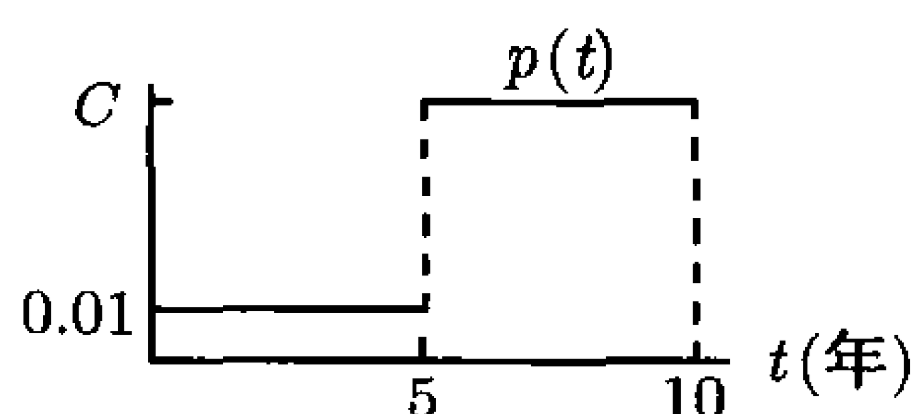


图 8-30

(a) C 的值是多少?

(b) 机器停止的时间, 最有可能是在它的第 1 年还是第 10 年? 在第 1 年还是第 2 年?

(c) 持续工作时间不超过 2 年的机器比例是多少? 5 至 7 年的比例是多少? 3 到 6 年的比例是多少?

8. 针对下一个顾客走进商店的时间 t(单位: 分钟, 起始时间为 $t=0$), 下面函数中, 哪一个作为 t 的密度函数时模型最有意义?

(a) $p(t)=\begin{cases}\cos t & 0\leqslant t\leqslant 2\pi\\ e^{t-2\pi} & t\geqslant 2\pi\end{cases}$

(b) $p(t)=3e^{-3t}$, $t\geqslant 0$

(c) $p(t)=e^{-3t}$, $t\geqslant 0$

(d) $p(t)=1/4$, $0\leqslant t\leqslant 4$

9. 一个人经常早上 9:00 乘坐巴士从奥克兰到旧金山. 他报告说, 巴士经常晚点几分钟, 但很少晚点超过 5 分钟. 只在非常罕见的情况下, 巴士才会提早到, 但是提早从未超过两分钟.

(a) 画出一个密度函数 $p(t)$ 的图形, 这里 t 是巴士晚点的时间, 单位是分钟. 将图形介于 $t=2$ 分钟与 $t=4$ 分钟之间的下方区域涂上阴影, 说明阴影区域所表示的意义.

(b) 现在, 画出累积分布函数 $P(t)$ 的图形. 在这个图形上, 如何度量对应的阴影区域的面积? P 图形上的拐点在 p 的图形上的对应是什么? 不用涉及 p 的图形, 解释 P 图形上的拐点的意义.

10. 图 8-31 给出了密度函数和它对应的累积分布函数的图形.①

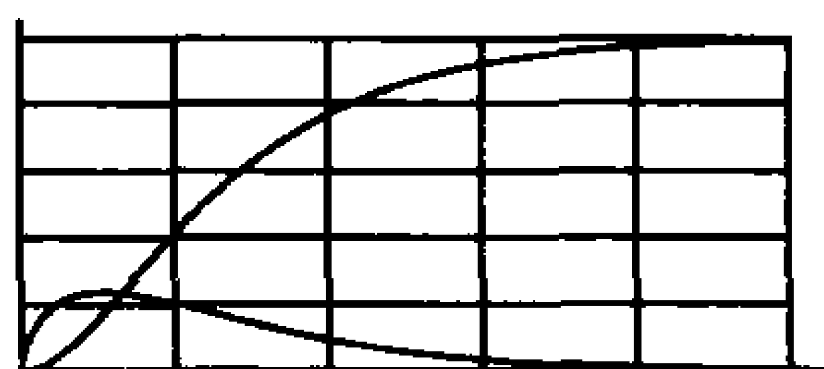
(a) 哪一条曲线表示密度函数? 哪一条曲线表示累积分布函数? 说明理由.

(b) 给出每一个轴的标记, 并标注合理的数值.

11. 加利福尼亚大学的学生接受了调查, 提供了他们的平均积分点 GPA. (GPA 从 2 分到 4 分, 其中 2 分为刚刚通过.) 图 8-32 给出了 GPA 的分布.②

(a) 通过的学生大约占多大比例?

(b) 大约有多大比例的学生获得了奖学金 (GPA 在 3 分以上)?


图 8-31

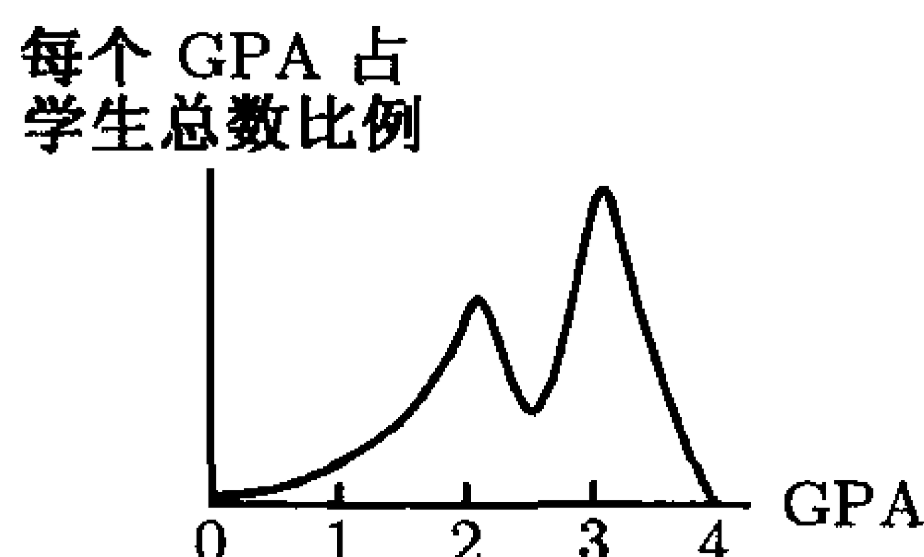


图 8-32

① 改编自《微积分》, David A. Smith 和 Lawerence C. Moore 著 (列克星敦: D. C. Heath, 1994 年).

② 改编自《统计学》, Freedman、Pisani、Purves 和 Adikhari 著 (纽约: 诺顿. 1999 年).

(c) 在 2 附近出现了一个极值, 你认为这是为什么?

(d) 画出累积分布函数的草图.

12. 在瑞士南部, 大多数的降雨发生在春季和秋季; 夏天和冬天则相对干燥. 针对一年之中的降雨量的分布, 画出可能的密度函数和累积分布函数的图形, 在水平轴上标出数值, 在垂直轴上标出年降雨量的所占比例.

13. 一个晶体管在 $t = a$ 月到 $t = b$ 月间失效的概率为 $c\int_a^b e^{-ct}dt$, 其中 c 为常数.

(a) 如果它在最初 6 个月内失效的概率为 10%, c 是多少?

(b) 假设 c 是 (a) 中的值, 那么它在随后的 6 个月内失效的概率是多少?

14. 你沿着你家附近的公路散步, 偶然丢掉手套, 而你却并不知道丢在哪. 假设手套在距家 x(km) 处 (沿着公路) 丢掉的概率密度函数 $p(x)$ 为

$$p(x) = 2e^{-2x}, \quad x \geqslant 0.$$

(a) 你在距家 1 km 以内的地方丢掉手套的概率是多少?

(b) 假设你在距家 y km 以内的地方丢掉手套的概率是 0.95, 那么 y 是多少?

对习题 15~19, 分布在总体上的一个数值特征 x, 具有密度函数 $p(x)$ 和累积分布函数 $P(x)$. 判断 15~19 中的叙述是否正确, 给出你的解释.

15. 如果 $p(10) = 1/2$, 那么对半数个体, 有 $x < 10$.

16. 如果 $P(10) = 1/2$, 那么对半数个体, 有 $x < 10$.

17. 如果 $p(10) = 1/2$, 那么介于 $x = 9.98$ 到 $x = 10.04$ 之间的总体比例大约是 0.03.

18. 如果 $p(10) = p(20)$, 那么没有任何总体比例的个体, 其数值特征 x 介于 10 到 20 之间.

19. 如果 $P(10) = P(20)$, 那么没有任何总体比例的个体, 其数值特征 x 介于 10 到 20 之间.

课外自修项目

三角形概率分布

三角形概率分布常常用于商业上的建模来刻画不确定性. 图 8-33 给出了三角概率分布的密度函数的图形. 这样一种分布, 经常可以用于某种量的建模. 这个量仅有 3 处信息可以获得: 下界 ($x = a$) 处, 一个最可能值 ($x = c$) 处以及上界 ($x = b$) 处.

这样, 我们可以用两个线性函数来表示 $p(x)$:

$$p(x) = \begin{cases} m_1x + b_1 & a \leqslant x \leqslant c \\ m_2x + b_2 & c < x \leqslant b. \end{cases}$$

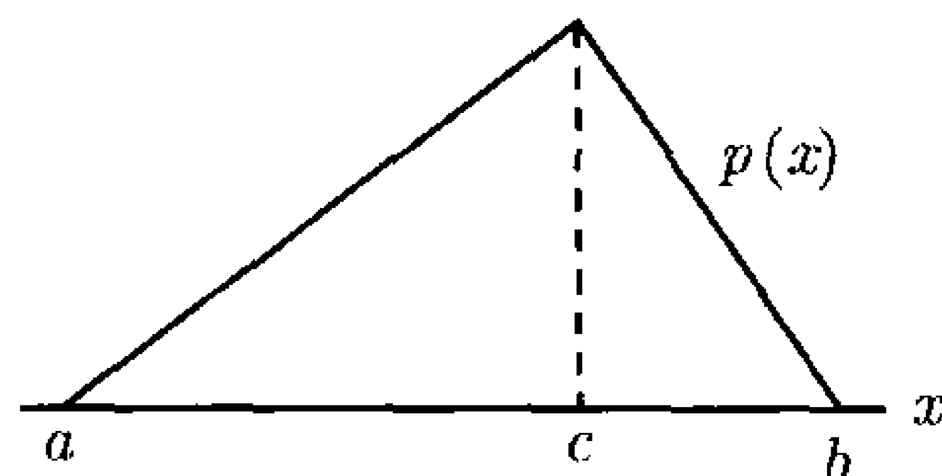


图 8-33

(a) 利用 x 取值介于 a 到 b 的概率为 1 这样一个准则, 从几何上求出 $p(c)$ 的值.

假设制造一种新产品的单位成本是 6 美元到 10 美元之间, 最可能的成本是 9 美元.

(b) 求 $p(9)$.

(c) 利用 $p(6) = p(10) = 0$ 及 (b) 中求得的 $p(9)$ 的值，求 m_1, m_2, b_1 和 b_2.

(d) 单位制造成本不超过 8 美元的概率是多少?

(e) 单位制造成本的中位数是多少?

(f) 写出累积概率分布函数 $P(x)$ 在下列区间上的表达式

(i) $6 \leqslant x \leqslant 9$, (ii) $9 < x \leqslant 10$.

画出 $P(x)$ 的图形.

第9章　多 元 函 数

许多量不止依赖于一个变量：粮食的产量依赖于雨水量和施肥量; 化学反应的速度依赖于温度和它所处环境的气压; 购买肉的重量依赖于肉的价格和购买者的收入; 火山爆发产生的火山灰的运动速度依赖于其与火山的距离和火山爆发的时间.

我们在这一章将看到如何把导数的概念推广到二元函数或更多元函数.

9.1　理解二元函数

为避免飞行的飞机有太多空位, 航空公司将一部分票以全价出售, 一部分打折出售. 对一个特定的航线, 航空公司在给定时期内的收益 R 由售出的全价票的数量 x 和折扣票的数量 y 决定. 我们称 R 是 x 和 y 的函数, 并记作

$$R = f(x, y).$$

这就像一元微积分学中的函数概念. 变量 R 是因变量, 变量 x 和 y 是自变量. 字母 f 代表函数或给出与给定的 x 和 y 的相对应的 y 值的对应法则. 所有可能的 (x, y) 的全体叫 f 的*定义域*. 我们称一个函数是其一个变量的增 (减) 函数, 如果它随着这个变量的增加 (另一自变量不变) 而增加 (减小).

一个二元函数可以用函数值表格数字表示, 用表达式代数表示或等值线图绘图表示. 在这一节中我们给出了数字和代数的例子, 等值线图将于 9.2 节引入.

9.1.1　数字表示的函数

作为全价票数和折扣票数的函数的某特定航线的收益 R(单位：美元) 参见表 9-1.

表 9-1　x 和 y 的函数的售票收益

		全价票数 x			
		100	200	300	400
折扣票数 y	200	75 000	110 000	145 000	180 000
	400	115 000	150 000	185 000	220 000
	600	155 000	190 000	225 000	260 000
	800	195 000	230 000	265 000	300 000
	1000	235 000	270 000	305 000	340 000

x 的值列在第一行, y 的值在左边第一列, 而相应的 $f(x, y)$ 的值列在表格中. 比

如, 为找 $f(300,600)$ 的值, 我们从对应于 $x=300$ 的列及 $y=600$ 的行中找, 得到 225 000. 因此

$$f(300,600)=225\ 000.$$

这就说明出售 300 张全价票及 600 张折扣票的收益是 225 000 美元. 我们从表 9-1 可以看出 f 分别是 x 和 y 的增函数.

注意它和只要一列或一行列出函数值就够了的一元函数的不同之处. 因为对每对自变量的值, 函数都有一个值, 所以这里需要很多行和列.

9.1.2 代数表示的函数

表 9-1 给定的函数可以用一个公式来表示. 我们从表格的每一行观察到, 每多售出 100 张全价票, 收益就增加 35 000 美元, 因此每张全价票的票价是 350 美元. 类似地, 沿着一列看表明每多售出 200 张折扣票, 收益增加 40 000 美元, 因此每张折扣票必然花费 200 美元. 因此, 收益函数的公式为

$$R=350x+200y.$$

例 1 设 M 是最初 B 美元的投资 t 年后在银行账户的金额. 如果每年 5%的利率分别按

(a) 年复利

(b) 连续复利计息, 求函数 $M=f(B,t)$ 的表达式.

解 (a) 年复利率意味着 M 每年以 1.05 倍增长, 因此

$$M=f(B,t)=B(1.05)^t.$$

(b) 连续复利意味着 M 依照函数 e^{kt}, $k=0.05$ 增长, 因此

$$M=f(B,t)=B\mathrm{e}^{0.05t}.$$

□

例 2 某汽车出租公司每天收费 40 美元, 每英里收费 15 美分.

(a) 把租汽车的成本用天数 d 及行驶的英里数 m 的函数表示出来.

(b) 如果 $C=f(d,m)$, 求 $f(5,300)$ 并说明它表示的含义.

解 (a) 租赁汽车的总成本 (单位: 美元) 是 40 乘以天数再加上 0.15 乘以英里数, 因此

$$C=40d+0.15m.$$

(b) 我们有

$$\begin{aligned}f(5,300)&=40(5)+0.15(300)\\&=200+45\\&=245.\end{aligned}$$

我们得 $f(5,300)=245$, 这说明如果我们租一辆汽车 5 天并行驶 300 英里, 要花费 245 美元.

□

9.1.3 研究二元函数的策略：一次改变一个变量

通过让一个变量变化而保持另一个变量不动, 我们能了解很多二元函数的信息. 由此得到一个称之为原来函数的**横截面**的一元函数.

血液中药物的浓度

某药物注射入肌肉组织后, 它扩散到血流中. 该药物在血液中的浓度一直升高直到达到最大, 而后降低. 该药物在血液中的浓度 C(单位：mg/l) 是注入药物量 x(单位：mg) 和注射完成后的时间 t(单位：h) 这两个变量的函数. 假设我们已知

$$C = f(x,t) = te^{-t(5-x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4, \quad t \geqslant 0.$$

例 3 用血液中的药物浓度说明如下横截面的意义：

(a) $f(4,t)$

(b) $f(x,1)$

解 (a) 保持 $x=4$ 不变意味着我们在考虑 4mg 的药物注射; 让 t 变化说明我们在观察药剂随着时间流逝的效果. 因此函数 $f(4,t)$ 作为时间的函数描述了一次注入 4mg 的药物在血液中的浓度. 图 9-1 是 $f(4,t)=te^{-t}$ 的图像. 注意到血液中的药物浓度在注入 1h 后达到最大, 然后血液中的浓度最终趋于零.

(b) 保持 $t=1$ 不动表明我们关注药物注入 1h 后的血液; 让 x 变化表明我们正关注不同的剂量在那一时刻的效果. 因此函数 $f(x,1)$ 作为注射剂量的函数指出了注射完成 1h 后血液中的药物浓度. 图 9-2 是 $f(x,1)=e^{-(5-x)}=e^{x-5}$ 的图像. 注意到 $f(x,1)$ 是 x 的增函数, 这是有道理的: 注入的药物越多, 血液中的药物浓度越高.

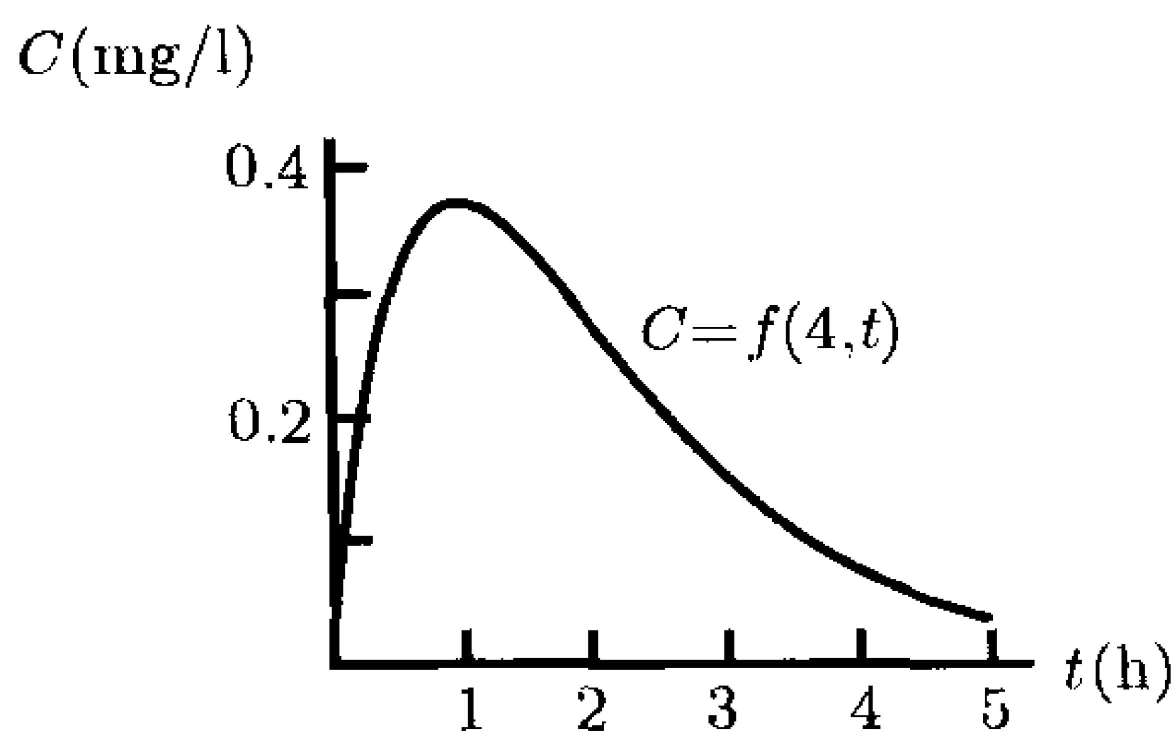


图 9-1 函数 $f(4,t)$ 表明一次注入 4mg 的药物在血液中的浓度

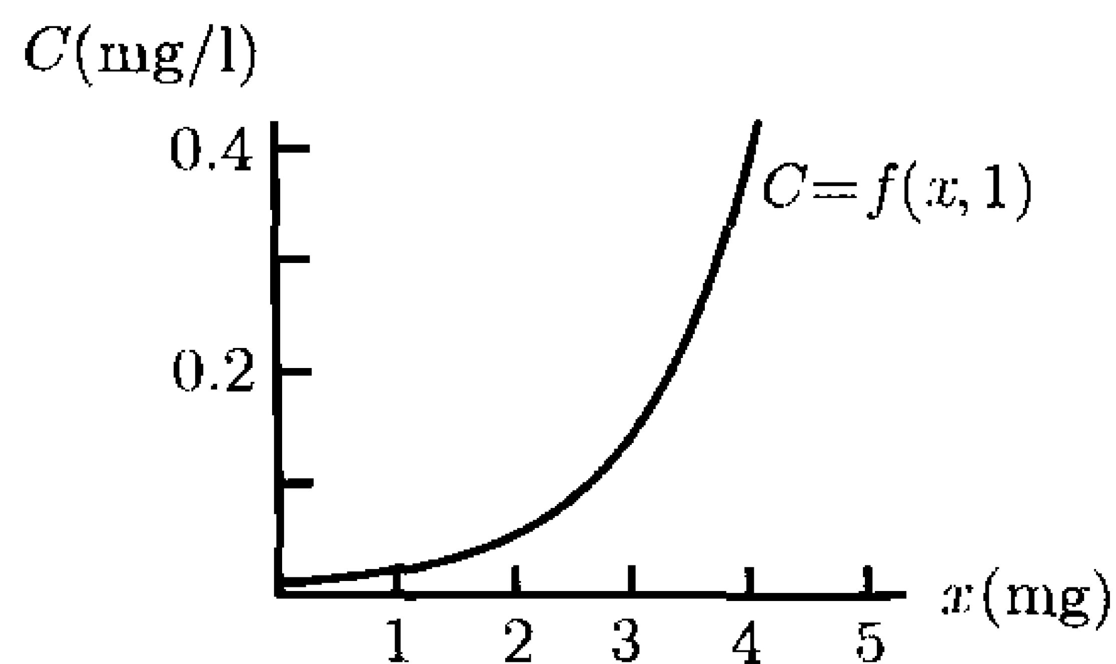


图 9-2 函数 $f(x,1)$ 表明药物注入 1h 后在血液中的浓度 □

例 4 继续利用 $C=f(x,t)=te^{-t(5-x)}$. 在同一坐标系下画 $f(a,t)$ 在 $a=1,2,3,4$ 时的横截面. 说明图像是如何随着 a 的值变化的, 并用它来说明血液中的药物浓度的变化.

解 一元函数 $f(a,t)$ 说明注射 a 毫克的药物在 t 时刻的效果. 图 9-3 是相应于注射 1, 2, 3, 4mg 该药物的 4 个函数: $f(1,t)=te^{-4t}$, $f(2,t)=te^{-3t}$, $f(3,t)=te^{-2t}$ 和 $f(4,t)=te^{-t}$ 的图像. 图像在各种情况下的形状是相同的: 在注射时间 $t=0$ 时血液中的药物浓度为零, 然后一直递增到最大值, 接着递减再次变为零. 我们注意到, 如果注射大剂量的药物, 那么图像的最高峰会延后且值增高. 这是有道理的, 因为较大剂量的药物需要较长的时间扩散到血液中, 而且达到的最大浓度也较大.

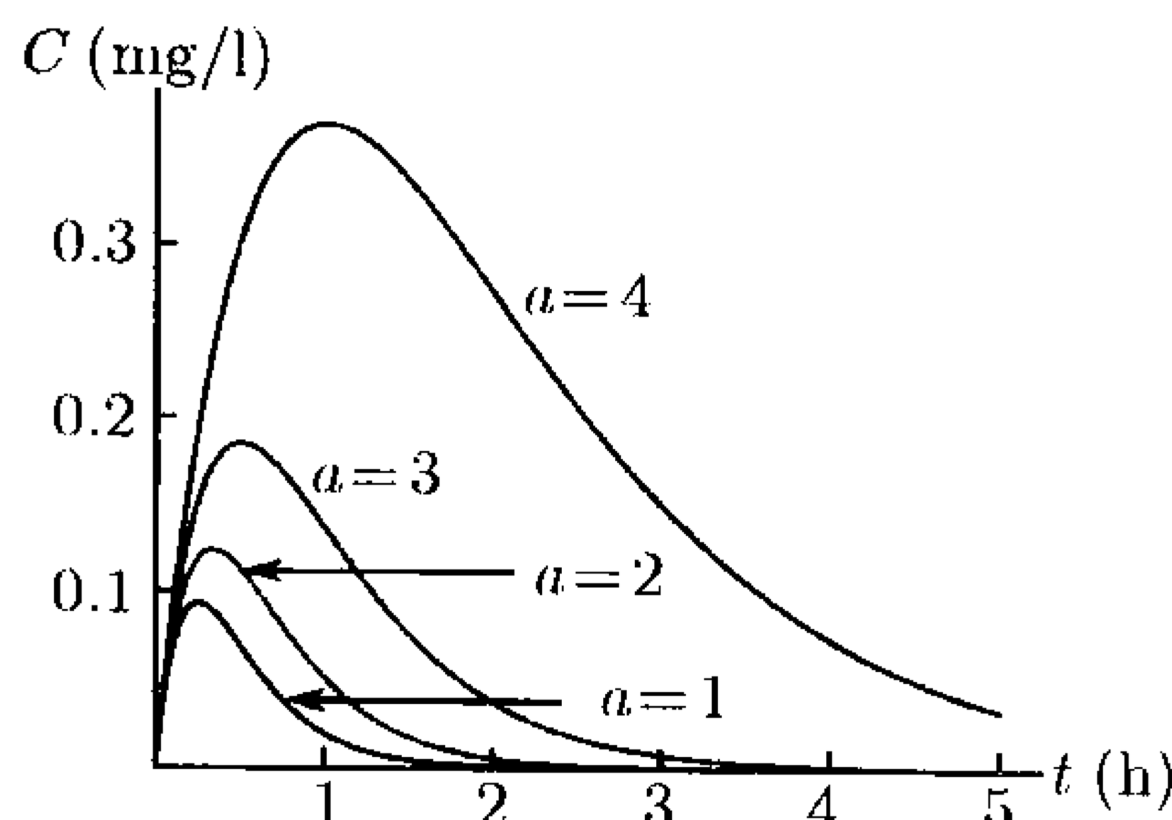


图 9-3 注射的 a 毫克药物的浓度 $C=f(a,t)$

□

习题

1. 某产品的总销售量 S 可以表示成出售该产品的价格 p 和所作广告量 a 的函数, 因此 $S=f(p,a)$. 你预期 f 是 p 的增函数还是减函数? 你预期 f 是 a 的增函数还是减函数? 为什么?
2. 由下表判断 f 是 x 的增函数还是减函数? f 是 y 的增函数还是减函数?

函数 $f(x,y)$ 的值

		y					
		0	1	2	3	4	5
	0	102	107	114	123	135	150
	20	96	101	108	117	129	144
x	40	90	95	102	111	123	138
	60	85	90	97	106	118	133
	80	81	86	93	102	114	129

习题 3~4 有关从一家公司租赁一辆汽车的成本, 该公司每天收费 40 美元, 每英里 15 美分, 因此 $C=f(d,m)=40d+0.15m$, 其中 d 是天数, m 是英里数.

3. 利用 $d=1,2,3,4$ 及 $m=100,200,300,400$ 列出 C 的值表格. 在你的表格中应该有 16 个值.
4. (a) 求 $f(3,200)$ 并说明它代表的含义
   (b) 用租赁汽车的成本说明 $f(3,m)$ 的含义. 把 C 看作 m 的函数, 画这个函数的略图.
   (c) 用租赁汽车的成本说明 $f(d,100)$ 的含义. 把 C 看作 d 的函数, 画这个函数的略图.
5. 银行账户的结余 B(单位: 美元) 依赖于存款总量 A 美元, 年利率 $r\%$ 和时间 t(从存款之日起的月数), 因此 $B=f(A,r,t)$.
   (a) f 是 A 的增函数还是减函数? r 呢? t 呢?
   (b) 解释 $f(1250,1,25)\approx 1276$. 请带单位.

6. 在年利率为 $r\%$, 期限为 t 年, 贷款额为 A 美元的抵押贷款中, 月还款 P 美元为 $P = P(A, r, t)$. P 是 A 的增函数还是减函数? r 呢? t 呢?

7. 你计划一次旅行, 它的主要成本是汽油.

(a) 列表格说明日燃料成本是如何随着汽油价格 (美元/加仑) 和日购买的加仑数变化的.

(b) 如果你的汽车每加仑汽油行驶 30 英里, 列表格说明你的日燃料成本是如何随着行驶的里程和汽油价格变化的.

8. 取 B 的 3 个不同值, 令 t 变化, 画本节例 1(a) 中的银行账户函数 f 的图形. 然后取 t 的 3 个不同值, 令 B 变化, 画 f 的图形. 描述你所观察到的情况.

9. 风寒温度可以告诉你天气感觉有多冷, 它是结合考虑风速和温度的结果.[①] 参见下表.

(a) 如果温度是 0°F, 风速是 15 mile/h, 天气感觉有多冷?

(b) 如果温度是 35°F, 风速多大可使天气感觉像 24°F?

(c) 如果温度是 25°F, 风速多大可使天气感觉像 12°F?

(d) 如果风速在 20 mile/h, 温度多高可使天气感觉像 0°F?

风速和温度的函数——根据风寒温度

		温度							
		35	30	25	20	15	10	5	0
	5	31	25	19	13	7	1	−5	−11
风速	10	27	21	15	9	3	−4	−10	−16
(mile/h)	15	25	19	13	6	0	−7	−13	−19
	20	24	17	11	4	−2	−9	−15	−22
	25	23	16	9	3	−4	−11	−17	−24

10. 对 20°F 和 0°F 的温度, 利用上表列表格, 把风寒温度表示成风速的函数.

11. 对 5mile/h 和 20mile/h 的风速, 利用上表列表格, 把风寒温度表示成温度的函数.

12. 一年内售出的新车数 n 是新车价格 c 和汽油平均价格 g 的函数.

(a) 如果 c 保持不变, n 是 g 的增函数还是减函数? 为什么?

(b) 如果 b 保持不变, n 是 c 的增函数还是减函数? 为什么?

习题 13~17 参考下表, 它给出了[②] 为牛肉价格 p(单位: 美元/英镑) 和年家庭收入 I(单位: 千美元) 的函数的普通家庭牛肉的周消费量 C 英镑.

牛肉购买量 (英镑/家庭/周)

		p			
		3.00	3.50	4.00	4.50
	20	2.65	2.59	2.51	2.43
	40	4.14	4.05	3.94	3.88
I	60	5.11	5.00	4.97	4.84
	80	5.35	5.29	5.19	5.07
	100	5.79	5.77	5.60	5.53

① 数据来源于 Data from www.nws.noaa.gov/om/windchill, 访问日期: 2004 年 5 月 30 日.

② 摘自 Richard G. Lipsey, 《证实经济学导论 (第 3 版)》(伦敦: Weidenfeld and Nicolson, 1917).

13. 固定 $I=20$ 和 $I=100$, 列表格把牛肉消费量表示成 p 的函数. 固定 $p=3.00$ 和 $p=4.00$, 列表格把牛肉消费量表示成 I 的函数. 对你从表格中观察到的情况作出说明.

14. 如果牛肉价格保持不变, 关于家庭收入的函数, 牛肉消费量是如何变化的?

15. 列表格给出关于牛肉价格和家庭收入的函数, 普通家庭在牛肉上消费的钱总数 M(单位: 美元/家庭/周).

16. 列出关于价格和收入的函数, 即每周在牛肉上的消费所占家庭收入的百分比 P. (注意, P 是花费在牛肉上的收入百分比.)

17. 用 p 和 I 的函数 $f(I,p)$ 表示每周花费在牛肉上的收入比例 P.

习题 18~19 中, 来自火山爆发的火山灰 V(单位: 千克/平方公里) 依赖于离火山的距离 d 和火山爆发后的时间 t:

$$V=f(d,t)=\sqrt{t}\mathrm{e}^{-d}.$$

18. 对 $t=1$ 和 $t=2$, 在同一坐标轴下画 f 的截面. 随着离火山距离的增加, 火山灰如何变化? 讨论图形之间的关系: 火山灰如何随着时间的改变而变化? 从火山的角度解释你的答案.

19. 对 $d=0, d=1$ 和 $d=2$, 在同一坐标轴下画 f 的截面. 自火山爆发起, 火山灰随着时间的流逝而变化. 讨论图形之间的关系: 作为距离的函数, 火山灰如何变化? 从火山的角度解释你的答案.

20. 一架飞机通过加热空气可以扫清雾. 需要的热量 $H(T,w)$(单位: 卡路里/立方米雾) 依赖于空气的温度 T(单位: 摄氏度) 和雾的湿度 w(单位: 克/立方米雾). 图 9-4 是固定 w 时, H 关于 T 的几个函数图形.

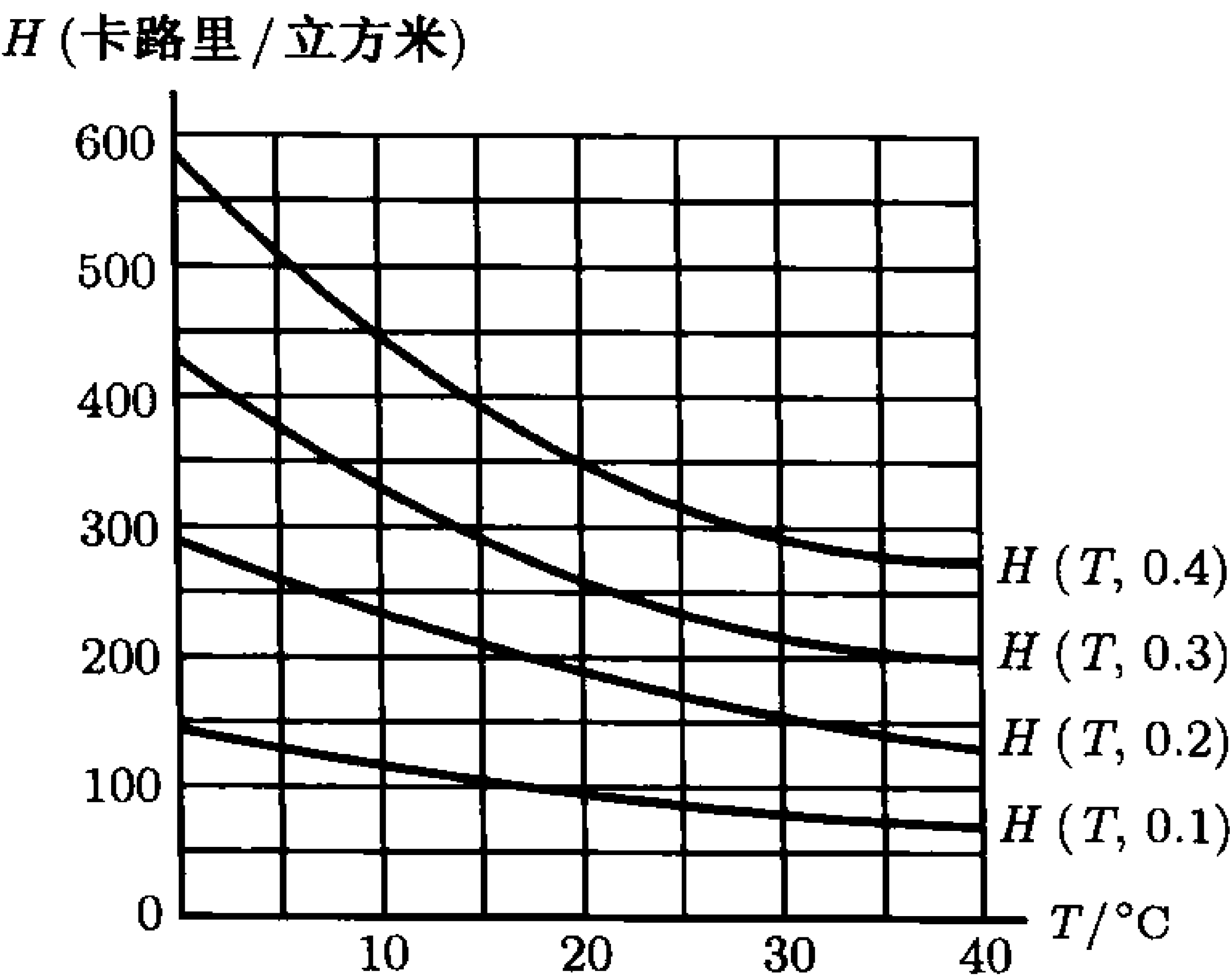


图 9-4

(a) 估计 $H(20,0.3)$, 并说明它给我们提供的信息.

(b) 用 $T=0,10,20,30,40$ 和 $w=0.1,0.2,0.3,0.4$, 作 $H(T,w)$ 的值表格.

9.2 等值线图

我们如何图形化一个二元函数呢? 二元函数通常用**等值线图**表示.

9.2.1 天气图

图 9-5 是摘自报纸的一张天气图. 它指出了预测的美国当天的最高温度 T(单位: 华氏度). 图中的曲线称为等温线 (isotherms, iso 表示相同, therm 表示热量), 把整个国家按照温度 T 落在 60~70(60s), 70~80(70s), 80~90(80s), 90~100(90s) 还是 100 以上 (100s) 的各个温度区间分成一些地带. 注意, 分离 80~90 和 90~100 的等温线连接所有温度预测为 90°F 的点.

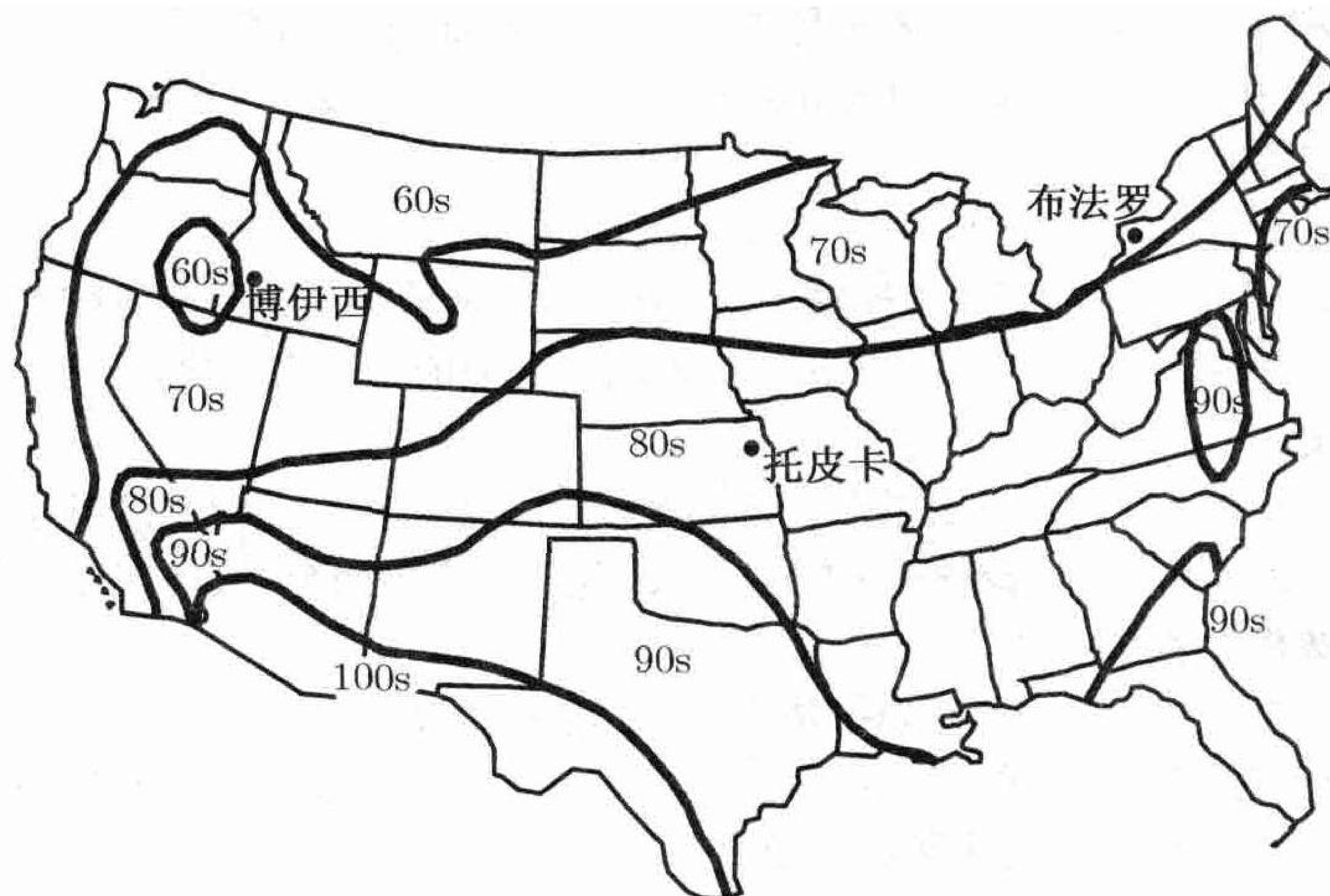


图 9-5 标明夏季某天预测最高温度的天气图

如果纬度 x 和经度 y 的函数 $T = f(x,y)$ 给出了预测的当天最高温度 (单位: °F), 那么等温线就是方程 $f(x,y) = c$ 的图形, 其中 c 是常数. 这样的曲线一般称作等值线, 而给出一个函数经由选择的等值线的图形叫做等值线图.

例 1 估计美国爱达荷州博伊西, 堪萨斯州托皮卡和纽约州布法罗温度的预测值.

解 博伊西和布法罗在 70~80(70s) 温度带, 托皮卡在 80~90(80s) 温度带. 因此博伊西河布法罗的预测温度应该介于 70 和 80 之间, 而托皮卡的预测温度在 80 到 90 之间.

事实上, 我们能得到更多的判断. 虽然博伊西和布法罗都在 70 多度 (70s) 的温度带, 但博伊西离 $T = 70$ 的等温线很近, 而布法罗则离 $T = 80$ 的等温线很近. 因此我们估计博伊西的温度为 70 初, 而布法罗的温度为 70 末. 托皮卡大约介于等温线 $T = 80$ 和 $T = 90$ 的正中, 因此我们猜托皮卡的温度将是 80 中. 事实上, 博伊西那天的实际最高温度为 71°F, 布法罗的为 79°F, 托皮卡的为 86°F. □

地形图

等值线图的另一个常用的例子就是像如图 9-6 所示的地形图. 图中的等值线

把低海拔地区与高海拔地区分开, 并给出了地形的全部自然面貌. 这样的地形图通常用绿色表示低海拔, 褐色、红色甚至是白色表示高海拔.

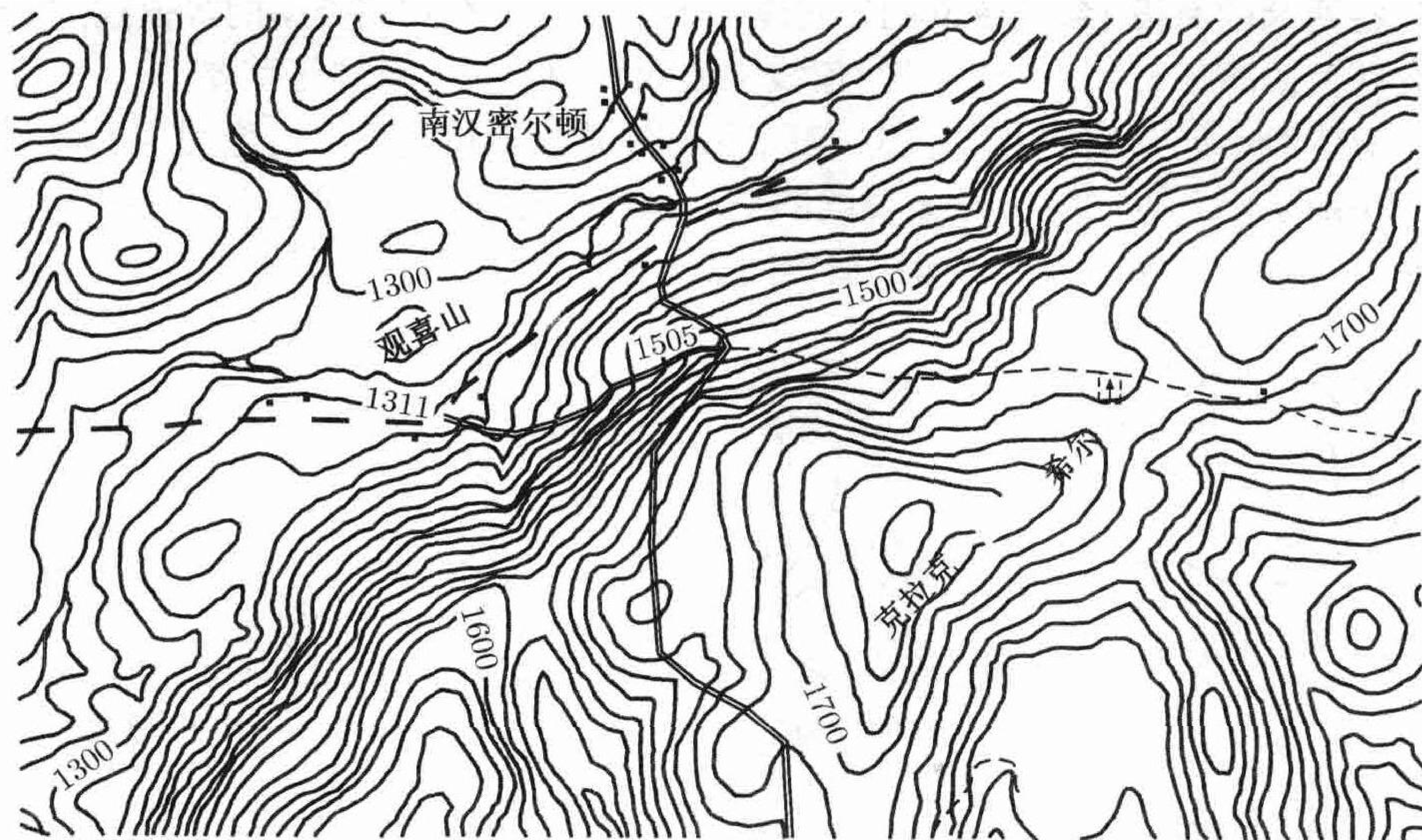


图 9-6 纽约南汉密尔顿附近区域的地形图

例 2 说明如图 9-7 所示地形图对应着像图 9-8 所示地形的原因.

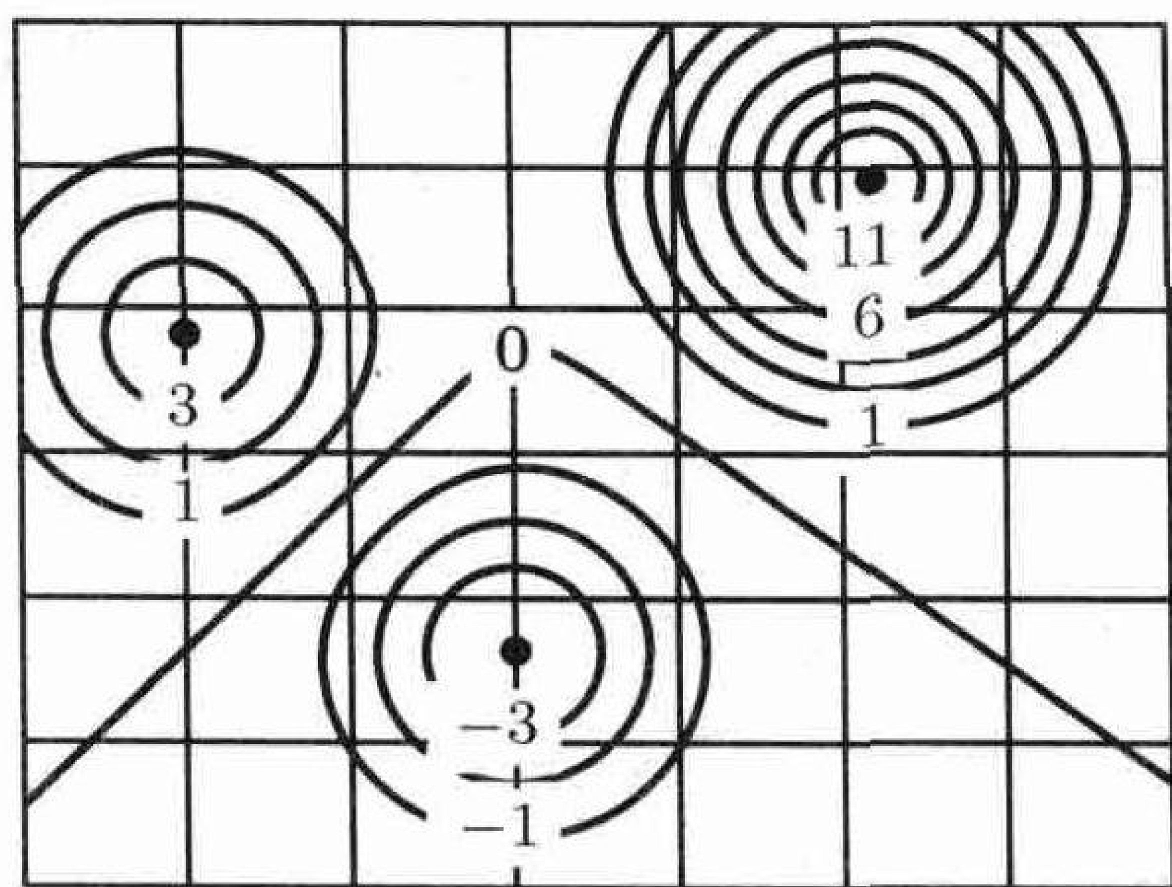


图 9-7 地形图

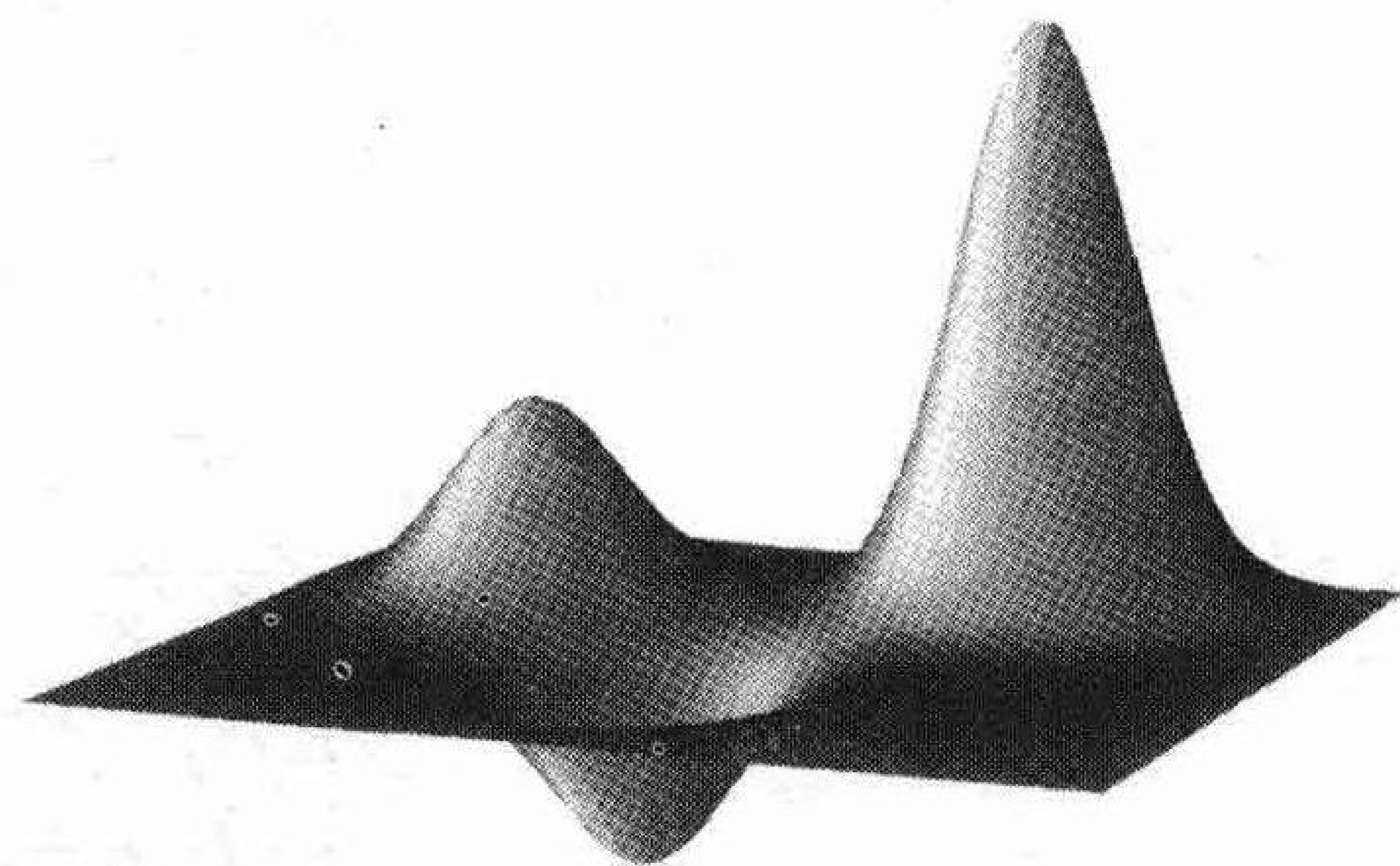


图 9-8 与图 9-7 所示地形图相对应的地形

解 我们从图 9-7 的地形图看到有两座山, 一座大约海拔 12, 另一座大约海拔 4. 大部分地区的海拔为 0, 且有一山谷海拔大约为 −4. 这和图 9-8 的地形匹配因为图中有两座山 (一座山比另一座高) 和一山谷. □

地形图中的等值线描述了地形或等高线的概况. 因为同一条等值线上的点有相同的海拔, 所以等值线也称作水平线或水平集. 等值线的分布越紧密, 地形越陡; 等值线的分布越疏散, 地形越平坦 (当然假设相邻等值线之间的海拔相差一个常量).

特定的地貌有特殊的表现特性. 山峰由类似图 9-9 的等值线包围是它的主要特色. 两座山之间的通路可能有如图 9-10 的等值线. 一条长狭谷有两条平行的等值线表示狭谷两侧的海拔 (参见图 9-11); 一座山的长山脊具有相同类型的等值线, 只不过山脊两侧的海拔都减小. 注意, 等值线上的数字和曲线本身同等重要.

等值线不能有某些表现形式. 表示不同海拔的等值线不可能像图 9-12 那样相交. 如果两条等值线相交, 两条曲线的交点将有不同的海拔, 这是不可能的 (假设地形不具有悬垂). 我们通常画函数值等间隔分布的等值线.

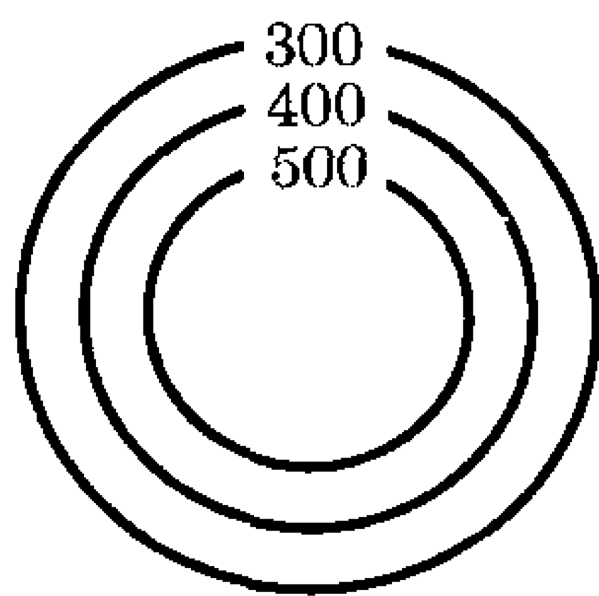


图 9-9 山峰

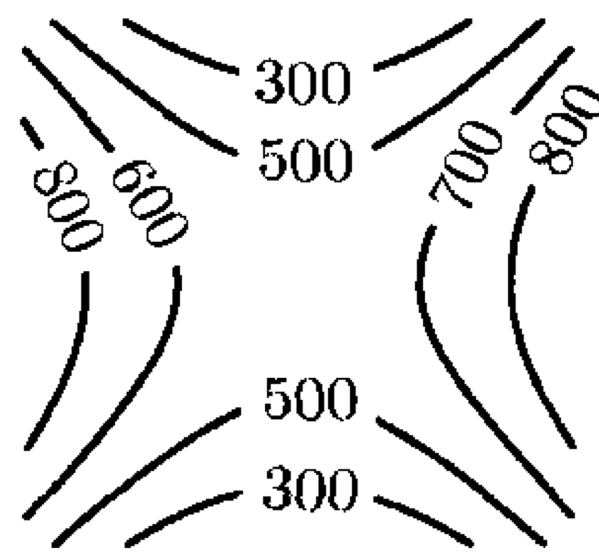


图 9-10 两座山之间的通道

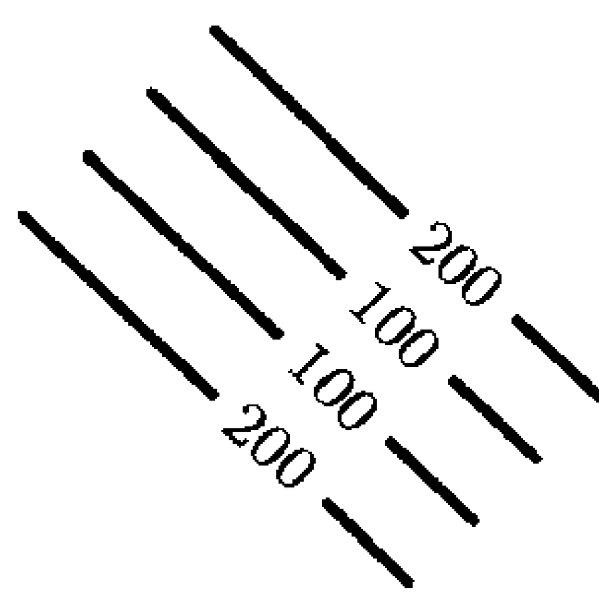


图 9-11 长山谷

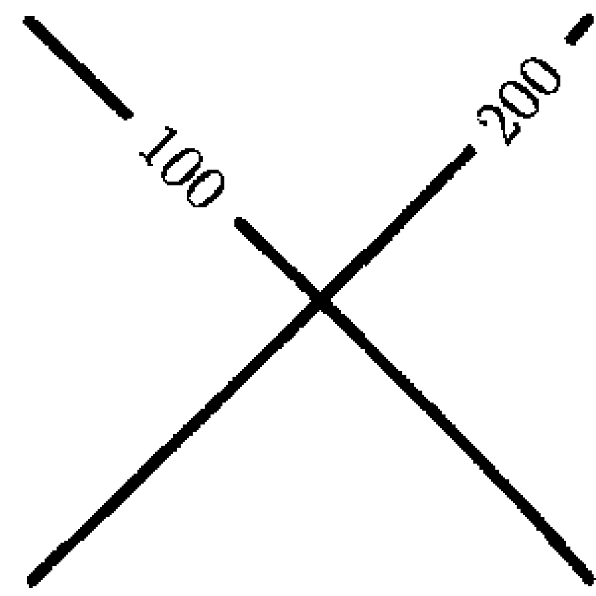


图 9-12 不可能的等值线

9.2.2 等值线图的应用

考虑不同的天气情况对美国玉米产量的影响. 如果平均温度升高 (比如, 由于全球变暖) 或者降水量减小 (由于干旱), 情况会怎样? 估计这些气候变化产生的影响的一种方法就是利用图 9-13. 它是给出了生产季的玉米产量 $C = f(R,T)$—— 总降雨量 R(单位: in) 和平均温度 T(单位: °F) 的函数——的等值线图.① 假设当前的 $R = 15$ in, $T = 76$°F. 产量用当前产量的百分数衡量; 因此, 穿过 $R = 15, T = 76$ 的等值线是 $C = 100$, 即 $C = f(15, 76) = 100$.

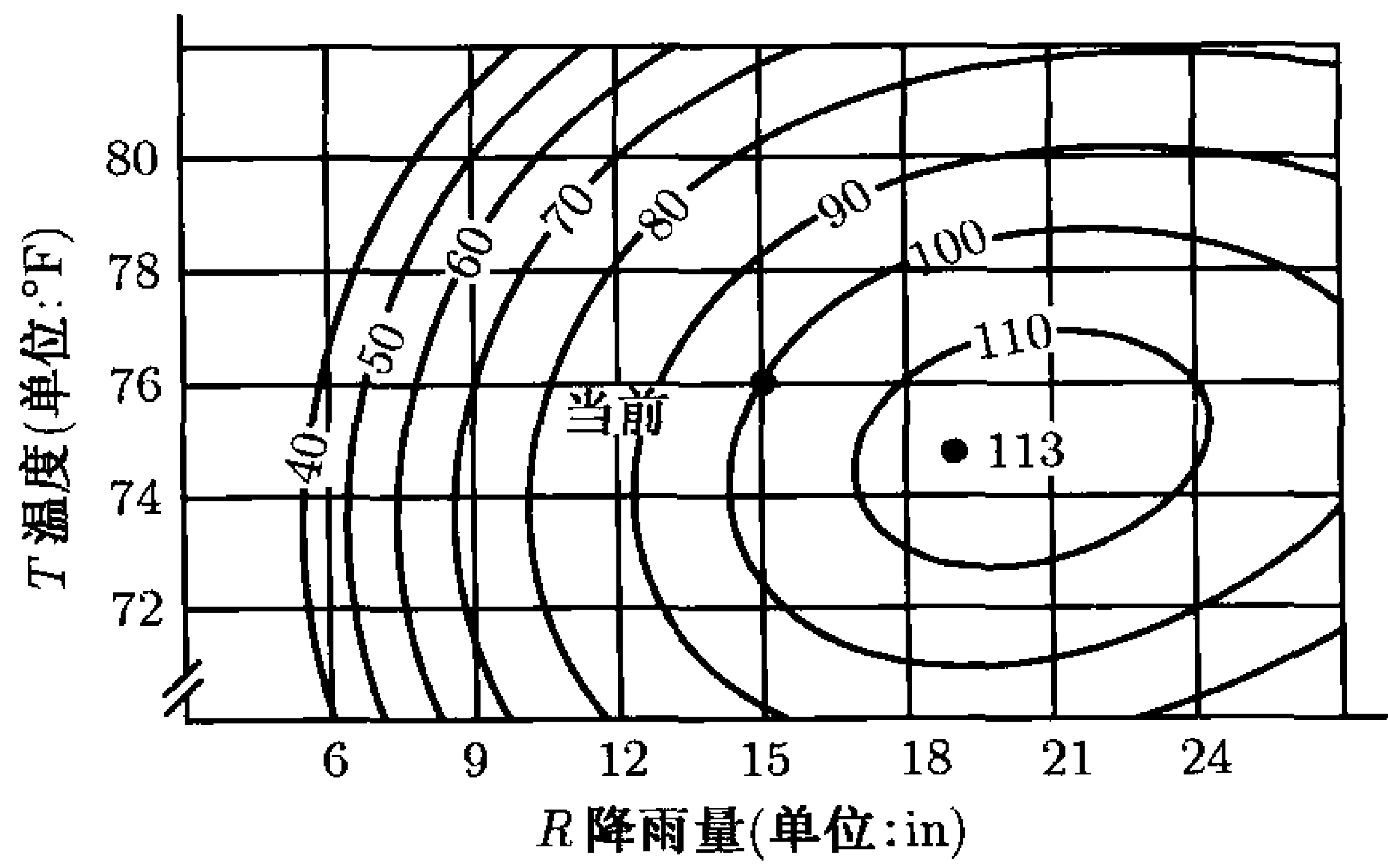


图 9-13 降雨量和温度的函数, 玉米产量 C

① 摘自 S. Beaty 和 R. Healy, *The Future of American Agriculture*,《科学美国人》, 第 248 卷 No. 2, 1983 年 2 月.

例 3 利用图 9-13 估计 $f(18,78)$ 和 $f(12,76)$, 并用它们解释玉米产量.

解 R 坐标为 18, T 坐标为 78 的点在 $C=100$ 的等值线上, 因此 $f(18,78)=100$. 这表明如果年降雨量为 18 in, 温度为 78 华氏度, 那么玉米产量将和当前的一样, 尽管它比现在更潮湿, 更暖和. R 坐标为 12, T 坐标为 76 的点大约落在等值线 $C=80$ 和 $C=90$ 的中间位置, 因此 $f(12,76)\approx 85$. 这表明如果降雨量降低到 12 in, 温度保留在 76°F, 玉米产量将下降到大约当前产量的 85%. □

例 4 如果温度保持在图 9-13 的当前值, 说明玉米产量是如何随着降雨量变化的. 如果降雨量保持在当前值, 说明玉米产量是如何随着温度变化的. 对你的答案作合理解释.

解 为了解温度保持在 76°F 但降雨量变化时玉米产量的变化情况, 我们沿着水平线 $T=76$ 观察. 从当前开始沿着直线 $T=76$ 往左移动, 等值线的值减小. 换句话说, 如果有旱灾, 玉米产量下降. 相反如果降雨量增加, 即我们从当前开始沿着直线 $T=76$ 往右移动, 玉米产量增加, 并在 $R=21$ 时达到最大值, 然后产量减小 (太多的降雨淹没了土地). 如果改为降雨量保持在当前值, 温度升高, 我们沿着垂直线 $R=15$ 向上移动. 在这些条件下, 玉米产量减小; 温度升高 2° 导致玉米减产 10%. 这是有道理的, 因为就算是降雨量保持在 15 in, 炎热的气温也使蒸发作用加强, 使天气更加干旱. 类似地, 温度的降低会使产量有略微增加, 在 $T=74$ 时产量达到大约 102%的最大值; 而后接着减小. (如果天气太冷玉米不能生长.) □

9.2.3 Cobb-Douglas 生产函数

假设你管理一家小型的印刷生意. 由于你拥有的订单数超过你能处理的, 你决定扩大生产规模. 你应该如何扩大生产规模呢? 你是否应该加夜班并雇佣更多工人? 你是否应该买更贵更快的计算机使现在的工人能赶上工作进度? 或者你应该对二者进行某种组合?

显然, 做这样一种决策的方法在现实中包括很多其他考虑——比如你是否有经过适当训练的夜班工人, 或是否能得到更快的计算机. 不管怎样, 你可以用一个二元函数——你拥有的工人总数 N 和设备的总价值 V——模拟印刷厂完成的工作量 P.

你期待这样的生产函数有何性质? 一般来讲, 拥有更多设备和更多工人能使你生产得更多. 然而, 增加设备但不增加工人数将略微增加产量, 但不能有很大突破. (如果设备早已经闲置, 拥有更多的设备将毫无用处.) 类似地, 增加工人数量而不增加设备将增加产量, 但不会超过设备得到充分利用时的产量, 因为此时没有设备给任何新工人.

例 5 说明为什么图 9-14 中的等值线图不能模拟生产函数预期的性质, 但图 9-15

中的等值线图却能.

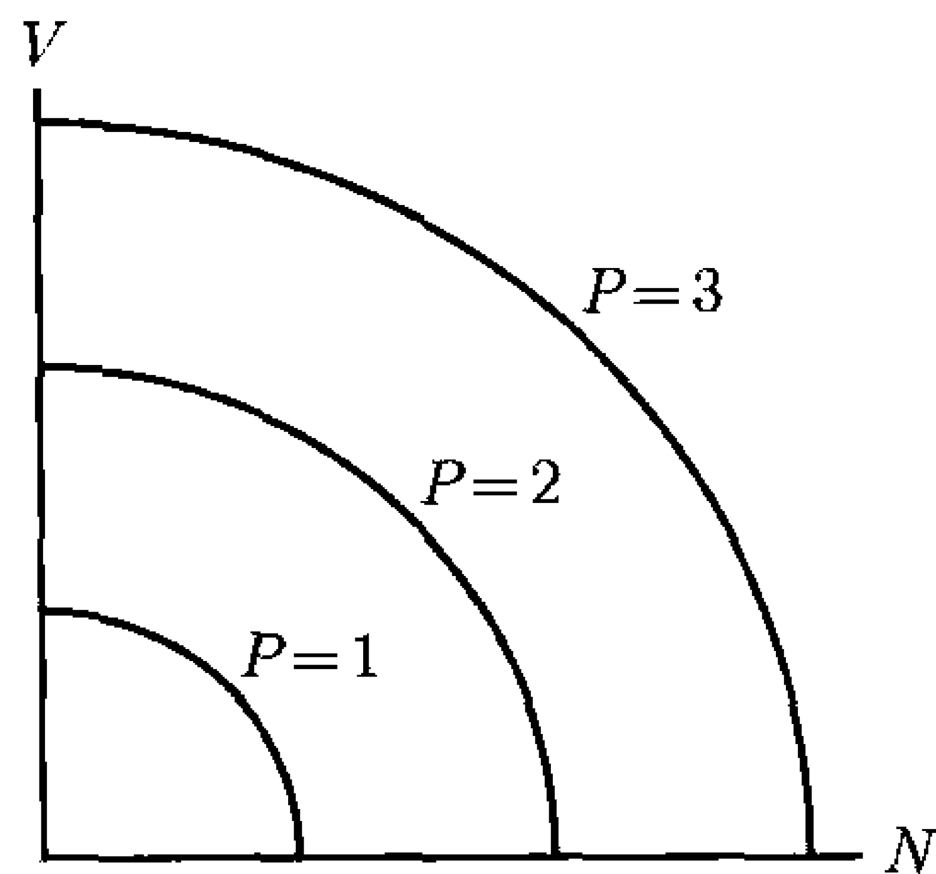


图 9-14　不准确的印刷产量等值线图

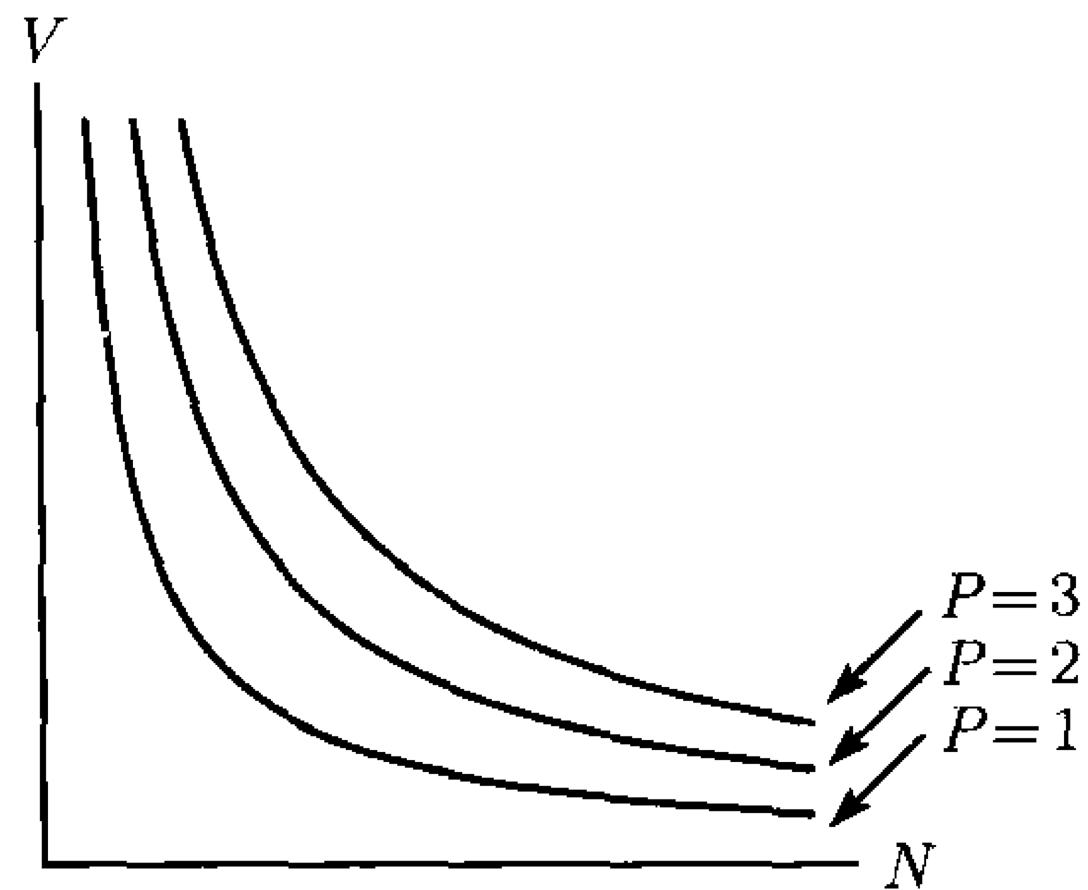


图 9-15　准确的印刷产量等值线图

解　产量 P 应该是 N 的增函数和 V 的增函数. 我们看到 (图 9-14 和图 9-15 中的) 所有等值线图满足这个条件. 哪个等值线图的产量增加的方式是正确的? 首先观察图 9-14 中的等值线图. 固定 V 一个特定的值, 令 N 增加意味着在等值线图上向右移动. 在移动过程中, 我们穿过值越来越大的等值线, 这表明产量无限制地增加. 相反地, 在图 9-15 中, 当我们沿着相同方向移动时, 我们最终发现自己几乎平行于等值线移动, 穿过它们的频率也越来越小. 因此, N 增加而 V 不动时, 产量增加地越来越慢. 类似地, 如果我们固定 N 而令 V 增加, 图 9-14 中的等值线图表明产量以稳定的比率增长, 而图 9-15 表明产量增加, 但以递减的比率增加. 因此, 图 9-15 最好地拟合了生产函数的预期性质. □

1. Cobb-Douglas 生产模型

1928 年, Cobb 和 Douglas 利用简单公式模拟上世纪前四分之一的美国整个的经济产量. 利用政府对 1899 年到 1922 年间总年度产量的估计 P, 同一时期总资本投资 K 和总劳动力 L, 他们发现用函数

$$P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

很好地逼近 P.

结果证明, 用这个函数对它基于的那段时期及后来的某段时间的美国经济的模拟令人吃惊地准确. 这个函数的等值线图与图 9-15 中的相似. 一般来讲, 产量通常用如下形式的函数模拟

Cobb-Douglas 生产函数

$$P = f(N, V) = cN^{\alpha}V^{\beta}$$

其中 P 是生产总产量, c, α, β 是正常数且 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$.

2. 等值线图和表格

表 9-2 给出了温度和湿度函数的酷热指数. 酷热指数是一个温度, 它告诉你由于温度和湿度的结合, 天气感觉起来有多热. 我们也能用等值线图显示这个函数. 两个自变量 (温度和湿度) 的刻度在数轴上. 给出的酷热指数范围从 64 到 151, 因此我们画值为 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140 和 150 的等值线. 我们如何知道值为 70 的等值线穿过哪里? 表 9-2 表明, 湿度为 0%时, 酷热指数 70 在 75°F 和 80°F 之间取得, 因此等值线大概经过点 (76, 0). 它也经过点 (75,10). 继续这种方法, 我们能近似 70 等值线. 请参见图 9-16. 用相似的方法你能画出图 9-17 中的所有等值线.

表 9-2 酷热指数 (°F)

湿度 (%) \ 温度 (°F)	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
40	68	74	79	86	93	101	110	123	137	151
50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
60	70	76	82	90	100	114	132	149		

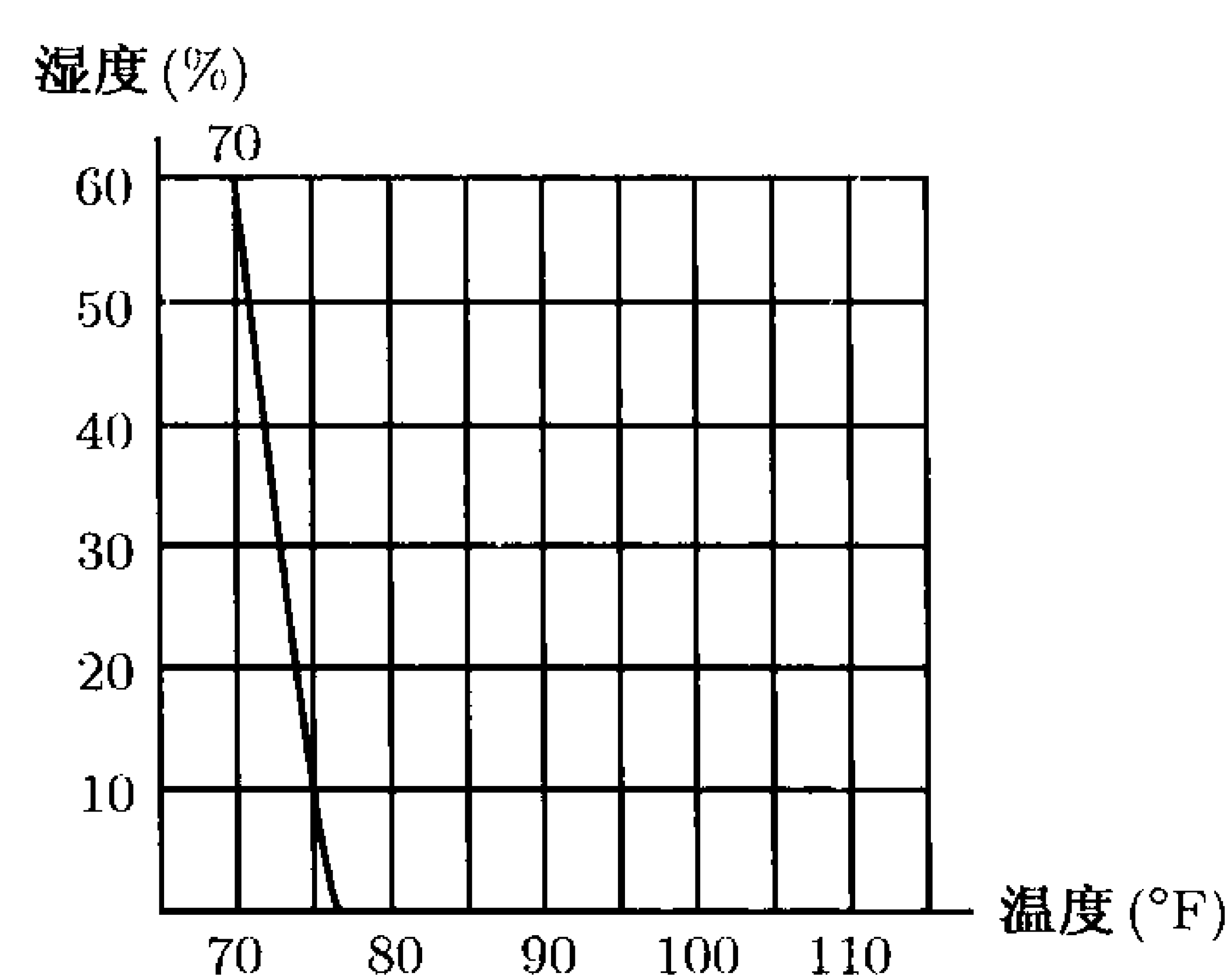


图 9-16 酷热指数 70 的等值线

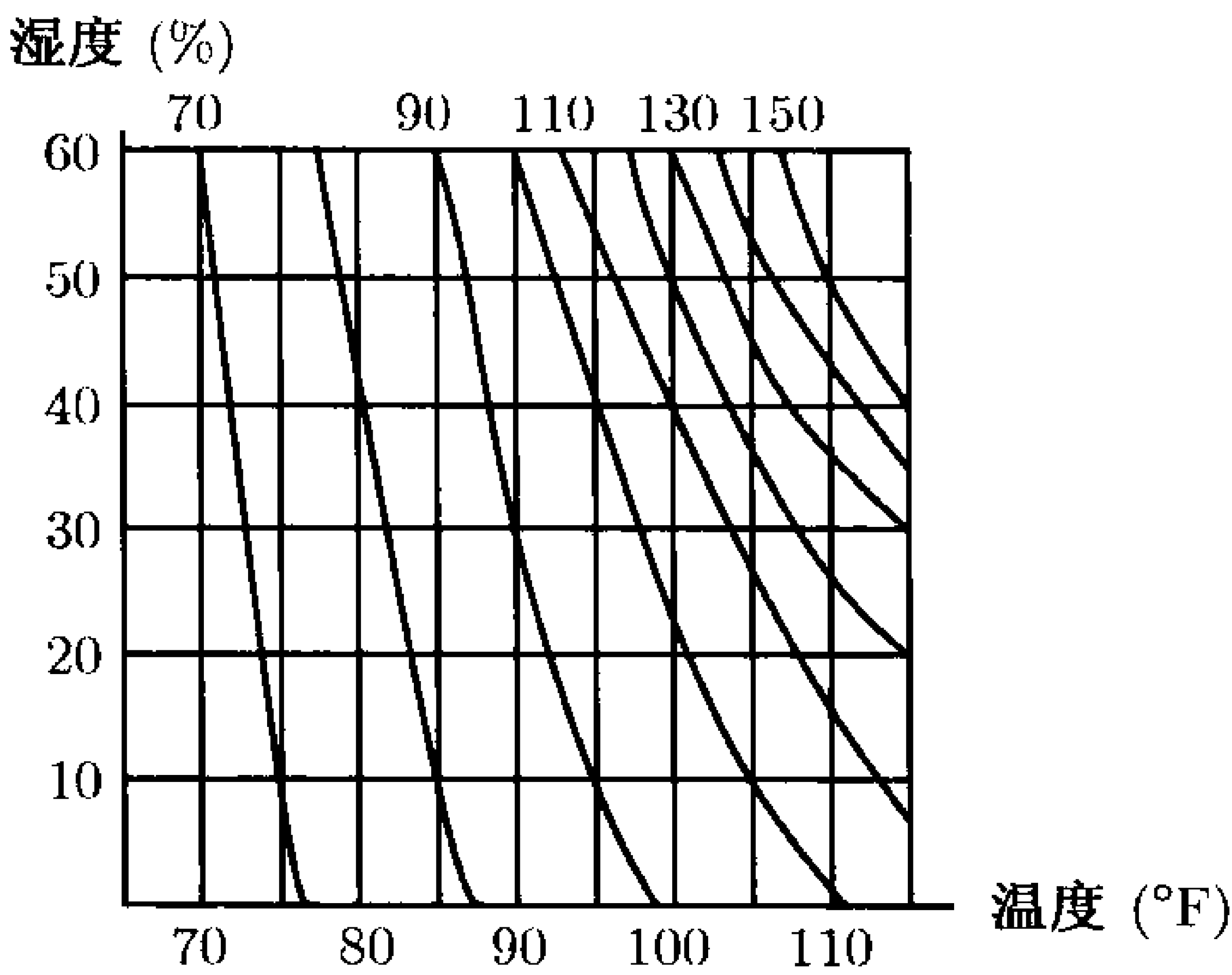


图 9-17 酷热指数等值线图

例 6 酷热指数为 105 或更高时可能发生热衰竭. 在图 9-17 的等值线图中, 在可能发生热衰竭的区域涂上阴影.

解 图 9-18 的阴影区域给出了酷热指数在 105 以上的温度和湿度的值.

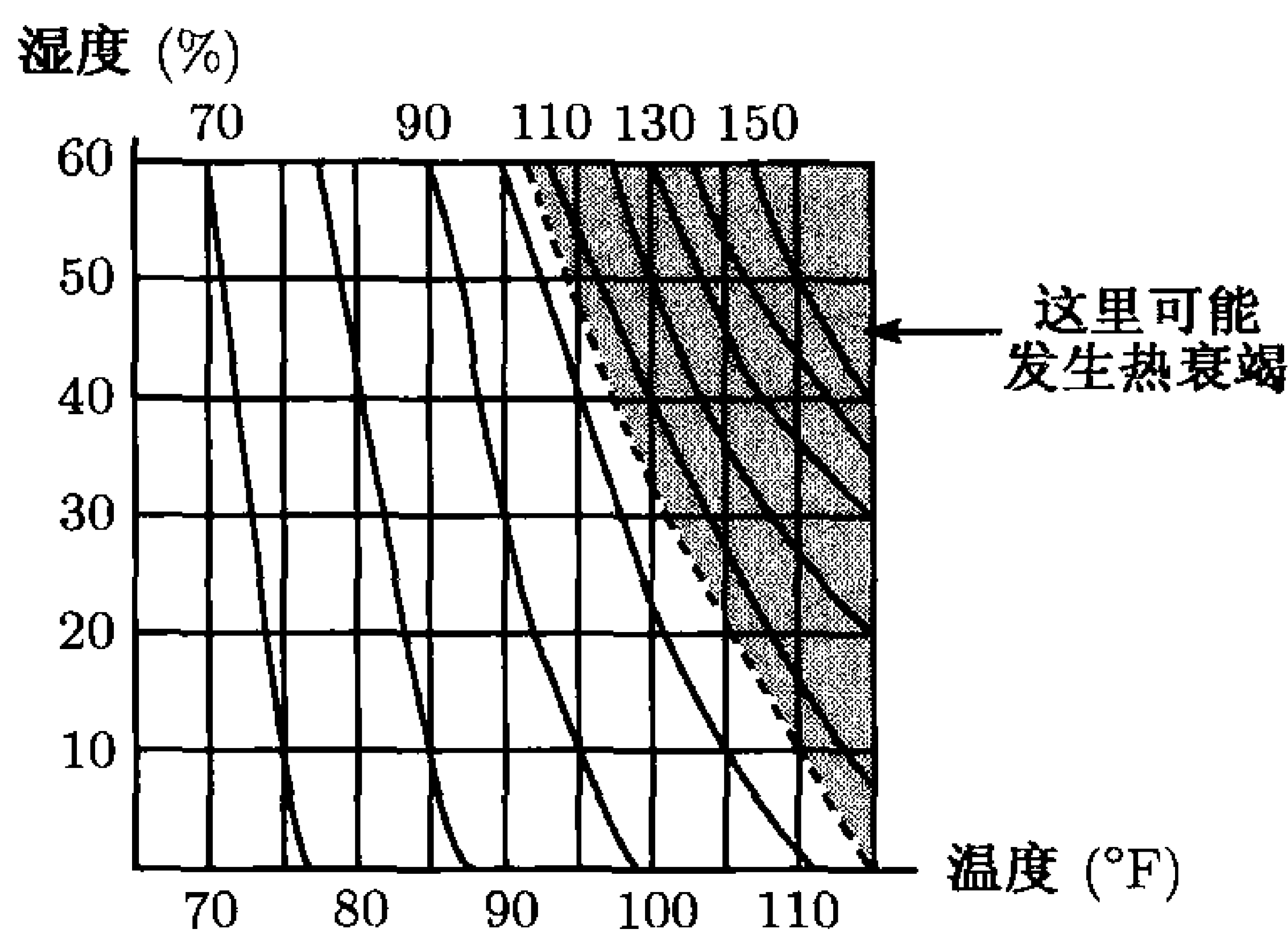


图 9-18 阴影区域指出热衰竭可能发生的条件

□

9.2.4 用代数方法求等值线

如果我们已知 $f(x,y)$ 的公式，很容易求函数 f 的等值线的代数方程. 一条等值线包括使 $f(x,y)$ 为常值 c 的所有的点 (x,y). 它的方程就是 $f(x,y)=c$.

例 7 画航空公司的收益函数 $R=350x+200y$ 的等值线图. 要包括 $R=4000$, 8000, 12 000, 16 000.

解 $R=4000$ 的等值线为

$$350x+200y=4000.$$

这是截距为 $x=4000/350=11.43$ 和 $y=4000/200=20$ 的直线方程. (参见图 9-19) $R=8000$ 的等值线为

$$350x+200y=8000.$$

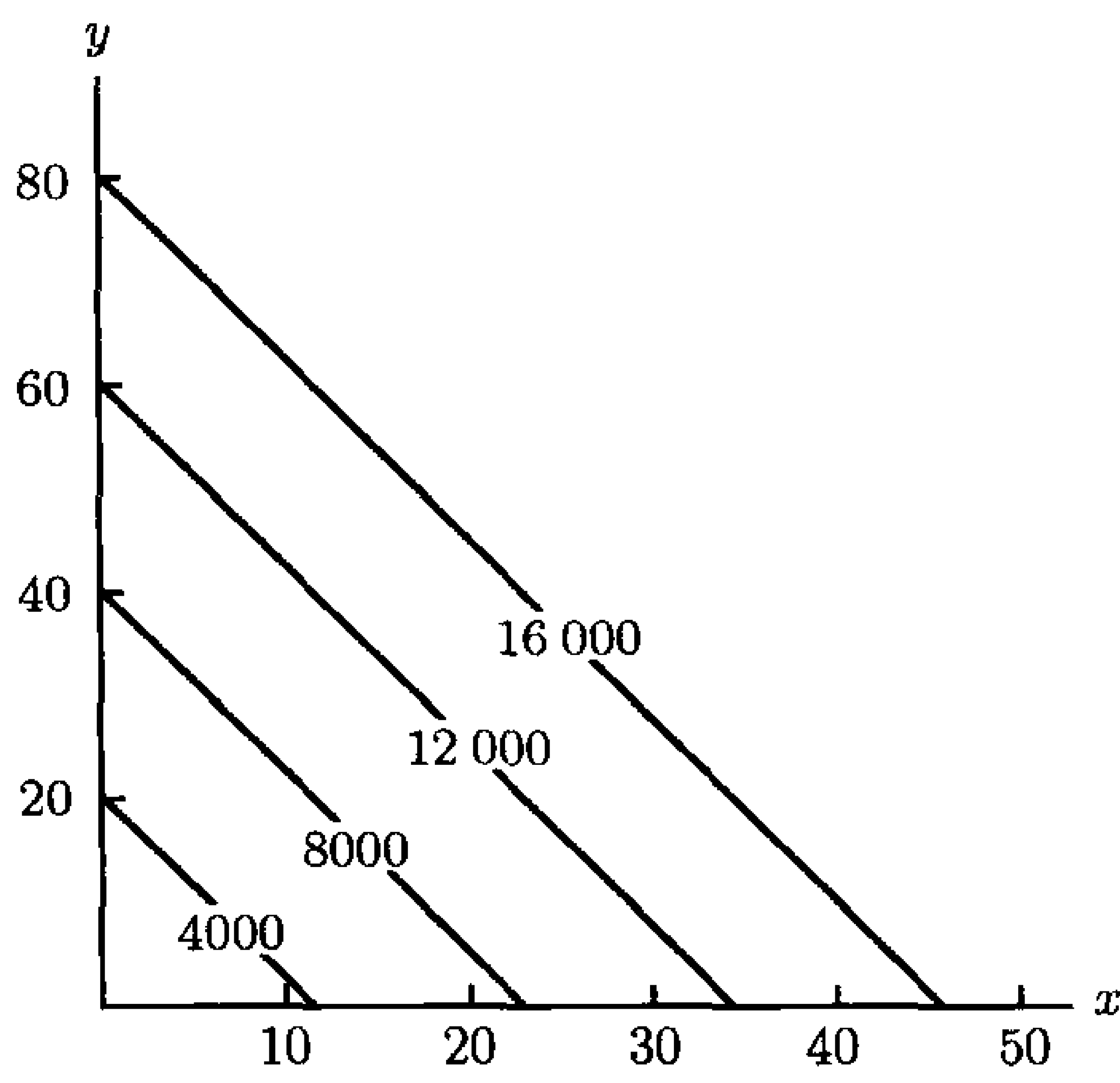


图 9-19 $R=350x+200y$ 的等值线图

这是截距为 $x = 8000/350 = 22.86$ 和 $y = 8000/200 = 40$ 的一条平行直线的方程. $R=12\ 000$ 和 $R=16\ 000$ 的等值线是用类似方法画出的平行直线. (参见图 9-19) □

习题

1. 图 9-20 给出一房间内的温度 (单位: 摄氏度) 在三个不同时间的等值线图. 描述该房间内的热流. 是什么原因导致这一现象?

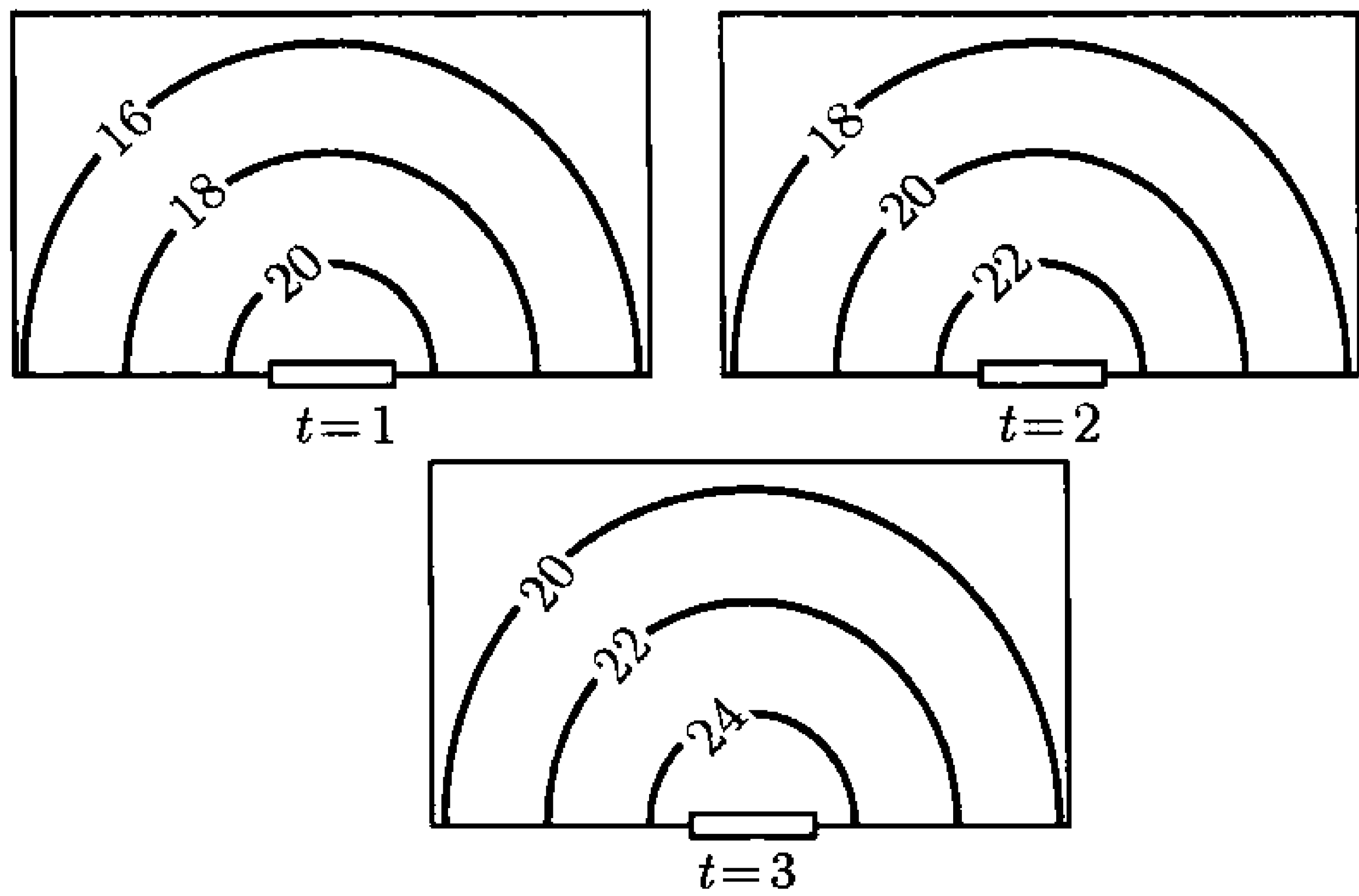


图 9-20

2. 图 9-21 给出函数 $z = f(x, y)$ 的等值线. z 是 x 的增函数还是减函数? z 是 y 的增函数还是减函数?

3. 一制造商出售两种产品, 一种产品每单位价格是 3000 美元, 另一产品价格是每单位 12 000 美元. 制造商出售 q_1 单位第一种产品和 q_2 单位第二种产品的总成本为 4000 美元.

(a) 把制造商的利润 π 表示成 q_1 和 q_2 的函数.

(b) 画 π 的等值线 $\pi = 10\ 000, \pi = 20\ 000, \pi = 30\ 000$ 和收支平衡曲线 $\pi = 0$.

4. 图 9-22 是把橙汁需求量看成是橙汁价格和苹果汁价格的函数的等值线图. 哪个轴对应着橙汁? 哪个对应苹果汁? 请解释.

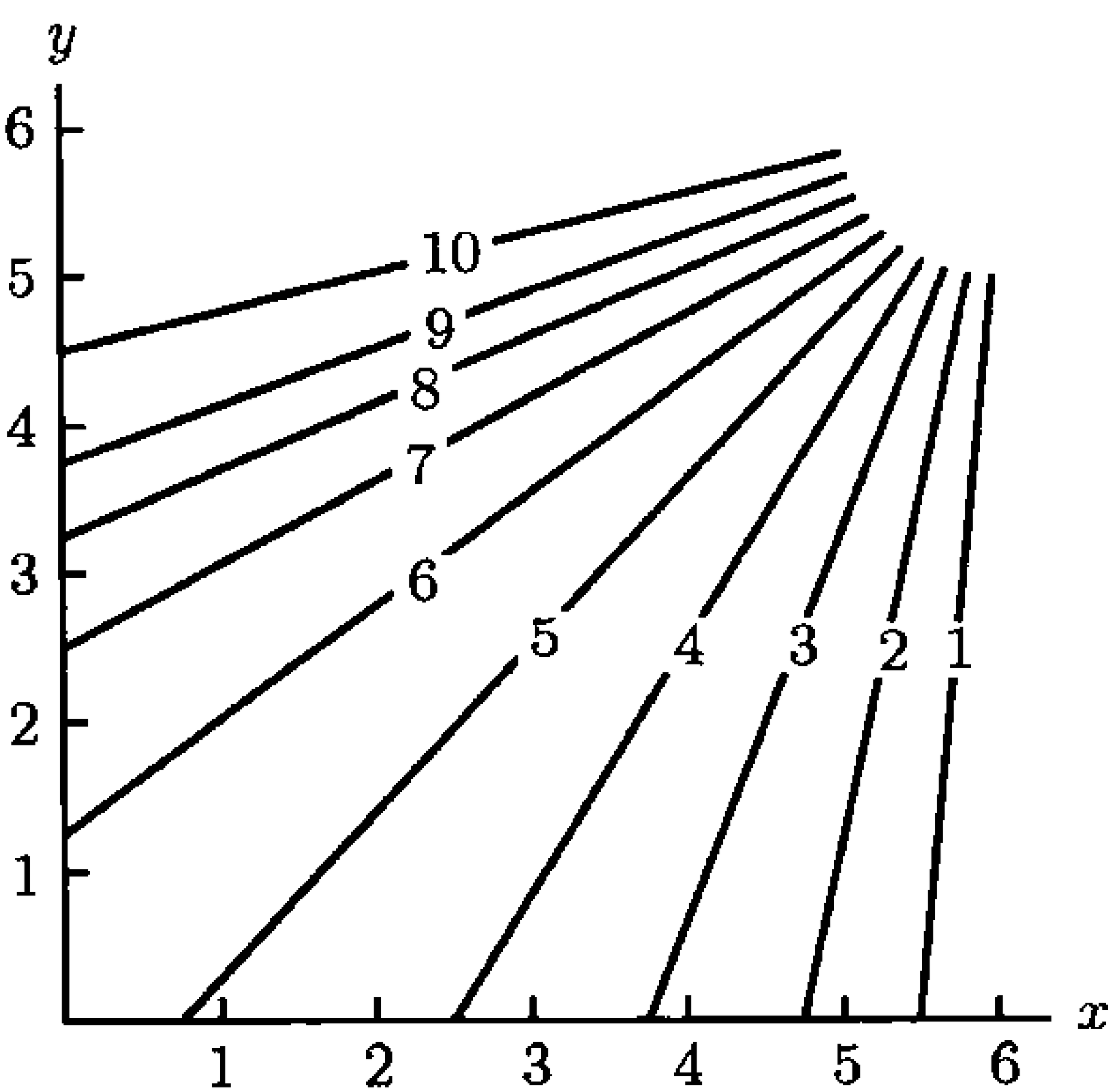


图 9-21

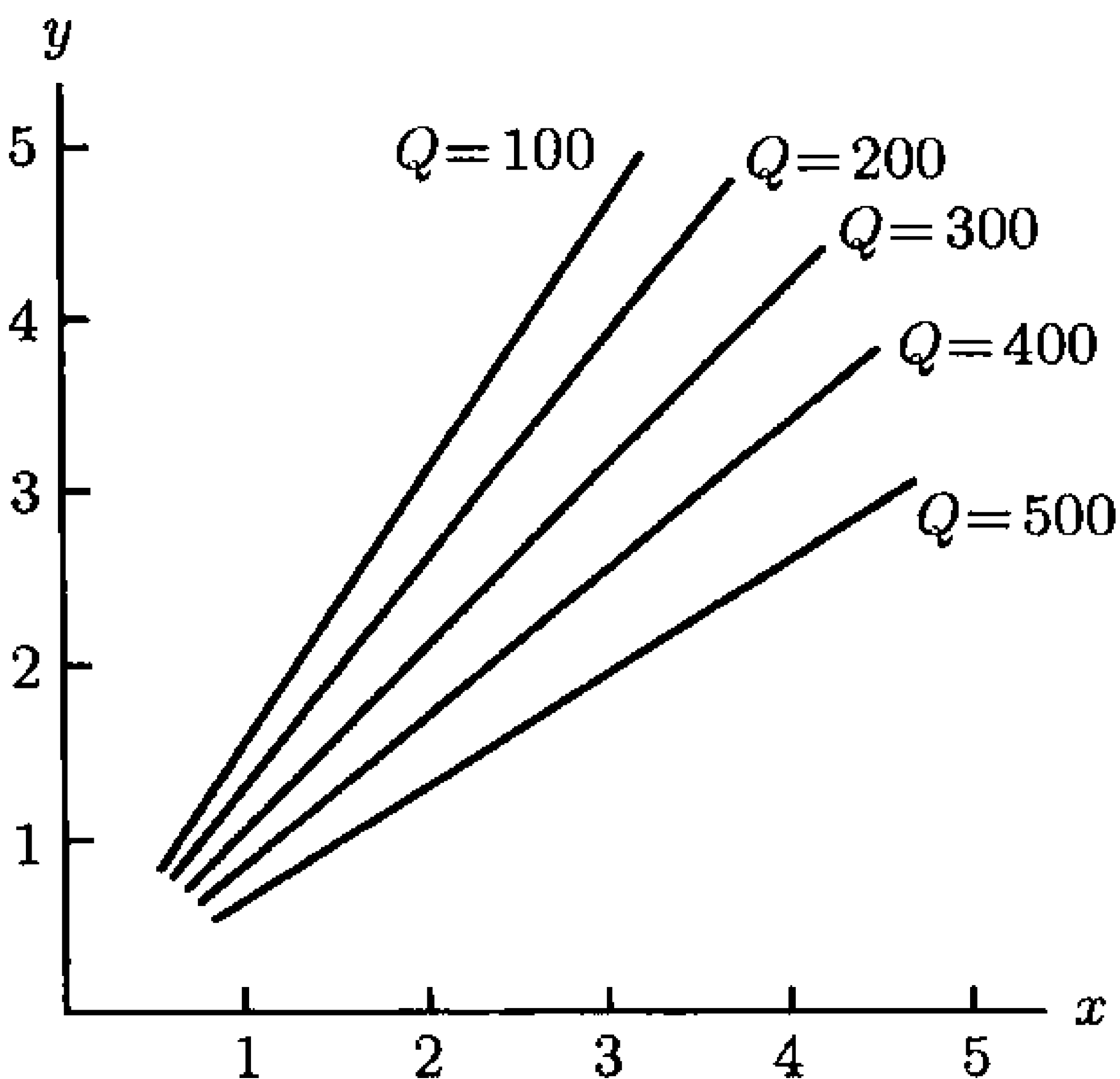


图 9-22

5. 图 9-23 是把某产品的销售量看成是该产品的价格和广告量的函数的等值线图. 哪个轴对应广告量? 请解释.

6. 图 9-24 是一张地形图. 图中有几座山? 估计各座山山顶的 x 坐标和 y 坐标. 哪座山最高? 一条河流经过山谷, 它朝哪个方向流动?

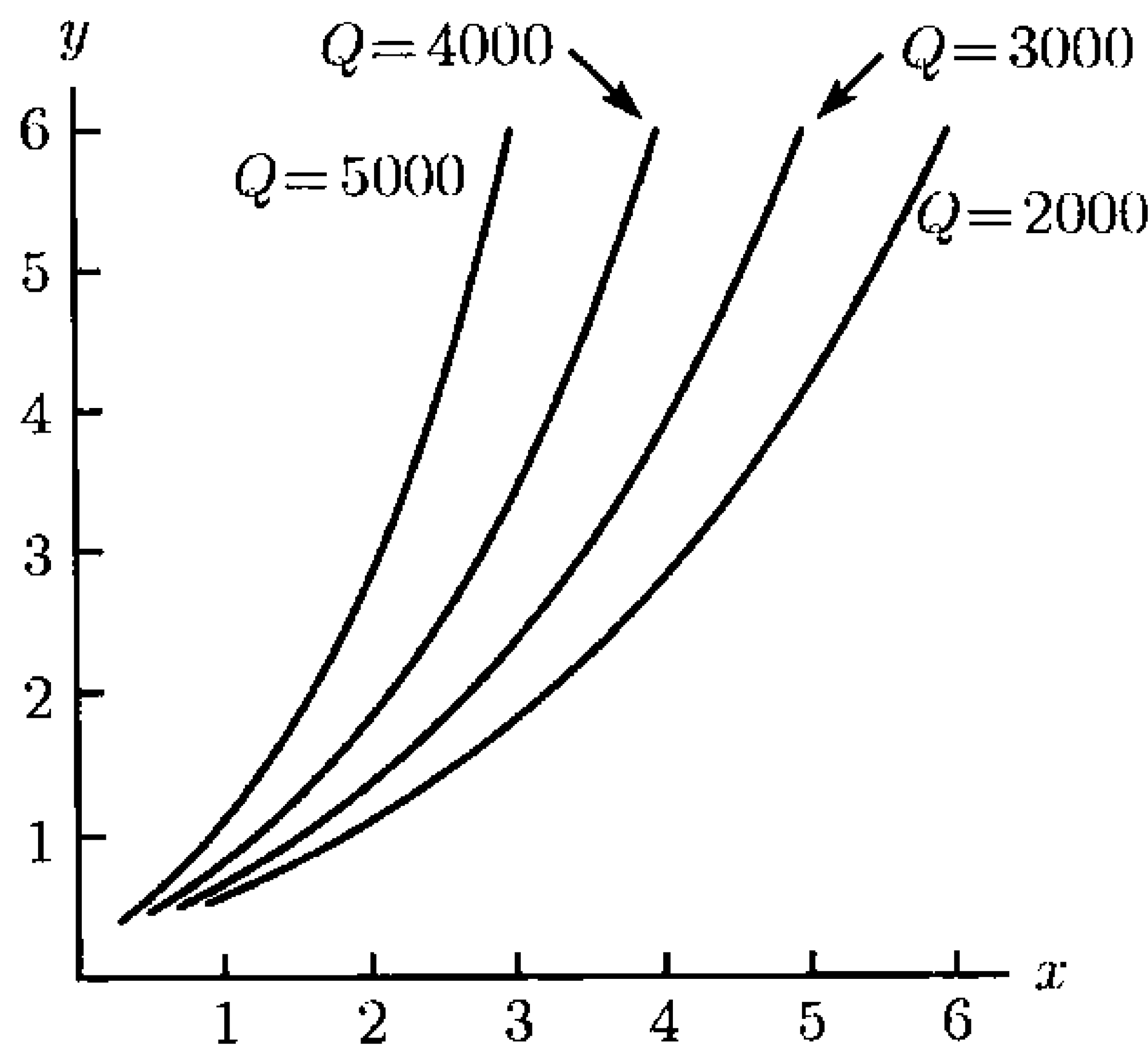


图 9-23

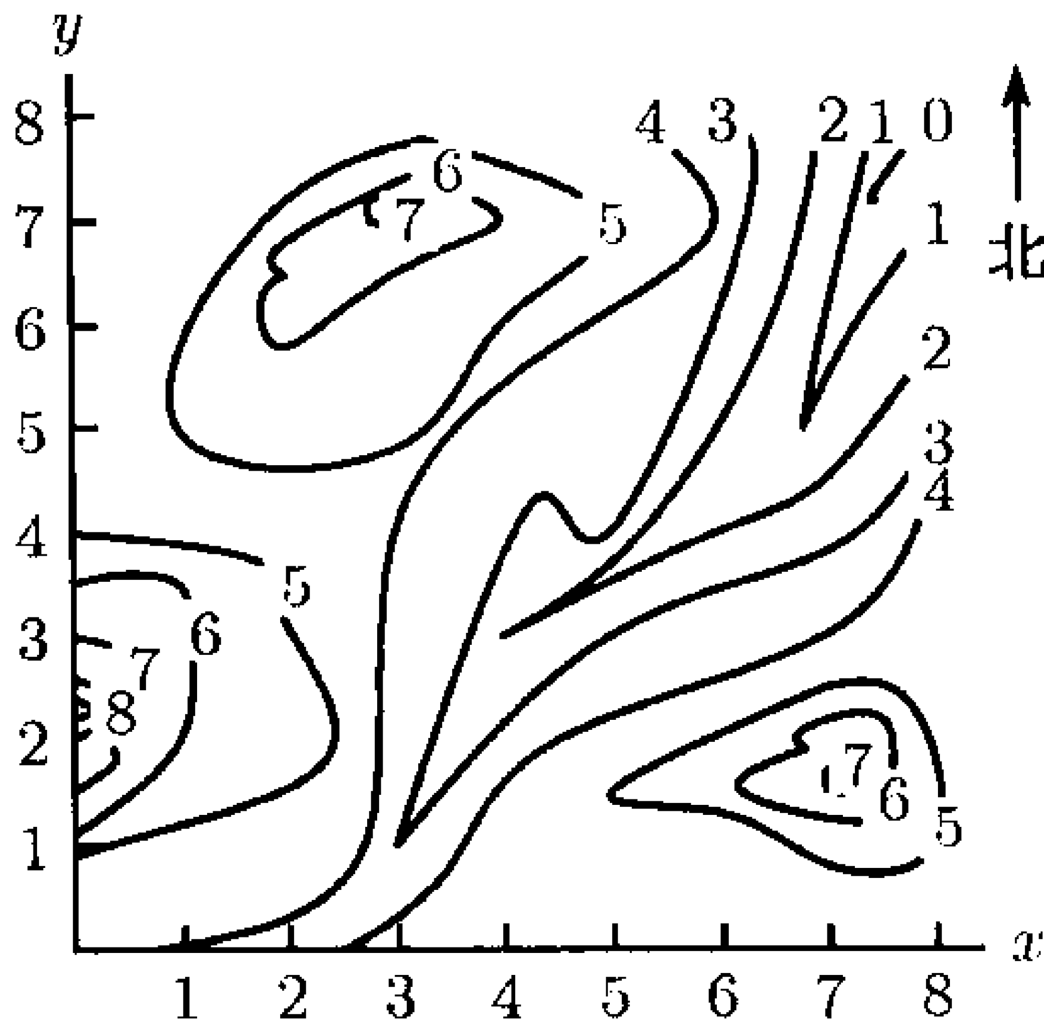


图 9-24

7. 图 9-25 是把 5 年期贷款的月付款看成是利率和贷款量的函数的等值线图. 假设利率是 13%, 你借款 6000 美元.
   (a) 你的月付款是多少?
   (b) 如果利率降到 11%, 那么不增加月付款你能多借多少款?
   (c) 如果不增加你的月付款, 列表格指出各利率下你能借多少款?

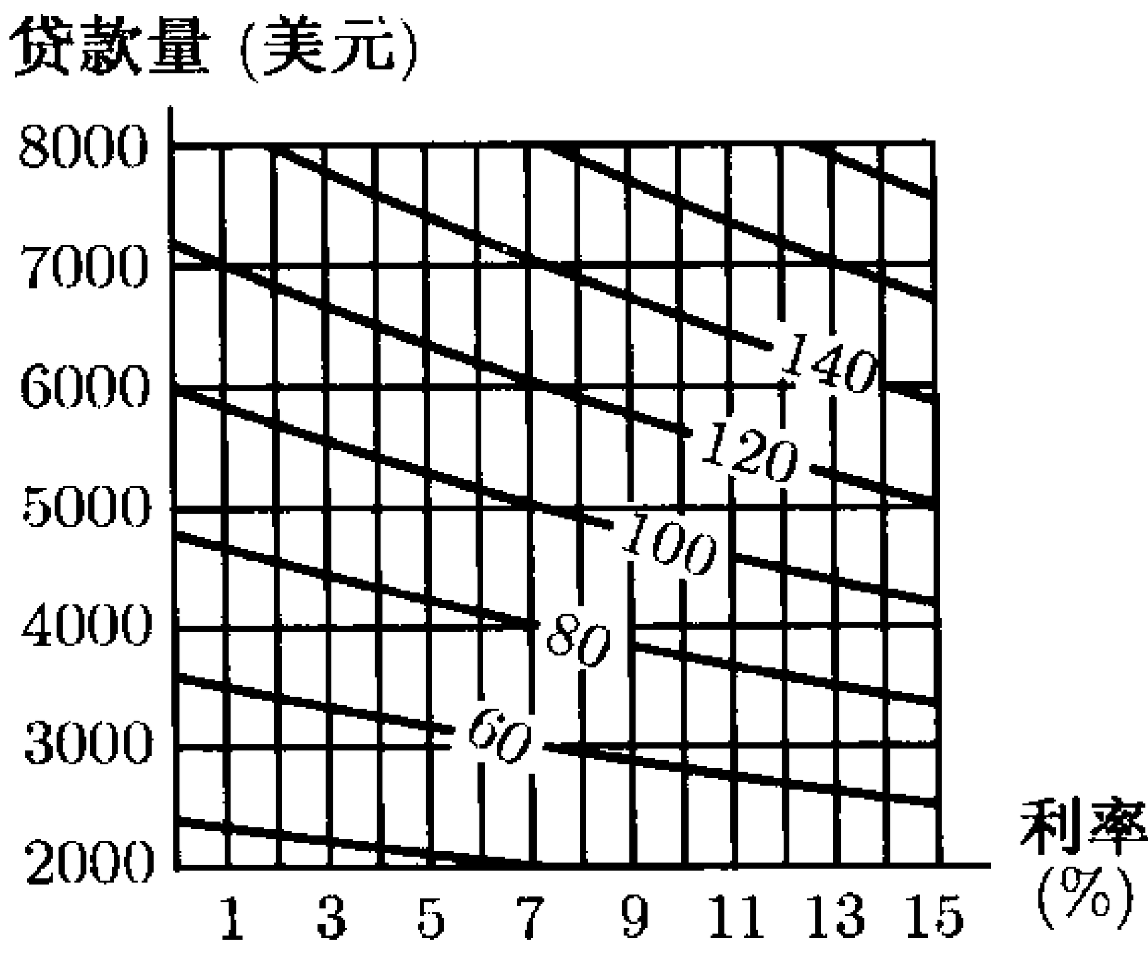


图 9-25

8. 图 9-26 中的等值线图给出爱和金钱的函数 —— 你的幸福感.
   (a) 用语言描述你的幸福感, 如果把它
      (i) 看成是金钱的函数, 其中爱不变
      (ii) 看成是爱的函数, 其中金钱不变
   (b) 固定爱, 画幸福感的两个不同的截面和固定金钱画幸福感的两个不同的截面.

9. 血液中某药物的浓度 C 为 $C = f(x,t) = te^{-t(5-x)}$, 其中 x 是注射的药物量 (单位: mg), t 是注射后的小时数. $f(x,t)$ 的等值线图参见图 9-27. 通过一次改变一个变量说明图: 如果固定 t, 描述 x 的函数 f; 然后固定 x, 描述 t 的函数 f.

习题 10~12 参照图 9-5 中的天气图.

10. 给出
   (a) 宾夕法尼亚
   (b) 北达科他
   (c) 加利福尼亚的日最高温度的范围.

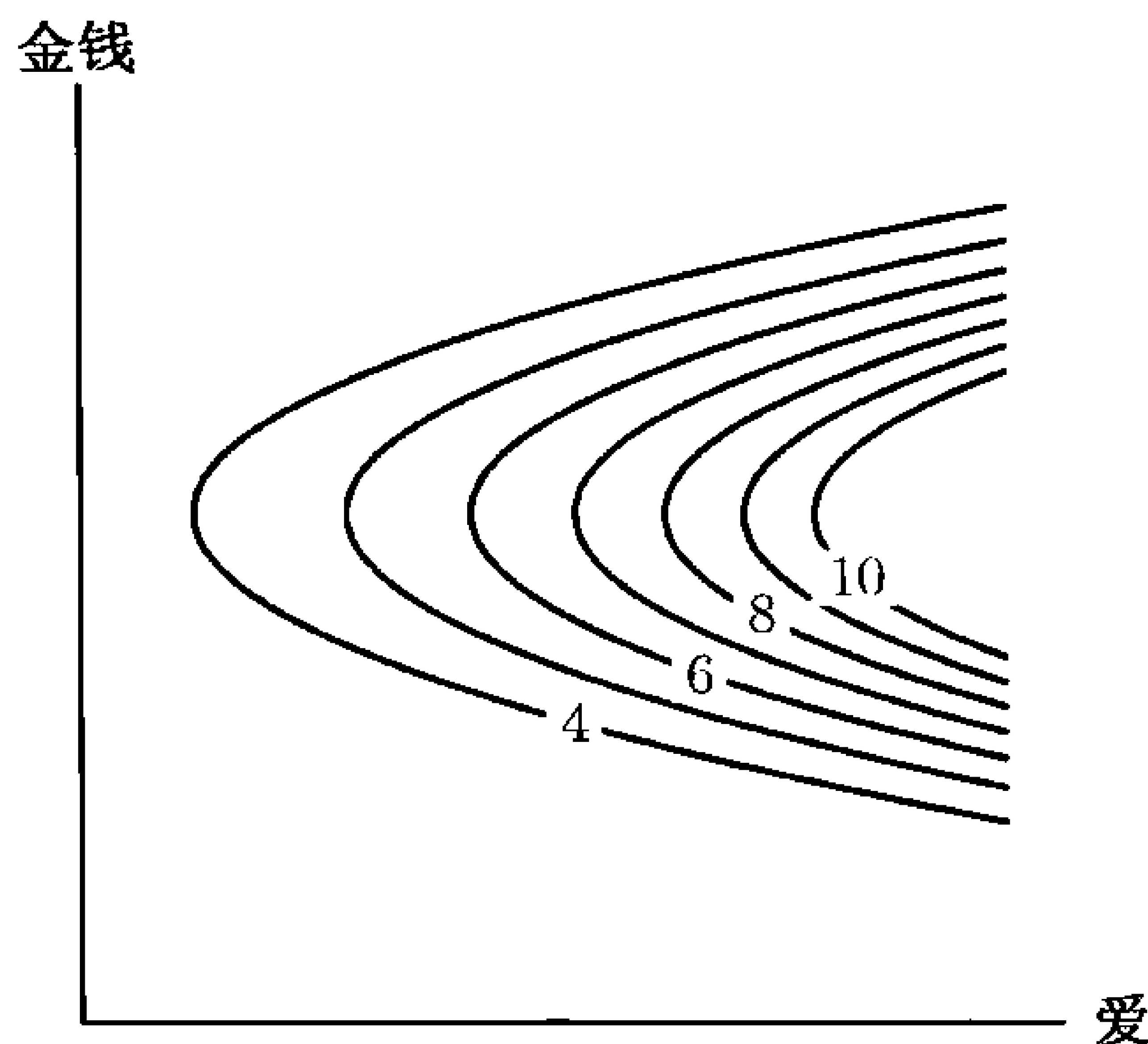


图 9-26

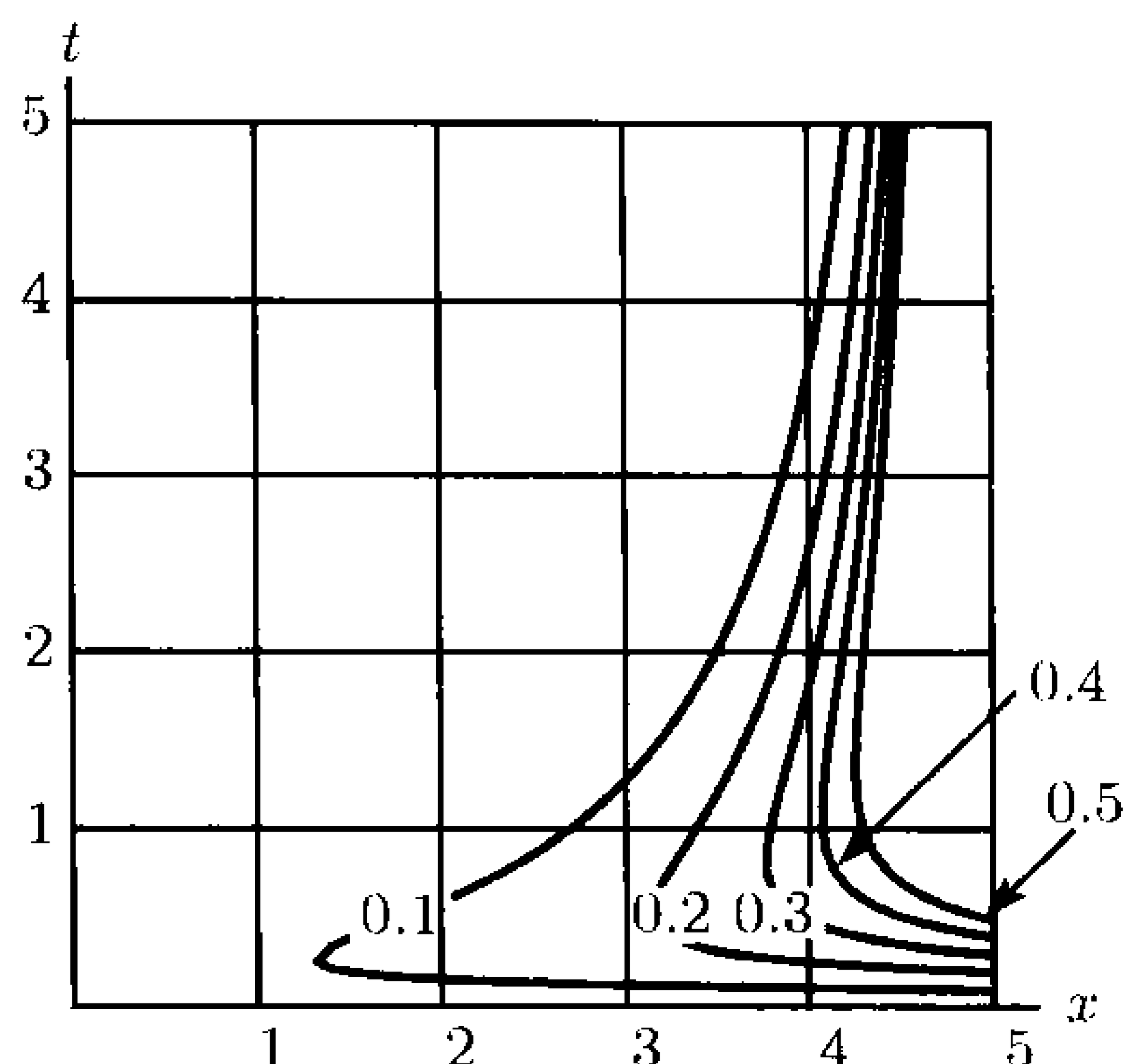


图 9-27

11. 画穿过托皮卡的南北线上的预测最高温度 T 的可能图形.

12. 画穿过博伊西的南北线和东西线上的预测最高温度 T 的可能图形.

13. 9.1 节习题 9 的表中给出了风速和温度函数的风寒因子. 画这个函数的可能的等值线图. 要求包括风寒 $20°, 0°, -20°$ 的等值线.

14. 槭树汁在夜间寒冷且白天暖和的气候里产量最高. 把槭树汁产量看成是高温 (白天) 和低温 (夜晚) 的函数, 作它可能的等值线图. 标出 10, 20, 30, 40(升槭树汁) 等值线.

15. 画 $z = y - \sin x$ 的等值线图, 要求至少包括四个标记好的等值线. 用语言说明等值线及它们是如何分布的.

对习题 16~21, 画给定函数的等值线图, 要求至少包括四个标记好的等值线. 用语言说明等值线及它们是如何分布的.

16. $f(x,y) = x + y$ **17.** $f(x,y) = x + y + 1$

18. $f(x,y) = 3x + 3y$ **19.** $f(x,y) = -x - y$

20. $f(x,y) = 2x - y$ **21.** $f(x,y) = y - x^2$

22. 图 9-28 给出了在美国、加拿大和墨西哥各处繁殖鸟种群密度的函数的等值线①. 下列叙述是正确的还是错误的? 解释你的答案.

(a) 从加拿大南部到北部, 种群密度增大.

(b) 一般来讲, 半岛 (比如, 佛罗里达, 加利福尼亚半岛和尤卡坦半岛) 的种群密度比它附近区域的要小.

(c) 迈阿密附近的种群密度超过 100.

(d) 种群密度关于距离的变化率最大的在墨西哥. 如果这是对的, 标出取得该最大变化率的点和方向.

23. 在一家小型印刷公司, $P = 2N^{0.6}V^{0.4}$, 其中 N 是工人数, V 是设备的价值, P 是产量 (单位: 千页/天).

(a) 如果该公司有 300 工人的劳动力和 200 单位的设备价值, 产量是多少?

(b) 如果劳动力翻倍 (600 个工人), 产量如何变化?

---

① 摘自哈佛大学阿诺德植物园的主管 Robert Cook 教授的研究生论文.

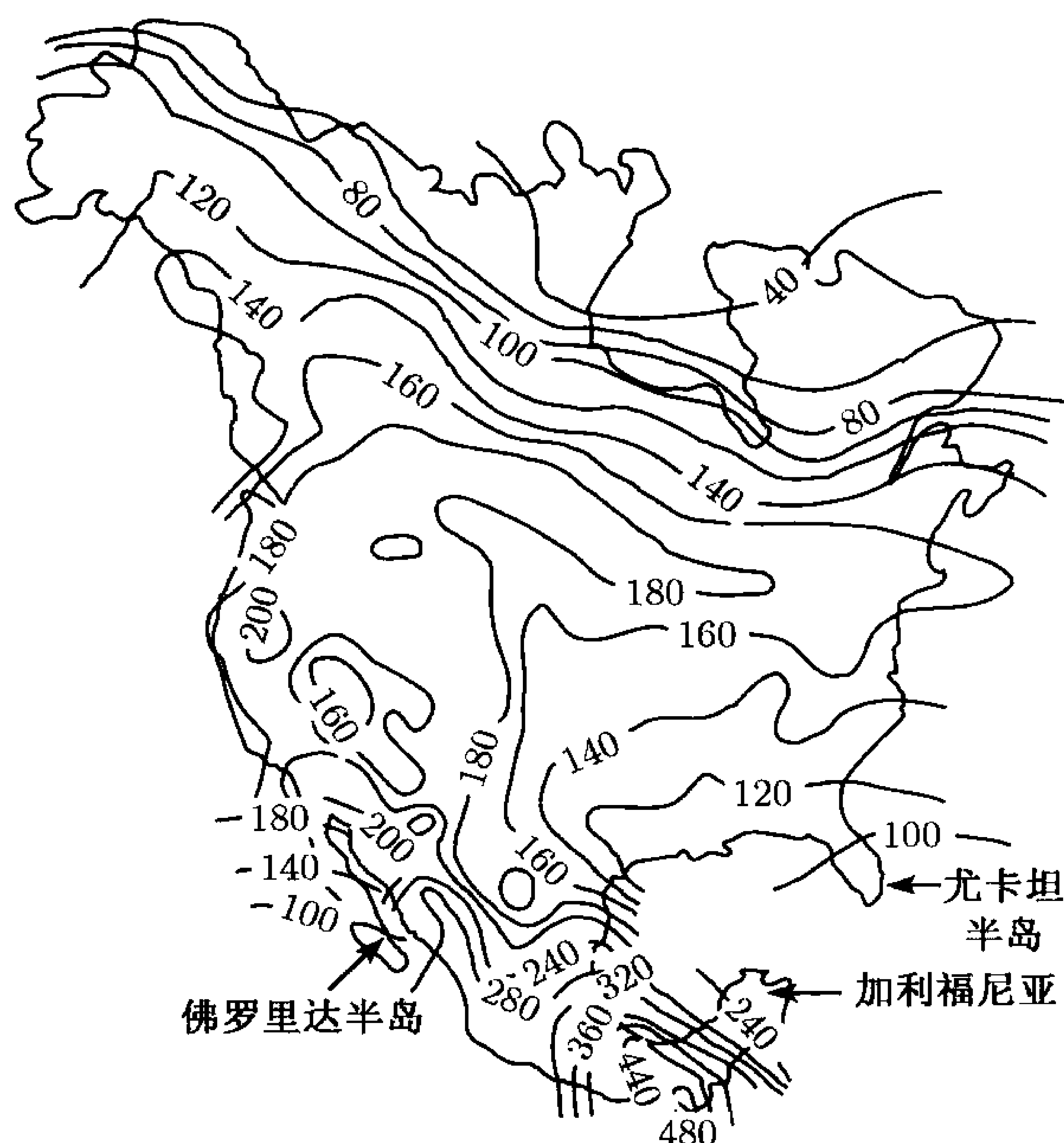


图 9-28

(c) 如果公司购买足够多的设备使它的设备价值翻倍 (400 单位), 产量如何变化?

(d) 如果把 (a) 部分所给 N 和 V 的值翻倍, 产量如何变化?

24. 生产某产品的产量 Q 由劳动的单位数 L 和资本 K 的函数 $Q = 900L^{1/2}K^{2/3}$ 决定.

(a) 如果 $L = 70, K = 50$, 生产的产量是多少?

(b) 求 $L = 140, K = 100$ 时的 Q 值. 一般地, 讨论 L 和 K 都翻倍对 Q 的影响.

25. 图 9-29 给出了不同的 Cobb-Douglas 生产函数 $F(L, K)$ 的等值线图. 把每个等值线图和准确的描述对应起来.

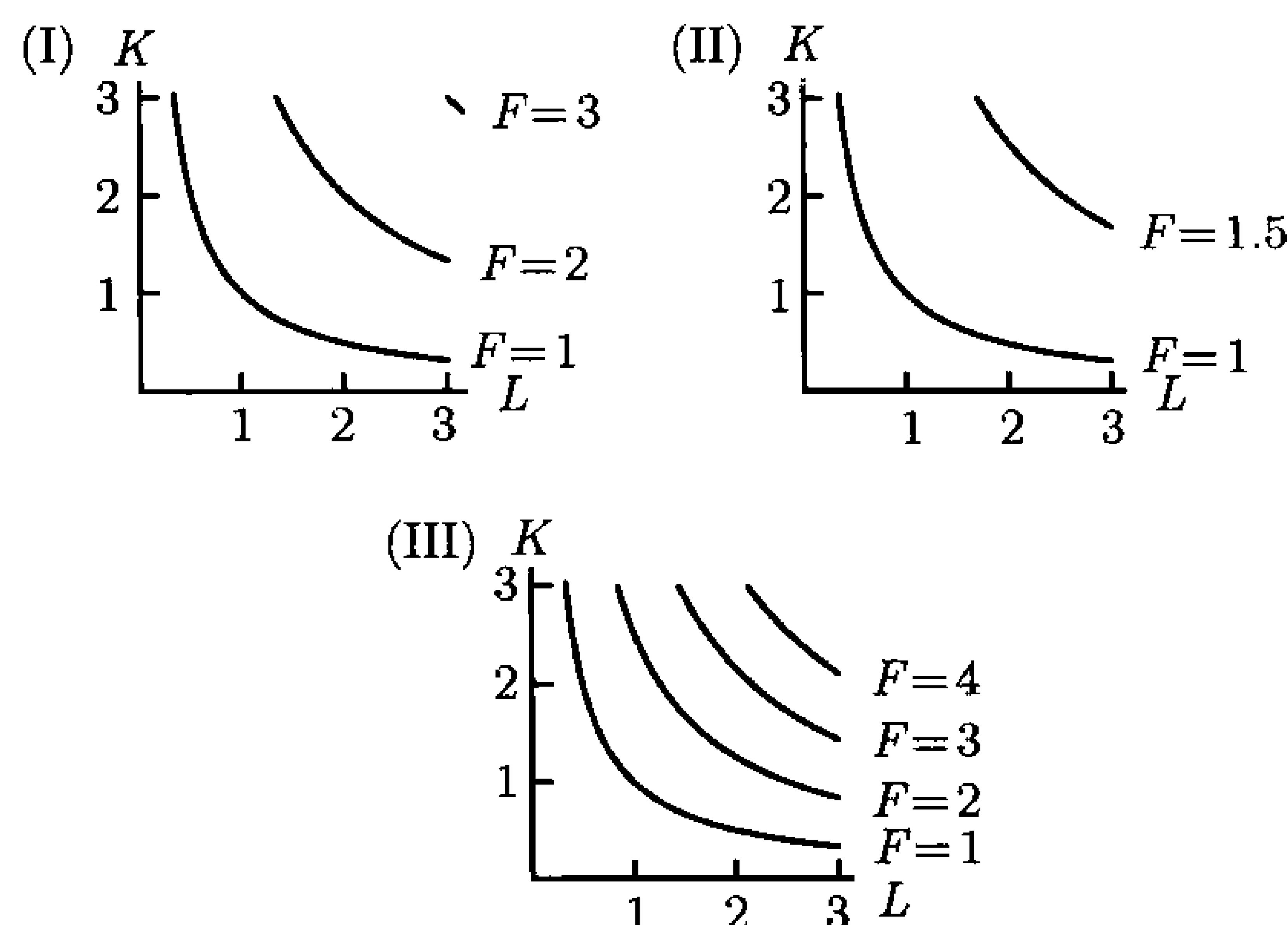


图 9-29

(a) 每个投入量翻三倍, 产出也翻三倍.
(b) 每个投入量翻四倍, 产出翻倍.
(c) 每个投入量翻倍几乎使产出翻三倍.

26. 图 9-30 中的每一个等值线图给出了一个城市在某区域的人口密度. 选择等值线图使之与下列状况当中的一个最相符. 可能有很多不同的搭配, 选择最合理的一个并解释你的选择.

(a) 中间的等值线是高速公路.
(b) 中间的等值线是敞开的下水道.
(c) 中间的等值线是铁道线.

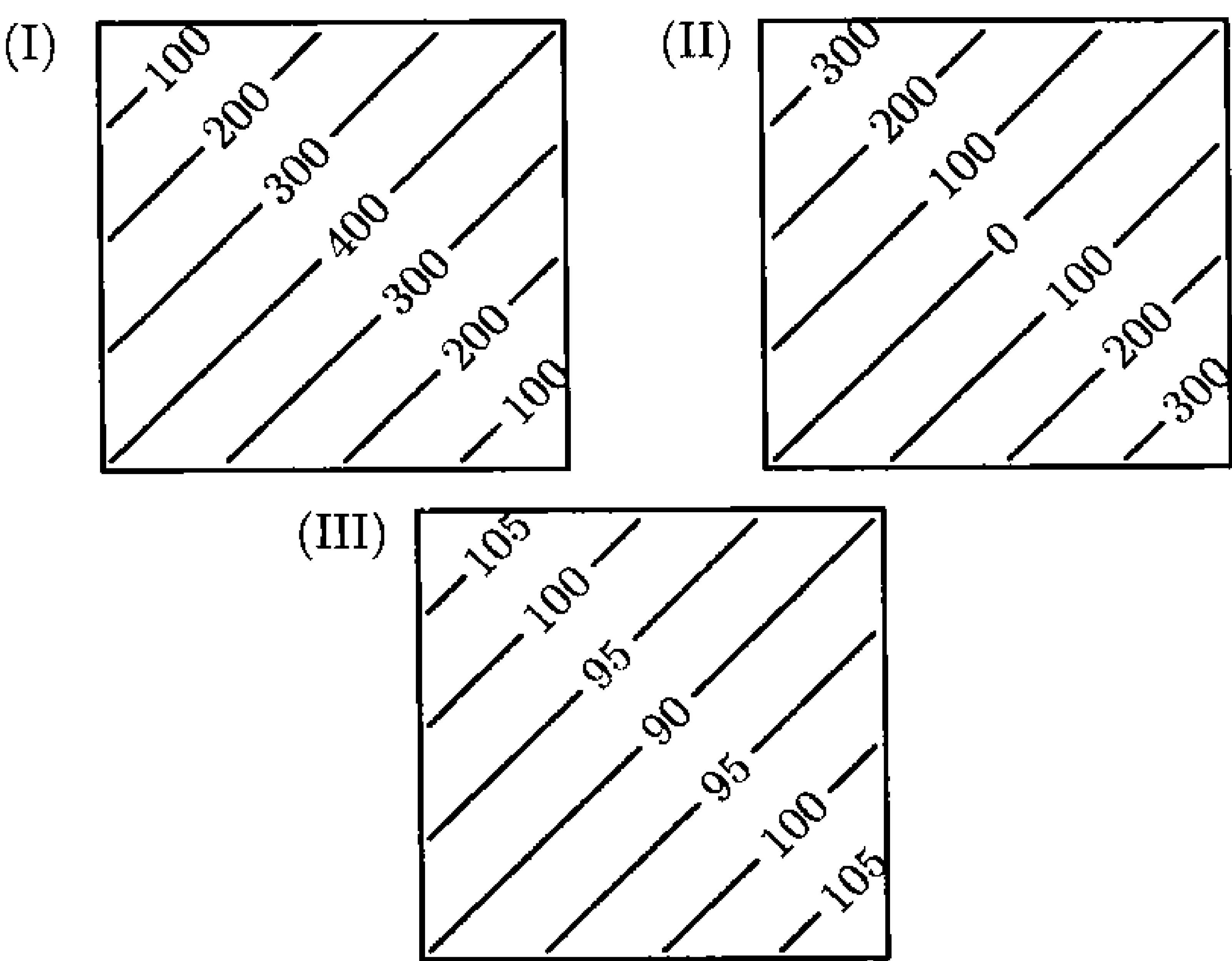


图 9-30

27. 把图 9-31 中的表格 (a)~(d) 与等值线图 (I)~(V) 一一对应起来.

28. 图 9-32 显示了受到惊吓的病人的心脏输出情况 (单位: 升/分钟), 它是中央静脉血压 (单位: 毫升汞柱) 和自受到惊吓起的时间 (单位: 小时) 的函数.[①]

(a)

y \ x	−1	0	1
−1	2	1	2
0	1	0	1
1	2	1	2

(b)

y \ x	−1	0	1
−1	0	1	0
0	1	2	1
1	0	1	0

(c)

y \ x	−1	0	0
−1	2	0	2
0	2	0	2
1	2	0	2

(d)

y \ x	−1	0	1
−1	2	2	2
0	0	0	0
1	2	2	2

① Arthur C. Guyton 和 John E. Hall, *Textbook of Medical Physiology* , *Ninth Edition*, 第 288 页 (费城: W. B. Saunders, 1996)

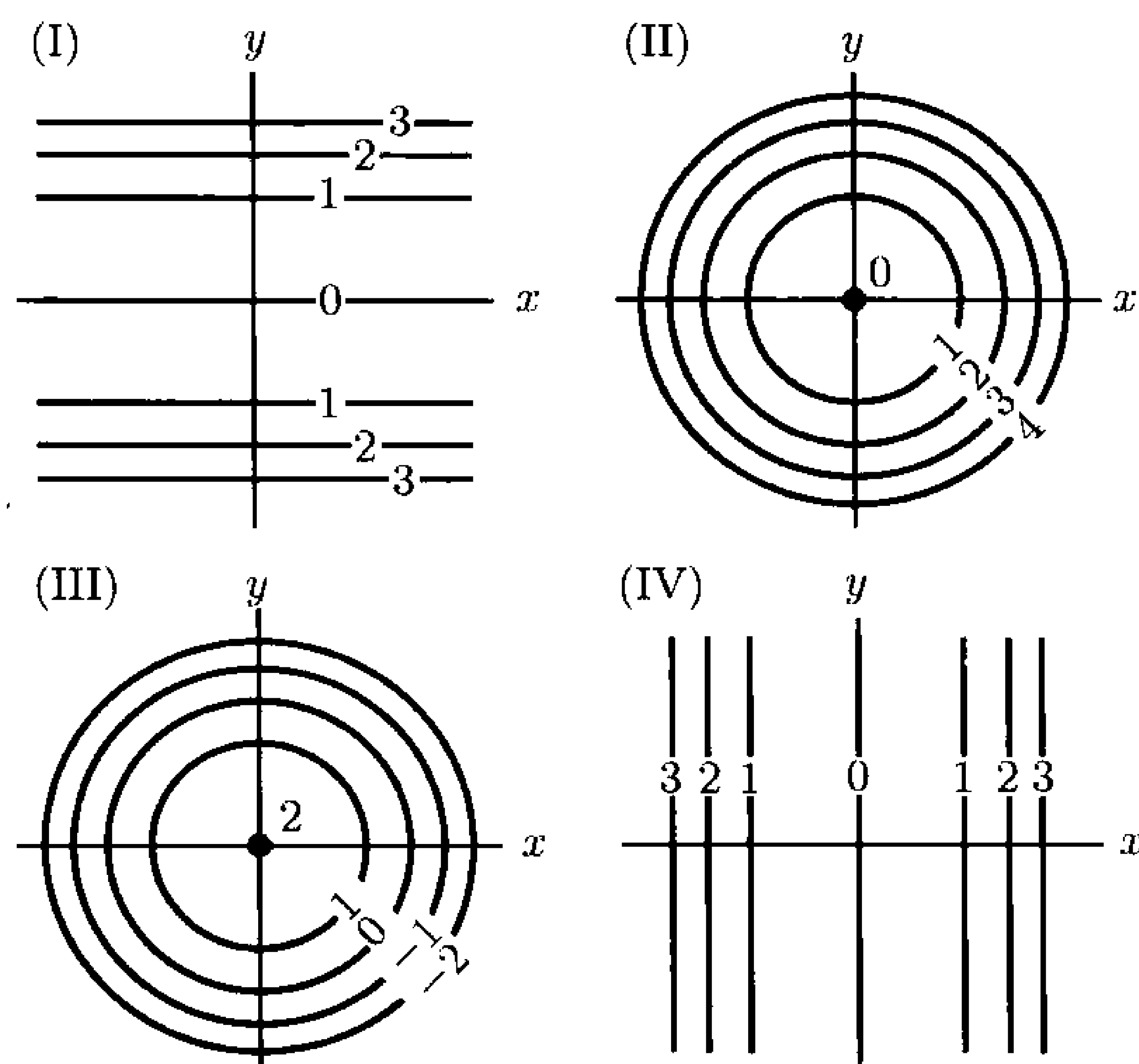


图 9-31

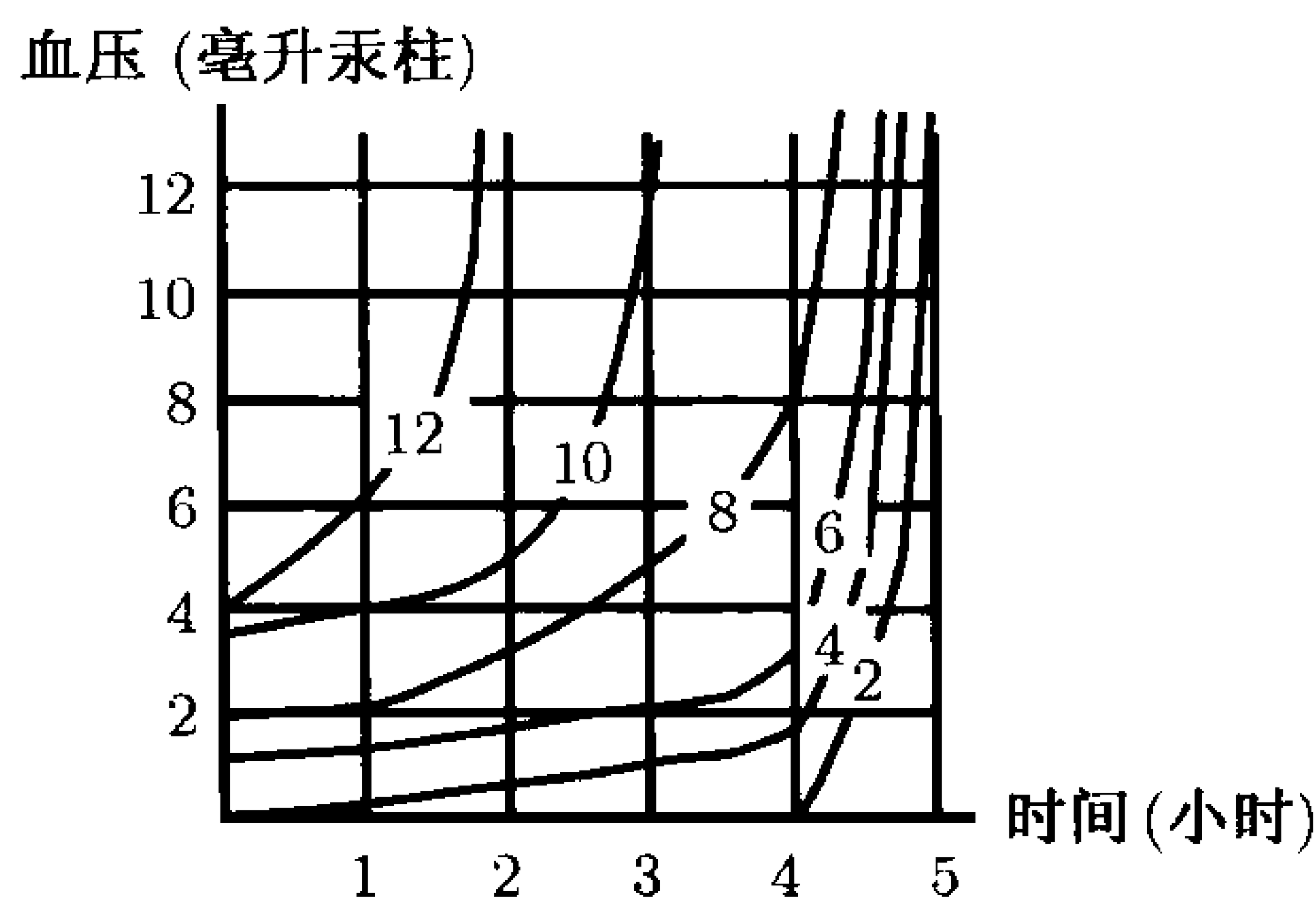


图 9-32

(a) 若病人的血压是 4 毫升汞柱, 那么他首次受到惊吓时的心脏输出是多少? 估计 3 小时后的心脏输出. 过多久心脏输出降为最初值的 50%?

(b) 对受到惊吓的病人来说, 心脏输出是血压的增函数还是减函数?

(c) 设 t 表示病人受到惊吓的时间长度, 心脏输出是 t 的增函数还是减函数?

(d) 如果血压是 3 毫升汞柱, 说明心脏输出是如何随着时间变化的. 具体讲来, 在受到惊吓的前两个小时, 它变化得快还是慢? 在 2 到 4 小时间呢? 在研究的最后一个小时内呢? 说明这些信息有助于心理学家治疗受到惊吓的病人的理由.

29. 把下列对一家公司的成就的描述与图 9-33 中金钱和工作的函数即成就的等值线图一一对应起来.

(a) 我们的成就简单地用美元衡量. 考虑得更多无害, 但也没有帮助.

(b) 无论我们投入多少钱或工作到公司, 我们都不能成功.

(c) 虽然我们还不是非常成功, 资金的投入量看上去不是很重要. 只要我们努力工作, 我们的成就就会增大.

(d) 公司的成就基于努力工作和投资.

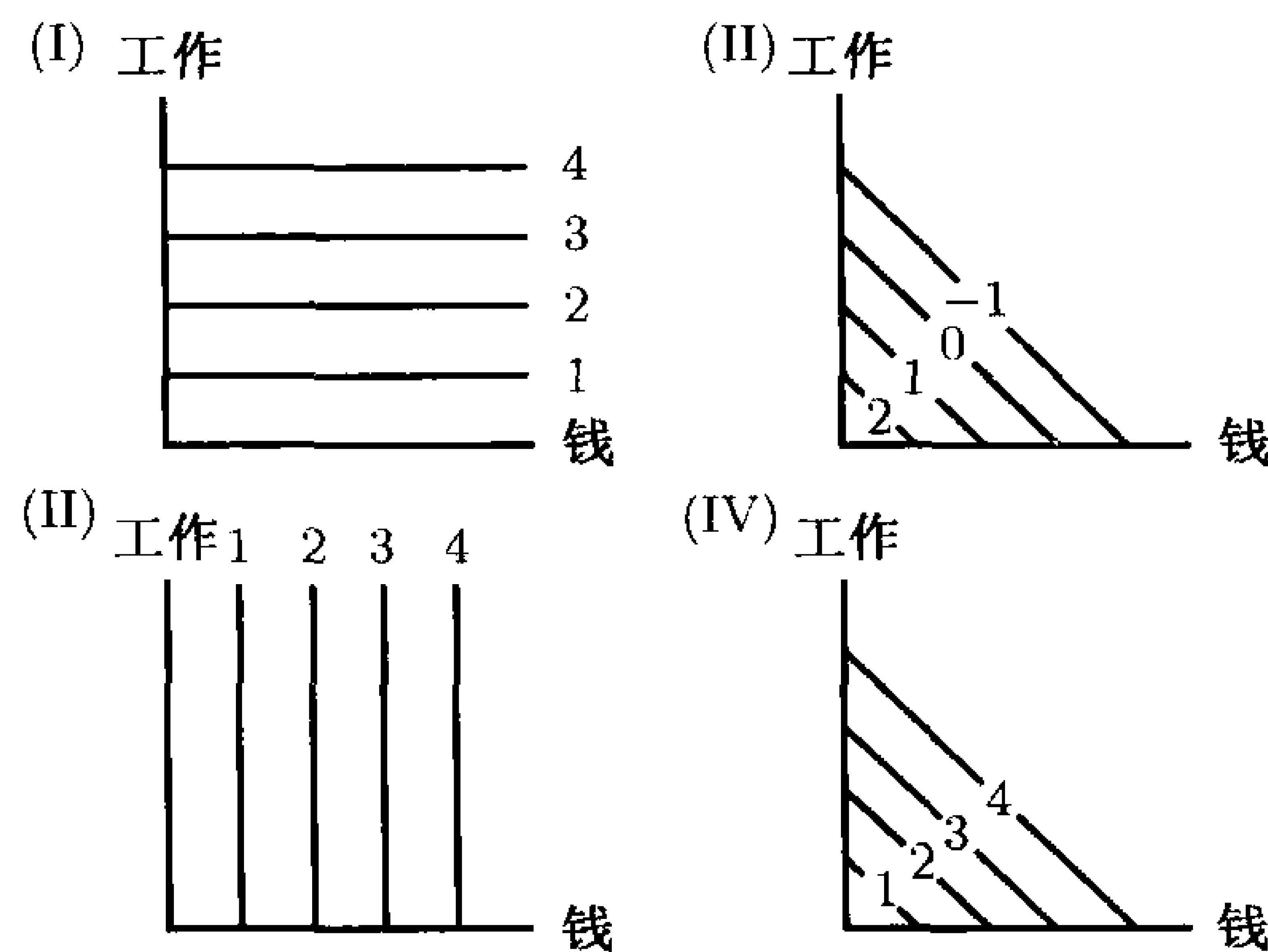


图 9-33

30. 图 9-34 是有 A, B 两条路的山的等高线图.

(a) 你沿 A, B 中的哪条路爬山会比较陡峭?

(b) 你沿 A, B 中的哪条路爬山对周围的风景有较好的视野? (假设树不会阻挡你的视线.)

(c) 在哪条路边上更有可能有河流?

31. 大剂量的抗生素可能有毒. 如果重复服用抗生素, 内科医师必须监测药物经过肾脏排泄的比率. 肾小球滤过率或 GFR 是肾脏功能的一个量度标准, 它衡量经过肾脏的外膜 (或肾小球) 物质量, 其单位是 ml/min. 一个正常的 GFR 是 125 ml/min. 图 9-35 给出了排泄的硫苯咪唑西林在一剂药中的百分数 P, 它是病人的 GFR 和用药后的时间 (单位: h) 的函数.①

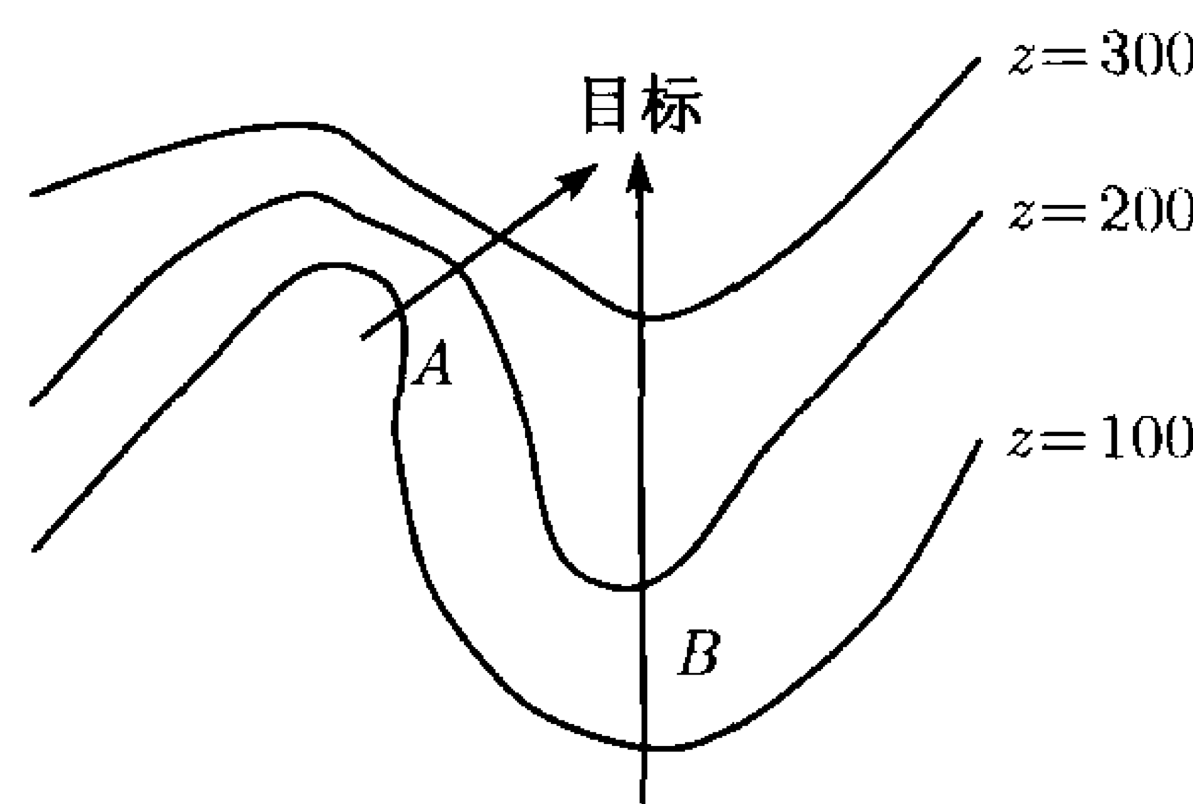


图 9-34

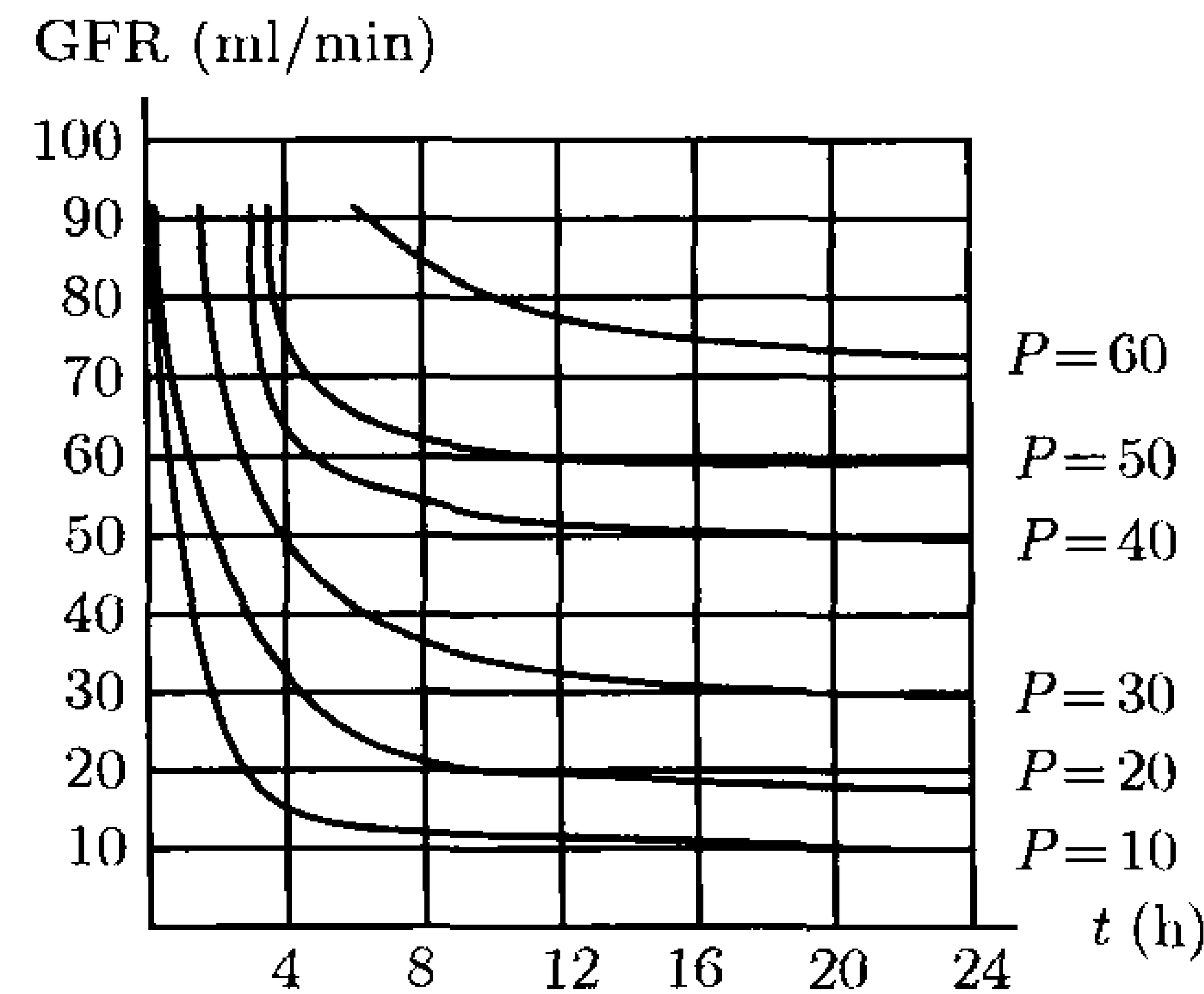


图 9-35

(a) GFR 为 50 的病人排泄出药剂的 30%大约需要多长时间?

① Peter G. Welling 和 Francis L. S. Tse, *Pharmacokinetics of Cardiovascular, Central Nervous System, and Antimicrobial Drugs*, The Royal Society of Chemistry, 1985, 第 316 页.

(b) GFR 为 60 的病人 5 小时后排泄出药剂的百分数大约是多少?

(c) 说明我们如何根据图形指出: 有固定 GFR 的病人 12 小时后的排泄量变化非常小.

(d) 排泄的百分数是时间的增函数还是减函数? 说明该结果言之有理的理由.

(e) 排泄的百分数是 GFR 的增函数还是减函数? 说明这对给身患肾脏疾病的病人服用抗生素的内科医师意味着什么.

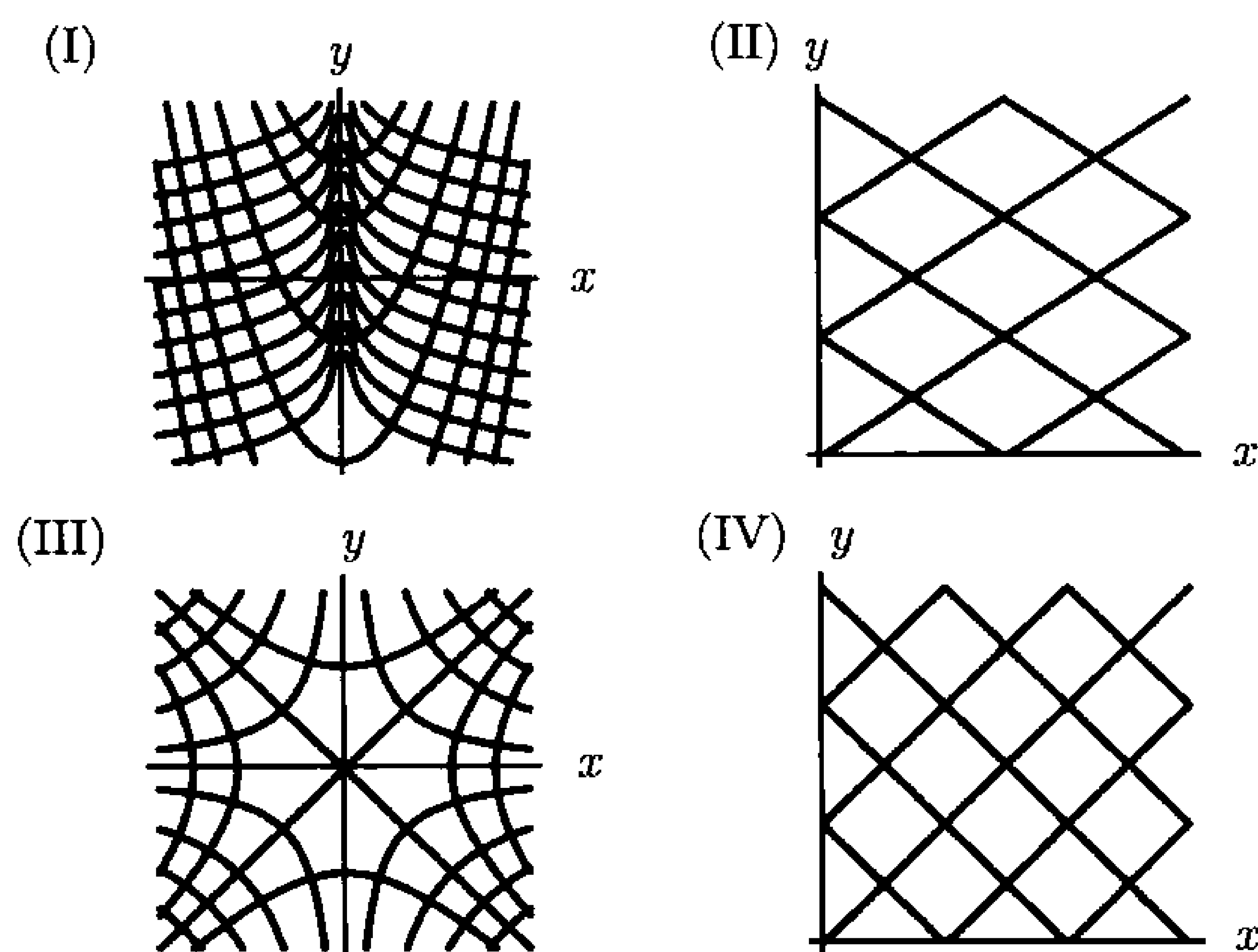
32. 把函数 (a)~(d) 与等值线图 (I)~(IV) 配对. 指出在各种情况下, 哪个等值线图代表 f, 指出哪个等值线图代表 g. (x 和 y 的刻度一样.)

(a) $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x-y$

(b) $f(x,y)=2x+3y, g(x,y)=2x-3y$

(c) $f(x,y)=x^2-y, g(x,y)=2y+\ln|x|$

(b) $f(x,y)=x^2-y^2, g(x,y)=xy$



33. 你喜欢比萨和可乐. 图 9-36 的等值线图表示你的愉悦感, 它是你拥有的比萨数和可乐数的函数. 哪个图代表你的愉悦感, 如果

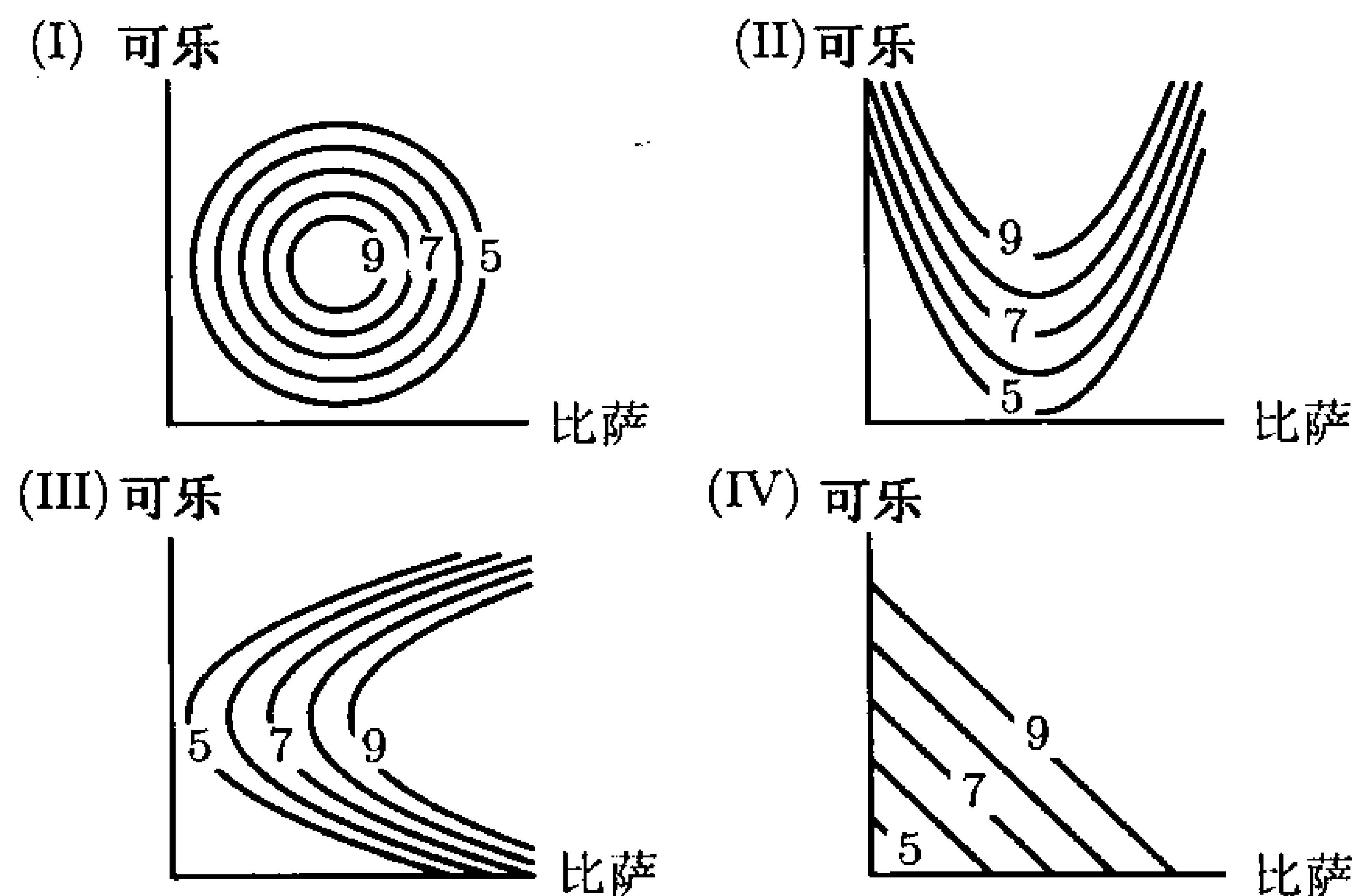


图 9-36

(a) 就算有太多的比萨和太多的可乐也不为过.

(b) 有越多的比萨或越多的可乐最好.

(c) 有足够的可乐就够了, 但比萨越多越好.

习题 34~38 有关振动的吉他弦. 对弦每毫秒的快照如图 9-37 所示.

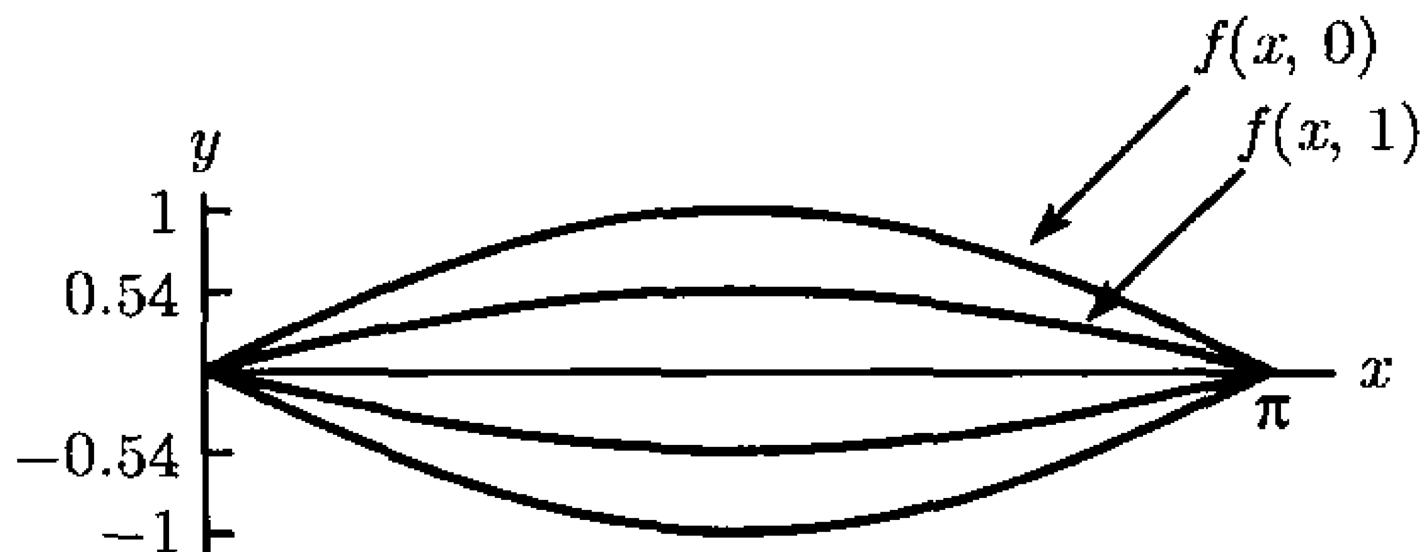


图 9-37 振动的吉他弦: t 取 4 个不同值的 $f(x,t)=\cos t\sin x$

考虑沿着 x 轴上从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 拉紧的吉他弦. 弦上的每个点都有一个 x 值, $0\leqslant x\leqslant\pi$. 弹拨吉他的弦时, 弦上的每个点在 x 轴两侧来回移动. 设 $y=f(x,t)$ 表示弦上位于 x 的点在 t 时刻离左端的位置. 那么

$$f(x,t)=\cos t\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

其中 t 的单位是 ms.

34. (a) 对固定的 t 值, $t=0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{4}\pi,\pi$, 画 y 关于 x 的图形.

(b) 利用你的图形说明这个函数能表示振动的吉他弦的理由.

35. 从振动的弦的角度看, 函数 $f(x,0)$ 和 $f(x,1)$ 代表什么?

36. 从振动的弦的角度看, 函数 $f(0,\mathrm{t})$ 和 $f(1,t)$ 代表什么?

37. 描述位置由下列函数确定的吉他弦的运动:

(a) $y=g(x,t)=\cos 2t\sin x$

(b) $y=h(x,t)=\cos t\sin 2x$

38. 根据图 9-38 中函数 $f(t)=\cos t\sin x$ 的等值线图, 用语言描述固定 t 时 f 的截面和描述固定 x 时 f 的截面. 从弦的特征的角度解释你注意到的现象.

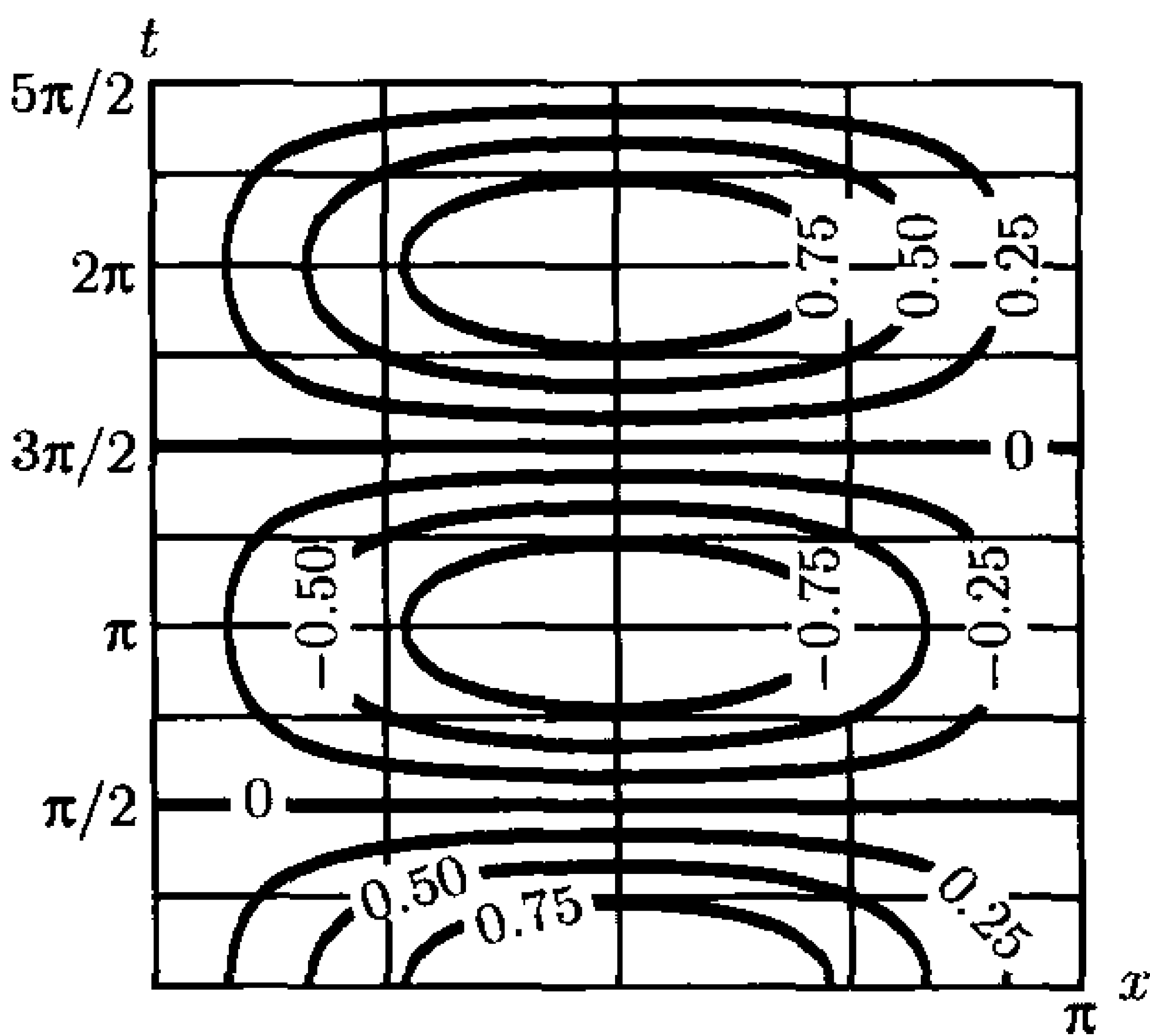


图 9-38

9.3 偏导数

在一元微积分中, 我们看到如何用导数衡量变化率. 我们从复习这种思想入手.

9.3.1 航空公司收益的变化率

在 9.1 节, 我们看到一个表示航空公司收益的二元函数 $R=f(x,y)=350x+$

$200y$, 其中 x 是售出的全价票数量, y 是售出的折扣票数量.

如果我们固定折扣票数量 $y = 10$, 则得到一个一元函数:

$$R = f(x, 10) = g(x) = 350x + 2000.$$

收益关于 x 的变化率为单变量导数 $g'(x) = 350$.

这就告诉我们, 如果 y 固定为 10, 那么每多卖出一张全价票, 收益增加 350 美元. 我们称 $g'(x)$ 为收益 R 在点 $(x, 10)$ 关于 x 的**偏导数**. 如果 $R = f(x, y)$, 我们记

$$\frac{\partial R}{\partial x} = f_x(x, 10) = g'(x) = 350.$$

例 1 固定 $x = 20$, 求收益 R 关于 y 的变化率.

解 把 $x = 20$ 代入 $R = 350x + 200y$ 得一元函数:

$$R = h(y) = 350(20) + 200y = 7000 + 200y.$$

x 固定, 收益 R 关于 y 的变化率是

$$\frac{\partial R}{\partial x} = f_y(20, y) = h'(y) = 200.$$ □

我们称 $\dfrac{\partial R}{\partial y} = f_y(20, y)$ 为收益 R 在点 $(20, y)$ 关于 y 的偏导数. R 的所有偏导数都为正这一事实与不管多卖出哪种类型的票, 收益都增加这点是一致的.

9.3.2 偏导数的定义

对任何函数 $f(x, y)$, 我们通过固定一变量而让另一变量变化来分别研究 x 和 y 对函数值的影响. 我们借鉴前面例子的方法计算 $f(x, y)$ 关于 x 和 y 的变化率. 对所有下面的极限存在的点 (a, b), 我们给出如下定义.

f 关于 x 和 y 的偏导数

f 在 (a, b) 关于 x 的偏导数是 y 为常数时 f 的导数:

$$f_x(a, b) = y \text{ 固定为 } b \text{ 时 } f \text{ 在 } (a, b) \text{ 的变化率} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

f 在 (a, b) 关于 y 的偏导数是 x 为常数时 f 的导数:

$$f_y(a, b) = x \text{ 固定为 } a \text{ 时 } f \text{ 在 } (a, b) \text{ 的变化率} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

若我们把 a, b 看成变量, $a = x, b = y$, 则我们得到**偏导函数** $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$.

偏导数和通常的导数一样, 有其他记法:

偏导数的其他记法

设 $z=f(x,y)$, 我们记

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x},\quad f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f_x(a,b)=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,b)}\quad f_y(a,b)=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

我们用符号 ∂ 表示偏导数, 以区分通常的导数. 在因变量用不同于 x 和 y 的字母表示时, 我们作相应的调整. 比如, $f(u,v)$ 的偏导数记作 f_u 和 f_v.

9.3.3 根据表格估计偏导数

例 2 为测量甲醛的毒性, 对老鼠进行的试验[①]获得的数据参见表 9-3. 表格中的值给出了接触浓度 c(单位: ppm) 存活 t 个月的老鼠的百分比 P, 因此 $P=f(t,c)$. 根据表 9-3, 估计 $f_t(18,6)$ 和 $f_c(18,6)$. 用你的答案说明甲醛的毒性.

表 9-3 接触甲醛蒸汽后存活的老鼠百分比

		时间 t(月)												
		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
浓度c (ppm)	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	99	97	95
	2	100	100	100	100	100	100	100	100	99	98	97	95	92
	6	100	100	100	99	99	98	96	96	95	93	90	86	80
	15	100	100	100	99	99	99	99	96	93	82	70	58	36

解 为求 $f_t(18,6)$, 我们固定 c 为 6 ppm, 然后求存活百分比 P 关于时间 t 的变化率. 我们有

$$f_t(18,6)\approx\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{f(20,6)-f(18,6)}{20-18}=\frac{90-93}{20-18}\approx-1.5\%\text{ 每月}.$$

这是存活百分比 P 在时间方向上在点 (18,6) 处的变化率. 它小于零这一事实表明: 我们从表格中 $c=6$ 所在行沿着 t 增加的方向 (即从表 9-3 的左边水平地向右) 读数时, P 是递减的. 为求 $f_c(18,6)$, 我们固定 $t=18$ 并沿着 c 增加的方向 (即从表 9-3 的顶端到底部) 计算 P 的变化率. 我们有

$$f_c(18,6)\approx\frac{\Delta P}{\Delta c}=\frac{f(18,15)-f(18,6)}{15-6}=\frac{82-93}{15-6}=-1.22\%\text{ 每 ppm}.$$

随着 c 的增加, P 的变化率大约为 -1.22%/ppm. 这表明, 浓度由 6 ppm 增加 1 ppm 时, 存活 18 个月的百分比每增加 1 ppm 减少 1.22%. 偏导数为负是因为甲醛浓度提高后, 存活这么长时间的老鼠减少. (即 P 随着 c 的增加而减少.) □

① James E. Gibson, *Formaldehyde Toxicity*, 第 125 页 (Hemisphere Publishing Company, McGraw-Hill, 1983).

9.3.4 利用偏导数估计函数值

例 3 利用表 9-3 和偏导数估计存活老鼠的百分比, 如果使它们接触浓度为

(a) 6 ppm 的甲醛 18.5 个月; (b) 18 ppm 的甲醛 24 个月; (c) 9 ppm 的甲醛 20.5 个月

解 (a) 由于 $t = 18.5, c = 6$, 我们想要估计 $P = f(18.5, 6)$. 我们由表 9-3 得 $f(18, 6) = 93\%$, 且我们已经计算得到

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(18,6)} = f_t(18, 6) = -1.5\% \text{ 每月}.$$

这个偏导数告诉我们, 在接触浓度为 6 ppm 的甲醛 18 个月后, 每多接触 1 个月, P 减小 1.5%. 因此, 多接触 0.5 个月后, 我们就有

$$P \approx 93 - 1.5 \times (0.5) = 92.25\%.$$

(b) 现在我们希望估计 $f(24, 18)$. 表 9-3 中离它最接近的项是 $f(24, 15) = 36$. 我们固定 t 为 24, 把 c 从 15 增加到 18. 我们估计 P 关于 c 的变化率, 即 $\partial P/\partial c$. 由我们表 9-3 得到

$$\left.\frac{\partial P}{\partial c}\right|_{(24,15)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta c} = \frac{36 - 80}{15 - 6} = -4.89\% \text{ 每 ppm}.$$

存活 24 个月的百分比从 36%递减, 其规律是甲醛浓度每超出 15 ppm 的一个单位就减小 4.89%. 我们有

$$f(24, 18) \approx 36 - 4.89(3) = 21.33\%.$$

如果它们接触浓度强如 18 ppm 的甲醛, 我们估计大约仅有 21%的老鼠将存活 24 个月. 由于这个数字是从已有数据推断得来的, 我们采用它时要小心.

(c) 为估计 $f(20.5, 9)$, 我们利用最接近的项 $f(20, 6) = 90$. 我们从 $(20, 6)$ 移动到 $(20.5, 9)$ 时, 百分比 P 的变化是由于 t 和 c 这两者的变化. 我们估计 $t = 20, c = 6$ 时的两个偏导数:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(20,6)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{86 - 90}{22 - 20} = -2\% \text{ 每月}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial c}\right|_{(20,6)} \approx \frac{\Delta P}{\Delta c} = \frac{70 - 90}{15 - 6} = -2.22\% \text{ 每月}$$

由于 $\Delta t = 0.5$ 个月和 $\Delta c = 3$ ppm, P 的变化量为

$$\begin{aligned} \Delta P &\approx \text{由于 } \Delta t \text{ 的变化而产生的变化} + \text{由于} \Delta c \text{ 的变化而产生的变化} \\ &= -2(0.5) - 2.22(3) \\ &= -7.66 \end{aligned}$$

因此对于 $t = 20.5, c = 9$, 我们有

$$f(20.5, 9) \approx f(20, 6) - 7.66 = 82.34\%.$$

□

在例 3 的 (c) 部分, 我们利用 $\Delta P, \Delta t$ 和 Δc 的关系估计函数的变化量. 这种关系的一般形式称为局部线性.

$$f \text{ 的变化量} \approx x \text{ 方向的变化率} \cdot \Delta x + y \text{ 方向的变化率} \cdot \Delta y$$
$$\Delta f \approx f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y$$

9.3.5 根据等值线图估计偏导数

如果我们在等值线图上沿着一条坐标轴平行移动, 偏导数就是等值线上的函数值的变化率. 比如, 如果在正变化量的方向上等值线上的值增加, 则偏导数必然是正的.

例 4 图 9-39 显示了作为与加热器的距离 x(单位: 英尺) 和加热器运行的时间 t(单位: 分钟) 的函数, 即房间内的温度 $H(x,t)$(单位: 华氏度) 的等值线图. $H_x(10,20)$ 和 $H_t(10,20)$ 的符号各是什么? 估计这两个偏导数, 并从实际的角度解释所得答案.

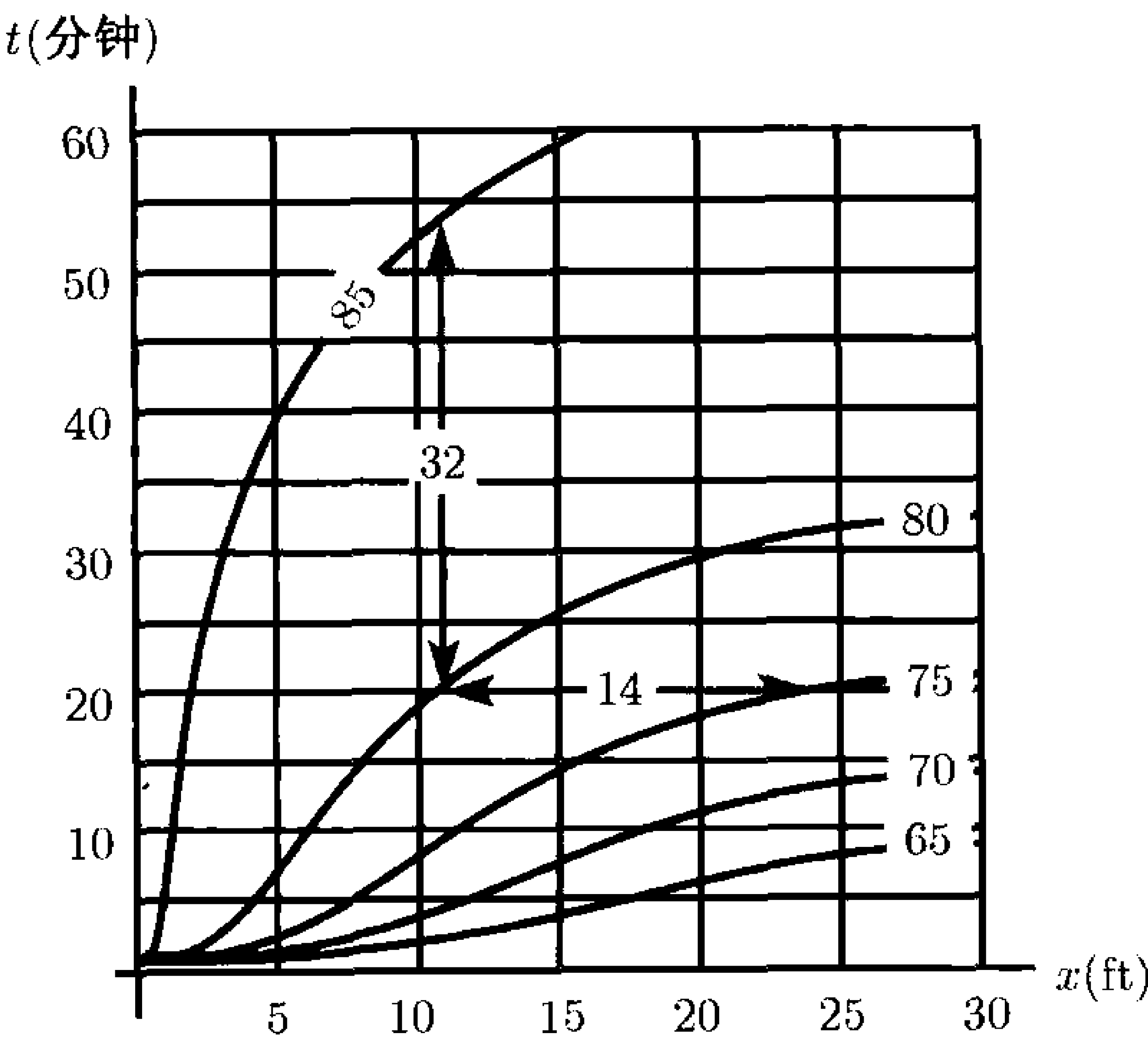


图 9-39 加热房间内的温度

解 点 (10,20) 在等值线 $H=80$ 上. 随着 x 增大, 我们朝等值线 $H=75$ 移动, 因此 H 递减, $H_x(10,20)$ 为负. 这是合乎道理的, 因为我们远离加热器, 温度降低. 另一方面, 随着 t 增大, 我们朝等值线 $H=85$ 移动, 因此温度上升, $H_t(10,20)$ 为正. 这也是合乎常识的, 因此它表明随着时间的增长, 房间升温.

为估计偏导数, 利用差商. 观察等值线图, 我们看到 $H=75$ 上有一个点, 大约在 (10,20) 的右侧 14 单位处. 因此, x 增加 14 时, H 减小 5, 从而 H 关于 x 的变化率大约为 $\Delta H/\Delta x = -5/14 \approx -0.36$. 因此我们求得

$$H_x(10,20) \approx -0.36 \text{ 华氏度/ 英尺}.$$

这表明, 在离加热器 10 英尺的点, 我们每远离加热器 1 英尺, 20 分钟后的温度下

降 1/3 华氏度.

为了估计 $H_t(10,20)$, 我们再次看等值线图, 并注意到等值线 $H=85$ 大约在点 $(10,20)$ 正上方 32 单位处. 因此 t 增加 32 时, 温度增加 5. 所以,

$$H_t(10,20) \approx \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{5}{32} \approx 0.16 \text{ 华氏度}.$$

这表明, 20 分钟后的每分钟, 离加热器 10 英尺的点温度增大 1/6 华氏度. □

9.3.6　利用单位解释偏导数

自变量和因变量的单位对解释偏导数的意义通常是有帮助的.

例 5　假设你的体重 w(单位: 磅) 是你日摄入的卡路里数 c 和每天锻炼的分钟数 n 的函数. 用 w, c 和 n 的单位, 阐释下式:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial c}\right|_{(2000,15)} = 0.02 \quad \text{和} \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{(2000,15)} = -0.025.$$

解　$\dfrac{\partial w}{\partial c}$ 的单位是磅/卡路里. $\left.\dfrac{\partial w}{\partial c}\right|_{(2000,15)} = 0.02$ 表明如果你现在每天摄入 2000 卡路里且每天锻炼 15 分钟, 那么你每天每多摄入 1 卡路里, 你将增重 0.02 磅或者说每天多摄入 100 卡路里, 大约增重 2 磅. $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ 的单位是磅/分钟. $\left.\dfrac{\partial w}{\partial n}\right|_{(2000,15)} = -0.025$ 表明, 对于相同的卡路里摄入量和锻炼时间, 你每天每多锻炼 1 分钟, 你将减轻 0.025 磅或者说每天多锻炼 40 分钟, 将减轻 1 磅. 因此如果你每天多吃 100 卡路里和每天多锻炼 80 分钟, 你的体重将基本保持不变. □

习题

1. 根据图 9-40 所给 $f(x,y)$ 的等值线图, 判断这些偏导数是正, 是负或大约等于零?

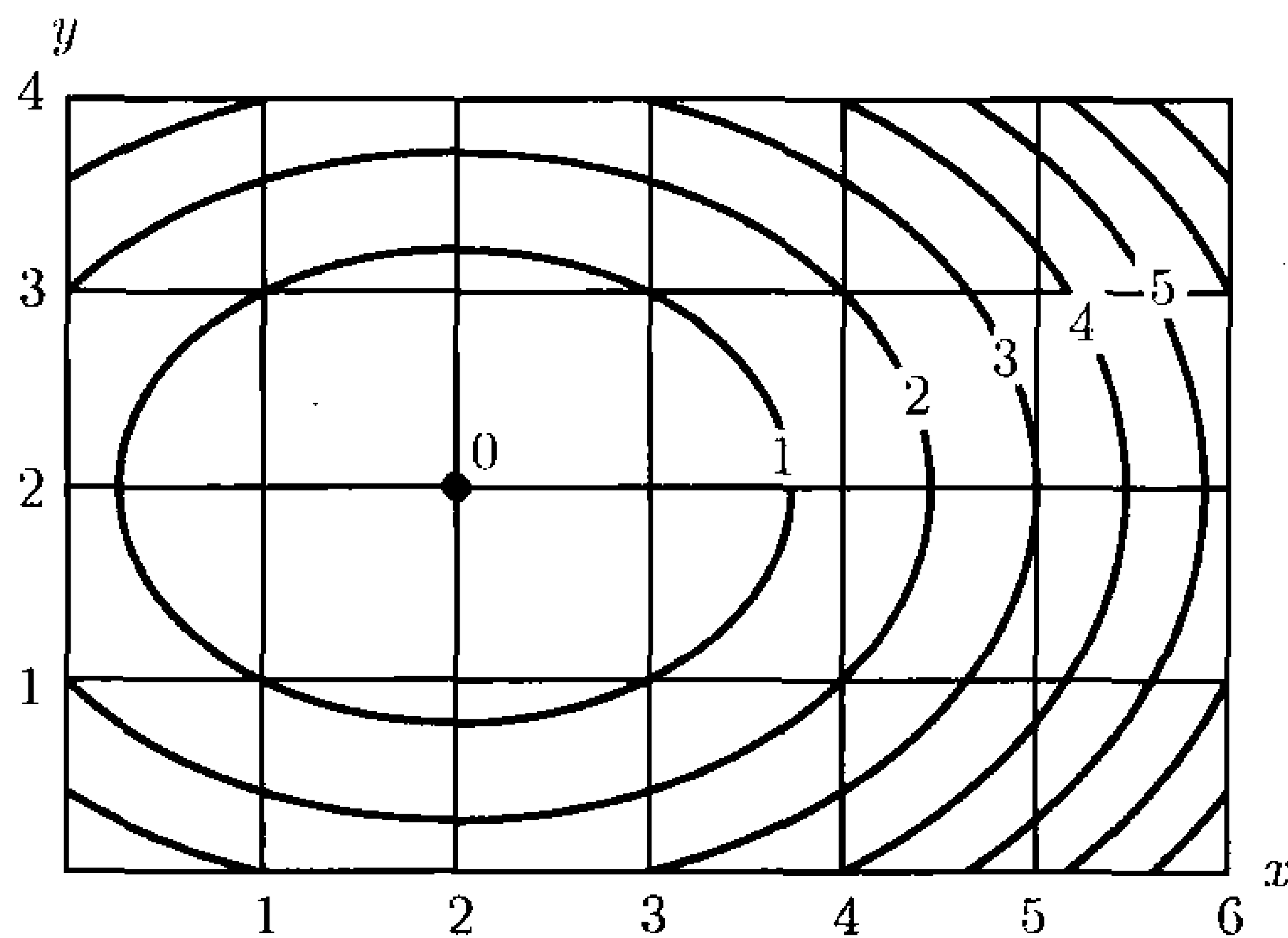


图　9-40

(a) $f_x(4,1)$　　**(b)** $f_y(4,1)$

(c) $f_x(5,2)$　　**(d)** $f_y(5,2)$

2. 根据图 9-40 所给 $f(x,y)$ 的等值线图, $f_x(3,1)$ 和 $f_x(5,2)$ 哪个大? 请解释.

3. 某社区一周内购买的牛肉量 Q(单位: 磅) 是该周内牛肉价格 b 和鸡肉价格 c 的函数 $Q=f(b,c)$. 你预计 $\partial Q/\partial b$ 是正, 还是负? $\partial Q/\partial c$ 呢?

4. 某药物注射入病人的血管. 函数 $c=f(x,t)$ 表示血流方向上离注入点 x 毫米处在注射 t 秒后的药物浓度. 下列偏导数的单位是什么? 它们有何实际含义? 你预计它们的符号是什么?

(a) $\partial c/\partial x$ **(b)** $\partial c/\partial t$

5. 咖啡每周的需求量 Q(单位: 磅) 是咖啡价格 c(单位: 美元/磅) 和茶叶价格 t(单位: 美元/磅) 的函数, 因此 $Q=f(c,t)$.

(a) 你预计 f_c 是正是负? f_t 呢? 请解释.

(b) 用咖啡的需求来阐释下式.

$$f(3,2)=780 \quad f_c(3,2)=-60 \quad f_t(3,2)=20$$

6. 图 9-41 是 $z=f(x,y)$ 的等值线图. f_x 是正是负? f_y 是正是负? 估计 $f(2,1), f_x(2,1)$ 和 $f_y(2,1)$.

7. 对房屋的抵押月还款额 P 美元是三个变量的函数 $P=f(A,r,N)$, 其中 A 美元是贷款总额, r 是利率, N 是还清贷款的年数.

(a) $f(92\ 000, 14, 30) = 1\ 090.08$. 用金融学术语说明它的含义.

(b) $\left.\dfrac{\partial P}{\partial r}\right|_{(92000,14,30)} = 72.82$. 数字 72.82 的金融意义是什么?

(c) 你预计 $\partial P/\partial A$ 是正是负? 为什么?

(d) 你预计 $\partial P/\partial N$ 是正是负? 为什么?

图 9-41

8. 下表是溜旱冰的人[①]每分钟燃烧的卡路里数 $B=f(s,w)$, 其中 w 是人的体重, s 是速度.

$w\backslash s$	8 mph	9 mph	10 mph	11 mph
120 lbs	4.2	5.8	7.4	8.9
140 lbs	5.1	6.7	8.3	9.9
160 lbs	6.1	7.7	9.2	10.8
180 lbs	7.0	8.6	10.2	11.7
200 lbs	7.9	9.5	11.1	12.6

(a) f_w 是正是负? f_s 是正是负? 关于体重和速度对每分钟燃料的卡路里数的影响, 你的答案告诉我们什么?

(b) 估计 $f_w(160,10)$ 和 $f_s(160,10)$, 并解释你的答案.

9. 某产品的销售量 $S=f(p,a)$ 是产品价格 p(单位: 美元/单位) 和花费在广告上的总额

① 摘自 1994 年 8 月 28 日的 *Parade Magazine*.

a(单位: 千美元) 的函数.

(a) 你预计 f_p 是正是负? 为什么?

(b) 从销售量的角度阐释陈述 $f_a(8, 12) = 150$ 的意义.

10. 你以月利率 $r\%$ 借款 A 美元, 并且每月还款 $P = g(A, r, t)$ 的方式在 t 个月内还清. 用金融学术语解释下列陈述.

(a) $g(8\ 000, 1, 24) = 376.59$

(b) $\left.\dfrac{\partial g}{\partial A}\right|_{(8\ 000,1,24)} = 0.047$

(c) $\left.\dfrac{\partial g}{\partial r}\right|_{(8\ 000,1,24)} = 44.83$

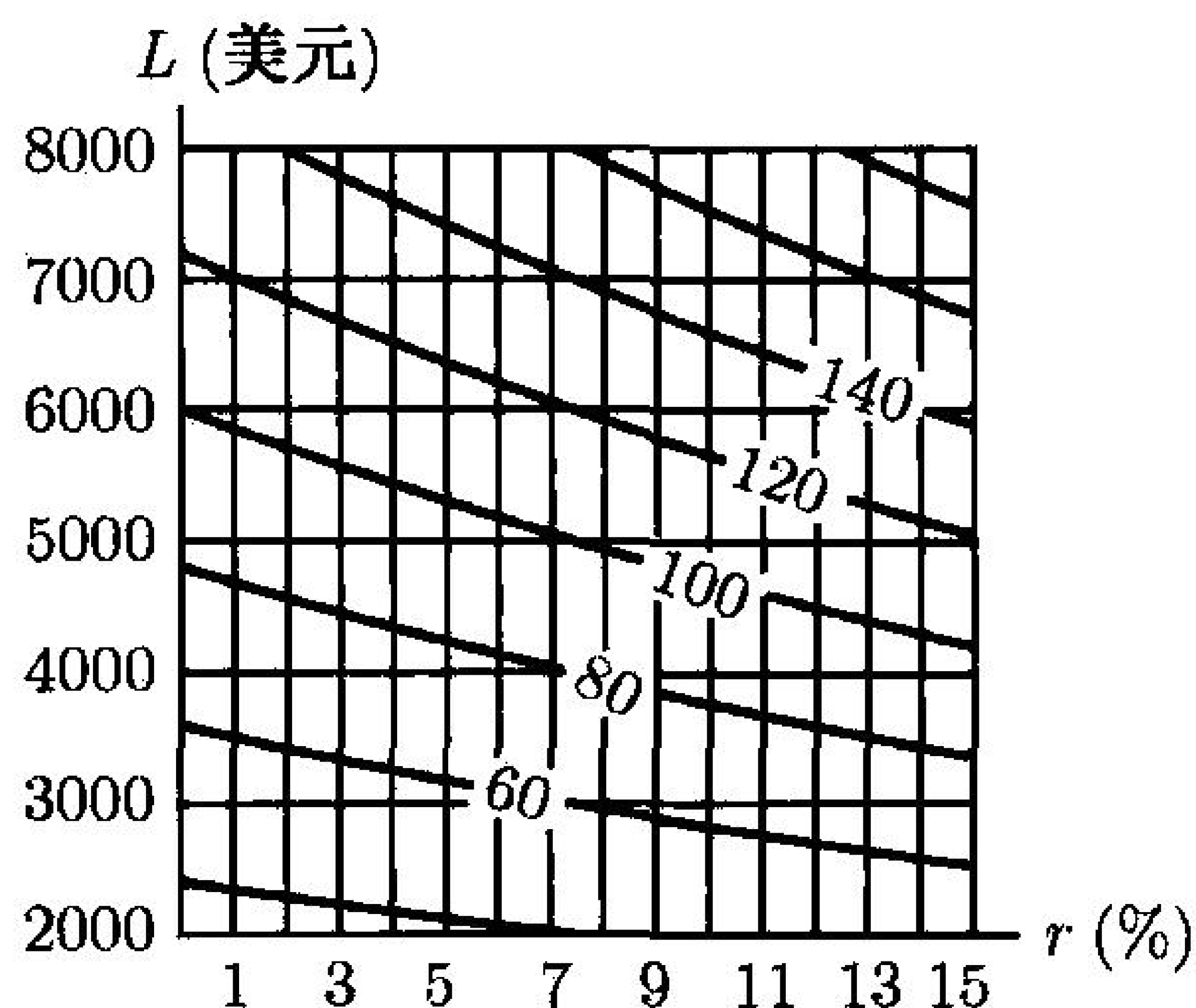


图 9-42

11. 图 9-42 给出关于利率 $r\%$ 和 5 年期贷款总额 L 的函数——月还款 P 的等值线图. 估计 $r = 8, L = 5000$ 的点处 $\partial P/\partial r$ 和 $\partial P/\partial L$. 你的答案要带单位并说明其金融意义.

12. 由图 9-43 中 $z(x, y)$ 的等值线图估计 $z_x(1, 0)$, $z_x(0, 1)$ 和 $z_y(0, 1)$.

13. 请给出各种条件下函数 $f(x, y)$ 可能的等值线图:

(a) $f_x > 0$ 和 $f_y > 0$　　(b) $f_x > 0$ 和 $f_y < 0$

(c) $f_x < 0$ 和 $f_y > 0$　　(d) $f_x < 0$ 和 $f_y < 0$

14. 图 9-44 给出了函数 $f(x, y)$ 没有赋值的等值线. 如果 $f_x(P) > 0$, 求

(a) $f_y(P)$　　(b) $f_y(Q)$　　(c) $f_x(Q)$

的符号.

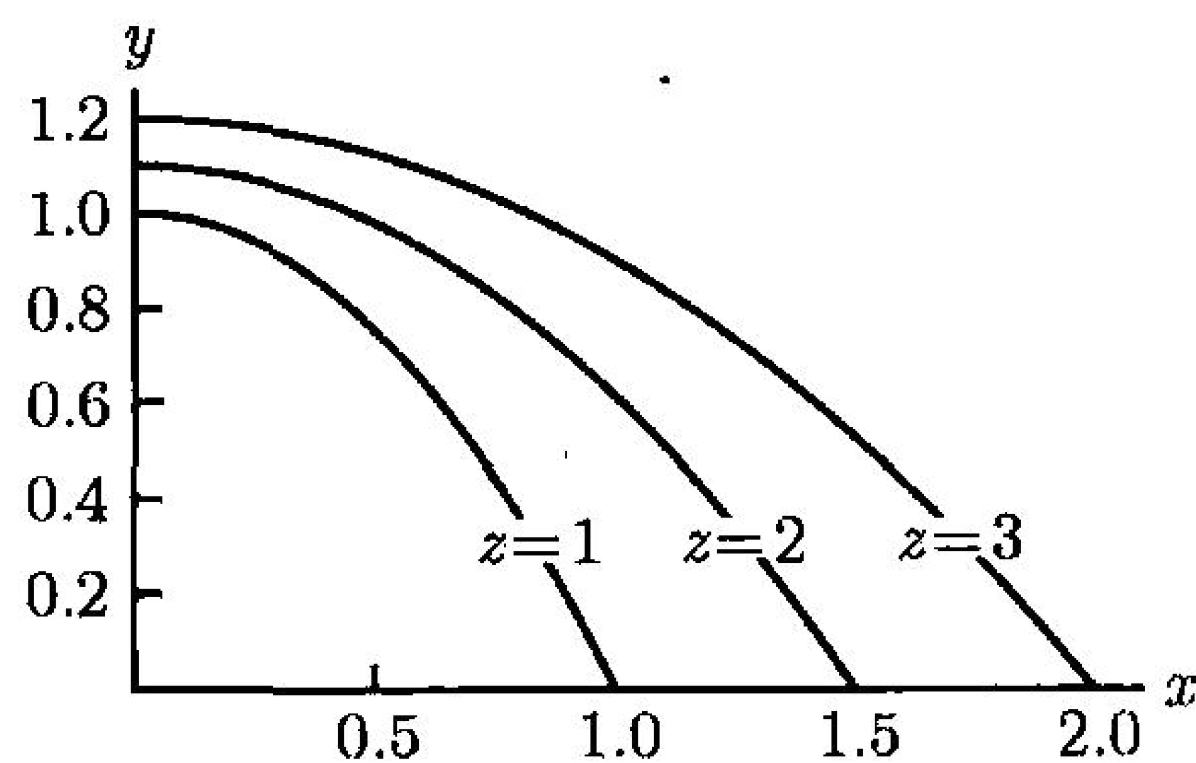


图 9-43

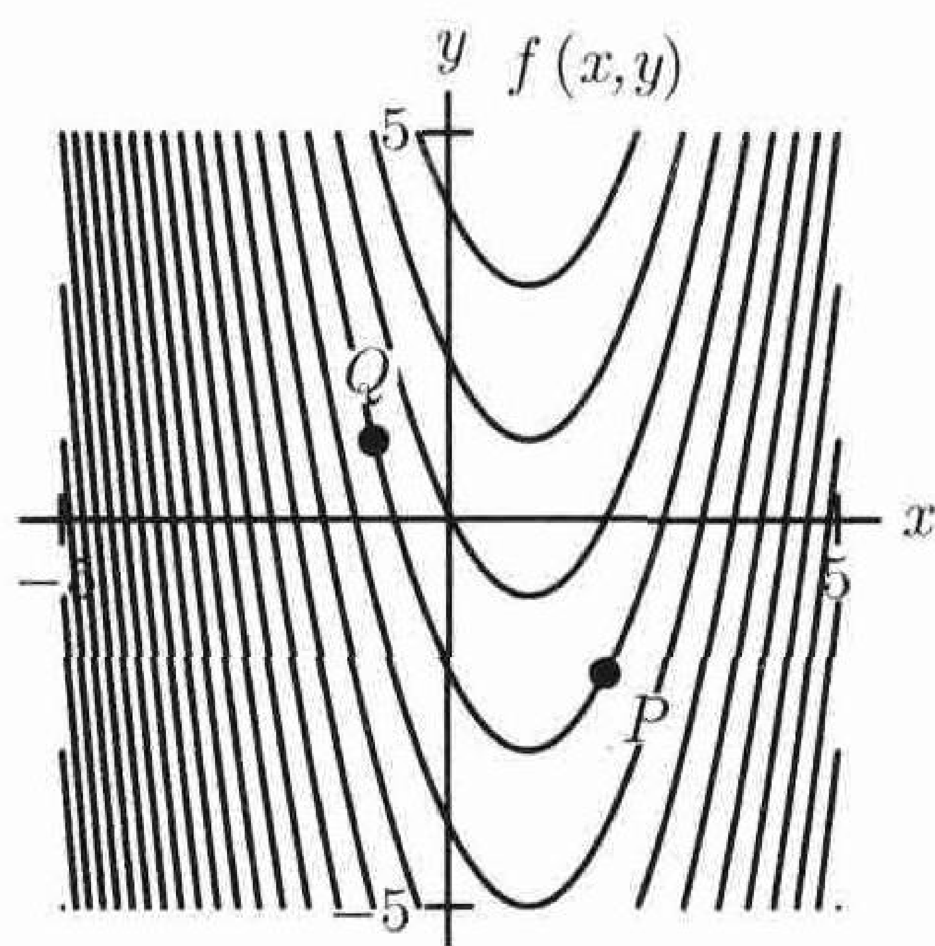


图 9-44

15. 图 9-13 给出了玉米产量作为降雨量 R(单位: 英寸) 和温度 T(单位: 华氏度) 的函数的等值线图. 玉米产量 C 用当前产量的百分比来计量, $C = f(R, T)$. 估计下列各量. 你的答案要带上单位, 并从玉米产量的角度解释你的答案.

(a) $f_R(15, 76)$　　(b) $f_T(15, 76)$

16. 对于函数 $f(x, y)$, 我们给定 $f(100, 20) = 2\ 750$, $f_x(100, 20) = 4$ 和 $f_y(100, 20) = 7$. 估计 $f(105, 21)$.

17. 对于函数 $f(r,s)$, 我们给定

$f(50,100)=5.67, f_r(50,100)=0.60, f_s(50,100)=-0.15$. 估计 $f(52,108)$.

18. 去某城市的人可以选择乘公交车或火车. 选择各种交通方法的人数部分依赖于各自的价格. 设 $f(P_1,P_2)$ 是乘公交车的人数, 其中 P_1 是乘公交车的价格, P_2 是乘火车的价格. 关于 $\partial f/\partial P_1$ 和 $\partial f/\partial P_2$ 的符号, 你能得出什么结论? 解释你的答案.

19. 假设 x 是一种牌子汽油的价格, y 是与之竞争的牌子的价格. 在固定时间段内售出的第一种牌子的量 q_1 依赖于 x 和 y, 因此 $q_1=f(x,y)$. 类似地, 如果 q_2 是在相同时间段内售出的第二种牌子的量, 那么 $q_2=g(x,y)$. 你预计下列量的符号是什么? 请解释.

(a) $\partial q_1/\partial x$ 和 $\partial q_2/\partial y$

(b) $\partial q_1/\partial y$ 和 $\partial q_2/\partial x$

20. 20 世纪 40 年代, 英国每年售出的啤酒产量被发现依赖于 I(根据税收和膨胀率调整的个人收入总额), p_1(啤酒的平均价格) 和 p_2(所有其他商品和服务的平均价格). 你预计 $\partial q/\partial I, \partial q/\partial p_1$ 和 $\partial q/\partial p_2$ 的符号是正是负? 对你的答案给出合理的理由.

对习题 21~23, 参考表 9-3, 它提供了根据风寒温度函数 $C=f(w,T)$(单位: °F), 其中 w 是风速 (单位: mile/h), T 是温度 (单位: °F). 根据风寒温度是告知你天气感觉有多冷的温度, 它是结合考虑风和温度的结果.

21. 估计 $f_w(10,25)$. 你的答案在实际当中有什么意义?

22. 估计 $f_T(5,20)$. 你的答案在实际当中有什么意义?

23. 从 9.1 节习题 9 的表中你可以观察到温度为 20 华氏度时, 在风速从 5~10mile/h 的每 1mile/h, 根据风速调整的温度大约平均下降 0.8°F. 由此可得到哪个偏导数?

24. 航空公司的收益 R 是售出的全价票数 x 和折扣票数 y 的函数. $R=f(x,y)$ 的值参见表 9-1.

(a) 估计 $f(200,400)$, 并解释你的答案.

(b) $f_x(200,400)$ 是正是负? $f_y(200,400)$ 是正是负? 请解释.

(c) 估计 (b) 部分偏导数的值. 你的答案要带上单位并用它说明收益.

25. 在习题 24 中, 售出 200 张全价票和 400 张折扣票的收益是 150 000 美元, 也就是说 $f(200,400)=150\ 000$. 利用该事实和偏导数 $f_x(200,400)=350$ 和 $f_y(200,400)=200$ 估计下列收益:

(a) $x=201$ 和 $y=400$

(b) $x=200$ 和 $y=405$

(c) $x=203$ 和 $y=406$

26. 表 9-3 给出了时间 t(单位: 月) 和甲醛浓度 c (单位: ppm) 的函数——存活老鼠的百分比 P, 因此 $P=f(t,c)$. 利用偏导数估计浓度为 15 时存活 26 个月的老鼠的百分比.

27. 心脏输出 c 是指每单位时间内流经心脏的血液体积. 外周血管阻力 (SVR) 是指血液流经静脉和动脉的阻力, 用 s 表示. 设 p 是人体的血压, 那么 p 是 c 和 s 的函数, 因此 $p=f(c,s)$.

(a) $\partial p/\partial c$ 代表什么?

现在我们假设 $p=kcs$, 其中 k 是常数.

(b) 画 p 的等值线, 它们代表什么含义? 请标上坐标轴.

(c) 对于患心脏病的人来说, 最好的办法就是在保持稳定的血压的情况下, 安装人工心泵来治疗低阻. 这样的病人能通过施用硝化甘油来降低 SVR 及多巴胺来提高心脏输出. 在带等值线的图形上体现出这一点. 分别在图形上用 A, B 表示病人在施用药物前后的状态.

(d) 病人的心脏病一发作, 心脏输出减小, 因此导致血压上升. 驻院医生常犯的错误是利用药物来提高 SVR 使病人的血压恢复正常, 而不是通过提高心脏输出. 在 p 的等值线的图形上, 用点 D 表示心脏病发作前的病人, 点 E 表示心脏病恰好发作后的病人, 及点 F 表示住院医生开出药物提高 SVR 后的病人.

9.4　代数方法计算偏导数

偏导数 $f_x(x,y)$ 就是在 y 固定时, 函数 $f(x,y)$ 关于 x 的导数. 而偏导数 $f_y(x,y)$ 就是在 x 固定时, 函数 $f(x,y)$ 关于 y 的导数. 因此, 我们可以使用一元微积分求导数的方法来求偏导数.

例 1　设 $f(x,y)=x^2+5y^2$. 用代数方法求 $f_x(3,2)$ 和 $f_y(3,2)$.

解　我们利用 $f_x(3,2)$ 就是 $f(x,2)$ 在 $x=3$ 时的导数. 为了求 f_x, 首先我们固定 $y=2$:

$$f(x,2)=x^2+5(2^2)=x^2+20.$$

对上式关于 x 求导, 可得:

$$f_x(x,2)=2x,\quad 因此,\quad f_x(3,2)=2(3)=6.$$ □

类似地, $f_y(3,2)$ 就是 $f(3,y)$ 在 $y=2$ 时的导数. 为了求 f_y, 首先我们固定 $x=3$:

$$f(3,y)=3^2+5y^2=9+5y^2.$$

对上式关于 y 求导, 可得:

$$f_y(3,y)=10y,\quad 因此,\quad f_y(3,2)=10(2)=20.$$ □

例 2　同例 1 一样, 设 $f(x,y)=x^2+5y^2$. 求出作为 x 和 y 的函数的 f_x 与 f_y.

解　为求出 f_x, 我们把 y 视为一个常数. 那么, $5y^2$ 是一个常数, 该项关于 x 的导数为 0. 因此, 我们有: $f_x(x,y)=2x+0=2x$.

为求出 f_y, 我们把 x 视为一个常数. 那么, x^2 是一个常数, 该项关于 y 的导数为 0. 因此, 我们有: $f_y(x,y)=0+10y=10y$. □

例 3　求出下列函数的两个偏导数.

(a) $f(x,y)=3x+\mathrm{e}^{-5y}$ (b) $f(x,y)=x^2y$ (c) $f(u,v)=u^2\mathrm{e}^{2v}$

解 (a) 为求出 f_x, 我们把 y 视为一个常数. 因此 e^{-5y} 是一个常数, 该项关于 x 的导数为 0. 类似地, 为求 f_y, 我们把 x 视为一个常数. 那么, 我们有

$$f_x(x,y)=3+0=3 \quad \text{且} \quad f_y(x,y)=0+(-5)e^{-5y}=-5e^{-5y}.$$

(b) 为求出 f_x, 我们把 y 视为一个常数, 因此, 该函数可以看作是 x^2 的一个常数倍. 而 x^2 一个常数倍的导数为该常数倍的 $2x$, 因此, 我们有

$$f_x(x,y)=(2x)y=2xy.$$

同理有, $f_y(x,y)=x^2(1)=x^2$.

(c) 为求出 f_u, 我们把 v 视为一个常数, 同样为求出 f_v, 我们把 u 视为一个常数. 我们有

$$f_u(u,v)=(2u)e^{2v}=2ue^{2v} \quad \text{和} \quad f_v(u,v)=u^2(2e^{2v})=2u^2e^{2v}.$$ □

例 4 在注射某种抗生素后, 血液中的细菌浓度 C(百万个/毫升) 为注射剂量 x(以克为单位) 和注射后的时间 t(以小时为单位) 的函数. 假设我们获知 $C=f(x,t)=te^{-xt}$. 请给出下列数值, 并解释这些数值的实际意义:

(a) $f_x(1,2)$; (b) $f_t(1,2)$

解 (a) 为求出 f_x, 我们把 t 视为一个常数, 并关于 x 求导, 可得

$$f_x(x,t)=-t^2e^{-xt}.$$

代入 $x=1$, $t=2$ 可得 $f_x(1,2)=-4e^{-2}\approx-0.54$.

为看出 $f_x(1,2)$ 的实际意义, 考虑函数 $f(x,2)$, 它的导数就是 $f_x(1,2)$. 图 9-45 给出函数 $f(x,2)$ 的图形, 该图表示注射 2 小时后, 细菌浓度作为注射剂量的函数. 导数 $f_x(1,2)$ 为该图在点 $x=1$ 处的斜率. 由于较大的剂量将减少细菌的数量, 因此, 该导数为负. 更精确地, 偏导数 $f_x(1,2)$ 表示细菌浓度关于注射剂量的变化率, 即追加一克抗生素将使细菌浓度下降 0.54 百万个/毫升.

(b) 为求出 f_t, 我们把 x 视为一个常数, 并利用乘法法则求导, 可得

$$f_t(x,t)=1e^{-xt}-xte^{-xt}.$$

代入 $x=1,t=2$ 可得 $f_t(1,2)=e^{-2}-2e^{-2}\approx-0.14$.

为看出 $f_t(1,2)$ 的实际意义, 考虑函数 $f(1,t)$, 它的导数就是 $f_t(1,2)$. 图 9-46 表示函数 $f(1,t)$ 的图形, 该图表示注射 1 克抗生素后, 细菌浓度作为时间 t 的函数. 导数 $f_t(1,2)$ 为该图在点 $t=2$ 处的斜率. 由于注射 2 小时后, 细菌浓度将下降, 因此, 该导数为负. 更精确地, 偏导数 $f_x(1,2)$ 表示细菌浓度关于时间的变化率, 即每小时细菌浓度下降 0.14 百万个/毫升. □

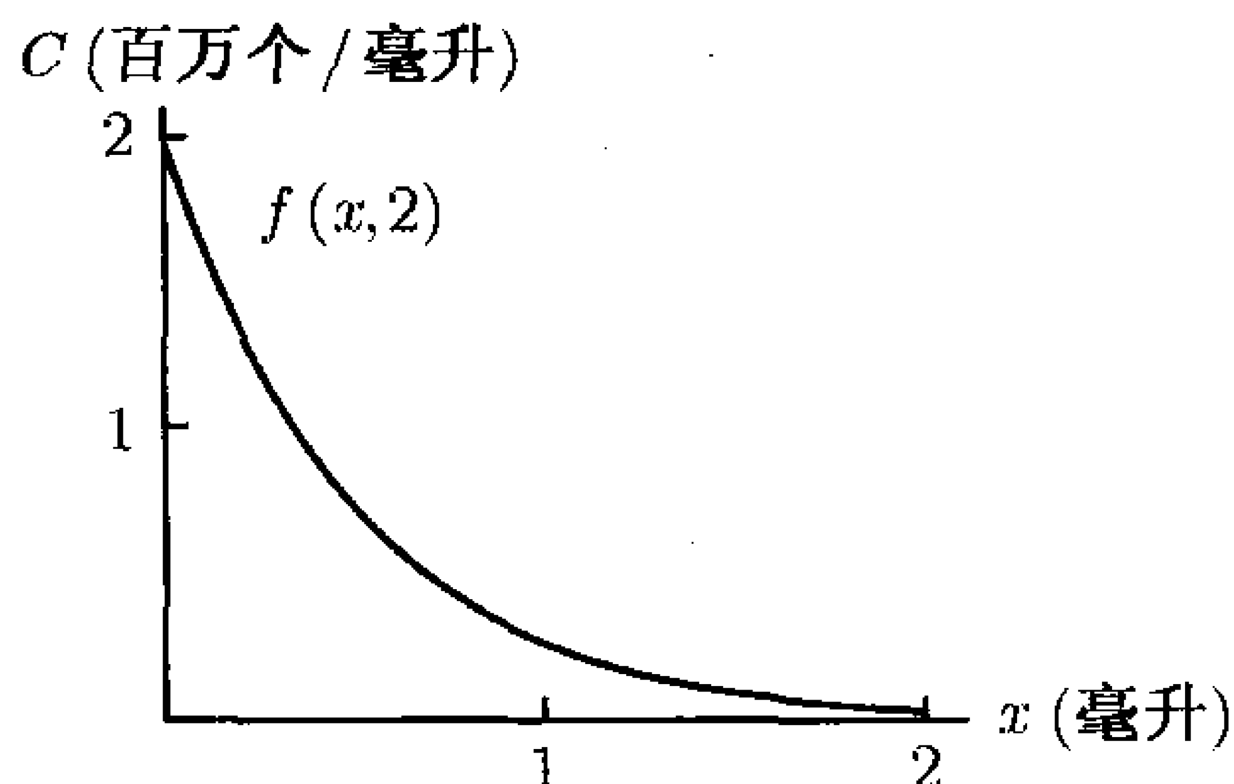


图 9-45 注射 2 小时后, 细菌浓度作为注射剂量的函数

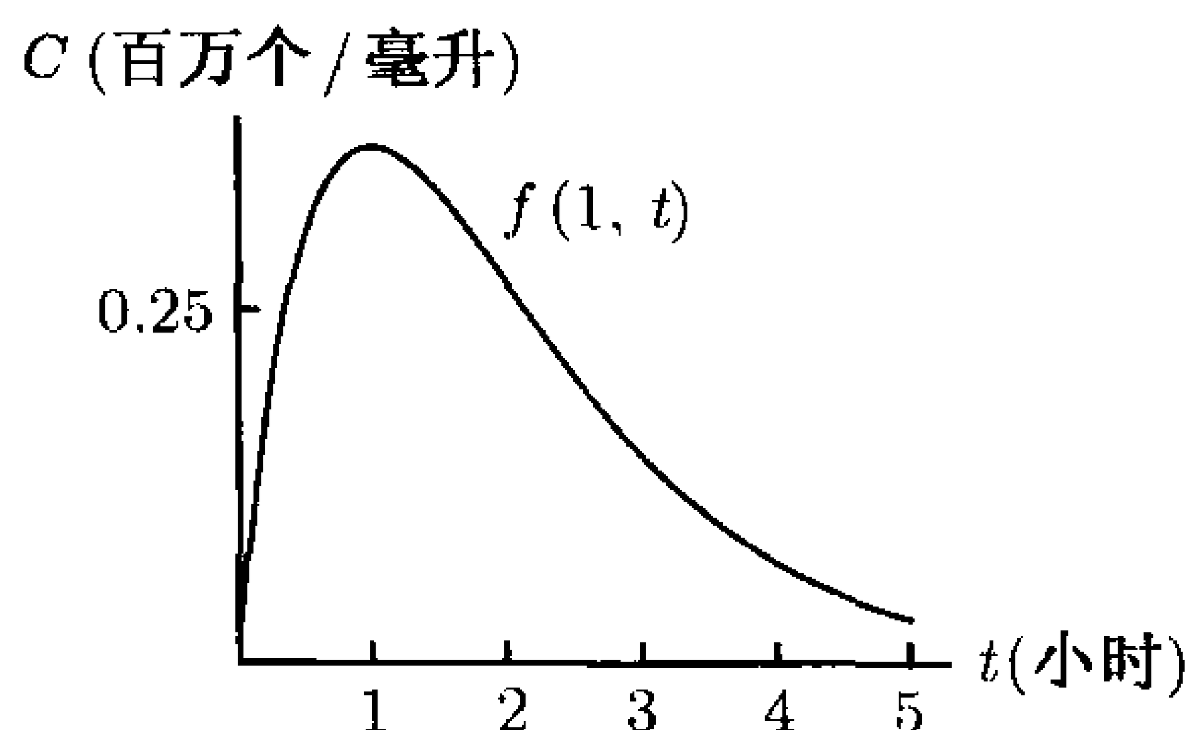


图 9-46 注射 1 克抗生素后, 细菌浓度作为时间 t 的函数

例 5 我们考虑一家小型印刷企业, 该企业共有 N 个工人, 其设备价值为 V(以 25 000 美元为单位), 每天的产量为 P(以千页为单位). 假设该公司的生产函数为 $P = f(N, V) = 2N^{0.6}V^{0.4}$.

(a) 如果该企业拥有 100 名工人和价值 200 个单位的设备, 请问该公司的产量为多少?

(b) 求出 $f_N(100, 200)$ 和 $f_V(100, 200)$. 并用产量来解释你的答案.

解 (a) 我们有 $N = 100, V = 200$. 因此,

$$\text{每天的产量} = 2(100)^{0.6}(200)^{0.4} = 263.9 \text{ 千页}.$$

(b) 为求出 f_N, 我们把 V 视为一个常数, 并关于 N 求导, 可得

$$f_N(N, V) = 2(0.6)N^{-0.4}V^{0.4}.$$

代入 $N = 100, V = 200$ 可得

$$f_N(100, 200) = 1.2(100)^{-0.4}(200)^{0.4} \approx 1.583 \text{ 千页/工人}.$$

该式表明: 如果我们有 200 个单位的设备, 并增加 1 名工人, 即从 100 增加到 101 时, 产量将增加大约 1.58 个单位, 也就是每天大约增加 1580 页.

同理, 为求出 $f_V(100, 200)$, 我们把 N 视为一个常数, 并关于 V 求导, 可得

$$f_V(N, V) = 2(0.4)N^{0.6}V^{-0.6}.$$

代入 $N = 100, V = 200$ 可得

$$f_V(100, 200) = 0.8(100)^{0.6}(200)^{-0.6} \approx 0.53 \text{ 千页/ 单位设备}.$$

该式表明: 如果我们有 100 名工人, 并增加价值 1 单位 (25 000 美元) 的设备, 即从 200 单位增加到 201 单位时, 产量将增加大约 0.53 个单位, 也就是每天大约增加 530 页. □

9.4.1 二阶偏导数

由于函数的偏导数本身仍为一个函数, 因此, 我们通常可以对其进行求导, 这就产生了**二阶偏导数**. 一个函数 $z = f(x, y)$ 有两个偏导数 f_x 和 f_y, 而其二阶偏导

数有四个.

> **$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数:**
> $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}=(f_x)_x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{yx}=(f_y)_x,$$
> $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{xy}=(f_x)_y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}=(f_y)_y.$$

通常, 我们忽略括号, 用 f_{xy} 代替 $(f_x)_y$, 用 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 代替 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. □

例 6 用表 9-4 中函数 $f(x,y)$ 的值, 估计 $f_{xy}(1,2)$ 和 $f_{yx}(1,2)$.

表 9-4 $f(x,y)$ 的值

		x		
		0.9	1.0	1.1
y	1.8	4.72	5.83	7.06
	2.0	6.48	8.00	9.60
	2.2	8.62	10.65	12.88

解 因为 $f_{xy}=(f_x)_y$, 所以, 我们首先估计 f_x:

$$f_x(1,2)\approx\frac{f(1.1,2)-f(1,2)}{0.1}=\frac{9.60-8.00}{0.1}=16.0,$$

$$f_x(1,2.2)\approx\frac{f(1.1,2.2)-f(1,2.2)}{0.1}=\frac{12.88-10.65}{0.1}=22.3.$$

因此,

$$f_{xy}(1,2)\approx\frac{f_x(1,2.2)-f_x(1,2)}{0.2}=\frac{22.3-16.0}{0.2}=31.5.$$

类似地,

$$\begin{aligned}f_{yx}(1,2)&\approx\frac{f_y(1.1,2)-f_y(1,2)}{0.1}\\&\approx\frac{1}{0.1}\left(\frac{f(1.1,2.2)-f(1.1,2)}{0.2}-\frac{f(1,2.2)-f(1,2)}{0.2}\right)\\&=\frac{1}{0.1}\left(\frac{12.88-9.60}{0.2}-\frac{10.65-8.00}{0.2}\right)=31.5.\end{aligned}$$

我们注意到在 (1, 2) 点, $f_{xy}=f_{yx}$. □

例 7 计算函数 $f(x,y)=xy^2+3x^2e^y$ 的四个二阶偏导数.

解 由 $f_x(x,y)=y^2+6xe^y$, 我们得到

$$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2+6xe^y\right)=6e^y\quad 和\quad f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2+6xe^y\right)=2y+6xe^y.$$

由 $f_y(x,y)=2xy+3x^2e^y$, 我们得到

$$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2xy+3x^2e^y\right)=2y+6xe^y \quad 和 \quad f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy+3x^2e^y\right)=2x+3x^2e^y.$$

注意到在本例题中 $f_{xy}=f_{yx}$. □

9.4.2 混合偏导数相等

在例 6 中估计的 $f_{xy}(1,2)$ 和 $f_{yx}(1,2)$ 相等, 这不是偶然的结果, 因为估计每个值时所用的函数值是相同的. 在例 7 中 $f_{xy}=f_{yx}$ 这一事实更加证实了下面的一般结论.

> 如果 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (a,b) 连续, 那么
>
> $$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b).$$

在我们将要遇到的函数中, 大部分函数不仅仅有 f_{xy} 和 f_{yx} 是连续的, 而且其所有的高阶偏导数都是连续的 (比如 f_{xxy} 或 f_{xyyy}). 我们称这样的函数是光滑的.

习题

在习题 1~15 中求指定的偏导数. 其变量限制在函数有定义的区域内.

1. 如果 $f(x,y)=x^2+2xy+y^3$, 求 f_x 和 f_y.

2. 如果 $z=x^2e^y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

3. 如果 $f(x,y)=2x^2+3y^2$, 求 f_x 和 f_y.

4. 如果 $Q=5a^2p-3ap^3$, 求 $\dfrac{\partial Q}{\partial p}$

5. 如果 $P=100e^{rt}$, 求 $\dfrac{\partial P}{\partial r}$

6. 如果 $f(t,a)=5a^2t^3$, 求 f_t

7. 如果 $f(x,y)=100x^2y$, 求 f_x 和 f_y.

8. 如果 $f(x,y)=10x^2e^{3y}$, 求 f_x 和 f_y.

9. 如果 $z=x^2y+2x^5y$, 求 z_x

10. 如果 $f(u,v)=u^2+5uv+v^2$, 求 f_u 和 f_v.

11. 如果 $A=\dfrac{1}{2}(a+b)h$, 求 $\dfrac{\partial A}{\partial h}$

12. $\dfrac{\partial}{\partial m}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)$

13. 如果 $f(x,y)=5x^2y^3+8xy^2-3x^2$, 求 f_x 和 f_y.

14. 如果 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^2h$, 求 $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial V}{\partial h}$.

15. 如果 $f(x,y)=x^3+3x^2y-2y^2$, 求 $f_x(1,2)$ 和 $f_y(1,2)$

16. 如果 $f(x,y)=x^3+3y^2$, 求 $f(1,2)$, $f_x(1,2)$ 和 $f_y(1,2)$

17. 如果 $f(u,v)=5uv^2$, 求 $f(3,1)$, $f_u(3,1)$ 和 $f_v(3,1)$

18. 一家制造公司生产两种商品, 其产量分别为 q_1 和 q_2. 总成本函数为:

$$\text{成本} = f(q_1,q_2) = 16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2.$$

求 $f(500, 1\,000)$, $f_{q_1}(500, 1\,000)$ 和 $f_{q_2}(500, 1\,000)$. 给出答案的单位, 并用生产成本解释你的答案.

19. (a) 设 $f(x,y)=x^2+y^2$. 用图 9-47 中函数 f 的等值线图估计 $f_x(2,1)$ 和 $f_y(2,1)$

(b) 用 f 在 $x=1.9$, 2, 2.1 和 $y=0.9$, 1, 1.1 处的数值表来估计 $f_x(2,1)$ 和 $f_y(2,1)$.

(c) 将 (a) 和 (b) 中所得到的 $f_x(2,1)$ 和 $f_y(2,1)$ 的估计值与代数方法所计算的精确值进行比较.

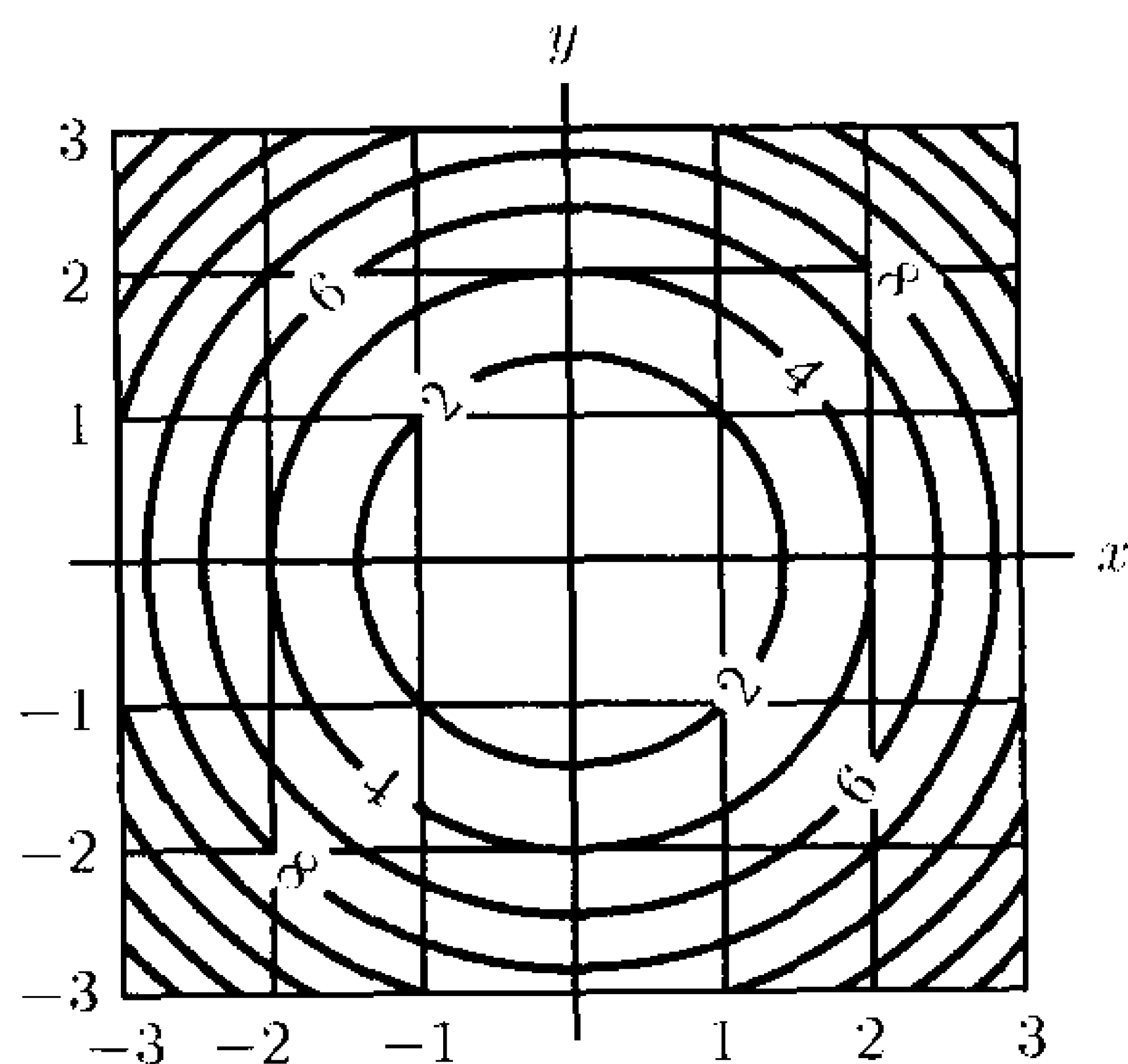


图 9-47

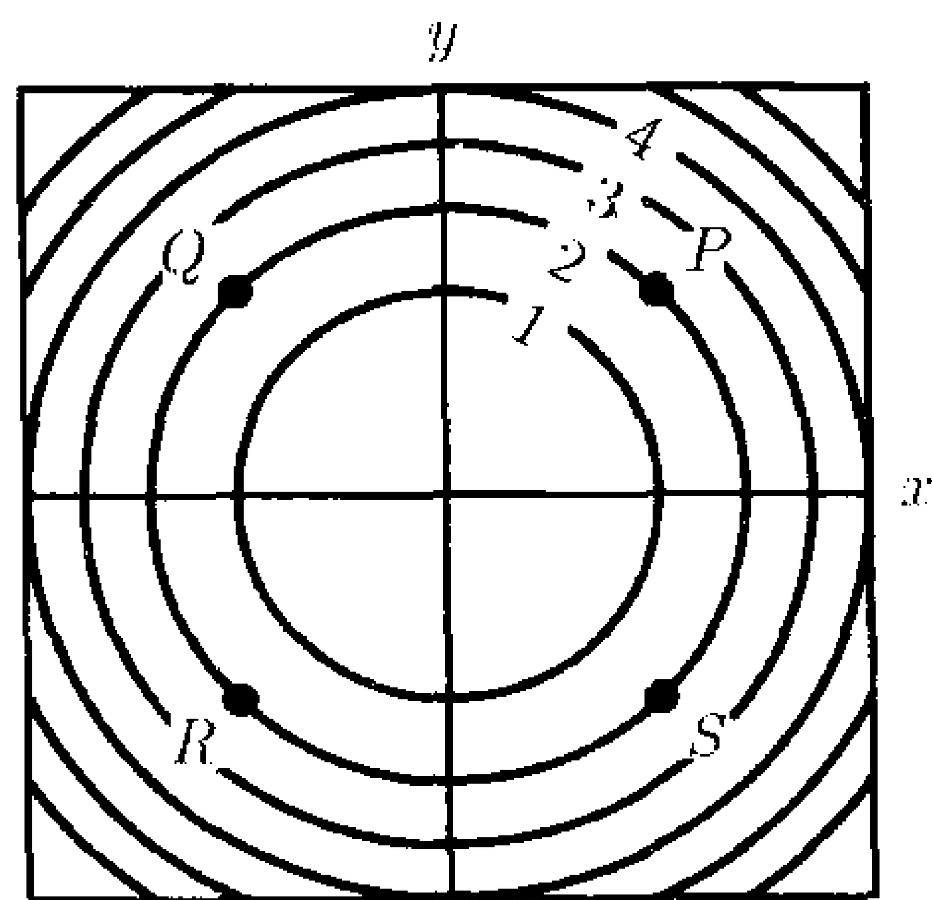


图 9-48

20. 某银行账户的利率为 r, 该账户中的钱数 B(美元), 依赖于其存款 P(美元), 和存入账户的时间 t, 其中 $B=Pe^{rt}$. 求出 $\dfrac{\partial B}{\partial t}$, $\dfrac{\partial B}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial B}{\partial P}$, 并解释它们的金融意义.

21. 反映人的表面积 $s(\mathrm{m}^2)$, 与体重 w(kg) 和身高 h(cm) 之间的关系的 DuBois 公式为 $s=f(w,h)=0.01w^{0.25}h^{0.75}$. 求出 $f(65,160)$, $f_w(65,160)$ 和 $f_h(65,160)$. 并用人的表面积, 身高和体重解释你的答案.

22. 从一家公司租用一辆汽车的成本是每天 40 美元, 再外加每公里 15 美分, 因此, 我们有

$$C = 40d + 0.15m.$$

求出 $\dfrac{\partial C}{\partial d}$ 和 $\dfrac{\partial C}{\partial m}$. 给出单位并解释你的答案为什么是合理的.

23. 某产品的 Cobb-Douglas 生产函数可表示为

$$Q = 25K^{0.75}L^{0.25},$$

其中 Q 是资本投资为 K 美元, 劳动投资为 L 时的产量.

(a) 求出 Q_K 和 Q_L.

(b) 给出当 $K=60$, $L=100$ 时 Q, Q_K 和 Q_L 的值.

(c) 用生产解释 (b) 中的答案.

24. 证明 Cobb-Douglas 生产函数 $Q = bK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, 其中 $0 < \alpha < 1$, 满足方程

$$K\frac{\partial Q}{\partial K} + L\frac{\partial Q}{\partial L} = Q.$$

25. 图 9-48 是函数 $f(x, y)$ 的等值线图. 在下列每一情形下, 在等值线图所标出的点中找出所有满足条件

(a) $f_x < 0$ (b) $f_y > 0$ (c) $f_{xx} > 0$ (d) $f_{yy} < 0$

对习题 26~37, 计算所有四个二阶导数, 并验证混合偏导相等.

26. $f(x, y) = x^2y$

27. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

28. $f(x, y) = xe^y$

29. $f(x, y) = \dfrac{2x}{y}, \quad y \neq 0$

30. $f = 5 + x^2y^2$

31. $f = e^{xy}$

32. $Q = 5p_1^2p_2^{-1}, \quad p_2 \neq 0$

33. $V = \pi r^2 h$

34. $P = 2KL^2$

35. $B = 5xe^{-2t}$

36. $f(x, t) = t^3 - 4x^2t$

37. $f = 100e^{rt}$

38. 是否存在函数 f 具有下列偏导数? 如果有, 这个函数是什么? 是否还有其他函数?

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4x^3y^2 - 3y^4, \\ f_y(x, y) &= 2x^4y - 12xy^3. \end{aligned}$$

9.5 临界点和最优化

使一个函数最优化意味着求出该函数的整体最大值或整体最小值. 如果这个函数表示利润, 我们就要求出使得利润达到最大的条件. 另一方面, 如果这个函数表示成本, 我们就要求出使得成本达到最小的条件. 在第 4 章, 我们考虑了如何通过考察临界点使一个一元函数最优化. 本节, 我们考虑如何将临界点和局部极值的概念推广到多元函数.

9.5.1 二元函数的局部最大值、最小值和整体最大值、最小值

和一元函数一样, 多元函数也可以有*局部和整体极值*. (也就是, 局部最大值、最小值和整体最大值、最小值.) 函数在一点有局部极值, 就是在这一点附近的小邻域内取得最大值或最小值. 整体极值是对所有点的最大值或最小值. 定义在区域 R 上的函数 f, 我们称:

- f 在 P_0 点有**局部最大值**, 如果对 P_0 点附近的所有点 P, $f(P_0) \geqslant f(P)$
- f 在 P_0 点有**局部最小值**, 如果对 P_0 点附近的所有点 P, $f(P_0) \leqslant f(P)$
- f 在 P_0 点有**整体最大值**, 如果对 R 中的所有点 P, $f(P_0) \geqslant f(P)$
- f 在 P_0 点有**整体最小值**, 如果对 R 中的所有点 P, $f(P_0) \leqslant f(P)$

例 1 表 9-5 给出了函数 $f(x, y)$ 的数值表. 估计 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 20$ 上的整体最大值或者最小值及其所在的位置.

表 9-5 这个函数 $f(x, y)$ 的极值点在什么位置

		x					
		0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	0	80	84	82	76	71	65
	5	86	90	88	73	77	71
y	10	91	95	93	88	82	76
	15	87	91	89	84	78	72
	20	82	86	84	79	73	67

解 该函数的整体最大值看起来像 95, 在点 (0.2, 10) 处取得. 因为这个表格只给出了某几个值, 所以我们不能确信这恰好就是最大值. (该函数可以有更大的值, 比如在点 (0.3, 11) 处.) 这个函数在所给点上的整体最小值是 65 并且在点 (1, 0) 处取得. □

例 2 图 9-49 表示函数 $f(x, y)$ 的等值线图. 估计它的局部最大值和局部最小值及其位置. 整体最大值或者整体最小值也显示在这个正方形中吗?

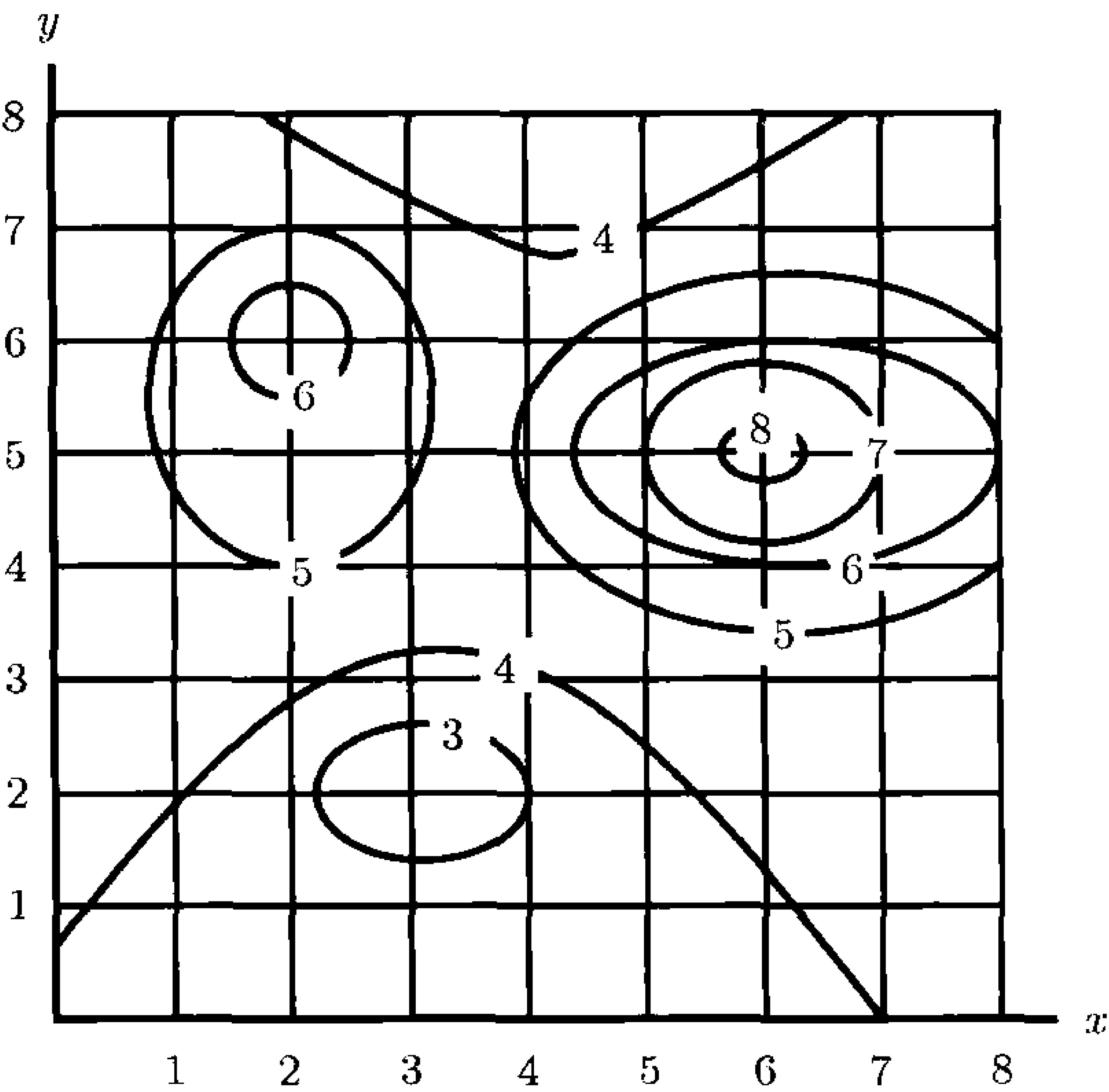


图 9-49 这个函数的局部极值点和整体极值点在什么位置

解 在 8 的上方靠近点 (6, 5) 处有一个局部最大值, 在 6 的上方靠近点 (2, 6) 处有个局部最大值, 并且在 3 的下方靠近点 (3, 2) 处有个局部最小值. 在所给区域中 8 的上方的那个值是整体最大值而在 3 的下方的那个值是整体最小值. □

在例 1 和例 2 中, 我们可以估计极值点的位置和极值点的值, 但是我们没有足

够的信息精确地找出它们. 当给我们的只是数值表或等值线图时往往就是如此. 要精确地求出局部极值或者整体极值, 我们通常需要函数的公式.

9.5.2 求局部最大值和局部最小值的分析方法

在一元微积分中, 函数的局部极值出现在导数为零的点或者导数不存在的点. 这如何推广到两个变量或者多个变量的函数情形呢? 假设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有局部最大值, 点 (x_0,y_0) 不在 f 的定义域的边界上. 如果偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 有定义并且是正的, 那么我们可以通过增加 x 来增加 f. 如果 $f_x(x_0,y_0)<0$, 那么我们可以通过减少 x 来增加 f. 因为在点 (x_0,y_0) 处 f 有局部最大值, 没有使得 f 递增的方向, 所以我们一定有 $f_x(x_0,y_0)=0$. 类似地, 如果 $f_y(x_0,y_0)$ 有定义, 那么 $f_y(x_0,y_0)=0$. $f(x,y)$ 有局部最小值的情形是类似的. 因此, 我们得到下面结论.

> 如果 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有局部最大值或最小值, 点 (x_0,y_0) 不在 f 的定义域的边界上, 那么要么
>
> $$f_x(x_0,y_0)=0 \quad \text{而且} \quad f_y(x_0,y_0)=0,$$
>
> 要么在点 (x_0,y_0) 处 (至少) 有一个偏导数没定义. 每个偏导数要么为零要么没定义的点叫做**临界点**.

同单变量情形一样, f 在它的临界点 (x_0,y_0) 处未必有局部最大值或最小值.

如何求出临界点

要求出函数 f 的临界点, 我们只要求出使得 f 的两个偏导数为零或者没定义的点.

例 3 求出 $f(x,y)=x^2-2x+y^2-4y+5$ 的临界点并对它们进行分析.

解 为了求出临界点, 我们令两个偏导数都等于零:

$$f_x(x,y)=2x-2=0,$$

$$f_y(x,y)=2y-4=0.$$

求解这些方程得到 $x=1$ 和 $y=2$. 因此 f 只有一个临界点, 即 $(1,2)$.

f 靠近 $(1,2)$ 的性态是什么呢? 表 9-6 中的函数值提出该函数在点 $(1,2)$ 处有局部最小值 0. □

例 4 某制造公司生产两种产品分别在两个市场销售. 公司的经济学家们分析了这两个市场并确定出消费者的需求量 q_1 和 q_2 与每种产品的价格 p_1 和 p_2(美元) 之间的关系由方程

$$p_1=600-0.3q_1 \quad \text{和} \quad p_2=500-0.2q_2$$

表示. 因此, 如果哪种商品的价格增加, 那么对它的需求就减少. 公司的生产总成

本由

$$C = 16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2$$

给出. 如果公司要使得它的总利润达到最大, 每种产品应该生产多少? 这个最大利润是多少?[①]

表 9-6 $f(x, y)$ 在点 (1, 2) 附近的函数值

		x				
		0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
y	1.8	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08
	1.9	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
	2.0	0.04	0.01	0.00	0.01	0.04
	2.1	0.05	0.02	0.01	0.02	0.05
	2.2	0.08	0.05	0.04	0.05	0.08

□

解 总收益是每个市场的收益 p_1q_1 与 p_2q_2 之和. 代入 p_1 和 p_2, 我们得到

$$\begin{aligned} R &= p_1q_1 + p_2q_2 \\ &= (600 - 0.3q_1)q_1 + (500 - 0.2q_2)q_2 \\ &= 60q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2q_2^2. \end{aligned}$$

因此总收益 π 可表示为

$$\begin{aligned} \pi &= R - C \\ &= 600q_1 - 0.3q_1^2 + 500q_2 - 0.2q_2^2 - (16 + 1.2q_1 + 1.5q_2 + 0.2q_1q_2) \\ &= -16 + 598.8q_1 - 0.3q_1^2 + 498.5q_2 - 0.2q_2^2 - 0.2q_1q_2. \end{aligned}$$

为了求 π 的最大值, 我们计算偏导数:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_2} = 498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1.$$

因为偏导数处处有定义, 所以 π 的唯一临界点就是使得 π 的偏导数都等于零的点.

因此, 我们解 q_1 和 q_2 的方程,

$$598.8 - 0.6q_1 - 0.2q_2 = 0,$$
$$498.5 - 0.4q_2 - 0.2q_1 = 0,$$

得到

$$q_1 = 699.1 \approx 699 \quad \text{并且} \quad q_2 = 896.7 \approx 897.$$

为了看出这是不是一个最大值点, 我们考察这一点附近 π 的数值表. 表 9-7 提出利润在 (699, 897) 处达到最大. 所以公司应该生产第一种产品 699 单位其价格为每单位 390.30 美元, 生产第二种产品 897 单位其价格为每单位 320.60 美元. 那么最大利润为 $\pi(699, 897) = 432\ 797$ 美元.

① 引自 M. Rosser, 经济学家的数学基础, 第 316 页 (纽约: Routledge, 1993).

表 9-7 这个利润函数在 (699, 897) 处有最大值吗

		产量, q_1		
		698	699	700
产量, q_2	896	432 796.4	432 796.9	432 796.8
	897	432 796.7	432 797.0	432 796.7
	898	432 796.6	432 796.7	432 796.2

□

9.5.3 临界点是局部最大值点还是局部最小值点呢

通过观察数值表或者等值线图我们常常能看出在一个临界点处函数值究竟是局部最大值还是局部最小值或者不是极值. 下面的分析方法也可以用来区分局部最大值和局部最小值.① 它类似于第 4 章中的二阶导数检验法.

二元函数的二阶导数检验法

假设 (x_0, y_0) 是一个临界点在该点 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. 设

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2.$$

- 如果 $D > 0$ 并且 $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, 那么 f 在 (x_0, y_0) 处有局部最小值.
- 如果 $D > 0$ 并且 $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, 那么 f 在 (x_0, y_0) 处有局部最大值.
- 如果 $D < 0$, 那么 f 在 (x_0, y_0) 处既没有局部最大值又没有局部最小值.
- 如果 $D = 0$, 那么该检验法无法得出结论.

例 5 用二阶导数检验法进一步证实例 4 中利润函数 π 在临界点 $q_1 = 699.1, q_2 = 896.7$ 处取得局部最大值.

解 为了看出我们所求的点是否为局部最大值点, 我们计算二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -0.6, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -0.4, \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2} = -0.2.$$

因为

$$D = \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 \partial q_2}\right)^2 = (-0.6)(-0.4) - (-0.2)^2 = 0.2 > 0,$$

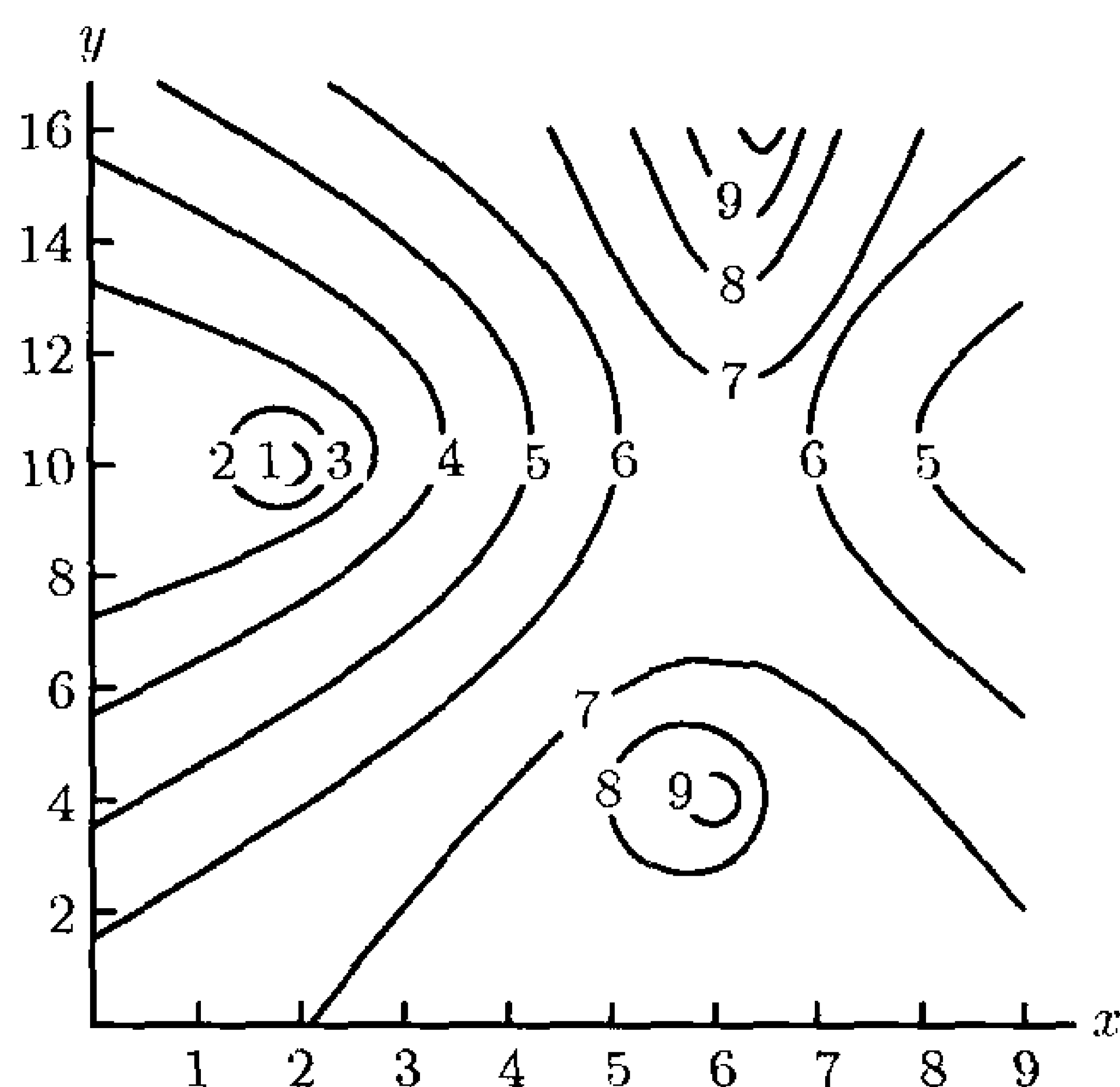
所以二阶导数检验法推得我们所求的点是一个局部最大值点. □

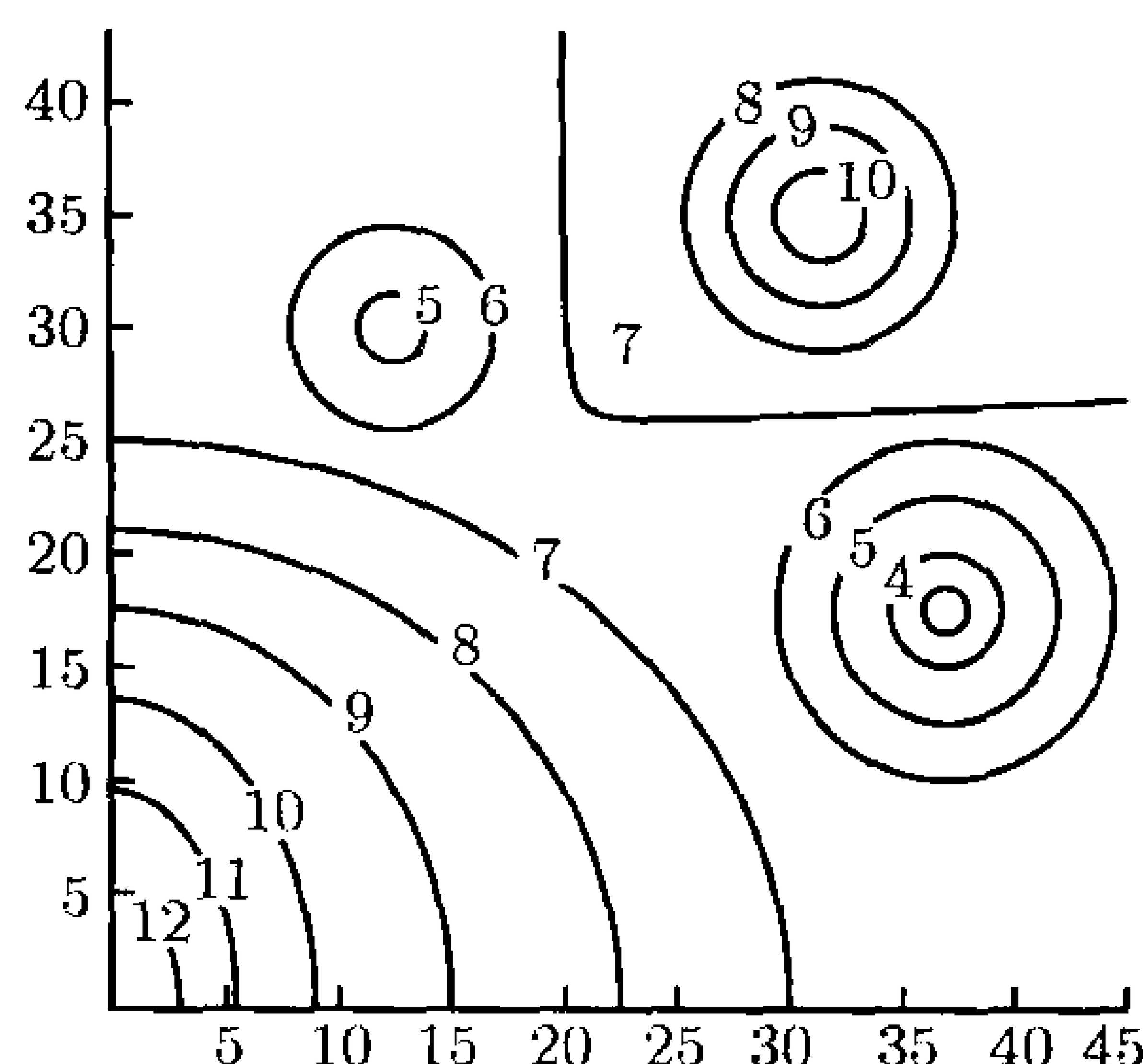
习题

1. 图 9-50 表示 $f(x, y)$ 的等值线. 列出 $f(x, y)$ 的局部最小值点和局部最大值点的 x 坐标和 y 坐标以及函数值, 并确定哪个是最小值哪个是最大值. 这些局部极值也是所示区域上的整体极值吗? 如果是, 是哪个?
2. 图 9-51 表示 $f(x, y)$ 的等值线. 列出 $f(x, y)$ 的局部最小值点和局部最大值点的 x 坐标和 y 坐标以及函数值, 并确定哪个是最小值哪个是最大值. 这些局部极值也是所示区域

① 可以找到这种检验法的推广, 例如, 在 W. McCallum 等著, 多元微积分 (纽约: John Wiley, 1997) 中.

上的整体极值吗? 如果是, 是哪个?


图 9-50


图 9-51

在习题 3~11 中, 求出所有的临界点并确定它们是局部最大值点, 还是局部最小值点, 或者不是极值点.

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x - 10y + 8$

4. $f(x,y) = x^2 + 4x + y^2$

5. $f(x,y) = x^2 + xy + 3y$

6. $f(x,y) = y^3 - 3xy + 6x$

7. $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$

8. $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x^2 + 10y + 6$

9. $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 8y$

10. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y + 10$

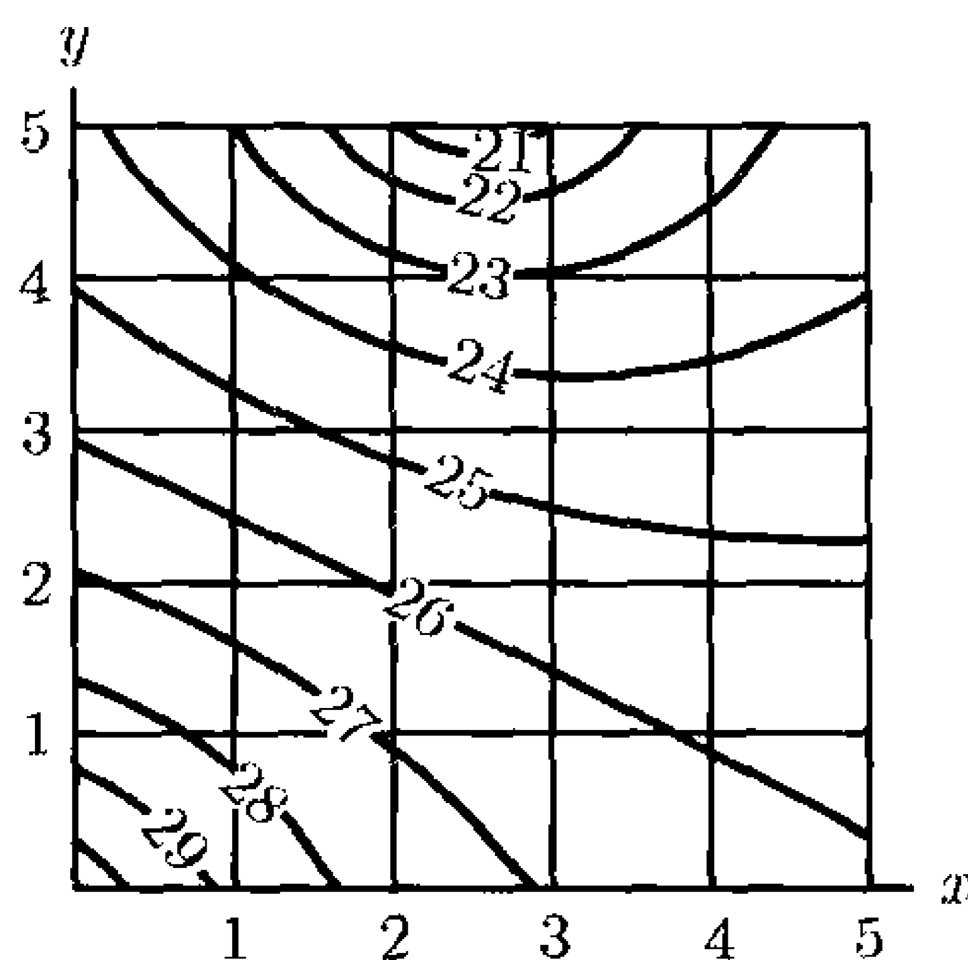
11. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6y^2 - 3x + 9$

12. 求使得 $f(x,y) = 400 - 3x^2 - 4x + 2xy - 5y^2 + 48y$ 达到最大的 x 和 y 的值.

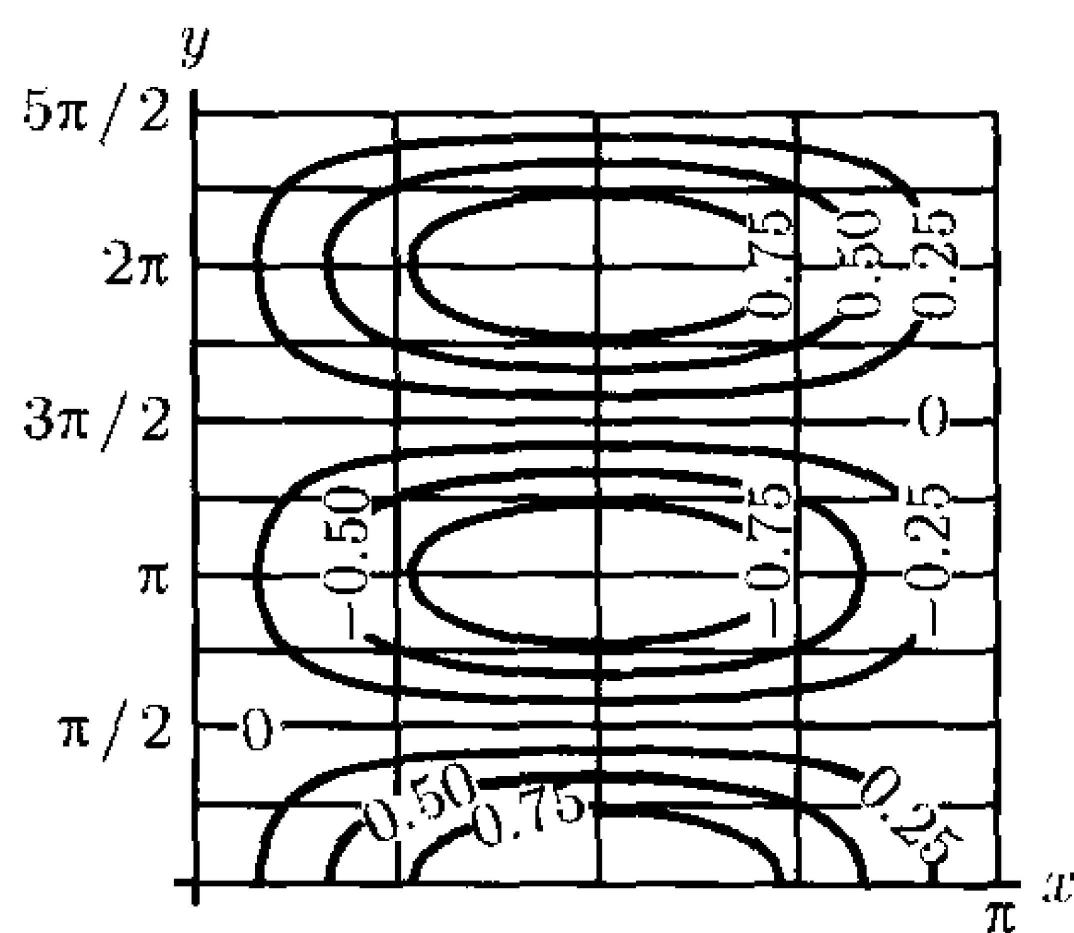
13. 通过观察图 9-5 中的气象图, 求出密西西比州, 阿拉巴马州, 宾夕法尼亚州, 纽约州, 加利福尼亚州, 亚利桑那州, 以及马萨诸塞州的最大日高温和最小的日高温.

在习题 14~16 中, 估计所示区域上的整体最大值和整体最小值的近似值以及它们的位置.

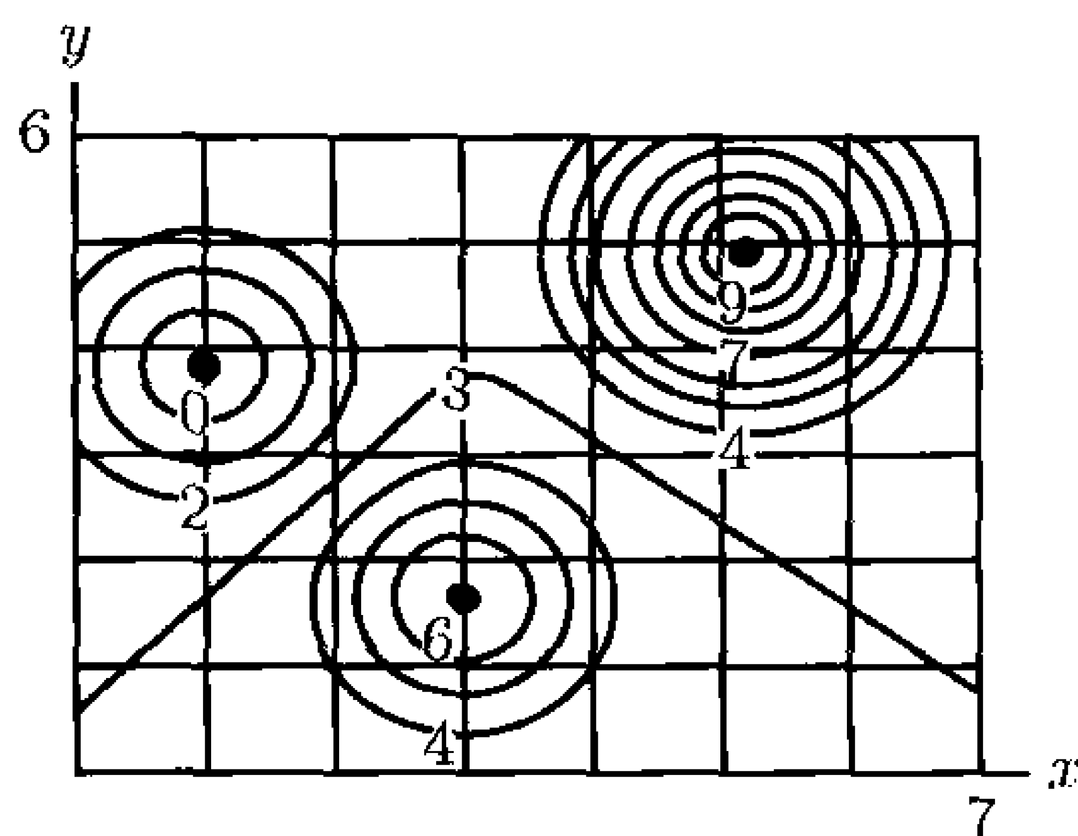
14.



15.



16.



17. 对于函数 $f(x,y)=A-(x^2+Bx+y^2+Cy)$, A, B, C 的值为多少时, 才能使得 f 在点 $(-2, 1)$ 处取得局部最大值 15?

18. 导弹的制导装置对温度 t°C 和湿度 h 很敏感. 导弹可控制的范围 (千米) 由

$$\text{范围} = 27\,800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h$$

表示. 控制导弹的最优空气条件时是什么?

19. 消费者需要的产品数量是其价格的函数. 一种产品的需求量也可能依赖于另一种产品的价格. 例如, 茶叶的需求量受到咖啡价格的影响; 汽车的需求量受到汽油价格的影响. 两种产品的需求量 q_1, q_2 按照如下方式依赖于它们的价格 p_1, p_2:

$$q_1 = 150 - 2p_1 - p_2, \quad q_2 = 200 - p_1 - 3p_2.$$

(a) p_1 和 p_2 的系数都是负的说明了什么事实? 举出具有这种关系的两种产品的例子.

(b) 如果制造商同时销售这两种产品, 应该如何设置它们的价格, 才能使得产生的可能收益达到最大? 最大的可能收益是多少?

20. 公司销售两种产品, 它们彼此可以部分代替, 就像咖啡和茶叶. 如果一种产品的价格提升, 那么另一种产品的需求量就上升. 需求量 q_1, q_2 作为价格 p_1, p_2 的函数表示如下

$$q_1 = 517 - 3.5p_1 + 0.8p_2, \quad q_2 = 770 - 4.4p_2 + 1.4p_1.$$

(a) 将总销售收益表示为 p_1 和 p_2 的函数.

(b) 为了使得总销售收益达到最大, 公司应该如何定价?①

21. 公司经营两家工厂, 它们生产同一种产品, 它们的总成本函数为

$$C_1 = 8.5 + 0.03q_1^2 \quad \text{和} \quad C_2 = 5.2 + 0.04q_2^2,$$

其中 q_1 和 q_2 是每家工厂的产量. 总需求量 $q = q_1 + q_2$ 与价格之间的关系由

$$p = 60 - 0.04q$$

表示. 为了使得公司的利润达到最大, 每家工厂应该生产多少产品?②

9.6 约束最优化

许多实际优化问题往往要受到外部环境的约束. 例如, 一个城市要建设公共交通系统, 但可用的税收是有限的. 一个国家要保持贸易平衡, 在进口上所花费的钱

① 引自 M. Rosser, 经济学家的数学基础, 第 316 页 (纽约: Routledge, 1993).
② 引自 M. Rosser, 经济学家的数学基础, 第 316 页 (纽约: Routledge, 1993).

必须比出口所挣得的钱少. 这一节我们将考察在这些约束下如何寻求最优值.

9.6.1 约束优化问题

假设在预算约束下我们要使公司的产量最大化. 设产量 f 是两个变量 x 和 y 的函数, 其中 x 和 y 是两种原材料的数量, 并且

$$f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}.$$

如果购买 x 和 y 的价格分别是每单位 p_1 美元和 p_2 美元. 那么在预算为 c 美元下可获得的最大产量是多少?

在不考虑预算的情况下要增加 f 的值, 我们只要增加 x 和 y. 然而, 预算会阻止我们增加 x 和 y 超过某个点. 预算究竟是如何约束我们的呢? 假设 x 和 y 的单位成本都是 100 美元, 并且总预算是 378 000 美元. 花在 x 和 y 上的金额合起来可表示为 $g(x,y)=100x+100y$, 并且我们的花费不能超过预算, 所以我们一定有

$$g(x,y)=100x+100y\leqslant 378\ 000.$$

目的是使得函数

$$f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}$$

达到最大. 我们希望将预算用完, 因此我们有

$$100x+100y=378\ 000.$$

例 1 一个公司的生产函数为 $f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}$ 并且预算约束为 $100x+100y=378\ 000$.

(a) 如果在 x 上的花费为 100 000 美元, 那么在 y 上能花费多少? 这种情况下的产量是多少?

(b) 如果在 x 上的花费为 200 000 美元, 那么在 y 上能花费多少? 这种情况下的产量是多少?

(c) 对公司来说上面两种选择哪种选择更好? 在所有可能的选择中你认为这是最好的选择吗?

解 (a) 如果公司在 x 上的花费为 100 000 美元, 那么在 y 上能花费 278 000 美元. 在这种情况下, 我们有 $100x=100\ 000$, 所以 $x=1000$, 并且由 $100y=278\ 000$, 可得 $y=2780$. 因此

$$\text{产量}\ =f(1000,2780)=(1000)^{2/3}(2780)^{1/3}=1406\ \text{单位}.$$

(b) 如果公司在 x 上的花费为 200 000 美元, 那么在 y 上能花费 178 000 美元. 因此 $x=2000, y=1780$, 从而

$$\text{产量}=f(2000\ 1780)=(2000)^{2/3}(1780)^{1/3}=1924\ \text{单位}.$$

(c) 这两种选择中的 (b) 更好, 因为在这种情况下产量更大. 这也许不是最优的. 因为还有许多我们没有检验的 x 和 y 的其他组合. □

9.6.2 图形的方法：服从预算约束的最大产量

我们如何找到产量的最大值呢? 我们要目标函数

$$f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}$$

达到最大, 并且服从 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 以及预算约束

$$g(x,y)=100x+100y=378\ 000.$$

该约束由图 9-52 中的直线表示. 在直线上或者在直线下方的点表示我们能买得起的 x 和 y 的值. 在直线上的点完全用光了预算, 而在直线下方的点表示没有用光预算所能购买的 x 和 y 的值. 在直线上方的点表示我们买不起的 x 和 y 的值.

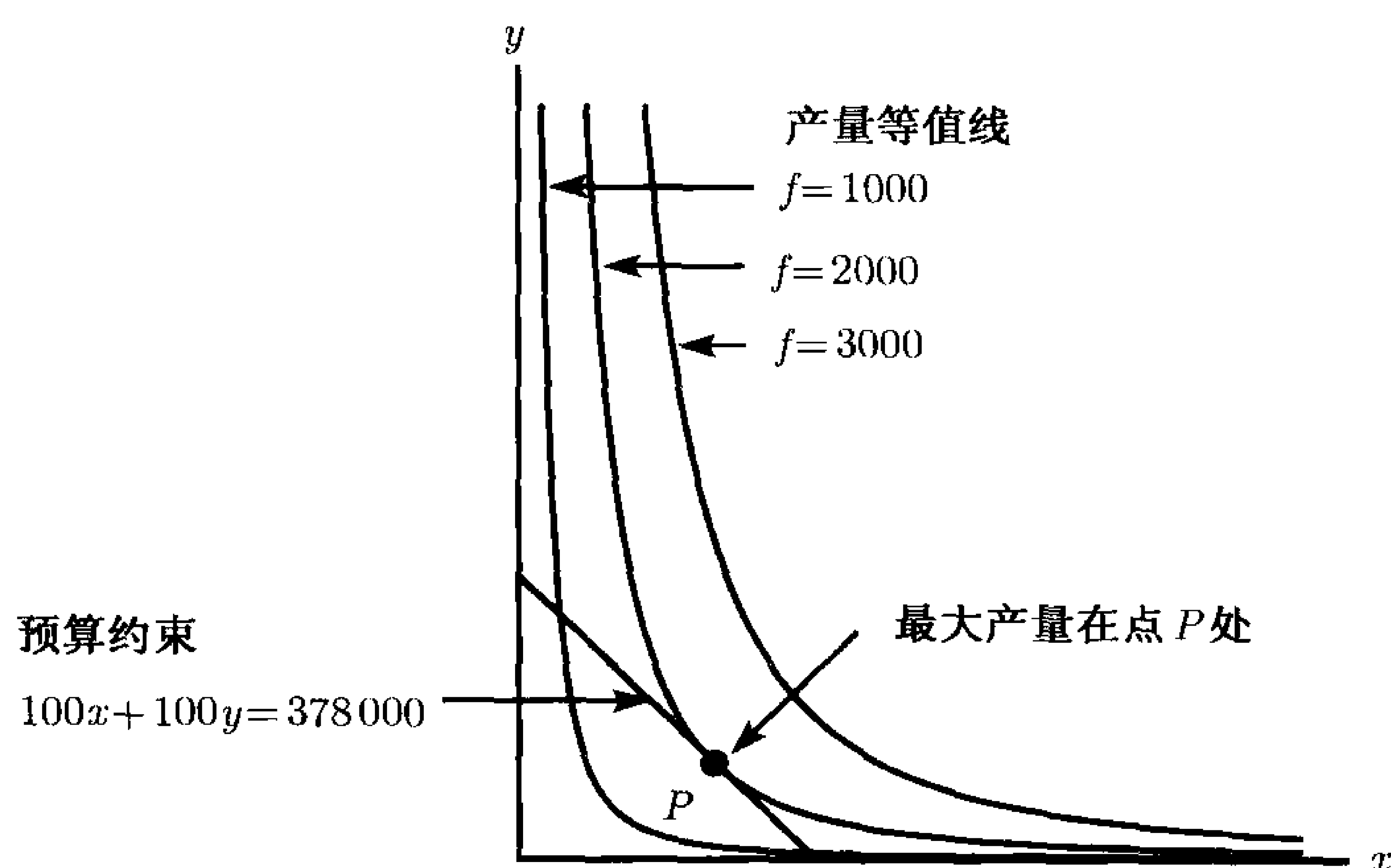


图 9-52 在最优点 P 处预算约束与产量等值线相切

图 9-52 还显示了一些生产函数的等值线. 由于我们要使得 f 达到最大, 因此我们要找这样的点, 它位于 f 的最大可能值的等值线上并且在预算以内. 因为我们应该花光所有可用的钱, 所以我们要找的点必须位于预算约束的直线上. 关键是: 最大值出现在这样的点 P 处, 在该点处预算约束直线与产量等值线相切. (参见图 9-52.) 其理由是, 如果我们在约束直线上点 P 的左边, 沿着约束直线向右移动, f 递增; 如果我们在约束直线上点 P 的右边, 沿着约束直线向左移动, f 递增. 因此, f 在预算约束直线上的最大值出现在 P 点.

一般地, 只要 f 和 g 是光滑的, 我们就有下面的结论.

> 如果 $f(x,y)$ 在约束 $g(x,y)=c$ 下有整体最大值或最小值, 那么它出现在这样的点处, 在该点约束的图形与 f 的等值线相切, 或者在约束的端点处.[①]

① 如果约束有端点的话.

9.6.3 解析的方法：拉格朗日乘数法

假设我们要使服从约束 $g(x,y)=c$ 的 $f(x,y)$ 达到最优. 我们作如下定义.

假设 P_0 是满足约束 $g(x,y)=c$ 的一个点.

- 如果对所有靠近 P_0 满足约束 $g(x,y)=c$ 的点 P, $f(P_0)\geqslant f(P)$, 那么 f 在点 P_0 处有服从约束 $g(x,y)=c$ 的局部最大值.
- 如果对所有满足约束 $g(x,y)=c$ 的点 P, $f(P_0)\geqslant f(P)$, 那么 f 在点 P_0 处有服从约束 $g(x,y)=c$ 的整体最大值.

类似地可定义局部最小值和整体最小值.

可以证明[①] 在这样的点处, 它满足在如下方法中所设置的方程, 约束与 f 的等值线相切.

拉格朗日乘数法 为了使服从约束 $g(x,y)=c$ 的 $f(x,y)$ 达到最优, 求解下列三个方程的方程组

$$f_x(x,y)=\lambda g_x(x,y),$$
$$f_y(x,y)=\lambda g_y(x,y),$$
$$g(x,y)=c,$$

中的三个未知量 x, y 和 λ; 数 λ 叫做拉格朗日乘数. 如果 f 有约束整体最大值或最小值, 那么它出现在这个方程组的一个解 (x_0,y_0) 处或者在约束的端点处.

例 2 求 $f(x,y)=x^{2/3}y^{1/3}$ 服从约束 $100x+100y=378\ 000$ 和 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ 的最大值.

解 求微分得到

$$f_x(x,y)=\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} \quad 和 \quad f_y(x,y)=\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}$$

以及

$$g_x(x,y)=100 \quad 和 \quad g_y(x,y)=100,$$

这就得到方程

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}=\lambda(100)$$
$$\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}=\lambda(100)$$
$$100x+100y=378\ 000.$$

前两个方程表明我们一定有

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}=\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}.$$

① 参见 W. McCallum 等著, 多元微积分 (纽约：John Wiley, 2005).

利用事实 $x^{-1/3} = 1/x^{1/3}$, 我们可以将这个等式重新写成

$$\frac{2y^{1/3}}{3x^{1/3}} = \frac{x^{2/3}}{3y^{2/3}}.$$

乘以分母得到

$$2y^{1/3}(3y^{2/3}) = x^{2/3}(3x^{1/3}),$$

并利用 $y^{1/3} \cdot y^{2/3} = y^1$ 可得

$$6y = 3x$$
$$2y = x.$$

由于我们还必须满足约束 $100x + 100y = 378\ 000$, 因此作替换 $x = 2y$ 我们得到

$$100(2y) + 100y = 378\ 000$$
$$300y = 378\ 000$$
$$y = 1260.$$

因为 $x = 2y$, 所以我们有 $x = 2520$. 最优值出现在 $x = 2520$, $y = 1260$ 处. 对这些值,

$$f(2520, 1260) = (2520)^{2/3}(1260)^{1/3} \approx 2000.1.$$

约束端点是 (3780, 0) 和 (0, 3780). 因为

$$f(3780, 0) = f(0, 3780) = 0,$$

所以我们发现 f 的最大值近似为 2000 并且在 $x = 2520$, $y = 1260$ 处出现. □

9.6.4 λ 的含义

在前面例子中, 我们没有求 (或者没必要求)λ 的值. 然而, λ 有一个实际解释. 在这个生产问题中我们使得服从约束

$$g(x, y) = 100x + 100y = 378\ 000$$

的

$$f(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$$

达到最大. 我们解方程

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3} = 100\lambda,$$
$$\frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3} = 100\lambda,$$
$$100x + 100y = 378\ 000,$$

得到 $x = 2520$, $y = 1260$. 继续求 λ 我们就得到

$$\lambda \approx 0.0053.$$

假设我们现在做另一个计算, 看起来与微积分无关. 设我们的预算增加 1000 美元, 从 378 000 美元增加到 379 000 美元. 新的预算约束为

$$100x + 100y = 379\ 000.$$

相应的解是 $x = 2527$, $y = 1263$, 并且新的最大值 (代替 $f = 2000.1$) 是

$$f = (2527)^{2/3}(1263)^{1/3} \approx 2005.4.$$

在预算中追加的 1000 美元使生产水平增加了 5.3 单位. 注意到一美元产量增加了 5.3/1000=0.0053 单位, 这就是我们的 λ 的值. λ 的值表示预算增加一美元所得到的额外产量.

从方程 $f_x = \lambda g_x$ 或 $f_y = \lambda g_y$ 中解出 λ 就得到拉格朗日乘数可表示为变化量的商:

$$\lambda \approx \frac{\Delta f}{\Delta g} = \frac{f\text{最优值的变化量}}{g\text{的变化量}}.$$

这些结果提出了拉格朗日乘数 λ 的如下解释.

- λ 的值近似为 f 的最优值在约束值增加 1 个单位时的变化量.
- λ 的值表示当约束值增加时 f 的最优值的变化率.

例 3 按照函数 $f(x,y) = x^{2/3}y^{1/3}$ 生产的货物数量在预算约束 $100x + 100y = 378\ 000$ 下达到了最大值. 假设预算增加到可以使得产量增加, 产品以什么价格销售才值得增加预算?

解 我们知道 $\lambda \approx 0.0053$. 所以, 增加 1 美元的预算可使产量增加一个单位. 为了使得增加的预算能够获利, 生产的额外货物必须卖得 1 美元以上的钱. 如果价格是 p(美元), 那么我们必须有 $0.0053p > 1$. 因此, 我们需要 $p > 1/0.0053 \approx 189$ 美元. □

例 4 如果 x 和 y 是所用原材料的数量, 那么产品的数量 Q 为

$$Q = xy.$$

假设 x 的成本是每单位 20 美元, y 的成本是每单位 10 美元, 并且生产预算是 10 000 美元.

(a) 为了使产量达到最大应该购置多少单位的 x 和 y? 在这个点处生产的产品是多少单位?

(b) 求 λ 的值并解释它.

解 (a) 我们要使得服从约束 $g(x,y) = 20x + 10y = 10\ 000$ 和 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. $f(x,y) = xy$ 达到最大. 我们有下面的偏导数:

$$f_x = y, \quad f_y = x, \quad \text{以及} \quad g_x = 20, \quad g_y = 10.$$

拉格朗日乘数法给出如下方程:

$$y = 20\lambda$$
$$x = 10\lambda$$
$$20x + 10y = 10\ 000.$$

将前两个方程中 x 和 y 的值代入第三个方程中得到

$$
\begin{aligned}
20(10\lambda)+10(20\lambda)&=10\ 000\\
400\lambda&=10\ 000\\
\lambda&=25.
\end{aligned}
$$

将 $\lambda=25$ 代入上面前两个方程中得到 $x=250$ 和 $y=500$.

约束的端点是 (500, 0) 和 (0, 1000). 由于

$$f(500,0)=0 \quad 并且 \quad f(0,1000)=0,$$

所以生产函数的最大值是

$$f(250,500)=250\cdot 500=125\ 000 \text{ 单位}.$$

公司应该购置 250 单位的 x 和 500 单位的 y, 这时生产 125 000 单位的产品.

(b) 我们有 $\lambda=25$. 这告诉我们, 如果约束增加 1 美元, 那么我们预计产量就会增加大约 25 单位. 如果预算增加 1000 美元, 那么最大产量就会增加大约 25 000 单位, 总产量大约为 150 000 单位. □

9.6.5 拉格朗日函数

约束优化问题常常利用拉格朗日函数 $\mathcal{L}$ 求解. 例如, 为了使得服从约束 $g(x,y)=c$ 的函数 $f(x,y)$ 达到最优, 我们常常利用拉格朗日函数

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c).$$

为了看出函数 $\mathcal{L}$ 是有用的, 我们计算 $\mathcal{L}$ 的偏导数:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x},\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g}{\partial y},\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}&=-(g(x,y)-c).
\end{aligned}
$$

注意到如果 (x_0,y_0) 给出 $f(x,y)$ 在约束 $g(x,y)=c$ 下的最大或最小值并且 λ_0 是相应的拉格朗日乘数, 那么在点 (x_0,y_0,λ_0) 处我们有

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}=0.$$

换句话说, (x_0,y_0,λ_0) 是拉格朗日函数 $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ 的无约束优化问题的临界点.

因此我们可以分两步来解决约束优化问题. 第一步, 写出拉格朗日函数 $\mathcal{L}$. 第二步, 求 $\mathcal{L}$ 的临界点.

习题

在习题 1~10 中, 利用拉格朗日乘数法求所给约束下的 $f(x,y)$ 的最大值或最小值.

1. $f(x,y)=xy,\quad 5x+2y=100$

2. $f(x,y)=x^2+3y^2+100,\quad 8x+6y=88$

3. $f(x,y)=x^2+4xy,\quad x+y=100$

4. $f(x,y)=5xy,\quad x+3y=24$

5. $f(x,y)=x+y\quad x^2+y^2=1$

6. $f(x,y)=3x-2y,\quad x^2+2y^2=44$

7. $f(x,y)=x^2+y^2,\quad 4x-2y=15$

8. $f(x,y)=x^2+y,\quad x^2-y^2=1$

9. $f(x,y)=xy,\quad 4x^2+y^2=8$

10. $f(x,y)=x^2+y^2,\quad x^4+y^4=2$

11. 图 9-53 给出了 $f(x,y)$ 的等值线和约束 $g(x,y)=c$ 的图形. x 和 y 的什么近似值使得 $f(x,y)$ 在该约束下达到最大? 在该最大值点处 f 的近似值是多少?

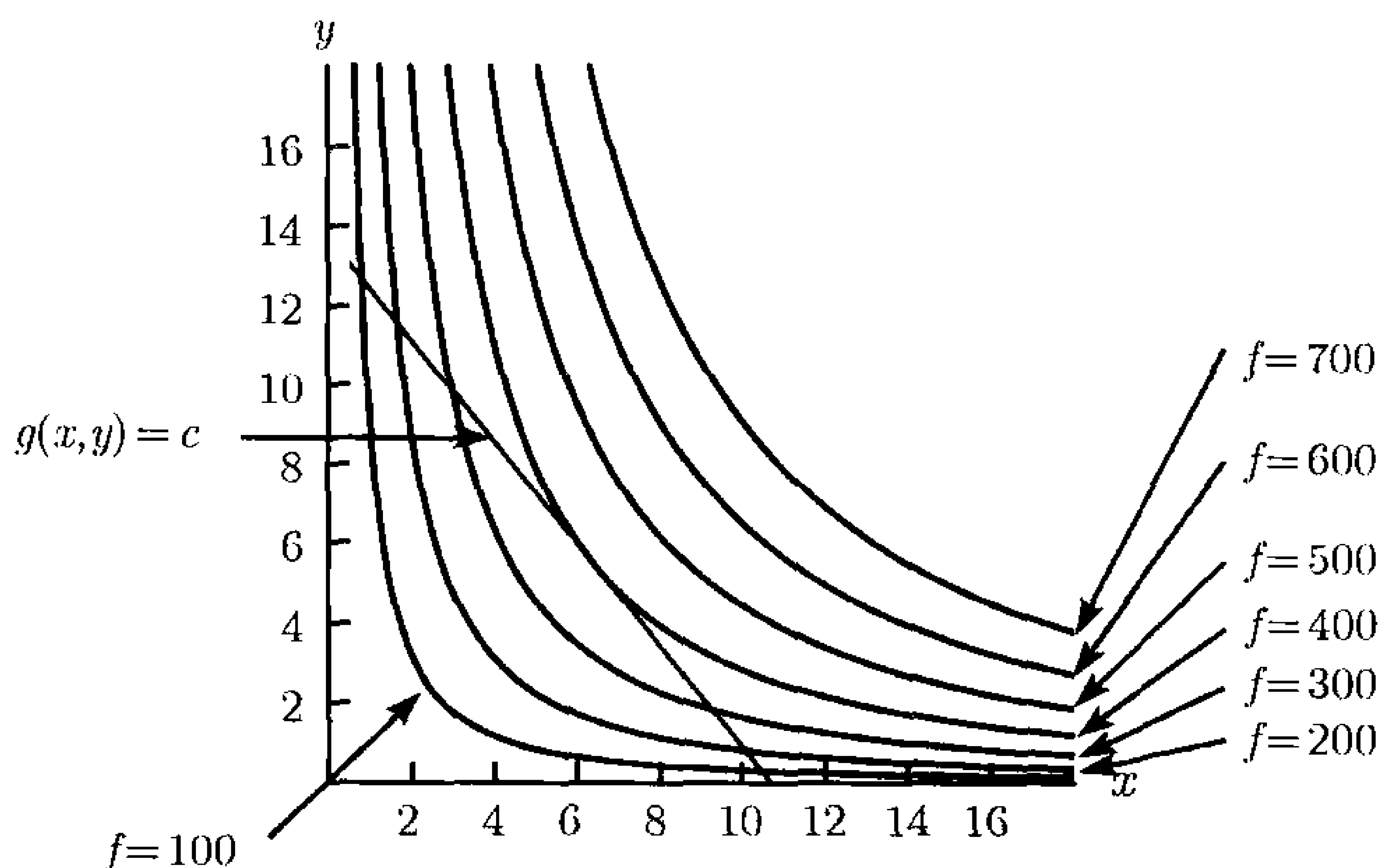


图 9-53

12. 某种产品的产量 Q 按照函数

$$Q=900L^{1/2}K^{2/3}$$

依赖于所使用的劳动力数量 L 和资本数量 K. 劳动力的成本是每单位 100 美元而资本的成本是每单位 200 美元. 以最小的成本生产 36 000 单位的产品应该使用多少劳动力和资本? 最小成本是多少?

13. 某产品的产量 Q 按照函数

$$Q=x_1^{0.3}x_2^{0.7}$$

依赖于所用的两种原材料 x_1 和 x_2. 每单位 x_1 的成本是 10 美元而每单位 x_2 的成本是 25 美元. 在原材料的预算为 50 千美元下我们要使得产量达到最大.

(a) 目标函数是什么?

(b) 约束条件是什么?

14. 某产品的产量 Q 按照函数

$$Q=x_1^{0.6}x_2^{0.4}$$

依赖于所用的两种原材料 x_1 和 x_2. 每单位 x_1 的成本是 127 美元而每单位 x_2 的成本是 92 美元. 我们要使得生产 500 单位产品的成本 C 为最小.

(a) 目标函数是什么?

(b) 约束条件是什么?

15. 图 9-54 表示生产 $f(x,y)$ 的等势线, 其中 x 和 y 表示所用的两种原材料的数量. 原材料的成本是 $15x+20y$ 千美元. 在 300 千美元的预算下可能的最大产量是多少? 为了达到这个最大值每种原材料应该购置多少?

16. 公司生产的产品数量 Q 由

$$Q = aK^{0.6}L^{0.4}$$

表示, 其中 a 是正的常数, K 是所使用的资本数量, L 是所使用的劳动力的数量. 资本的成本是每单位 20 美元, 劳动力的成本是每单位 10 美元, 并且公司要求资本和劳动力的成本合起来不超过 150 美元. 假设要求你为公司着想, 并得知资本和劳动力各使用 5 个单位.

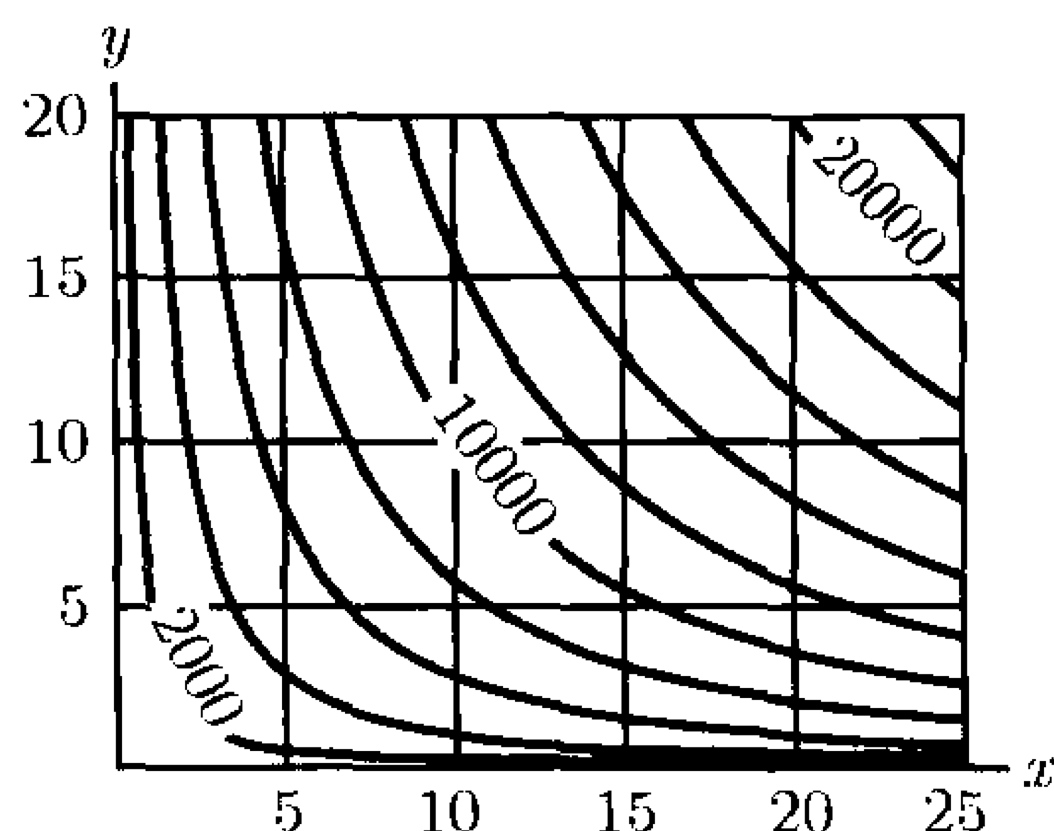


图 9-54

(a) 你会提出什么建议? 公司应该多使用劳动力还是少使用劳动力? 多使用资本还是少使用资本? 多使用或少使用的单位是多少?

(b) 写一句概括性的话用来说服董事们接受你的建议.

17. 某公司在两家工厂制造一种商品. 制造这种商品的总成本由联合成本函数表示为

$$C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500.$$

其中 q_1 和 q_2 是每家工厂提供的商品数量. 公司的目标是生产 200 单位这种商品, 同时要使生产成本达到最小. 每家工厂应该各提供多少单位这种商品?

18. 某产品的 Cobb-Douglas 生产函数为

$$P = 5L^{0.8}K^{0.2},$$

其中 P 是产量, L 是劳动力的大小, K 是所有设备的数量. 每单位劳动力的成本是 300 美元, 每单位设备的成本是 100 美元, 并且总预算是 15 000 美元.

(a) 制作一个花光预算的 L 和 K 的数值表. 求每种情形下的生产水平 P.

(b) 用拉格朗日乘数法求花费预算的最优方式.

19. 对于成本函数 $f(x,y)$, 产量为 50 时的最小成本由 $f(33,87)=1200$ 和 $\lambda=15$ 给出. 估计生产配额:

(a) 上升到 51 (b) 下降到 49

时的成本.

20. 某公司的生产函数 $P(x,y)$ 表示对于给定的值 x 和 y 所能生产的产品单位数; 成本函数 $C(x,y)$ 表示对于给定的值 x 和 y 所需要的生产成本.

(a) 如果公司希望以 50 000 美元的成本就能使生产最大化, 那么目标函数 f 是什么? 约束方程是什么? 在这种情形下 λ 的含义是什么?

(b) 如果换成, 公司希望以 2000 单位的固定生产水平使得生产成本最小化, 那么目标函数 f 是什么? 约束方程是什么? 在这种情形下 λ 的含义是什么?

21. 钢铁制造商用 K 单位的资本和 L 单位的劳动力可以生产 $P(K,L)$ 单位的钢铁, 其生产成本为 $C(K,L)$ 美元. 预算为 600 000 美元时, 最大产量是 2 500 000 吨, 其中使用了 400 000 美元的资本和 200 000 美元的劳动力. 拉格朗日乘数是 $\lambda=3.17$.

(a) 目标函数是什么?

(b) 约束条件是什么?

(c) λ 的单位是什么?

(d) $\lambda = 3.17$ 的实际意义是什么?

22. 你已经留出 20 个小时的时间用来做两门课程的课外自修项目. 你希望你的成绩 (以学分为单位) 达到最优, 并且你的成绩依赖于你如何在两个项目之间分配你的时间.

(a) 这个优化问题的目标函数是什么? 它的单位是什么?

(b) 约束条件是什么?

(c) 假设你用拉格朗日乘数法求解这个问题. λ 的单位是什么?

(d) $\lambda = 5$ 的实际意义是什么?

23. 二级火箭所达到的终极速度 (m/s) 依赖于装载于火箭两个舱位中燃料 (单位: l) x_1 和 x_2 的数量. 你希望达到一个特定的终极速度 v_0 时所用的燃料总量最少.

(a) 目标函数及其单位是什么?

(b) 约束条件是什么?

(c) 假设你用拉格朗日乘数法求解这个问题. λ 的单位是什么?

(d) 终极速度为 50 m/s 时, 陈述 $\lambda = 8$ 的实际意义是什么?

图 9-55 表示 f 的等值线图. 在习题 24~26 中, 求 f 在 $0 \leqslant x \leqslant 300$, $0 \leqslant y \leqslant 300$ 内服从所给约束的近似最大值或最小值.

24. 最小值, 约束为 $y = 100$

25. 最大值, 约束为 $y = 100$

26. 最大值, 约束为 $y = x$.

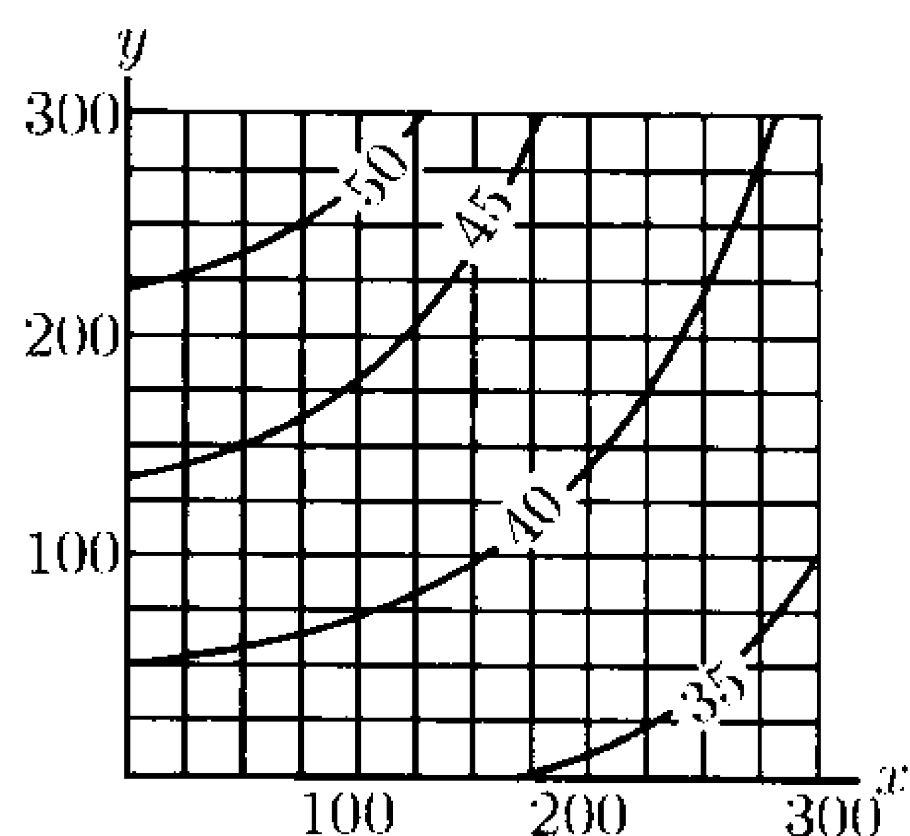


图 9-55

27. 某公司生产 x 单位的一种商品和 y 单位的另一种商品. 生产这两种商品的总成本 C (美元) 近似地由如下函数表示.

$$C = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 800.$$

(a) 如果商品总数 (两种商品合起来) 的配额是 39, 求最小生产成本.

(b) 如果生产配额增加到 40 或者减少到 38, 估计追加生产成本或追加生产节约.

28. 某产品的数量 q 依赖于工人的数量 W, 以及投资的资本数量 K, 并且可以由 Cobb-Douglas 函数

$$q = 6W^{3/4}K^{1/4}$$

表示. 另外, 劳动力的成本是每个工人 10 美元而每单位资本的成本是 20 美元, 并且预算是 3000 美元.

(a) 最优的工人数和最优的资本单位数是多少?

(b) 当预算增加 1 美元时重新计算 W 和 K 的最优值. 验证预算增加 1 美元允许生产 λ 单位的额外产品, 其中 λ 是拉格朗日乘数.

29. 一家汽车制造厂目前雇用 1500 名工人并且每个月有 4 千万美元的投资资本. 其生产函数为

$$Q = x^{0.4}y^{0.6},$$

其中 Q 是每月生产的汽车数量, x 是工人数量, y 是投资资本的单位数. 每个工人的月工资是 2100 美元而每个月每单位资本的成本是 1000 美元.

(a) 目前该工厂每月生产的汽车数量是多少?

(b) 由于经济萧条, 该工厂决定将生产减少到每月生产 2000 辆汽车. 该工厂要使得生产这 2000 辆汽车的成本达到最小. 有多少名工人会被解雇? 月投资数量会被减少多少?

(c) 给出拉格朗日乘数 λ 的值, 并从汽车厂角度解释它.

30. 图 9-56 表示标出 $f(x,y)$ 值的等值线图以及约束 $g(x,y)=c$ 的图形. 标出满足下列要求的近似点:

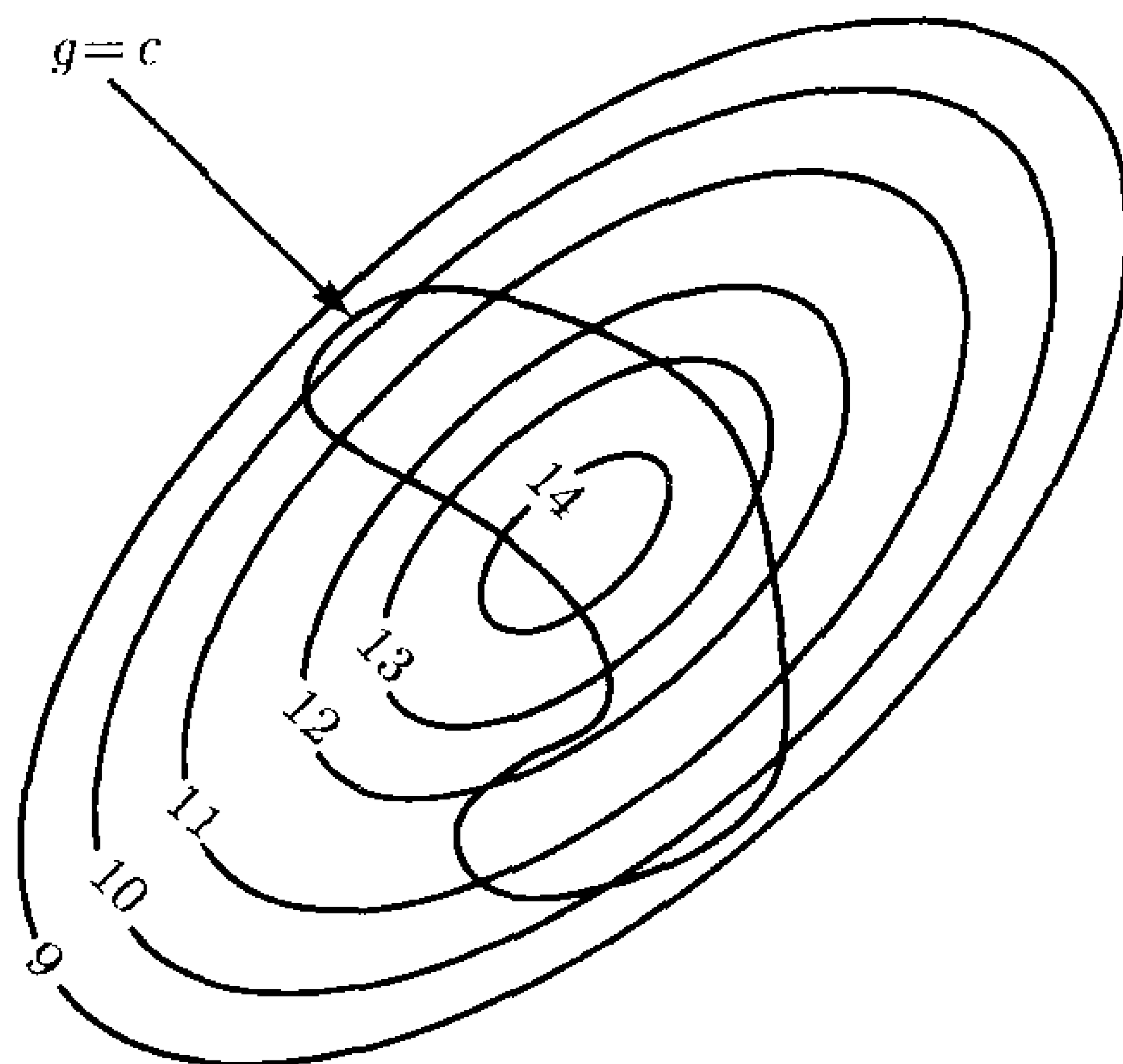


图 9-56

(a) f 取得最大值

(b) f 在约束 $g=c$ 上取得最大值.

31. 两种货物 A 和 B 的垄断性生产者的联合总成本函数为

$$C = 10q_1 + q_2q_2 + 10q_2,$$

其中 q_1 和 q_2 分别表示 A 和 B 的数量. 相应的价格分别为 p_1 和 p_2, 并且这时的需求曲线为

$$p_1 = 50 - q_1 + q_2, \quad p_2 = 30 + 2q_1 - q_2.$$

(a) 求公司生产总量为 15 单位时的最大利润.

(b) 求生产配额增加 1 个单位时新的最优利润.

32. 顾客购买的两种商品数分别为 x_1 和 x_2, 顾客的效用为

$$U(x_1,x_2) = 2x_1x_2 + 3x_1.$$

第一种商品的单位成本是 1 美元而第二种商品的单位成本是 3 美元. 如果顾客可自由支配的收入为 100 美元, 用拉格朗日乘数法求 U 的最大值. 如果顾客可自由支配的收入增加 6 美元估计他的新的最优效用.

33. 每个人都希望自己的时间在工作和悠闲之间能保持平衡. 要权衡的是, 你工作时间减少收入就会下降. 因此每个人都有同好曲线, 它是反映悠闲时间数 l 与收入 s 之间的

关系曲线. 例如, 一方面你一周悠闲时间为 0 小时收入是 1125 美元, 另一方面你一周悠闲时间是 10 小时收入是 750 美元, 如果你不在乎二者之间的差异, 那么点 $l=0$, $s=1125$ 和点 $l=10$, $s=750$ 就位于同一条同好曲线上. 下表给出曲线 I, II, 和 III 这三种不同曲线上的信息.

周收入			每周悠闲的小时数		
I	II	III	I	II	III
1125	1250	1375	0	20	40
750	875	1000	10	30	50
500	625	750	20	40	60
375	500	625	30	50	70
250	375	500	50	70	90

(a) 作出这三个同好曲线.

(b) 每周你用于工作和悠闲的时间合起来为 100 小时, 并且每小时你能挣 10 美元. 写出表示这个约束的 l 和 s 的方程.

(c) 在同一个坐标系中作出这个约束的图形.

(d) 由这些图形估计在这样的环境中你会选择怎样的悠闲和工作组合. 给出每周你会工作的相应小时数.

本章概要

- **二元函数**

  二元函数的表示: 表格, 图形, 公式, 横截面 (固定一个变量), 等值线 (函数值固定).

- **偏导数**

  作为差商的定义, 利用单位解释, 由等值线图或表格估计, 由公式计算, 二阶偏导数.

- **最优化**

  临界点, 局部最小值和最大值, 整体最小值和最大值.

- **约束最优化**

  拉格朗日乘数法的几何解释, 代数方法求解拉格朗日乘数问题, 解释 λ, 拉格朗日函数.

复 习 题

1. 酷热指数是一个温度, 它作为温度和湿度的组合告诉你会感觉有多热. 参见下表. 中暑最可能在酷热指数达到 105°F 时发生.

   (a) 如果温度是 80°F 并且湿度是 50%, 那么感觉有多热?

   (b) 湿度为多少时 90°F 感觉和 90°F 一样?

(c) 制作一个表格表示容易中暑的温度作为湿度的函数.

(d) 说明为什么酷热指数有时在实际温度之上有时在实际温度之下.

作为湿度 (H%) 和温度 (T°F) 的函数的酷热指数 (°F)

		T									
		70	75	80	85	90	95	100	105	110	115
H	0	64	69	73	78	83	87	91	95	99	103
	10	65	70	75	80	85	90	95	100	105	111
	20	66	72	77	82	87	93	99	105	112	120
	30	67	73	78	84	90	96	104	113	123	135
	40	68	74	79	86	93	101	110	123	137	151
	50	69	75	81	88	96	107	120	135	150	
	60	70	76	82	90	100	114	132	149		

2. 利用上表, 作出温度固定在 70°F 和 100°F 时热指数作为湿度的函数图形. 从常识的角度说明每个图形的特征以及二者之间的区别.

对习题 3~4 中的每个函数, 在区域 $-2 < x < 2$, $-2 < y < 2$ 内作出它们的等值线. 在每种情形下, 等值线的方程和形状是什么?

3. $z = 3x - 5y + 1$

4. $z = 2x^2 + y^2$

5. 你是一个考察本地仪式的人类学家. 十六个人背对着你沿着一条长凳排成一排; 除了最左边的三个人外所有的人都坐着. 最左边的第一个人将手放在她的两肋站着, 第二个人举起他的双手站着, 第三个人也将她的手放在两肋站着. 在某种看不见的信号下, 第一个人坐下, 其他的人重复他左边的人前一秒钟所做的动作. 经过一秒又一秒, 这种行为不断地重复直到所有的人再次坐下.

(a) 在几个不同的时刻作出他们的高度是如何依赖于长凳距离的图形.

(b) 作出举手的人的位置作为时间的函数图形.

(c) 美国的哪种仪式与你所观察到的非常相似?

6. 画出函数 $C = 40d + 0.15m$ 的等值线图. 包括 $C = 50, 100, 150, 200$ 的等值线.

7. 图 9-57 中的每个等值线图表示某个地区的人口密度. 对于下列每种情形找出最适合它

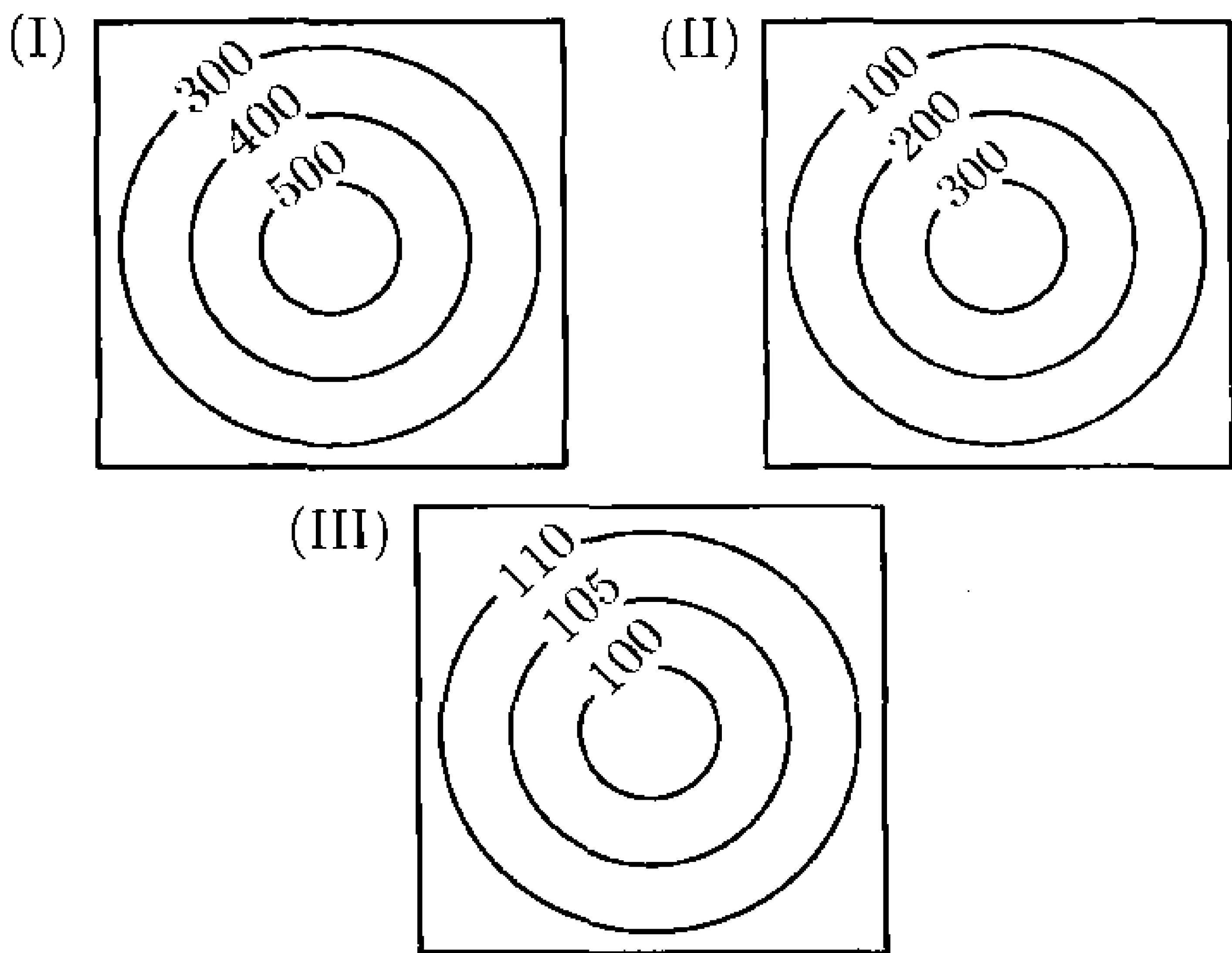


图 9-57

们的等值线图. 可能出现许多不同的搭配. 取任何一个合理的并验证你的选择.

(a) 等值线的中心是一座城市.

(b) 等值线的中心是一个湖泊.

(c) 等值线的中心是一座发电厂.

8. 图 9-58 表示一个房间中靠近窗户附近的温度 H 的等值线图, 这个窗户最近是打开的. 如果这个房间处在下列位置, 标出这三个等值线的合理的 H 值.

(a) 冬天的明尼苏达 (这里的冬季很严酷).

(b) 冬天的旧金山 (这里的冬季很温和).

(c) 夏天的休斯敦 (这里的夏季很热).

(d) 夏天的俄勒冈 (这里的夏季很温和).

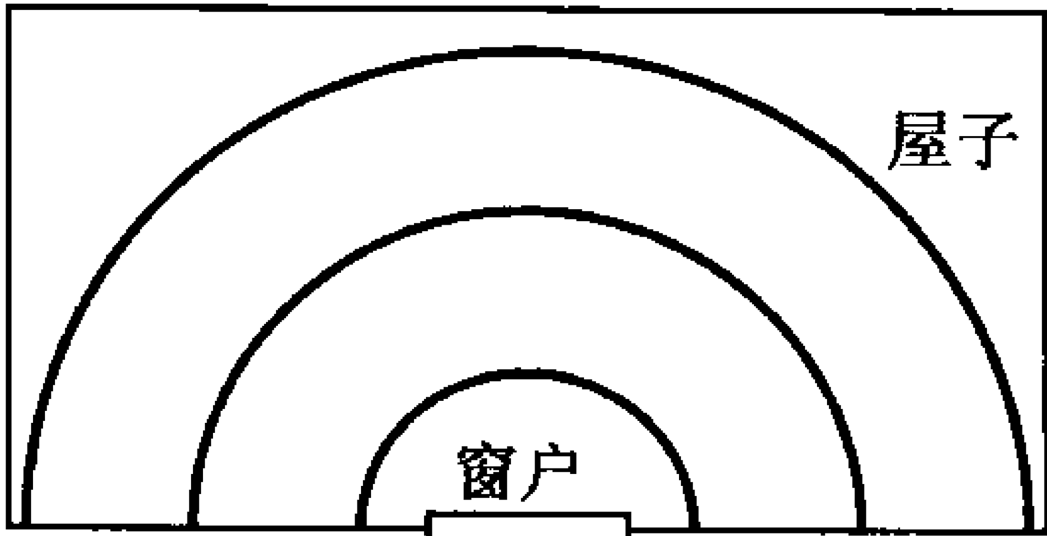


图 9-58

9. 你所在的房间有 30 ft 长并且房间的一端有一个加热器. 早晨房间的温度是 65°F. 你打开加热器, 它能迅速地将温度升高到 85°F. 设 $H(x,t)$ 是加热器打开 t 分钟后离加热器 x ft 地方的温度. 图 9-39 表示 H 的等值线图. 加热器打开 5 分钟后离加热器 10 ft 的地方的温度是多高? 加热器打开 10 分钟后呢?

10. 利用图 9-39 中的等值线图作出一元函数 $H(x,5)$ 和 $H(x,20)$ 的略图. 从实际的角度解释这两个图形, 并说明二者之间的区别.

11. 下表给出了函数 $f(x,y)$ 的值.

(a) f_x 是正的还是负的? f_y 是正的还是负的?

(b) 估计 $f_x(10,6)$ 和 $f_y(10,6)$.

(c) 用偏导数估计 $f(30,9)$ 和 $f(34,8)$.

	$x=0$	$x=10$	$x=20$	$x=30$
$y=0$	89	80	74	71
$y=2$	93	85	80	76
$y=4$	98	91	85	81
$y=6$	104	98	92	88
$y=8$	112	105	99	94

习题 12～16 考察了咖啡的需求量是如何依赖于咖啡和茶叶的价格的. 假设每周咖啡的需求量 Q(千磅), 按照公式

$$Q=f(c,t)=100\frac{t}{c}$$

依赖于咖啡的价格 c 和茶叶的价格 t, 它们的单位都是美元每磅.

12. (a) 如果茶叶的价格是每磅 1 美元, 那么咖啡的需求量是 $Q=f(c,1)=100/c$. 作出这个需求曲线, 其中 Q 作为 c 的函数, 并且 $0\leqslant c\leqslant 6$.

(b) 在同一个坐标系中作出 $t=1,2,3,4,5$ 时咖啡的需求曲线, 并且用相应的 t 的值标在每条曲线上. 你发现了什么? 当茶叶的价格增加时咖啡的需求曲线是如何变化的? 根据咖啡的需求说明为什么会是这样.

13. Q 是 c 的递增函数还是递减函数? Q 是 t 递增函数还是递减函数? 根据咖啡的需求说

明为什么会是这样.

14. 作一个表格表示 $t=1,2,3,4, c=1,2,3,4$ 时 Q 的值. (在你的表格中应该有 16 个 Q 的值.) 用你的表格验证习题 13 中的答案.

15. 我们也可以考虑茶叶的需求作为咖啡和茶叶的价格的函数. 给出一个合理的茶叶的需求, 使它作为 c 和 t 的函数公式.

16. (a) 作出 $Q=25, Q=50, Q=100$, 和 $Q=200$ 的等值线图.

(b) 由这些等值线图确定 Q 是 c 的递增函数还是递减函数? Q 是 t 的递增函数还是递减函数?

(c) 如果产品价格的较小增加会引起产品需求的较大变化那么需求叫做有弹性的. 如果茶叶的价格固定为 $t=1$, 那么咖啡的需求是在价格低时更有弹性还是在价格高时更有弹性? 用等值线图说明.

17. 角膜是眼睛的前表面. 角膜大夫用 TMS, 即拓扑模型系统, 产生眼睛表面曲率的"图像". 电脑分析眼睛反射出的光并且画出连接曲率相同的点的等值曲线. 用不同的颜色涂在这些曲线之间的区域上.

图 9-59 中的前两个图像是曲率不变的眼睛的横截面, 曲率较小的大约是 38 个单位而较大的大约是 50 个单位. 相比之下, 第三个眼睛的曲率是变化的.

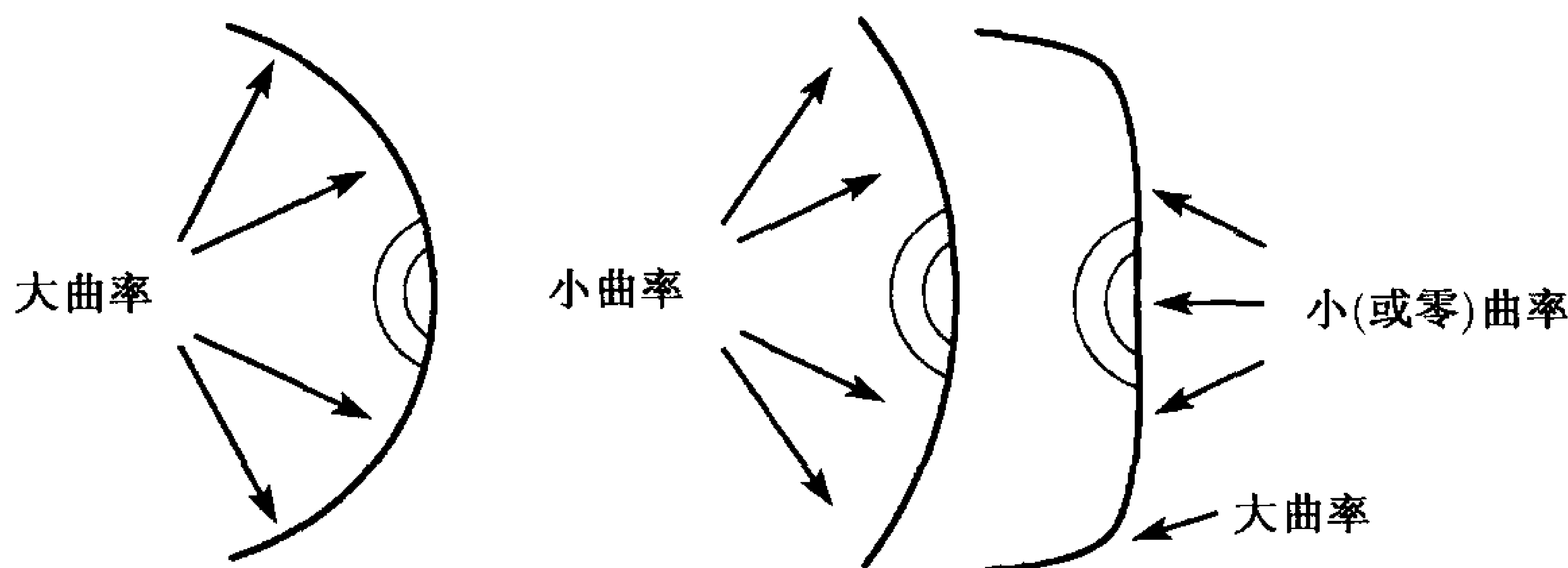


图 9-59　不同曲率的眼睛图像

(a) 用语言描述曲率不变的眼睛其 TMS 图像看上去如何.

(b) 作出具有图 9-60 中横截面的眼睛的 TMS 图像. 假设从前面看眼睛是一个圆圈, 并且在每个方向上横截面相同. 在你的等值曲线上标出合理的数.

18. 生产一个单位某产品的成本由

$$c=a+bx+ky$$

给出, 其中 x 是所用的劳动数量 (以工时为单位) 而 y 是所用原材料的数量 (按重量计算), 并且 a, b, 和 k 是常数. $\partial c/\partial x=b$ 的含义是什么? b 的实际意义是什么?

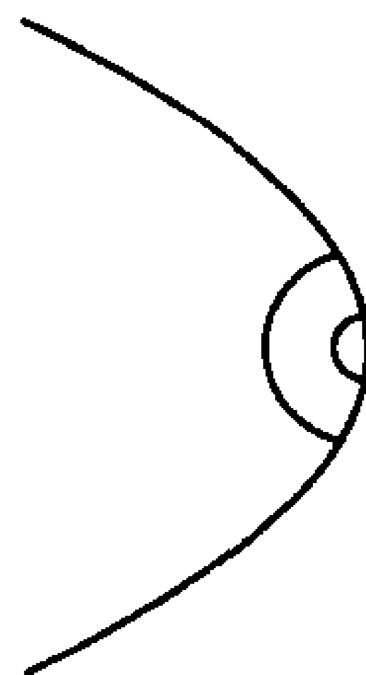


图　9-60

19. 你分期付款购买汽车, 每月应支付 $P=f(P_0, t, r)$, 其中 P_0 美元是你贷款的数量, t 是还清贷款所用的月数, r%是利率. $\partial P/\partial t$ 和 $\partial P/\partial r$ 的

单位、金融意义以及符号是什么?

20. 9.1 节习题 12 的表中表明所买的牛肉数量 C 是家庭收入 I 以及牛肉价格 p 的函数. 因此我们有 $C=f(I,p)$.

(a) 求 $f_p(80,4.0)$ 并从牛肉消费角度解释它.

(b) 求 $f_I(80,4.0)$ 并从牛肉消费角度解释它.

(c) 如果牛肉的价格是每磅 4.00 美元利用偏导数估计收入为 110 000 美元的家庭所买牛肉的数量.

习题 21~22 参考表 9-2, 它表明热指数 $I(°\mathrm{F})$ 是相对湿度 H 和温度 $T(°\mathrm{F})$ 的函数 $f(H,T)$. 热指数是一个温度, 它作为温度和湿度的组合告诉你会感觉有多热.

21. 在图森[①]夏天的典型气象条件 $(H=10,T=100)$ 下估计 $\partial I/\partial H$ 和 $\partial I/\partial T$ 的值. 从图森居民的实际角度来说你的答案意味着什么?

22. 对波士顿的夏天 $(H=50,T=80)$ 回答习题 21 中的问题.

23. 假设 x 是一辆新车的平均价格, y 是一加仑汽油的平均价格. 那么一年内购买的新车数 q_1 依赖于 x 和 y, 从而 $q_1=f(x,y)$. 类似地, q_2 是一年内所购买的汽油数量, 有 $q_2=g(x,y)$.

(a) 你预计 $\partial q_1/\partial x$ 和 $\partial q_2/\partial y$ 的符号是什么? 说明理由.

(b) 你预计 $\partial q_1/\partial y$ 和 $\partial q_2/\partial x$ 的符号是什么? 说明理由.

24. 图 9-61 表示英格兰南部狐狸种群的密度 P(单位是每平方千米的狐狸数). 将向东的千米数固定在两个不同的数值上, 作出狐狸总数作为向北的千米数的两个不同函数的图形. 同时, 将向北的千米数固定在两个不同的数值上, 作出狐狸总数作为向东的千米数的两个不同函数的图形.

25. 图 9-61 给出英格兰的西南部每平方千米狐狸数 n 的等值线图. 在点 A,B,C 处估计 $\partial n/\partial x$ 和 $\partial n/\partial y$, 其中 x 是向东的千米数 y 是向北的千米数.

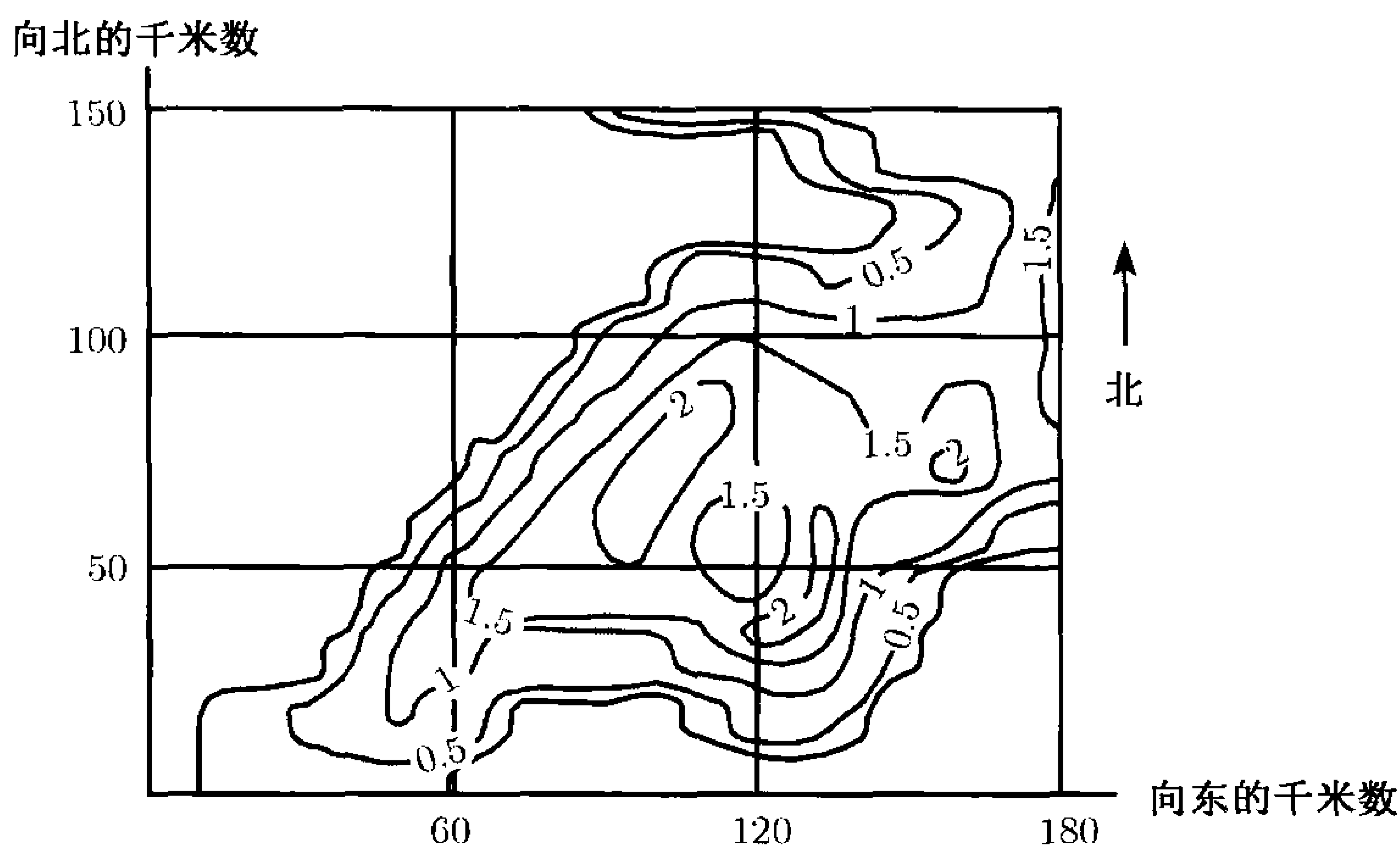


图 9-61

① 图森 (Tucson) 是美国亚利桑那州的一个城市. —— 译者注

26. 利用 9.1 节习题 20 中的等值线图估计 $T=10,20,30, w=0.1,0.2,0.3$ 时的 $H_T(T,w)$. 这些偏导数的实际意义是什么?

27. 在习题 26 中对 $T=10,20,30, w=0.1,0.2,0.3$, 估计 $H_w(T,w)$. 这些偏导数的实际意义是什么?

求习题 28~33 中的偏导数. 变量限制在函数的定义域内.

28. f_x 和 f_y, 其中 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$

29. P_a 和 P_b, 其中 $P(a,b)=a^2-2ab^2$

30. $\partial Q/\partial p_1$ 和 $\partial Q/\partial p_2$, 其中 $Q=50p_1p_2-p_2^2$

31. $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial t$, 其中 $f=5xe^{-2t}$

32. $\partial P/\partial K$ 和 $\partial P/\partial L$, 其中 $P=10K^{0.7}L^{0.3}$

33. f_x 和 f_y, 其中 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

34. 一个软饮料公司在关注价格是如何影响其产品的需求的. 公司相信其软饮料的销售量 q 依赖于本公司软饮料的平均价格 p_1, 竞争对手软饮料的平均价格 p_2, 以及公司用在广告上的平均费用 p_3:

$$q=C-8\cdot10^6p_1+4\cdot10^6p_2+2p_3.$$

(a) 从软饮料销售的角度解释常数 C 表示什么?

(b) 求软饮料关于 p_1, p_2 和 p_3 的边际需求. 说明你的答案中的符号以及相关量值为什么是合理的. [提示: 边际需求是需求量关于价格的的变化率.]

35. 你在一个体育场中做人浪. 这是一种仪式, 在这个仪式中, 观众起立和坐下产生一个围绕体育场传播的人浪. 正常情况下, 围绕体育场传播的人浪是孤立的, 而我们假设有一个连续不断的人浪. 设 $h(x,t)=5+\cos(0.5x-t)$ 是描述体育场中人浪的函数. $h(x,t)$ 的值表示在 t 秒座位 x 处观众头的高度 (ft). 求 $h_x(2,5)$ 和 $h_t(2,5)$ 的值并根据人浪解释它们.

36. 公司的产量 P 以吨为单位并且是工人人数 N 和设备价值 V(以 25 000 美元为单位) 的函数. 公司的生产函数是

$$P=f(N,V)=5N^{0.75}V^{0.25}.$$

假设目前公司雇用 80 名工人, 并且有价值 750 000 美元的设备. N 和 V 是多少? 求在这些 N 和 V 处 f, f_N 和 f_V 的值. 给出单位并用产量说明每个答案的含义.

37. 求 $f(x,y)=x^2+3y^2-4x+6y+10$ 的所有临界点.

38. 求 $f(x,y)=x^3-3x+y^2$ 的所有临界点. 作一个数值表确定每个临界点是局部最小值点, 还是局部最大值点, 还是二者都不是.

39. 两种产品分别以数量 q_1 和 q_2 生产以价格 p_1 和 p_2 销售. 生产它们的成本函数可表示为

$$C=2q_1^2+2q_2^2+10.$$

(a) 假设价格是固定的, 求其最大利润.

(b) 当 p_1 增加时求其最大利润的变化率.

40. 公司的生产函数可表示为

$$P=24K^{0.6}L^{0.4},$$

其中 P 是公司的产量, L 是花在劳动力上的金额, 而 K 是设备或资本的价值. 花在 L

和 K 上的金额合起来不能超过 1000 美元. 如果目的是使得产量达到最大, 那么花在劳动力上的金额应该是多少同时花在资本上的金额应该是多少?

(a) 用拉格朗日乘数法求解这个问题, 建立其中的方程.

(b) L 和 K 的最优值是多少?

(c) 在这个生产水平下能生产多少单位产品?

(d) 求 λ 的值并解释它.

41. 社区保健诊所主任的年预算是 600 000 美元. 如何分配这个预算才能使访问的患者数 V 达到最大, 其中 V 是大夫人数 D 和护士人数 N 的函数, 并且由

$$V = 1000D^{0.6}N^{0.3}$$

表示. 大夫的年薪是 40 000 美元, 同时护士的年薪是 10 000 美元.

(a) 提出主任的约束最优化问题.

(b) 求解 (a) 中提出的问题.

(c) 求拉格朗日乘数的值并解释它在这个问题中的含义.

42. 由 Cobb-Douglas 生产函数

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta},$$

表示的产量 Q 在 K 和 L 处取得服从成本约束

$$c_K K + c_L L = M$$

的最大值, 其中 A, α 和 β 是常数, 求 K 和 L 的表达式.

课外自修项目

1. *房间中的加热器*

图 9-62 表示, 在冬季的某一天, 加热的房间中一面墙上的温度等值线, 其中的时间由刻有 24 个小时的钟指示. 该房间中有一个加热器, 放在这面墙的最左边的角落, 并且这面墙上有一扇窗户. 这个加热器由离窗户大约 2 in 的一个恒温器控制.

(a) 窗户在什么位置?　　(b) 何时这扇窗户是打开的?

(c) 什么时候开始加热的?

(d) 作出上午 6 点, 11 点, 下午 3 点 (15 点), 和下午 5 点 (17 点), 房间中这面墙上温度的图形.

(e) 作出加热器所在的位置, 窗户所在的位置以及它们的中间位置, 温度作为时间的函数图形.

(f) 窗户所在的位置下午 5 点 (17 点) 的温度比上午 11 点的温度低. 你认为这可能是什么原因?

(g) 你认为恒温器设置的温度是多少? 你是如何知道的?

(h) 恒温器在什么位置?

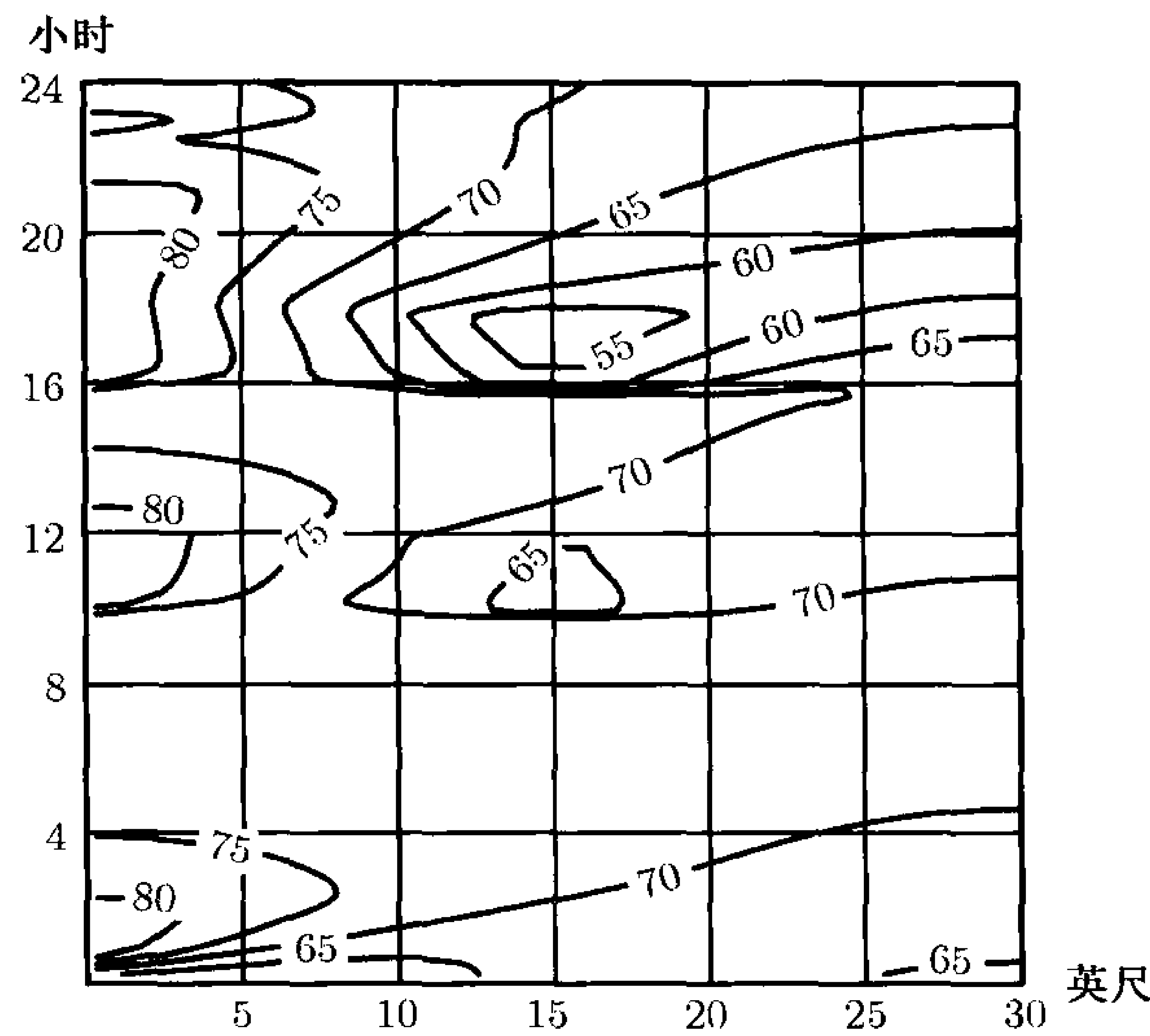


图 9-62

2. **成人和儿童相对价格的最优化**

一些商品向老年人或者儿童打折销售. 原因是这些人群对价格更敏感, 所以折扣对他们购买的决定有更大的影响. 消费者面临着一个优化问题: 为了使得利润达到最大应该提供多大的折扣呢? 假设电影院可以以价格 p_c 和 p_a 销售 q_c 张儿童票和 q_a 张成人票, 它们服从需求函数:

$$q_c = rp_c^{-4} \quad \text{和} \quad q_a = sp_a^{-2},$$

并且营业成本与销售的总票数成比例. 儿童票和成人票的相对价格应该是多少?

3. **产量最大化和成本最小化: "对偶"**

公司的生产函数为 $P = 270x_1^{1/3}x_2^{2/3}$, 其中 x_1 和 x_2 分别是两种原材料的数量, 它们的成本分别是每单位 4 美元和 27 美元.

(a) 如果原材料的预算是 324 美元每种原材料应该使用多少才能使产量达到最大? 达到的最大产量 P_0 是多少?

(b) 生产水平达到 P_0 时的最小成本是多少? 在这个最小成本中每种原材料使用了多少?

(c) 讨论 (a) 和 (b) 的答案之间的关系.

相关理论

推导回归直线的公式

假设对某些试验数据我们想找出它们的“最佳拟合”直线. 在第 1 章相关模型一节的开头部分, 我们是用计算机或计算器来找这样的直线的. 本节我们来推导这个公式.

我们是根据下列标准来决定哪条直线最适合这些数据的. 在平面上描出这些数据. 直线到这些数据的距离用每个点到这条直线的竖直距离的平方和来度量. 这个平方和越小, 这条直线就越适合这些数据. 具有最小平方和的直线叫做最小二乘直线, 或回归直线. 如果数据接近线性的, 那么最小二乘直线就很适合; 否则它可能不适合 (参见图 9-63).

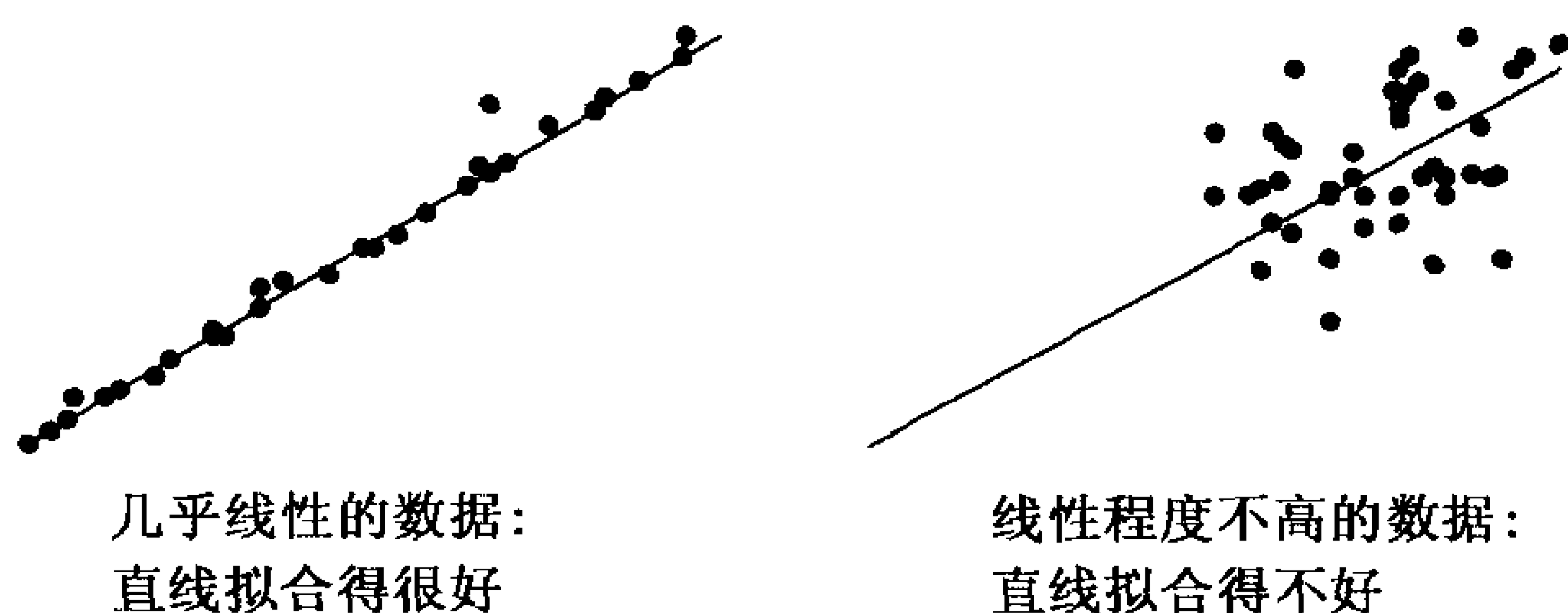


图 9-63 由数据点拟合直线

例 1 求下列数据点的最小二乘直线: (1, 1), (2, 1), 和 (3, 3).

解 假设直线方程为 $y = b + mx$. 如果我们求出了 b 和 m 那么我们就求出了这条直线. 所以这个问题中, b 和 m 是两个未知量. 我们要使得函数 $f(b, m)$ 达到最小, 这个函数是图 9-64 中的直线到三个点的垂直距离的平方和.

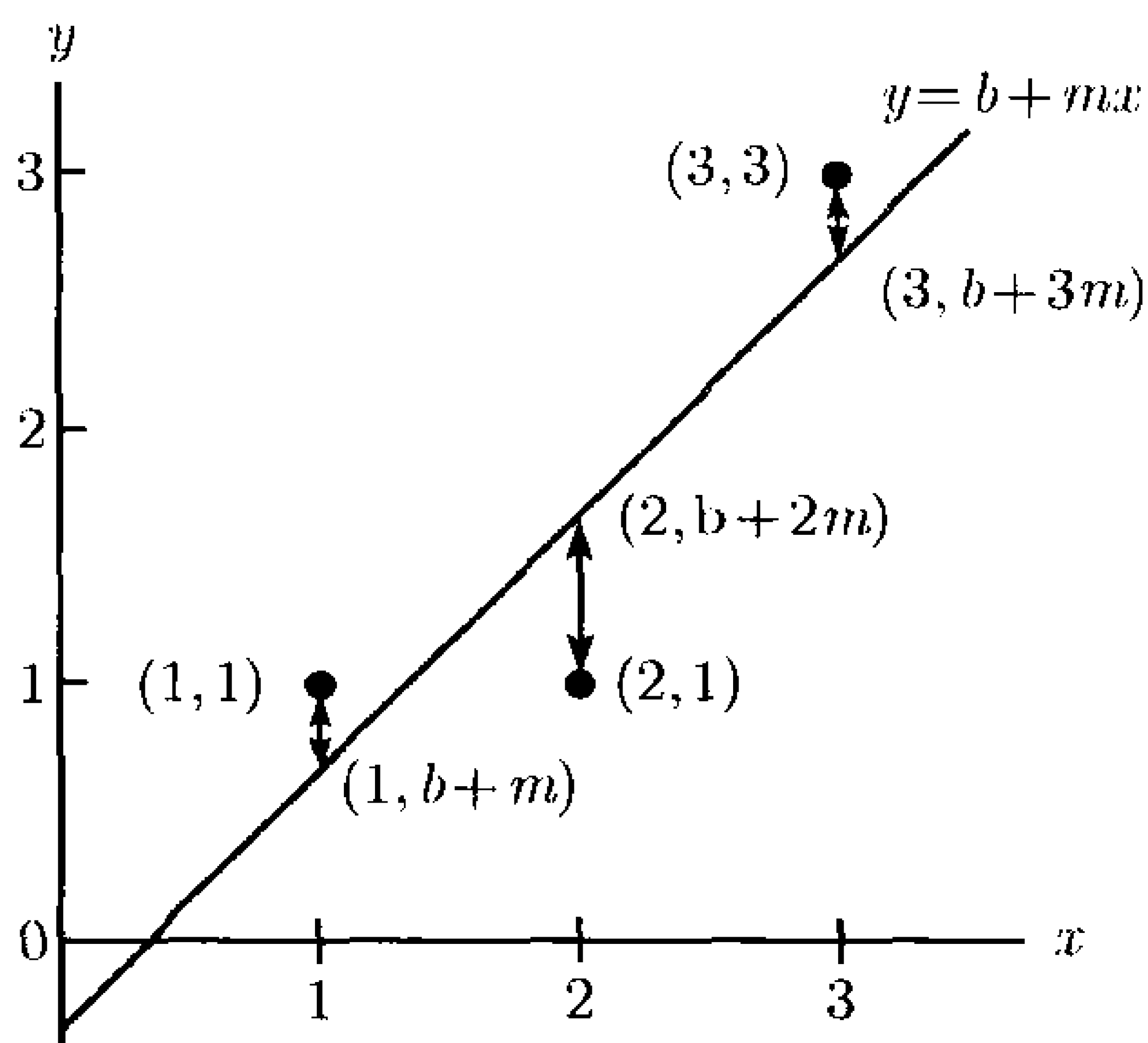


图 9-64 最小二乘直线使得三个垂直距离的平方和达到最小

点 (1, 1) 到直线的竖直距离是 y 坐标的差 $1-(b+m)$; 对其他点也类似. 因此, 它们的平方和是

$$f(b,m)=(1-(b+m))^2+(1-(b+2m))^2+(3-(b+3m))^2.$$

为了使得 f 达到最小, 我们求它的临界点. 首先我们关于 b 求导:

$$\begin{aligned}f_b(b,m)&=-2(1-(b+m))-2(1-(b+2m))-2(3-(b+3m))\\&=-2+2b+2m-2+2b+4m-6+2b+6m\\&=-10+6b+12m.\end{aligned}$$

接着我们关于 m 求导:

$$\begin{aligned}f_m(b,m)&=2(1-(b+m))(-1)+2(1-(b+2m))(-2)+2(3-(b+3m))(-3)\\&=-2+2b+2m-4+4b+8m-18+6b+18m\\&=-24+12b+28m.\end{aligned}$$

方程 $f_b=0$ 和 $f_m=0$ 给出关于两个未知数的两个线性方程构成的方程组:

$$\begin{aligned}-10+6b+12m&=0,\\-24+12b+28m&=0.\end{aligned}$$

这两个方程的解 $b=-1/3$ 和 $m=1$ 就是临界点. 因为

$$D=f_{bb}f_{mm}-(f_{mb})^2=(6)(28)-12^2=24 \quad 并且 \quad f_{bb}=6>0,$$

所以我们求得局部最小值. 这个局部最小值也是 f 的整体最小值. 因此, 最小二乘直线为

$$y=x-\frac{1}{3}.$$

我们来检验一下, 注意到直线 $y=x$ 经过点 (1, 1) 和 (3, 3). 因此引入点 (2,1), 使得 y 截距从 0 下降到 $-1/3$ 是合理的. □

回归直线公式的推导

我们用例 1 的方法推导由数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 产生的最小二乘直线 $y=b+mx$ 的公式. 注意到, 我们要找斜率和 y 截距, 所以我们把 m 和 b 看作是变量.

对每个数据点 (x_i,y_i), 直线上对应的点其 y 坐标为 $b+mx_i$. 因此, 这个点到直线的竖直距离的平方为 $(y_i-(b+mx_i))^2$. (参见图 9-65.)

我们求这 n 个点到直线的垂直距离的平方和, 并把这个和看作 m 和 b 的函数:

$$f(b,m)=\sum_{i=i}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2.$$

为了求这个函数的最小值, 我们首先求两个偏导数 f_b 和 f_m. 我们利用链式法则以及和的性质.

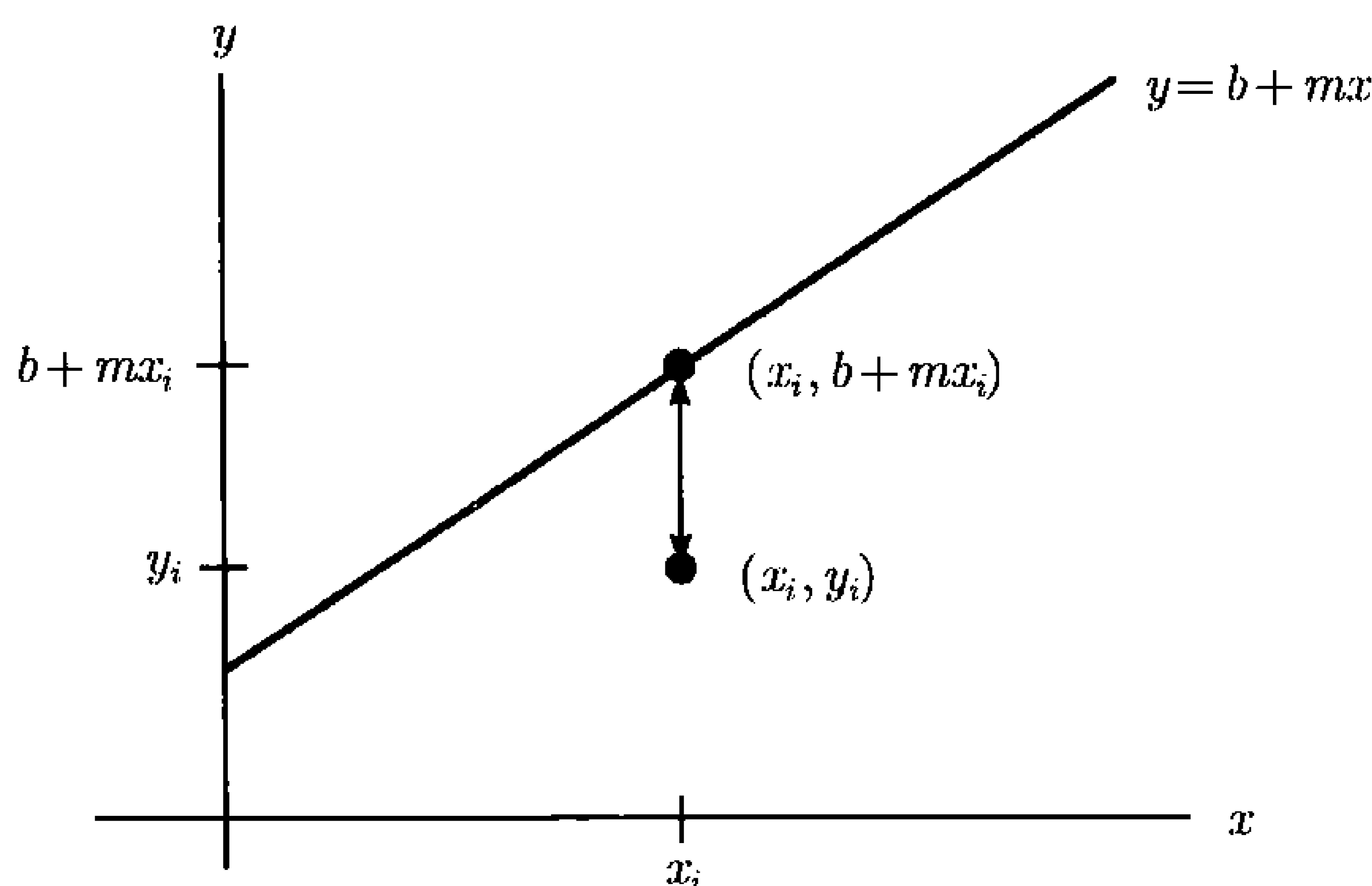


图 9-65 点到直线的垂直距离

$$\begin{aligned}
f_b(b,m) &= \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=i}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}(y_i-(b+mx_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot\frac{\partial}{\partial b}(y_i-(b+mx_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot(-1) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_m(b,m) &= \frac{\partial}{\partial m}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial m}(y_i-(b+mx_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot\frac{\partial}{\partial m}(y_i-(b+mx_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}2(y_i-(b+mx_i))\cdot(-x_i) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b+mx_i))\cdot x_i
\end{aligned}$$

现在我们令偏导数等于零并且求解 m 和 b. 这比看上去要容易：我们暂时用别的符号代替其中的和，使得方程的表现形式简单：记 $\sum y_i$ 为 SY, $\sum x_i$ 为 SX, $\sum y_i x_i$ 为 SXY, $\sum x_i^2$ 为 SXX. 记住 x_i 和 y_i 都是常数. 我们得到两个关于 m 和 b 的联立方程；解 m 和 b 就得到关于 SX, SY, SXY 和 SXX 的公式. 我们将 $f_b(b,m)$ 分成如下所示的三个和：

$$f_b(b,m) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} 1 - m\sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

将 x_i 乘进去以后我们可以类似地将 $f_m(b,m)$ 分成:

$$f_m(b,m) = -2\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

用我们提供的符号改写其中的和并令 f_b 和 f_m 等于零, 我们得到

$$0 = SY - bn - mSX$$
$$0 = SYX - bSX - mSXX$$

解这两个联立方程我们得到的结果为:

$$b = ((SXX)\cdot(SY) - (SX)\cdot(SYX))/(n(SXX) - (SX)^2)$$
$$m = (n(SYX) - (SX)\cdot(SY))/(n(SXX) - (SX)^2)$$

再用和的符号来写这些表示式, 就得到如下结果.

数据点 $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots, (x_n,y_n)$ 的最小二乘直线是这样的直线 $y = b + mx$, 其中的 b 和 m 为

$$b = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$$

$$m = \left(n\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \Bigg/ \left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right).$$

例 2 用这些公式求数据点 (1, 5), (2, 4), (4, 3) 的最佳拟合直线.

解 我们计算公式中需要的和

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i = 5 + 4 + 3 = 12$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 1 + 4 + 16 = 21$$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i x_i = (5)(1) + (4)(2) + (3)(4) = 5 + 8 + 12 = 25$$

因为 $n = 3$, 所以我们有:

$$b=\left(\sum_{i=1}^{3}x_i^2\sum_{i=1}^{3}y_i-\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{i=1}^{3}y_ix_i\right)\Bigg/\left(3\sum_{i=1}^{3}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2\right)$$
$$=((21)(12)-(7)(25))/(3(21)-(7^2))$$
$$=77/14=5.5$$

和

$$m=\left(3\sum_{i=1}^{3}y_ix_i-\sum_{i=1}^{3}x_i\sum_{i=1}^{3}y_i\right)\Bigg/\left(3\sum_{i=1}^{3}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{3}x_i\right)^2\right)$$
$$=(3(25)-(7)(12))/(3(21)-(7^2))$$
$$=-9/14=-0.64$$

这三个点的最小二乘直线为

$$y=5.5-0.64x.$$

要检验这个方程, 只要在同一个坐标系下作出这条直线和这三个点. □

许多计算器都装有最小二乘直线公式, 只要你输入数据, 就会输出 b 和 m 的值. 同时, 你还能得到它的相关系数, 它是检测这些数据点实际上与所拟合的最小二乘直线的接近程度的.

习题

在习题 1~2 中, 用例 1 的方法求最小二乘直线. 通过作出点和直线的图形进行检验.

1. $(-1, 2), (0, -1), (1, 1)$　　**2.** $(0, 2), (1, 4), (2, 5)$

在习题 3 ~ 5 中, 用 b 和 m 的公式验证你所得到的结果与指定的习题或例题中的结果是否相同.

3. $(-1, 2), (0, -1), (1, 1)$. 参见习题 1.

4. $(0, 2), (1, 4), (2, 5)$, 参见习题 2.

5. $(1, 1), (2, 1), (3, 3)$. 参见例 1.

在习题 6~7 中, 我们变换非线性数据使得它们看上去更像线性的. 例如, 假设数据点 (x, y) 适合指数方程,

$$y=Ce^{ax},$$

其中 a 和 C 是常数. 两边取自然对数, 我们得到

$$\ln y=ax+\ln C.$$

因此, $\ln y$ 是 x 的线性函数. 要求 a 和 C, 我们可以对 $\ln y$ 关于 x 的图形用最小二乘法.

6. 1960 年美国人口大约是 180 百万, 1970 年增长到 206 百万, 到了 1980 年增长到 226 百万.

(a) 假设人口是指数增长的, 用对数和最小二乘法估计 1990 年的人口.

(b) 由全国人口普查得到的数据, 1990 年人口是 249 百万. 关于指数增长的假设这表

什么?

(c) 预测 2010 年的人口.

7. 生物学中的经验表明岛屿的面积 A 增加十倍, 那么生活在岛屿上的物种数 N 就翻倍. 表格中包含的数据是西印度洋群岛上的有关数据. 假设 N 是 A 的幂函数.

(a) 用生物学中的经验求

(i) N 作为 A 的函数

(ii) $\ln N$ 作为 $\ln A$ 的函数

(b) 利用所给的数据, 列出 $\ln N$ 关于 $\ln A$ 的表格并求出它的最佳拟合直线. 你的答案与生物学中的经验一致吗?

岛屿	面积 (km^2)	物种数
雷东达	3	5
萨巴	20	9
蒙特塞拉特	192	15
波多黎各	8858	75
牙买加	10854	70
伊斯帕尼奥拉	75571	130
古巴	113715	125

第 10 章　运用微分方程建立数学模型

*数学建模*就是使用数学方法来描述某一问题. 用来构建模型的方程或公式, 可以对所研究问题做出预测.

一个具体的模型类型就是*微分方程*. 如果我们已知一个未知函数的变化率或导数, 那么我们就可以利用这一信息写出包含其导数的方程. 这类方程被称为微分方程.

本章, 我们将借助微分方程构建银行账户的货币模型、大湖区的污染模型、人体所含药物数量模型和公司净价值模型. 而且, 我们也将借助微分方程组构建两个种群 (比如, 两个物种或两个商业体) 的相互作用模型和疾病扩散模型.

10.1　数学建模: 建立微分方程

有时, 我们并不清楚一个函数的具体形式, 但是我们拥有该函数的变化率或其导数的相关信息. 那么由此我们能写出一个新型的方程, 我们称其为微分方程. 由此方程, 我们可以得出关于原函数的信息. 例如, 我们可以借助我们已知的一个人口函数的导数 (即其变化率) 来预测未来的人口.

本节, 我们从文字描述开始, 并借助其构造一个微分方程.

10.1.1　海产收获

我们调查对一个鱼群的捕获效应. 假设该鱼群每年以 20% 的速度连续增长; 捕鱼者每年从该鱼群中捕获 1000 万条. 那么该鱼群的总数将随时间如何变化呢?

注意到, 我们已经给定了该鱼群总数的变化率 (或者说导数). 结合该鱼群的初始数量, 我们将可以使用这些信息对该鱼群的未来数目做出预测. 我们知道

$$\text{鱼群的变化率} = \text{鱼群的增长率} - \text{鱼群的捕获率}$$

假设该鱼群为 P(以百万为单位) 且其导数为 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$, 其中 t 代表时间, 单位为年. 如果不考虑其他因素, 鱼群每年以 20% 的速度连续增长, 我们有

$$\text{鱼群的增长率} = 20\%\ \text{当前鱼群数目} = 0.20P\ \text{百万个/年}.$$

另外, 鱼群的捕获率 =10 百万条/年. 所以, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0.20\mathrm{P}-10.$$

这是一个微分方程, 它给出了鱼群数目如何变化的模型. 该方程中的未知量为 P 关于 t 的函数.

10.1.2　公司净值

一个公司获取收益并支出工资. 假设其收益是连续获取, 其支付也是连续支出的, 并且唯一影响其净值的是其收益与支付. 该公司的年收益为其净值的 5%, 其每年的工人工资支付为 200(以百万美元为单位).

使用上述信息, 我们可以写出一个微分方程把该公司的净值, W(以百万美元为单位), 模型化为时间 (以年为单位) 的函数. 我们可得

$$\text{净值变化率} = \text{收益率} - \text{工资支出率}.$$

由于该公司的年收益为其净值的 5%, 所以我们有

$$\text{收益率} = 5\%\ \text{净值} = 0.05W\ \text{百万美元/年}.$$

因为年工资支付为 200 百万美元, 所以我们有

$$\text{工资支出率} = 200\ \text{百万美元/年}.$$

综合上述两式, 我们可得

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = 0.05W - 200.$$

这是一个微分方程, 它给出了公司净值如何变化的模型. 该方程中的未知量为公司净值 W 关于时间 t 的函数.

10.1.3　湖泊的污染

如果清水不断流入被污染的湖泊中, 并有一条小溪对该湖进行分流, 那么该湖泊的污染水平将会降低 (假设没有新的污染物加入该湖).

例 1　假设该湖中的污染量以一个正比于当前污染量的固定速率递减. 写出一个微分方程来模型化这一湖泊污染量的变化过程. 那么这一固定的递减速率是正还是负呢? 借助微分方程, 我们可以解释污染量随时间变化图为什么是递减和上凹的, 如图 10-1.

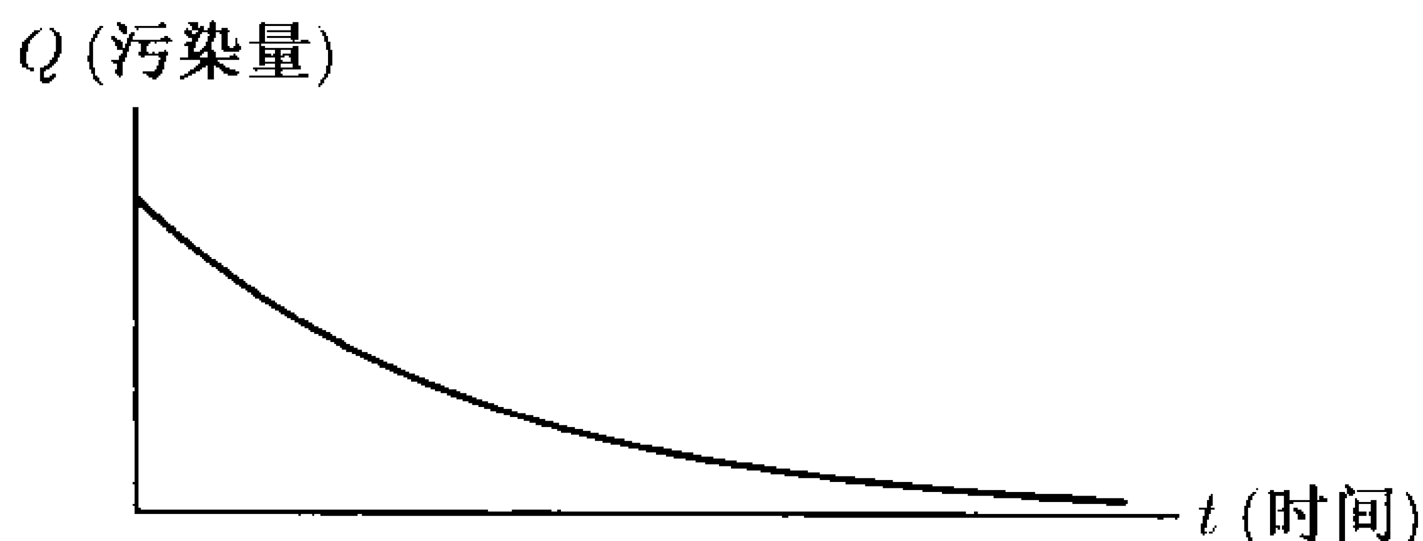


图 10-1　湖中的污染量

解　设 Q 表示 t 时刻时, 该湖的污染量. 由于 Q 的变化率正比于 Q, 因此, $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 正比于 Q. 那么该问题的微分方为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=kQ.$$

由于没有新的污染物加入该湖泊, 因此, 污染量 Q 随时间递减, 即 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 为负. 那么, 比例常数 k 为负值.

为什么带有负 k 值的微分方程 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=kQ$ 所确定的污染量随时间变化图如图 10-1 所示呢? 因为 k 为负而 Q 为正, 因而 kQ 为负. $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 为负, 因而, 如图 10-1 所示, 污染量 Q 随时间变化图是递减的. 那为什么又是上凹的? 因为随着 t 不断增大, Q 不断变小而 k 是固定的, 因此, kQ 的量不断变小, 导数 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 的量也不断变小. 那么随着 t 不断增大, Q 随时间变化图将越来越平坦. 因此, Q 随时间变化图的上凹的. 参见图 10-1. □

10.1.4　人体的药物数量

在上例中, 湖泊中的污染物以一个正比于当前湖泊中的污染量的固定速率流出湖泊. 对于流入或流出一个完全混合流体系统的任何污染物, 这一模型都是适用的. 另外一个例子就是人体中的药物数量模型.

例 2　以 85 mg/h 的速率, 从静脉给一个刚进行过大手术的病人体内注入抗生素万古霉素. 该万古霉素以一个正比于当前人体中该药物量的固定比例从人体中排出, 该比例为 0.1(以 h 计算). 写出一个微分方程来描述 t 小时后人体中的万古霉素量, Q(以 mg 为单位).

解　人体中的万古霉素量 Q 以每小时 85 mg 的固定速率增加, 同时以 0.1 倍的 Q 量递减. 每小时 85 mg 的注入量对 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 的变化有一个正的贡献. 而每小时 $0.1Q$ 的排出量对 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ 的变化有一个负的贡献. 综合上述因素, 我们有

$$\text{药物变化率}=\text{注入量}-\text{排出量},$$

因此, $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=85-0.1Q.$ □

10.1.5　Logistic 模型

假设在一个有限的空间中的人口以正比于当前人口 P 和*承受能力* L 与当前人口差之积的速度增长. (承受能力是指环境所能承受的最大人口数.) 我们使用这一信息来给出一个描述人口数量 P 变化的微分方程.

P 的变化率正比于 P 与 $L-P$ 的积, 因此

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP(L-P),\text{其中 } k \text{ 为比例常数}.$$

这一方程被称为Logistic *微分方程*. 对于 P 的图像, 这一方程可以告诉我们什么信息呢? 导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 是 k, P 与 $L-P$ 三者之积, 因而当 P 较小时, 导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 也比较小, 人口增长缓慢. 随着 P 增大, 导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 将增大, 从而人口增长迅速. 然而,

随着 P 接近承受能力 L, $L-P$ 这一项将变小, $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 也将变小, 人口因而增长缓慢. 图 10-2 中的Logistic 增长曲线满足这些条件.

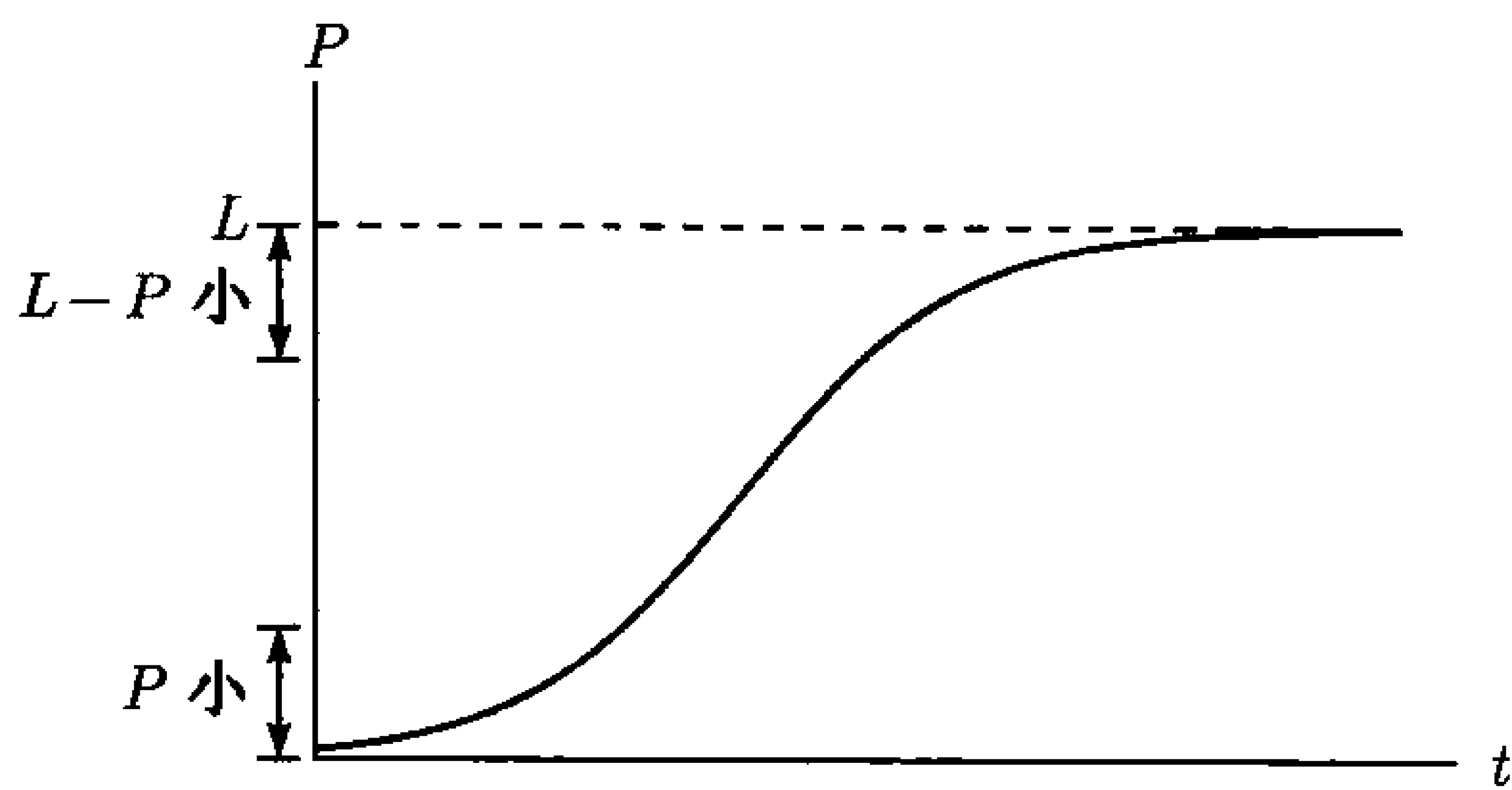


图 10-2 Logistic 增长曲线是 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=kP(L-P)$ 的一个解

习题

1. 一个昆虫种群以种群总数的一个固定比例增长. 写出描述种群总数 P 随时间 t 变化的微分方程. 该固定比例是正的还是负的呢?

2. 找出下面与图 10-3 中图形相匹配描述.

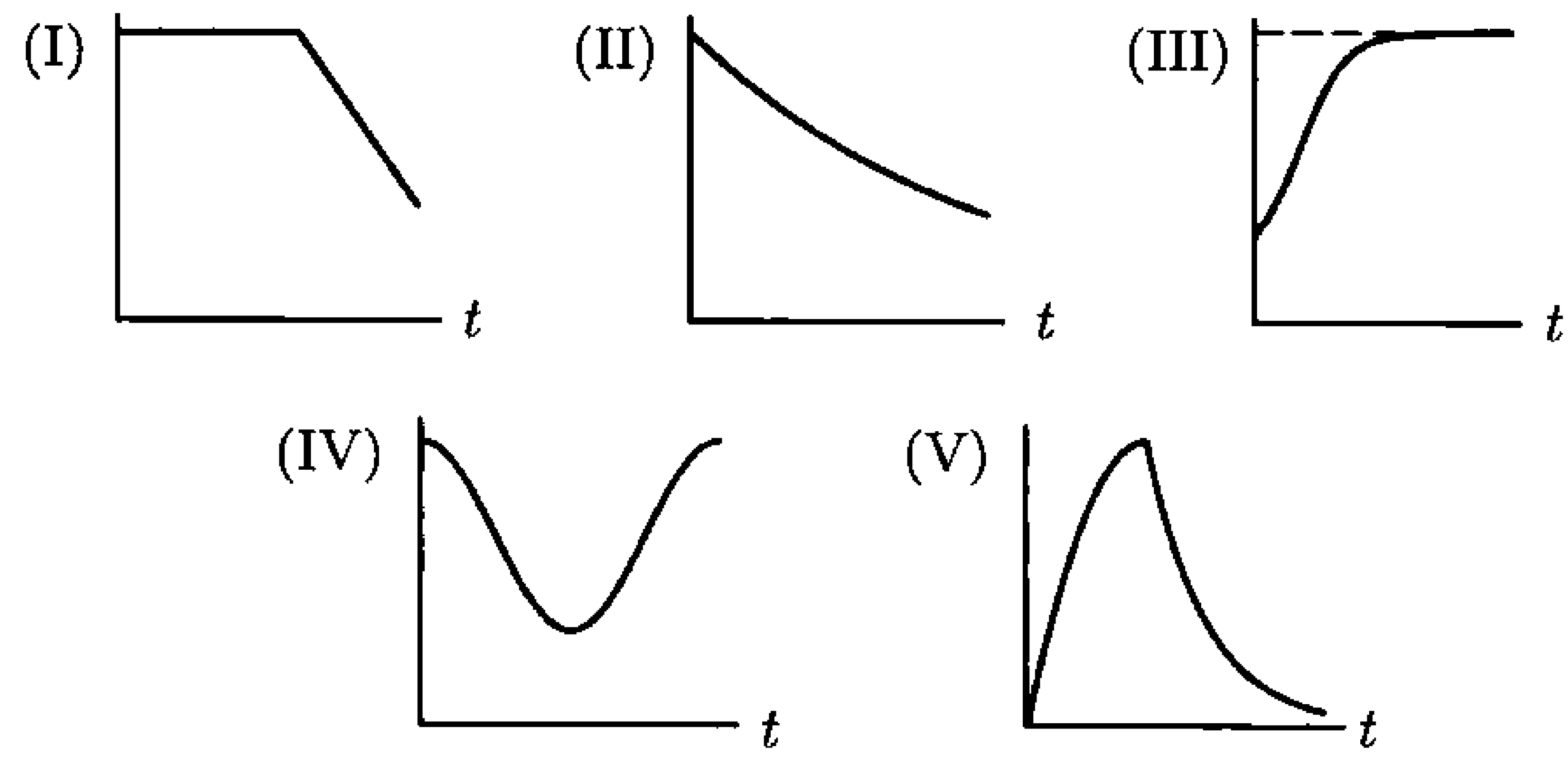


图 10-3

- **(a)** 一个引入热带岛屿的新物种的种群数目
- **(b)** 一块先放入熔炉中然后取出来的金属锭的温度
- **(c)** 一辆匀速行驶然后匀速刹车的汽车的速度
- **(d)** 一件历史文物标本中碳 14 的含量
- **(e)** 在一年中空气中树木花粉的浓度

3. 一个银行账户以当前账户现金总量的 5% 连续获取利息. 写出一个描述该银行账户现金总量 B 的微分方程. B 是时间 t(以年为单位) 的函数.

4. 放射性物质以当前数量的一个固定比例衰减, 写出一个描述该放射性物质在 t 时刻数量 Q 变化的微分方程. 该固定比例是正的还是负的呢?

5. 找出下面与图 10-4 中图形相匹配描述.

- **(a)** 放在餐桌上的一杯冰水的温度
- **(b)** 在一个支付利息的银行账户中存入 50 美元, 该账户中现金总量的变化
- **(c)** 一个以固定速率减速的汽车的速度

(d) 一块先放入熔炉中加热然后取出制冷的钢板的温度

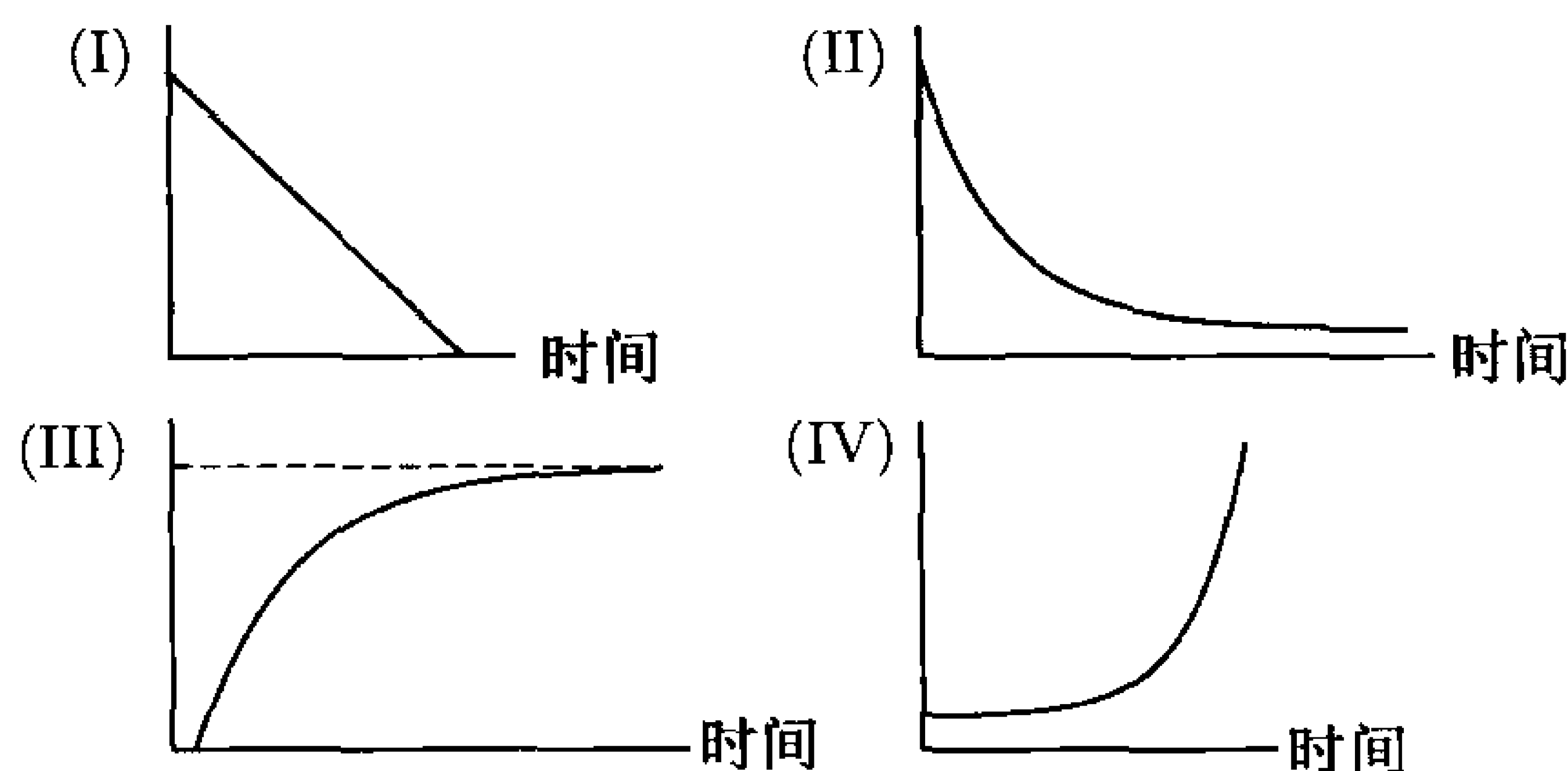


图 10-4

6. 一杯咖啡中含有大约 100 mg 的咖啡因. 经过新陈代谢, 咖啡因以每小时 17% 的速率连续排出体外.

(a) 写出描述人体内咖啡因量 B 的微分方程, B 是咖啡被饮用后的小时数 t 的函数.

(b) 写出喝下咖啡后第一小时内 $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ 的微分方程. 并借助你的答案来估计在第一小时内人体中咖啡因量的变化.

7. 酒经过新陈代谢后, 每小时以一盎司的量从人体排出. 如果某人喝了一些酒, 请写出描述余留在人体中酒精量 A(以盎司为单位) 的微分方程, A 是酒被饮用后的小时数 t 的函数.

8. 一银行账户开始存有 25000 美元, 并以年利率为 4% 连续获取利息. 每年固定从该账户中取出 2000 美元. 写出一个描述该银行账户现金总量 B 的微分方程. B 是时间 t(以年为单位) 的函数.

9. 以 2.5 mg/h 的速度, 从静脉给一个病人注入吗啡. 经过新陈代谢, 吗啡以每小时 34.7% 的速率排出体外. 写出描述人体中吗啡余量 M(以 mg 为单位) 的微分方程. M 是时间 t(以 h 为单位) 的函数.

10. 某喷洒在地面的污染物以每天 8% 的速度消失. 此外, 清洁员每天清除 30 gal 该污染物. 写出一个描述该污染物被余留 t 天后, 其余留量 P(以 gal 为单位) 的微分方程.

11. 农药中的药物能进入食物链并在人体内积累. 一个人每天摄入 10 μg 药物. 该药物每天以 3% 的速度从体内连续排出. 写出描述残留在该人体内的药物量 A(以 μg 为单位) 的微分方程. A 是天数 t 的函数.

12. 某人每年向一账户存入 6000 美元, 该账户每年以年利率为 7% 连续获取利息.

(a) 写出描述该银行账户现金总量 B 的微分方程. B 是时间 t(以年为单位) 的函数.

(b) 使用微分方程计算 B=10 000 和 B=100 000 时 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 的值. 并解释你的答案.

13. 图 10-5 中的四幅图描述了四个鸡蛋温度 H(°C) 随时间 t(以分钟为单位) 的变化图. 找出下面与图 10-5 中 (I)~(III) 图形相匹配的描述. 并写出与图 (IV) 相似的描述, 该描述还应对图形的截矩项和渐近线做出解释.

(a) 把一个鸡蛋从冰箱 (温度恰好为 0°C) 中的取出并放入沸水中.

(b) (a) 中的鸡蛋从冰箱取出 20 分钟后再放入沸水中, 另取一鸡蛋进行相同的操作程序.

(c) 在 (a) 中的鸡蛋从冰箱取出的同时, 我们再从冰箱取出一鸡蛋并放在餐桌上.

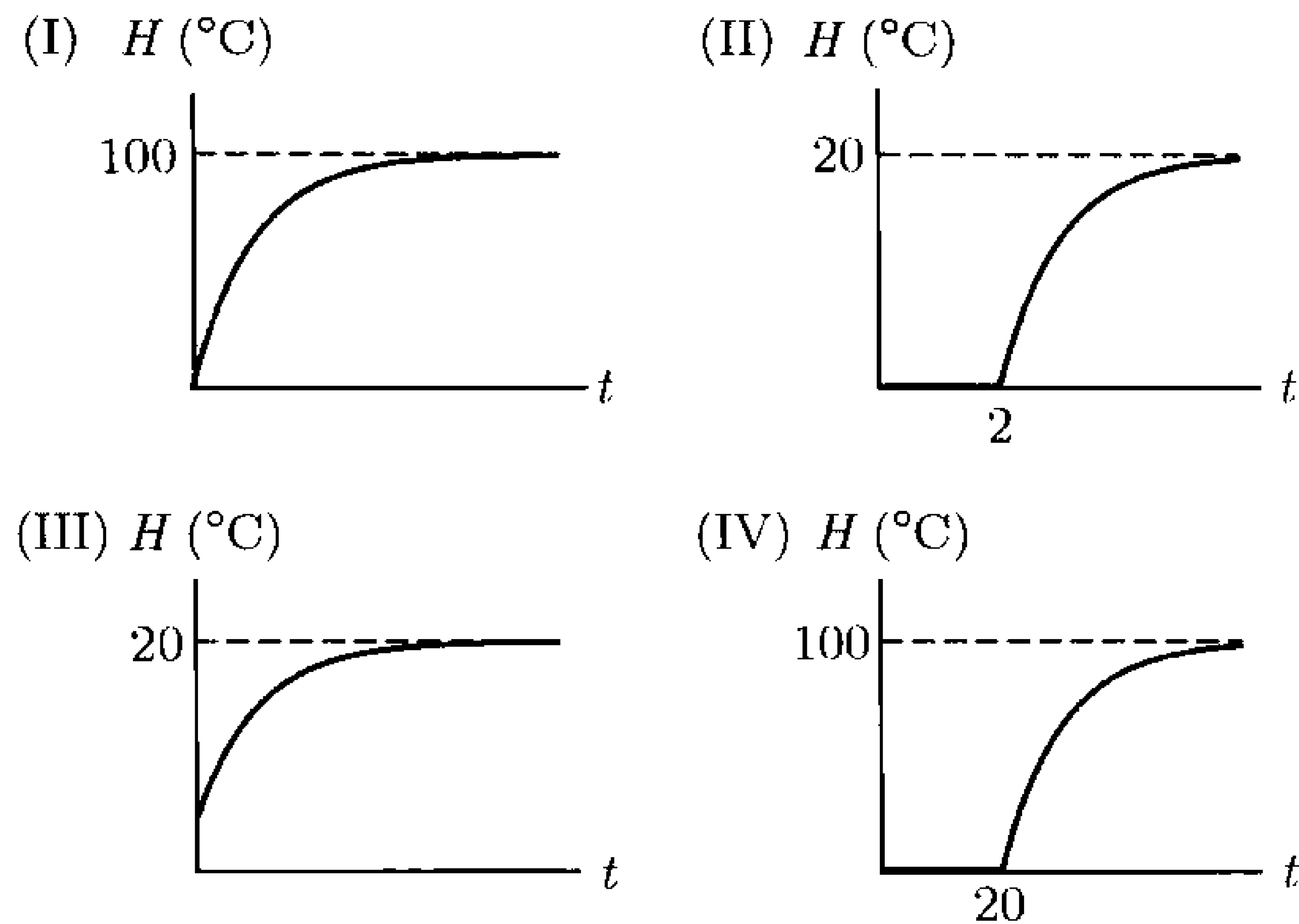


图　10-5

14. 一个量 W 满足微分方程 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = 5W - 20$.

　(a) 当 $W = 10, W = 2$ 时, W 是递增还是递减?

　(b) 当 W 取何值时, 其变化率等于零.

15. 一个量 y 满足微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -0.5y$, 在何条件下 y 是递增的? 又在何条件下 y 是递减的?

10.2　微分方程的解

"求解" 一个微分方程意味着什么呢? 一个微分方程是包含一个未知函数导数的方程. 未知的不是一个数而是一个函数. 一个微分方程的解是所有满足该微分方程的函数.

本节, 我们将看到如何使用数值方法求解一个微分方程, 也将看到如何验证一个函数是否是一个微分方程的解. 下节, 我们将看到图示一个解.

10.2.1　再看海产收获

我们再次看看 10.1 节讨论过的鱼群问题. 忽略其他问题, 仍设鱼群每年以 20% 的速度连续增加, 每年从该鱼群中捕获 10 百万条. 假设该鱼群的数目为 P 条 (以百万为单位) 那么我们有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0.20P - 10.$$

求该微分方程就是找到一个 P 关于 t 的函数满足该方程. 综合鱼群的初始数目信息, 我们可以使用该方程来预测任一未来时刻的鱼群数目.

数值求解微分方程

假设 t=0 时刻, 鱼群数目为 60 百万条. 我们可以把 P=60 代入方程计算导数 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$:

$$t=0\text{时},\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0.20P-10=0.20(60)-10=12-10=2$$

由于在 t=0 时, 鱼群数目每年以 2 百万条的速度增加, 因此, 在第一年末时, 鱼群总数将增加大约 2 百万条. 因而, 我们估计 t=1 时, $P=60+2=62$.
使用新的 P 值, 我们可以估计第二年的 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$:

$$t=1\text{时},\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0.20P-10=12.4-10=2.4.$$

在第二年期间, 鱼群总数将增加大约 2.4 百万条. 因而

我们估计 t=2 *时*, P=62+2.4=64.4.

我们使用这一 P 值估计第三年的变化率, 等等. 持续进行这一运算过程, 我们计算出了一系列 P 的近似值, 列在表 10-1. 该表给出了 P 在未来时刻近似数值.

表 10-1　鱼群数目的近似数值, 它是时间的函数

t(年)	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
P(百万)	60	62	64.4	67.28	70.74	74.89	$\cdots$

一个微分方程的求解公式

一个满足方程$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$=0.20$P$−10 的函数 $P=f(t)$ 被称为该方程的一个解. 表 10-1 给出了一个解的近似值. 有时 (但并不总是如此), 我们能找到解的一个公式. 在这一具体问题中, 有一公式为

$$P=50+Ce^{0.20t},$$

其中 C 为一任意常数. 把该函数分别代入方程的左右两边, 我们可以验证其为方程的解. 我们有

$$\text{左边}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0.20Ce^{0.20t}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=0.20P-10=0.20(50+Ce^{0.20t})-10\\&=10+0.20Ce^{0.20t}-10=0.20Ce^{0.20t}\end{aligned}$$

由于代入方程后, 方程两边有相同的表达式, 因此, 我们说 $P=50+Ce^{0.20t}$ 是方程的一个解. 任取 C, 方程成立, 因此, 该解是一带有参数 C 的函数族. 图 10-6 给出了该函数族在几个不同 C 值下的函数图形.

找出任意常数的值: 初始条件

要找到常数 C 的一个值 —— 换句话说, 就是从函数族中找到一个单一解, 我们需要额外的信息, 通常这一信息为初始鱼群数目. 这里, 我们有 $t=0$ 时, P=60. 代入 $P=50+Ce^{0.20t}$ 可得

$$60=50+Ce^{0.20\times(0)}=50+C,$$

因此, C=10.

函数 $P = 50 + 10e^{0.20t}$ 满足方程及其初始条件 $t = 0$ 时, $P = 60$.

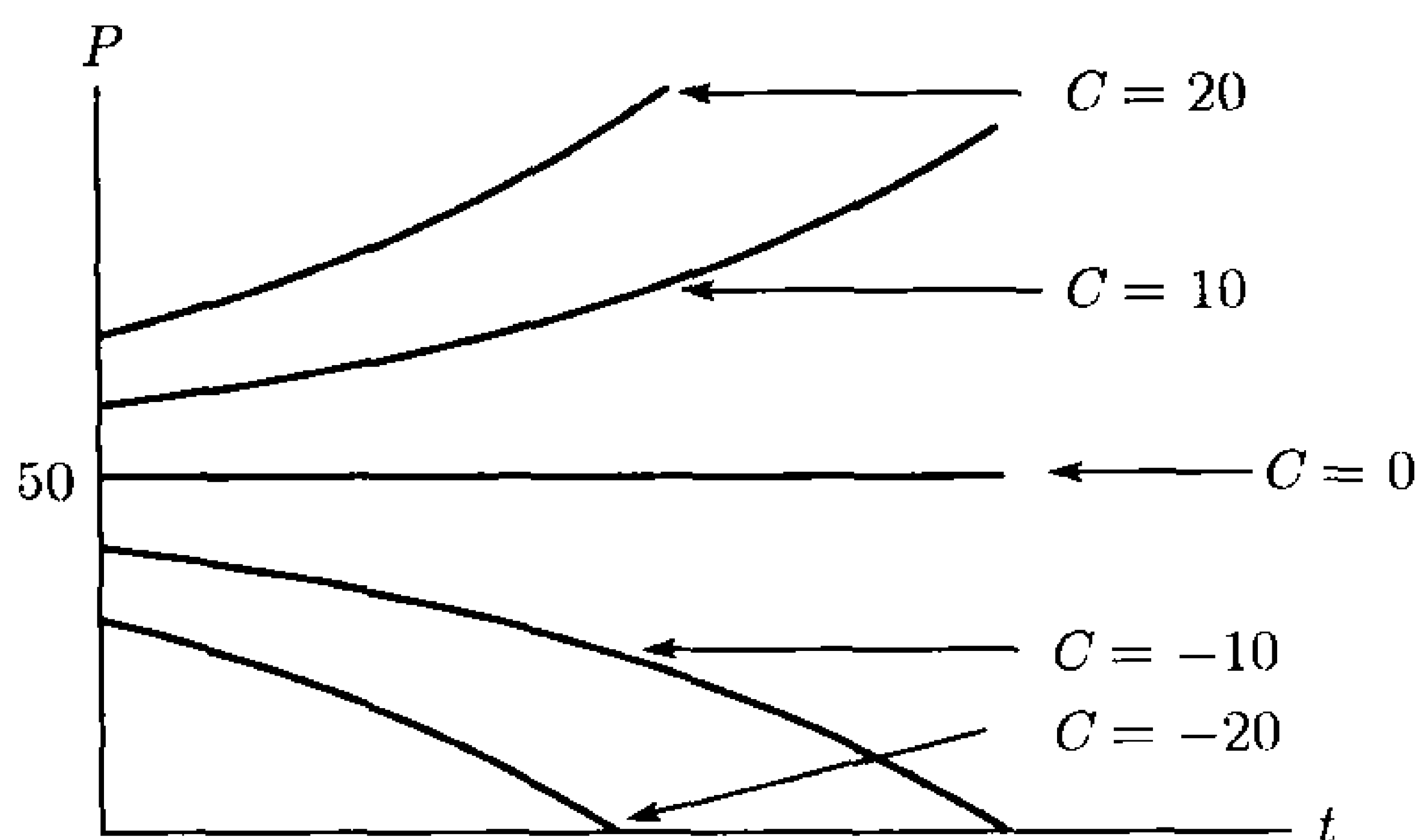


图 10-6 方程 dP/dt=$0.20P$−10 的解曲线: $P = 50 + Ce^{0.20t}$ 的成员

10.2.2 通解和特解

可以证明方程 dP/dt=$0.20P - 10$ 的任一解为函数族 $P = 50 + Ce^{0.20t}$ 取某一具体的 C 值. 我们说方程 dP/dt=$0.20P - 10$ 的通解为函数族 $P = 50 + Ce^{0.20t}$. 满足该方程和其初始条件 $t = 0$ 时, $P = 60$ 的解 $P = 50 + 10e^{0.20t}$ 被称为方程的一个特解. 微分方程和其初始条件一起被称为*初值问题*.

例 1 (a) 验证 $P = Ce^{2t}$ 是微分方程 $dP/dt = 2P$ 的解.

(b) 找到一个满足初始条件 $t = 0$ 时, $P = 100$ 的特解.

解 (a) 由于 $P = Ce^{2t}$(其中 C 为一常数), 我们可以得到方程两边的表达式分别为:

$$\text{左边} = \frac{dP}{dt} = 2Ce^{2t}$$

$$\text{右边} = 2P = 2Ce^{2t}.$$

由于两边表达式相等, 因此, $P = Ce^{2t}$ 为该微分方程的解.

(b) 把 $t = 0$ 时, $P = 100$ 代入 $P = Ce^{2t}$, 我们可以得出 C 的值:

$$100 = Ce^{2\times(0)}$$

$$100 = C.$$

因此, 该初值问题的特解为 $P = 100e^{2t}$. □

例 2 判断 $y = e^{-2x}$ 是否是微分方程 $y' - 2y = 0$ 的一个解.

解 注意到 $y' = dy/dx$. 对 $y = e^{-2x}$ 求导可得 $y' = -2e^{-2x}$. 代入方程, 我们有

$$y' - 2y = -2e^{-2x} - 2e^{-2x} = -4e^{-2x} \neq 0$$

因此, $y = e^{-2x}$ 不是该微分方程的解. □

例 3 (a) 如果 $y = Ce^{kt}$ 是微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -0.5y$ 的一个解, 请问 C 和 k 应该满足什么条件?

(b) 如果 $y = Ce^{kt}$ 还满足初始条件 $t = 0$ 时, $y = 10$, 请问 C 和 k 还应满足什么条件?

解 (a) 如果 $y = Ce^{kt}$, 那么 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = Cke^{kt}$. 代入方程 $dy/dt = -0.5y$ 可得

$$Cke^{kt} = -0.5Ce^{kt}.$$

假设 $C \neq 0$, 则 $Ce^{kt} \neq 0$, 我们有 $k = -0.5$. 因此, $y = Ce^{-0.5t}$ 是方程的一个解. 又如果 $C = 0$, 则 $Ce^{kt} = 0$ 也是方程的解. 因此 C 是不受约束的.

(b) 由于 $k = -0.5$, 我们有 $y = Ce^{-0.5t}$. 代入 t=0, y=10 可得 $10=Ce^0$, 即 $C = 10$.

因此, $y = 10e^{-0.5t}$ 是该带有初始条件的微分方程的解. □

习题

1. 验证 $y = t^4$ 是微分方程 $t\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 4y$ 的一个解.
2. 判断下面那一个选项为方程 $xy' - 2y = 0$ 的解.

   (a) $y = x^2$　　(b) $y = x^3$
3. (a) 判断下面哪些函数是微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3y$ 的解.

   (i) $y = Cx^2$　　(ii) $y = Cx^3$　　(iii) $y = x^3 + C$

   (b) 对于上面微分方程的任一解, 找出 x=0 , y=40 时 C 的值.
4. 如果鱼群的初始数目为 70 百万条, 借助微分方程 dP/dt=0.2P−10 来估计 1 年后, 2 年后和 3 年后的鱼群总数.
5. 假设增长率 (由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 表示) 在每一单位时间上为一常数. 给定 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0.5y$, 请填入下表中丢失的数值.

t	0	1	2	3	4
y	8				

6. 假设增长率 (由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 表示) 在每一单位时间上为一常数. 给定 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0.5t$, 请填入下表中丢失的数值.

t	0	1	2	3	4
y	8				

7. 对于某一数量 y, 假设有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -0.2y$. 也假设增长率 (由 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 表示) 在每一单位时间上为一常数. 请填入下表中丢失的 y 的值.

t	0	1	2	3	4
y	125				

8. 假设增长率 (由 dy/dt 表示) 在每一单位时间上为一常数. 给定 $dy/dt = 4 - y$, 请填入下表中丢失的数值.

t	0	1	2	3	4
y	8				

9. 证明对于任一常数 P_0, 函数 $P = P_0e^t$ 满足微分方程 $\dfrac{dP}{dt} = P$.

10. 假设 $Q = Ce^{kt}$ 满足微分方程 $\dfrac{dQ}{dt} = -0.03Q$, 由此, 我们可以得出什么关于 C 和 k 的值的信息呢?

11. 找到一个 k 使得 $y = x^2 + k$ 为微分方程 $2y - xy' = 10$ 的一个解.

12. 有没有 n 使得 $y = x^n$ 为微分方程 $13x(dy/dx) = y$ 的一个解? 如果有的话, n 取何值?

在下列问题 13~21 中, 利用导数给出一个曲线的斜率这一事实, 判断图 10-7 中图 (A)-(F) 哪一个代表了微分方程的一个可能解.

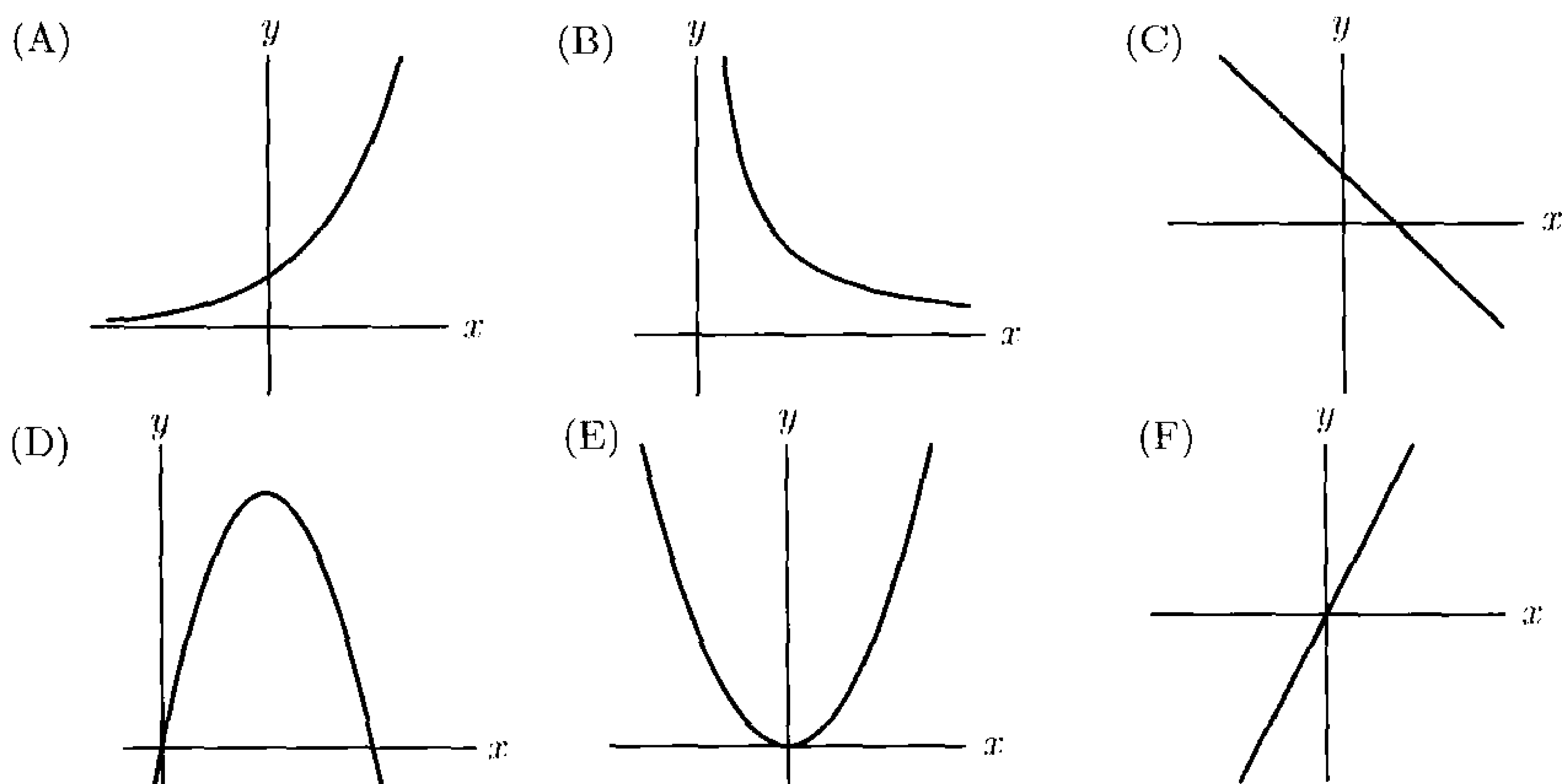


图　10-7

13. $\dfrac{dy}{dx} = -1$　　**14.** $\dfrac{dy}{dx} = 0.1$　　**15.** $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$

16. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$　　**17.** $\dfrac{dy}{dx} = 2$　　**18.** $\dfrac{dy}{dx} = y$

19. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$　　**20.** $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x$　　**21.** $\dfrac{dy}{dx} = 2y$

22. 找到与微分方程相匹配的解 (注意: 一个方程可能有多个解, 也可能无解).

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$　　(I) $y = x^3$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 3\dfrac{y}{x}$　　(II) $y = 3x$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = 3x$　　(III) $y = e^{3x}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = y$　　(IV) $y = 3e^x$

(e) $\dfrac{dy}{dx} = 3y$ (V) $y = x$

23. 找出哪个函数是微分方程的解 (注意：一个函数可能是多个方程的解，也可能不是任何方程的解；而一个方程也可能有多个解，也可能无解).

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -2y$ (I) $y = 2\sin x$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = 2y$ (II) $y = \sin 2x$

(c) $\dfrac{dy}{dx} = 4y$ (III) $y = e^{2x}$

(d) $\dfrac{dy}{dx} = -4y$ (IV) $y = e^{-2x}$

10.3 斜 率 场

本节, 我们将看到如何图示一个微分方程和它的解. 我先来看看方程

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

该方程的任何一个解都具有如下特征：在平面上的任何一点, 其斜率等于它的纵坐标值 y(这是由方程 $dy/dx = y$ 得知的). 这意味着如果方程的解通过 $(0,1)$ 点, 那么它的斜率就是 1；如果通过一点其纵坐标为 $y = 4$, 那么它的斜率就是 4. 一个通过 $(0,2)$ 点的解, 其斜率为 2；在点 $y = 8$ 处, 解的斜率为 8. (参见图 10-8)

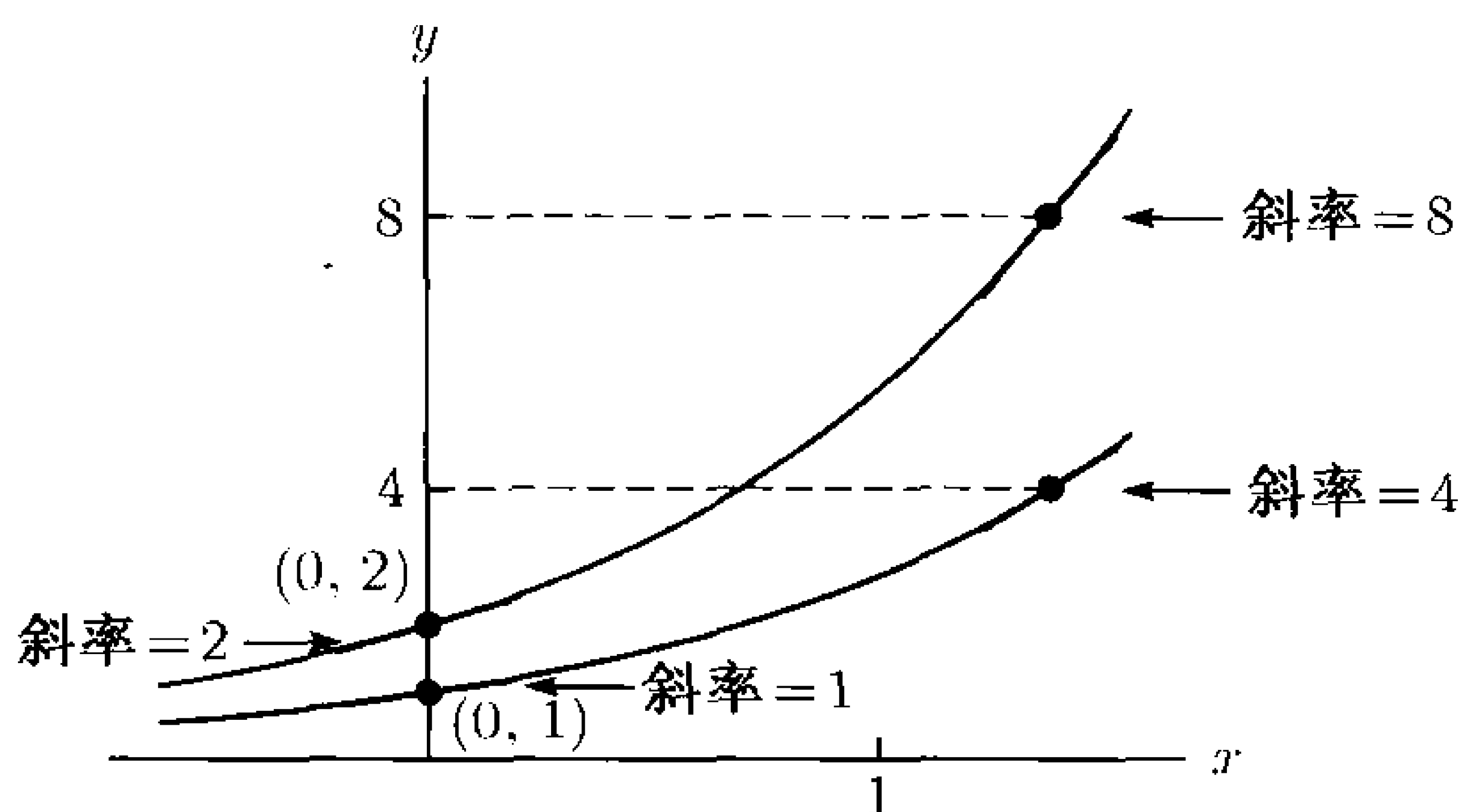


图 10-8 $\dfrac{dy}{dx} = y$ 的解

在图 10-9 中, 标记点处所画的小线段表示解曲线在该点的斜率. 由于 $dy/dx = y$, 所以 $(1,2)$ 点处的斜率为 2(纵坐标 y 的值), 因此, 我们再该点处画了一个斜率为 2 的小线段. 我们也在 $(0,-1)$ 点处画了一个斜率为 -1 的小线段, 等等. 如果我们画出许多这样的小线段, 我们就画出了方程 $dy/dx = y$ 的斜率场 (slope field), 我们在图 10-10 中标示了该斜率场. 在 x 轴的上方, 斜率为正 (因为此处 y 是正的), 因此, 随着我们向上移动 (即随着 y 增加), 斜率不断增加. 在 x 轴的下方, 斜率为负, 并且, 随着我们向下移动, 斜率不断变大. 注意到在任一水平线上 (此时, y 为常数),

斜率为常数. 在斜率场中, 你可以看到解曲线的踪影. 从平面中的任一点出发, 移动你的路径使其与斜率场中的斜率线相切; 你就找到了一条解曲线. 试着在图 10-10 中用铅笔标出一些解曲线, 一些标在 x 轴的上方, 一些标在 x 轴下方. 你所画的解曲线应该有与指数函数相同的形态. 把 $y = Ce^x$ 代入上述方程, 你能验证指数函数族 $y = Ce^x$ 中的每条曲线均是方程的解.

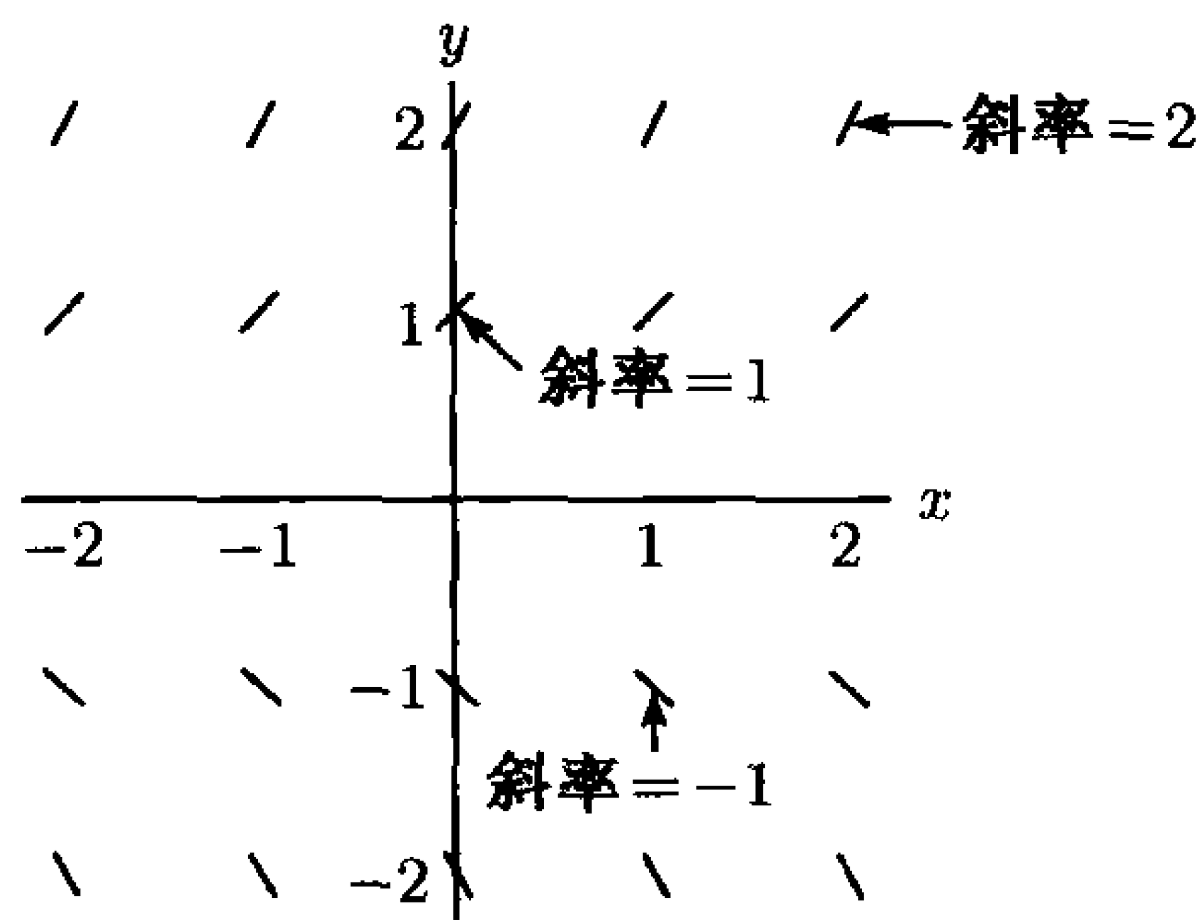


图 10-9 如果 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$, 图示 y 的斜率

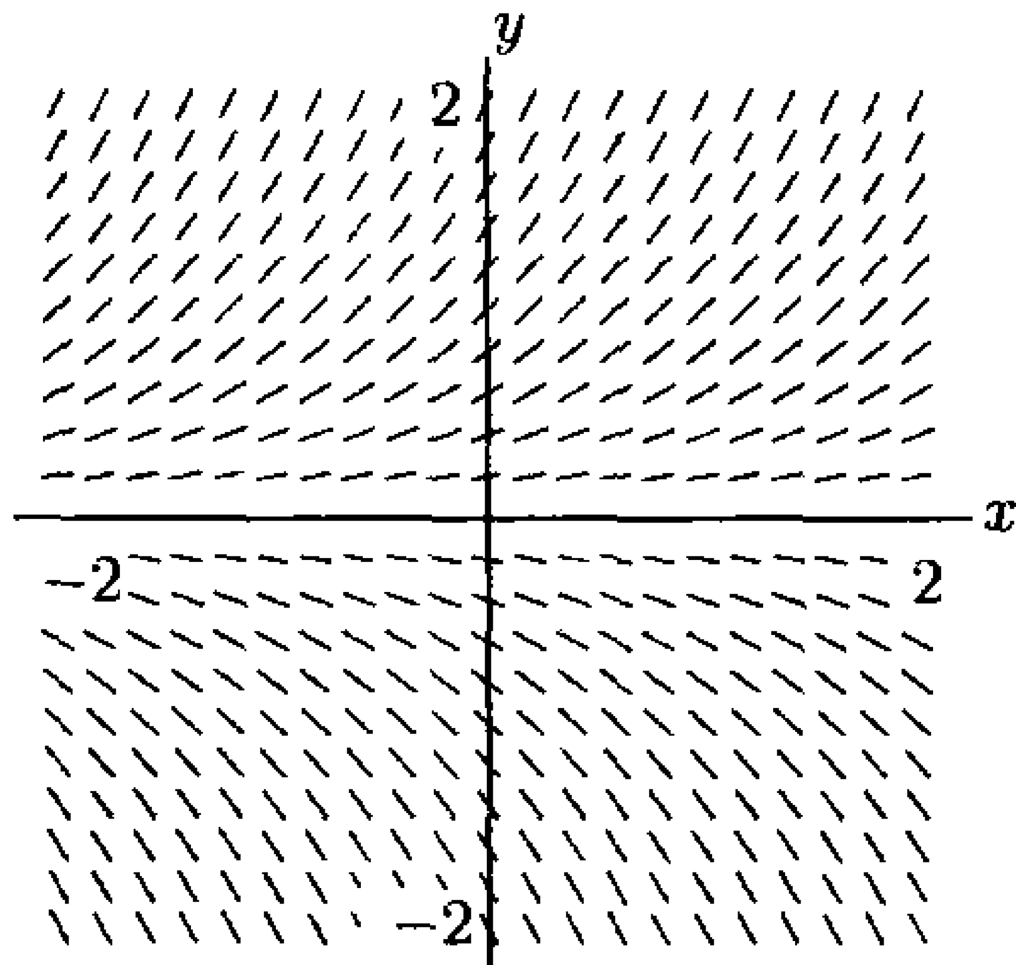


图 10-10 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$ 的斜率场

在许多问题中, 我们希望从斜率场中得到解曲线. 由于斜率场是一组路标集, 它给你指明了每一点应该走的方向. 想象我们从平面上的一点出发: 看一下斜率场, 然后朝它所指示的方向移动. 移动一小步后, 再次看一下斜率场, 继续朝它所指示的方向移动, 在需要时改变你的方向. 按照斜率场所指示的方向, 持续移动直到穿过整个平面, 你就找到了一条解曲线. 注意解曲线并不必然是某一个函数的图像, 并且即便是, 我们也未必可以写出该函数表达式. 从几何上讲, 求解一个微分方程就是找到它的一族解曲线.

例 1 图 10-11 给出了方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x$ 的斜率场

(a) 关于该斜率场, 你注意到了什么?

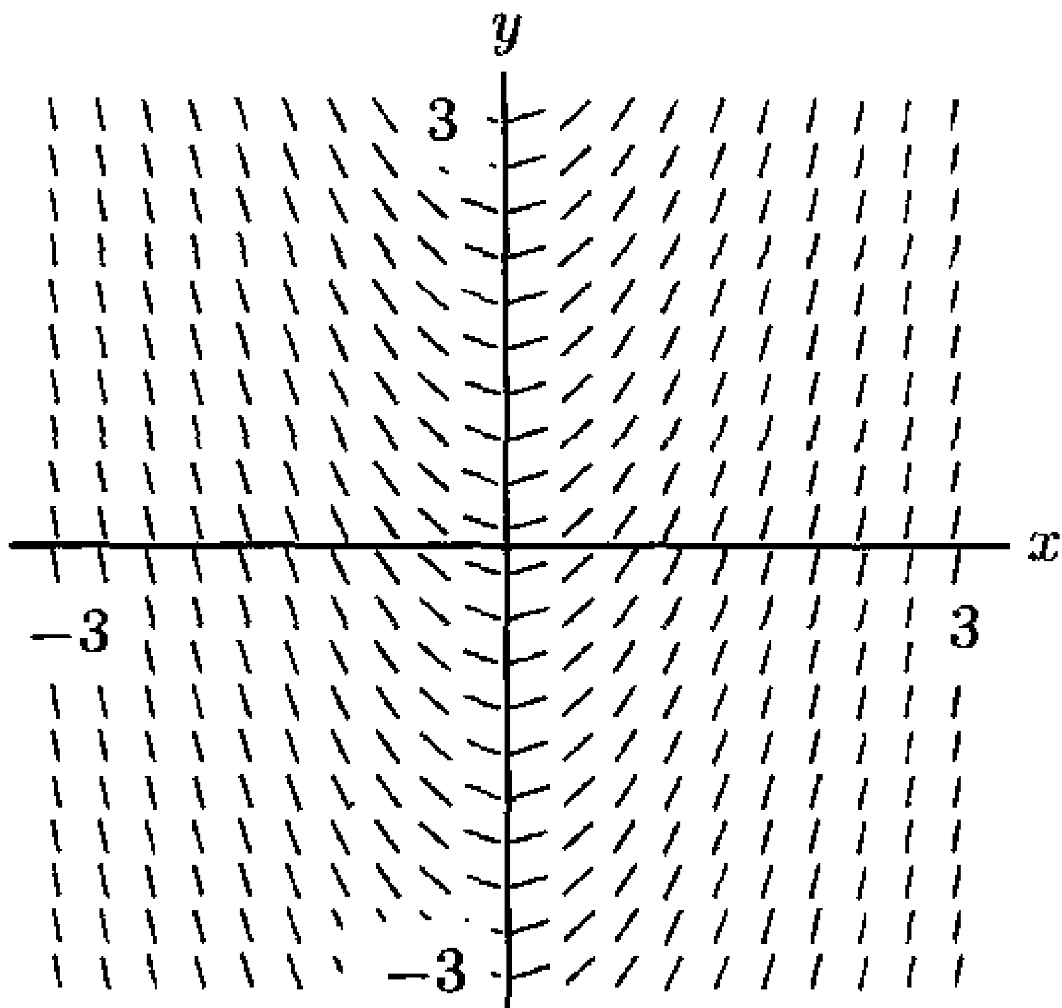


图 10-11 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 的斜率场

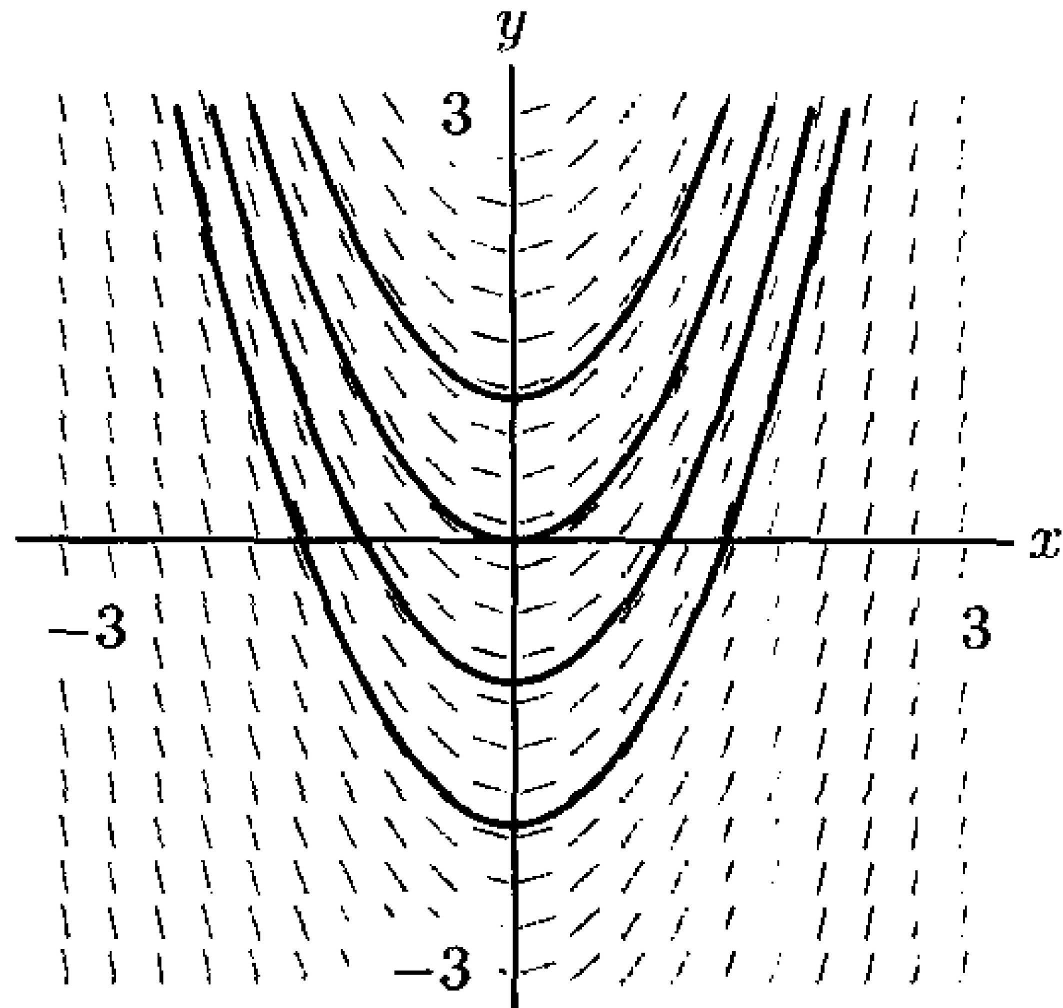


图 10-12 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ 的一些解

(b) 比较图 10-12 中的解曲线和该方程的解 $y = x^2 + C$

解 (a) 在图 10-11 中, 我们注意到任意一条垂直线 (此时, x 为常数) 上的斜率是相同. 这是由于该微分方程中 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 仅仅依赖于 x. (在前面的例子 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y$ 中, 斜率仅仅依赖于 y).

(b) 图 10-12 中的解曲线族看上去像一族抛物线. 通过代入, 我们容易验证 $y = x^2 + C$ 是方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 2x$ 的解. 因此, 抛物线族 $y = x^2 + C$ 是解曲线族. □

例 2 借助斜率场, 猜测微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -x/y$ 的解曲线.

解 图 10-13 给出了该方程的斜率场. 注意到在 y 轴上, x 为 0, 斜率也为 0. 而在 x 轴上, y 为 0, 小线段是垂直的, 其斜率不存在. 在原点处, 其斜率也是不存在的, 也没有小线段.

该方程的解曲线看上去像什么呢? 斜率场告诉我们: 其解曲线是一原点为圆心的一族圆. 我们猜测该方程的通解为 $x^2 + y^2 = r^2$.

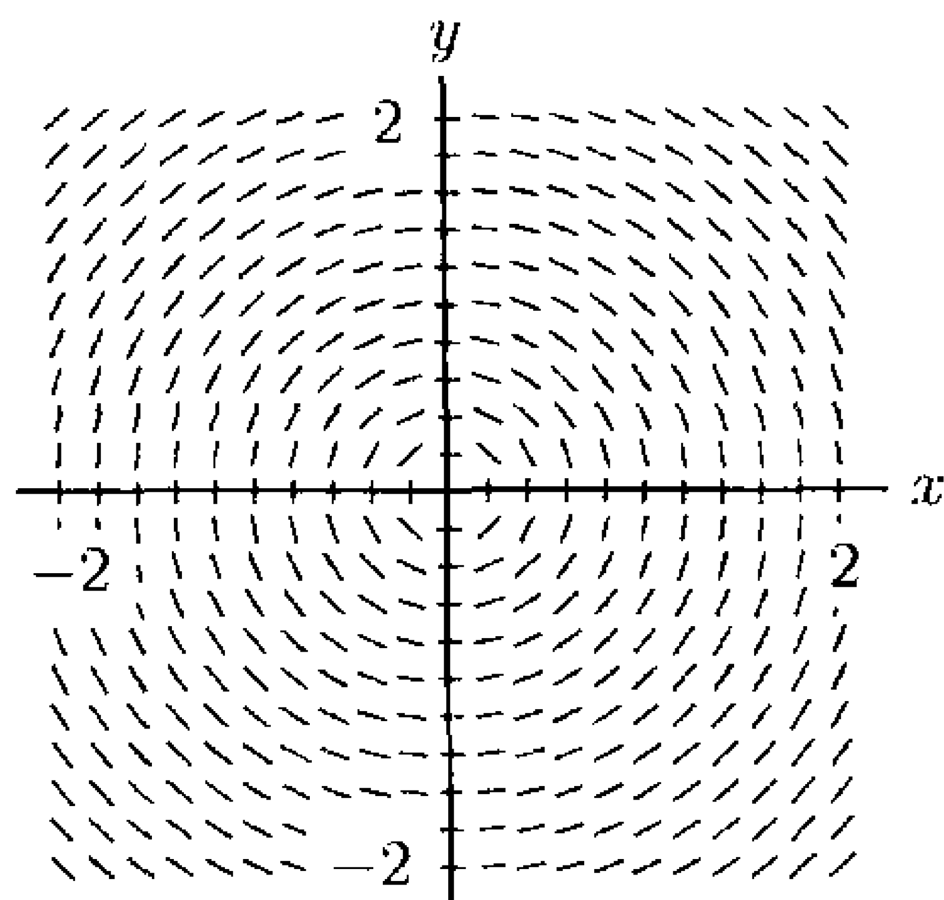


图 10-13 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -x/y$ 的斜率场

本章的相关理论部分给出了这一解的推导过程. □

上例表明: 有时, 微分方程的解被表示为*隐函数*. 隐函数是没有把 y“解出” 的函数; 换句话说, 因变量没有表示为 x 的显式函数.

例 3 图 10-14 给出了方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 2 - y$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = t/y$ 的斜率场.

(a) 两个图形分别对应于哪个方程?

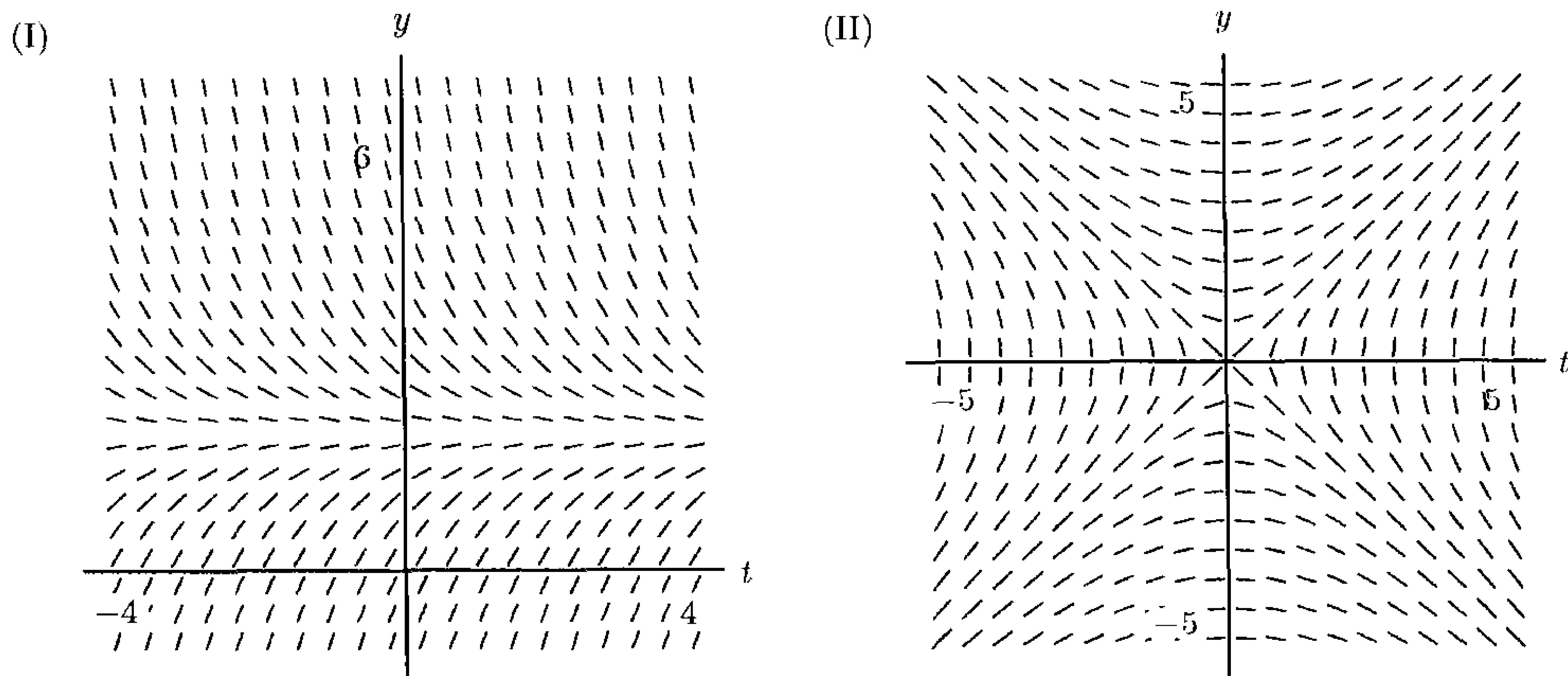


图 10-14 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 2 - y$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = t/y$ 的斜率场: 哪一个对应于哪一个呢

(b) 在两个斜率场上分别描出如下初始条件的解曲线:

(i) $t=0, y=1$　　(ii) $t=0, y=3$　　(iii) $t=1, y=0$

(c) 对于每一个解曲线, 你可以说出一些 y 的长期性质吗? 具体讲, 随着 $t\to\infty$, y 值将如何变化?

解　(a) 考虑两个微分方程在不同点处的斜率. 具体的, 我们看一下图 10-14 中直线 $y=2$. 沿着这条直线, 方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=2-y$, 而 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=t/2$ 的斜率为 $t/2$. 由于斜率场 (I) 在 $y=2$ 时, 看上去是水平的, 因此, 斜率场 (I) 对应于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=2-y$, 而斜率场 (II) 对应于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=t/y$.

(b) 初始条件 (i) 和 (ii) 给出了 t=0 时 y 的值, 也就是 y 的截距. 为了画出满足条件 (i) 的解曲线, 我们画出截距为 1 的解曲线. 对于条件 (ii), 我们画出截距为 3 的解曲线. 对于条件 (iii), 其解通过 (1,0) 点, 因此, 我们画出通过该点的解曲线. 参见图 10-15 和图 10-16.

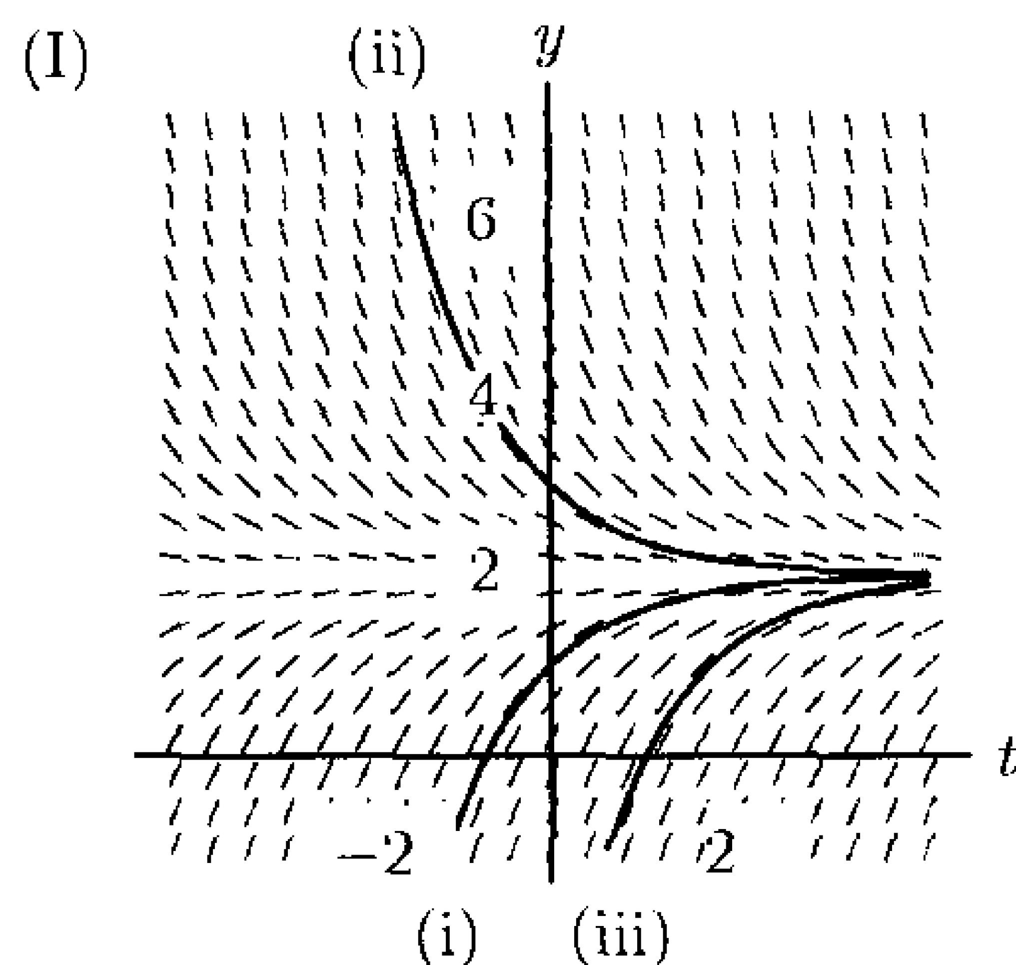


图 10-15　方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=2-y$ 的解曲线

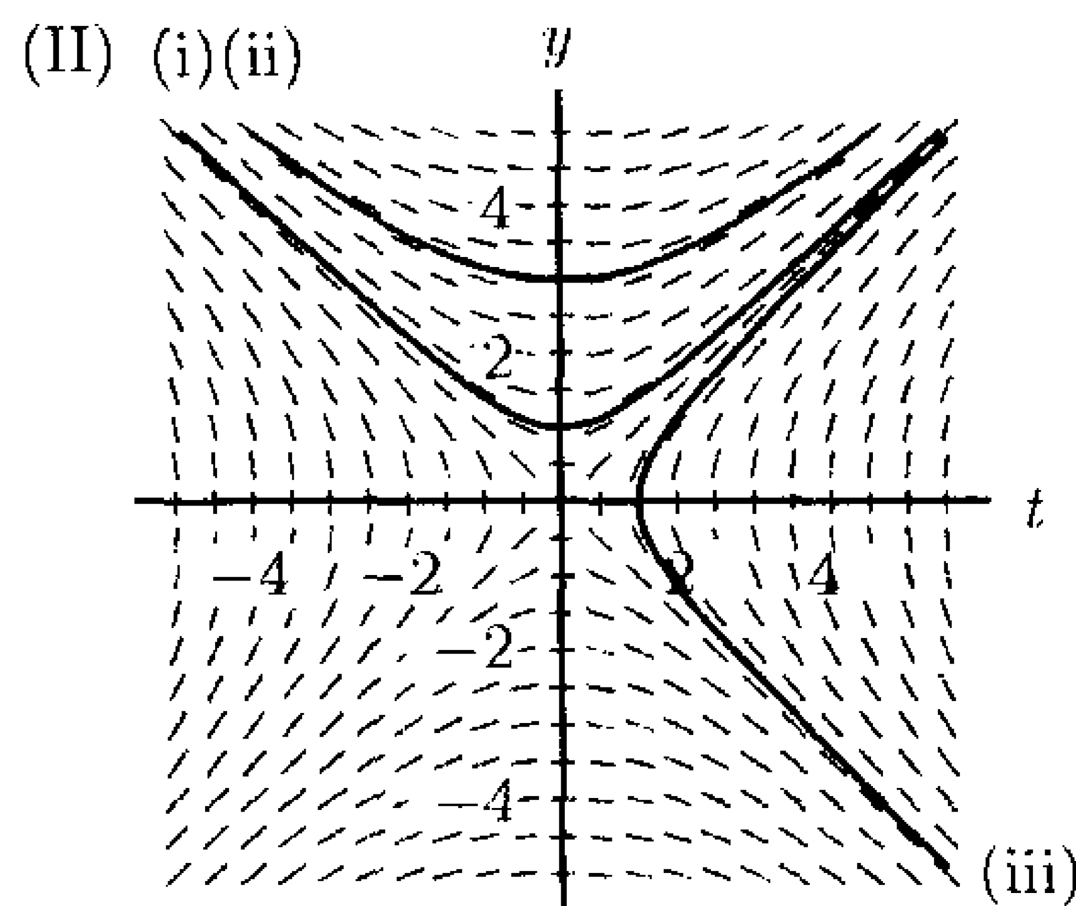


图 10-16　方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=t/y$ 的解曲线

(c) 对于方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=2-y$, 其所有的解曲线都以 $y=2$ 作为其水平渐近线. 因此, 当 $t\to\infty$ 时, $y\to 2$. 而对于带有初始条件 $(0,1)$ 和 $(0,3)$ 的方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=t/y$, 我们可以看到当 $t\to\infty$ 时, $y\to\infty$. 该图形的渐近线似乎是对角线. 事实上, 其渐近线为 $y=t$ 和 $y=-t$. 因此, 当 $t\to\infty$ 时, $y\to\pm\infty$. □

解的存在性与唯一性

由于微分方程是用来模型化许多实际情形的, 解是否存在和是否唯一的问题就有着重要的实践意义. 如果我们知道一个卫星运行速度如何变化, 我们能得知它在所有未来时间的速度吗? 如果我们知道一个城市的初始人口数, 也知道其人口数如何变化, 那么我们能预测其未来的人口数吗? 常识告诉我们能: 如果我们知道一些量的初始值, 也准确知道它如何变化, 那么我们应该能计算这一量的未来值.

使用微分方程的语言, 我们说表示一个实际情形的初值问题 (也就是说一个微分方程和一个初始条件) 几乎总有唯一解. 通过观察斜率场可以看到这一结果.

想象我们从代表初始条件的一点出发, 通过这一点, 通常有一条指示解曲线走势方向的小线段. 按照斜率场中线段指示的方向, 我们就可以找到解曲线. 图 10-17 给出了几个带有不同起点的例子. 通常, 在每一点有一条线段指明了解曲线走势的唯一方向. 因而, 如果我们给定了初始点, 解曲线将存在且是**唯一的**.

可以证明, 随着我们从平面上的一点向一点移动, 如果斜率场是连续的, 那么, 我们可以确信在每一点处, 解曲线是存在的. 通过这一较强的条件, 我们确保了每点有且仅有一条解曲线.

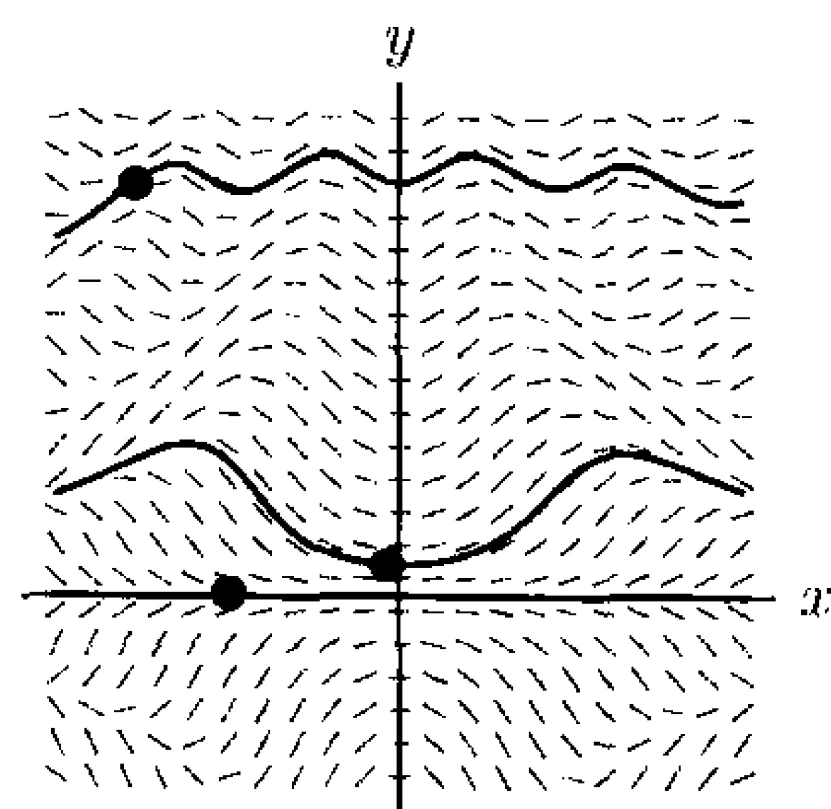


图 10-17 对于这一斜率场, 平面上的每一点处有且仅有一条解曲线通过

习题

1. 图 10-18 给出了两个斜率场的粗略图. 对于每一个斜率场, 请给出三个解曲线.

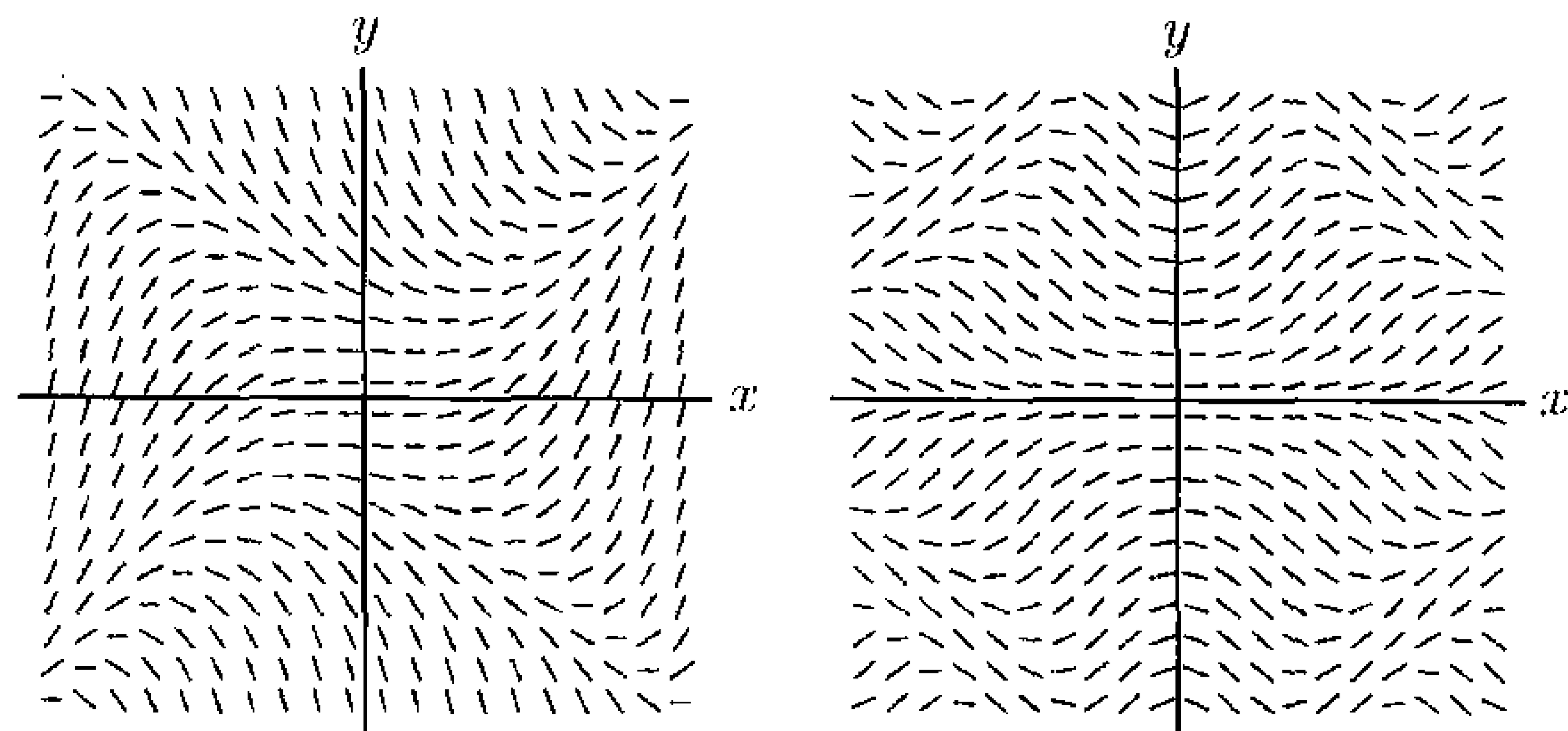


图 10-18

2. 图 10-19 给出了方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y - 10$ 的斜率场.

(a) 对于下列每个初始条件, 画出其解曲线:

(i) $x = 0, y = 8$　　(ii) $x = 0, y = 12$　　(iii) $x = 0, y = 10$

(b) 由于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y - 10$, 因此, 当 $y = 10$, 我们有 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 10 - 10 = 0$. 请解释为什么这一结果与上述带有初始条件 (iii) 的解相匹配.

3. **(a)** 考虑方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = xy$ 的斜率场. 点 $(2, 1)$ 处的线段的斜率是多少? 点 $(0, 2)$, $(-1, 1)$ 及 $(2, -2)$ 处斜率又为多少呢?

(b) 使用 (a) 计算出的斜率, 画出斜率场中的部分小线段.

4. **(a)** 在图 10-20 中所标示的点处画出方程 $y' = x - y$ 斜率场.

(b) 验证 $y = x - 1$ 是该微分方程通过点 $(1, 0)$ 的解.

5. 下面哪一个方程与图 10-21 中的斜率场吻合的最好的? 请给出解释.

(I) $y' = 1 + y$　　(II) $y' = 2 - y$　　(III) $y' = (1 + y)(2 - y)$

(IV) $y' = 1 + x$　　(V) $y' = xy$

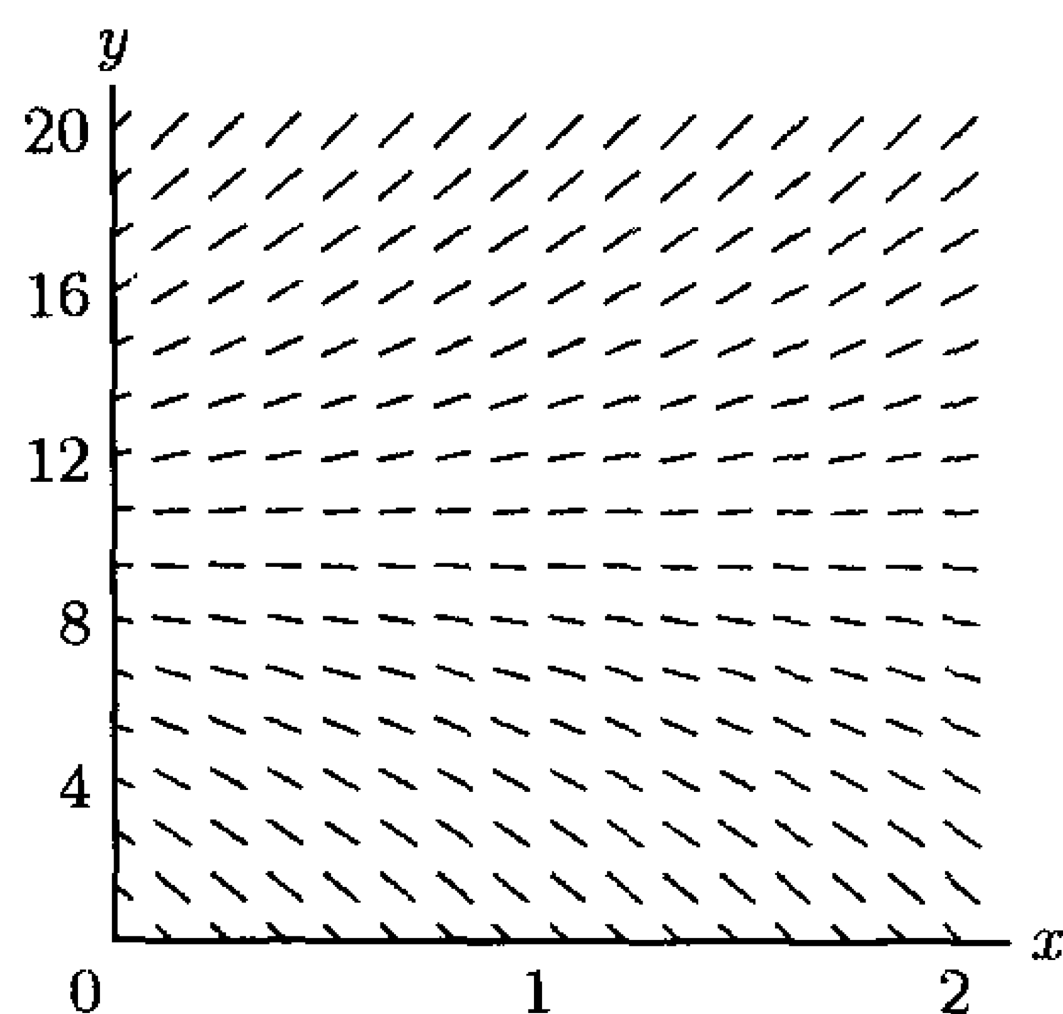


图 10-19 方程 $dy/dx = y - 10$ 的斜率场

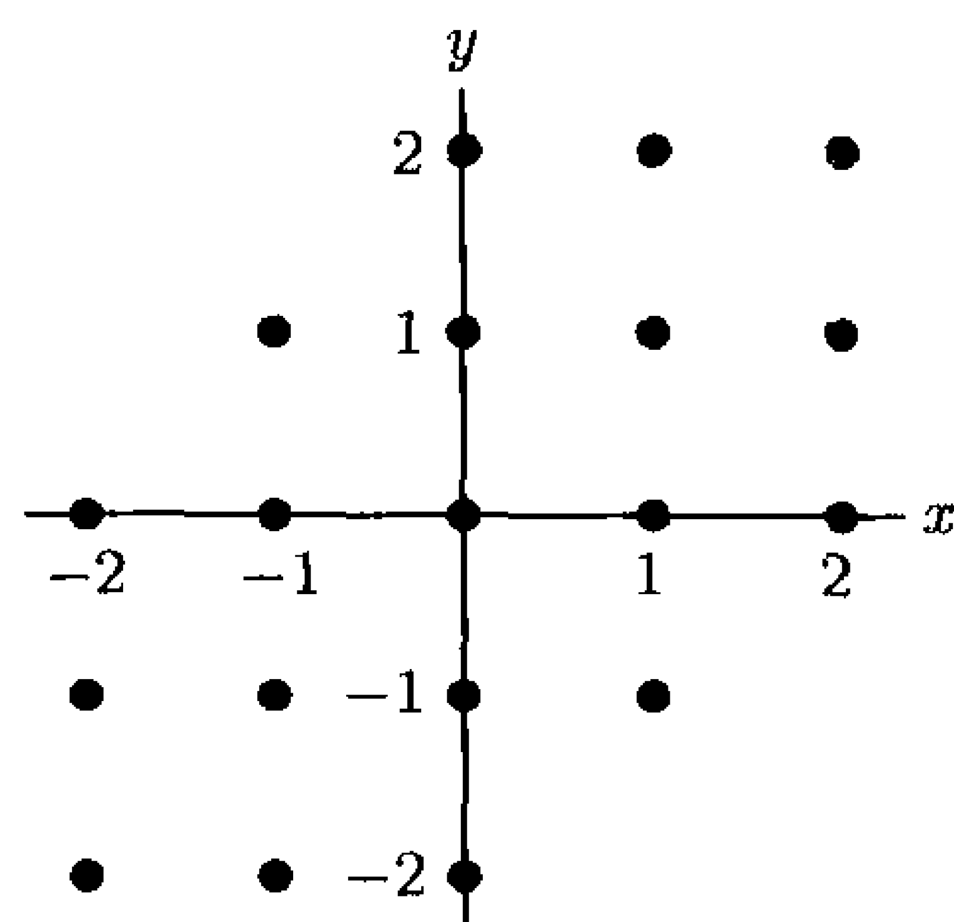


图 10-20

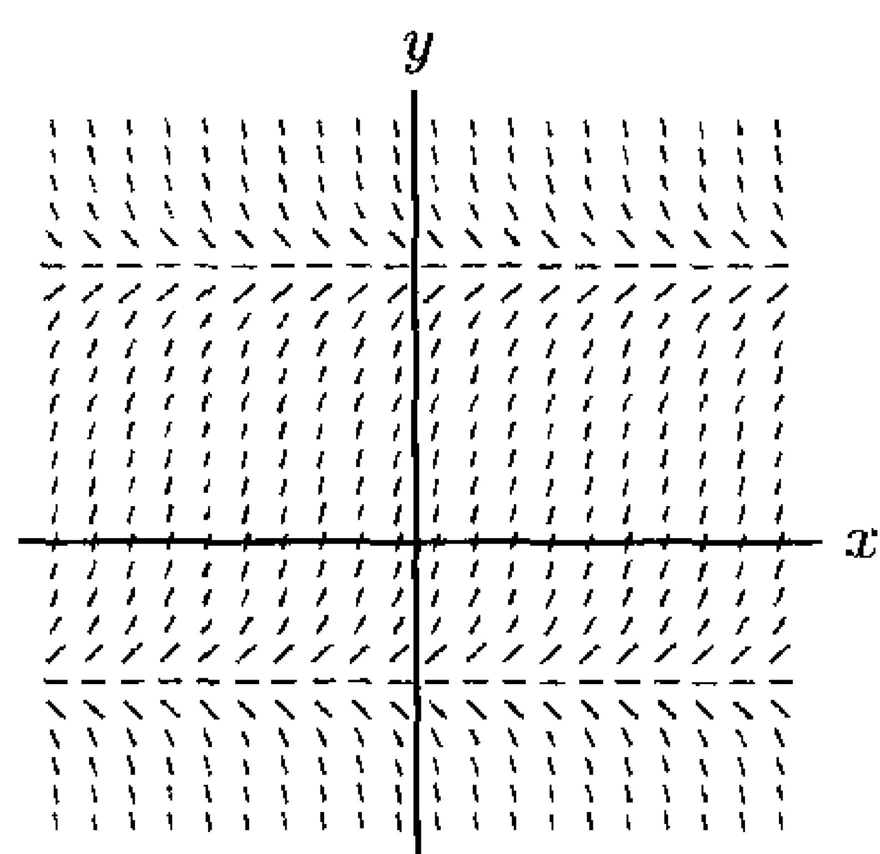


图 10-21

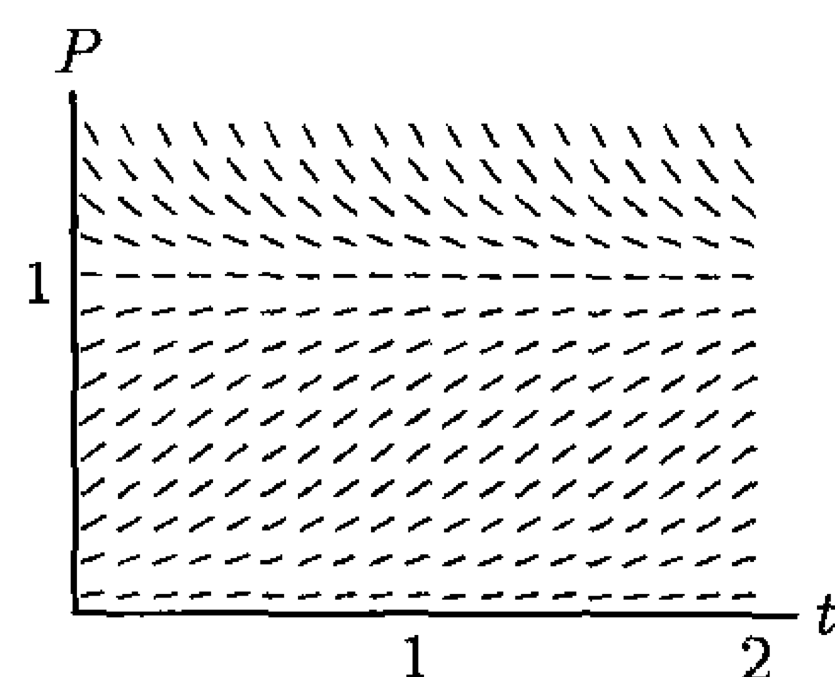


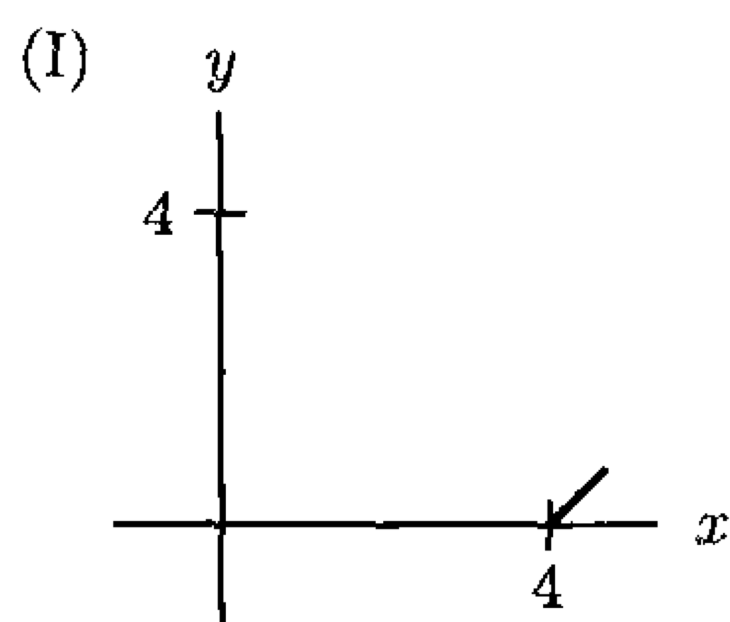
图 10-22

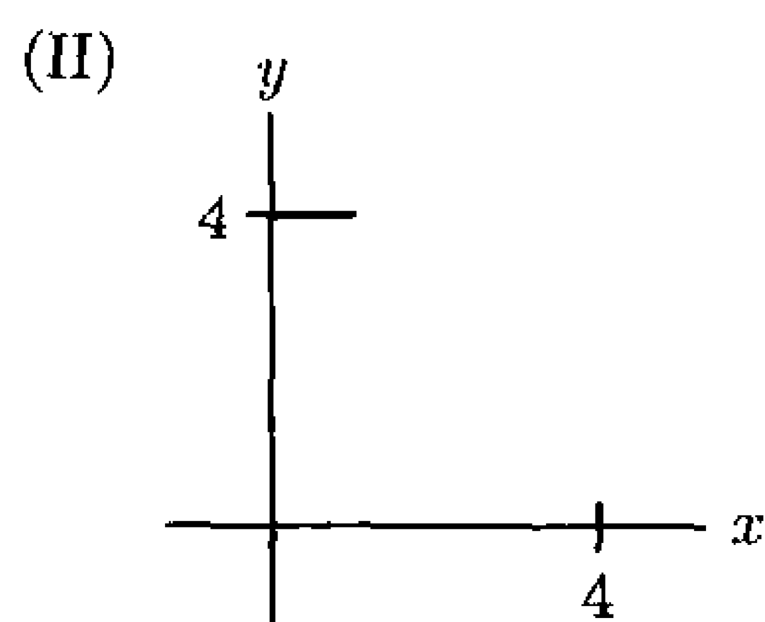
6. 下面哪一个方程与图 10-22 中的斜率场吻合的最好的? 请给出解释.

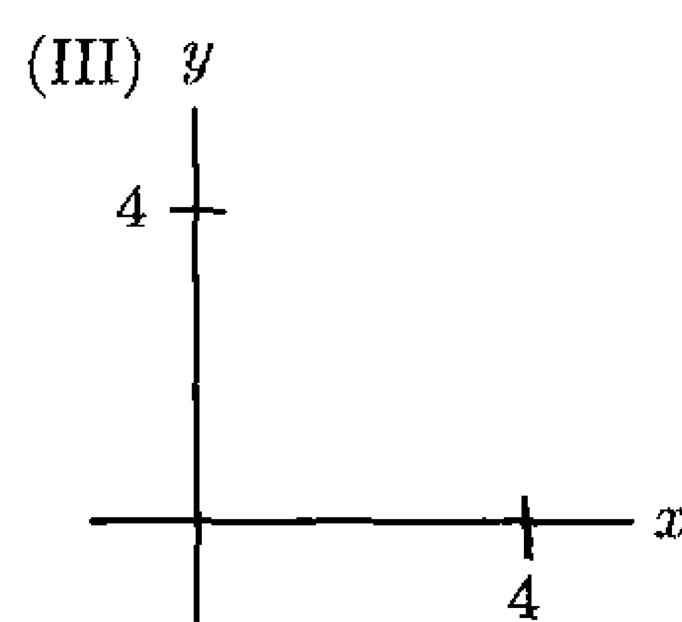
(I) $dP/dt = P - 1$ (II) $dP/dt = P(P - 1)$

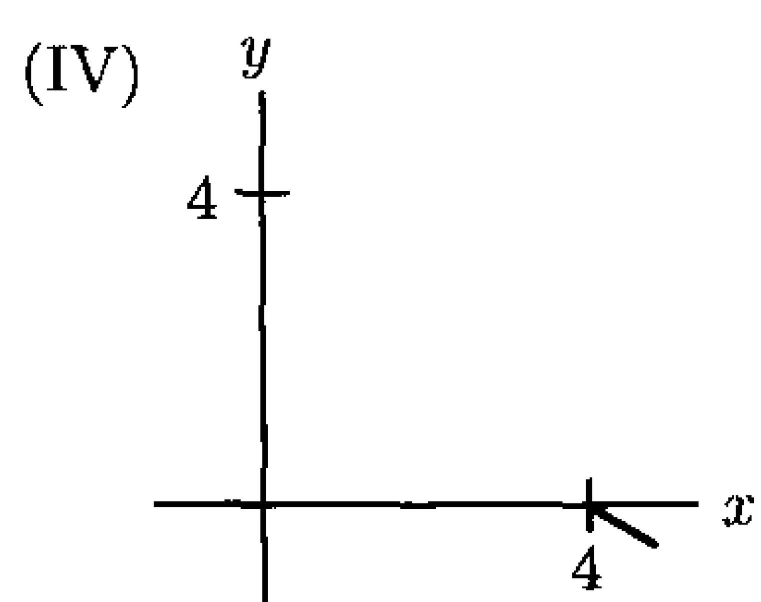
(III) $dP/dt = 3P(P - 1)$ (IV) $dP/dt = 1/3P(P - 1)$

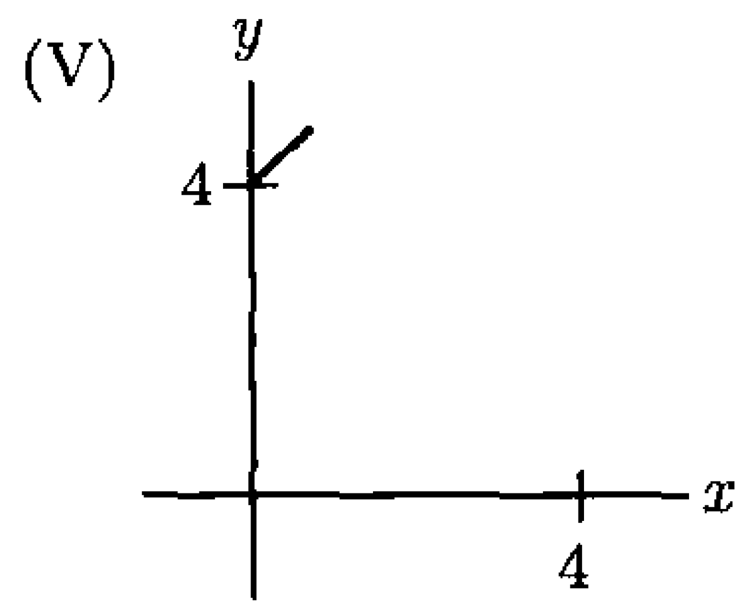
7. 找出微分方程 (a)–(f) 中与图形 (I)–(VI) 中每一斜率场片断相匹配的一个或多个方程.

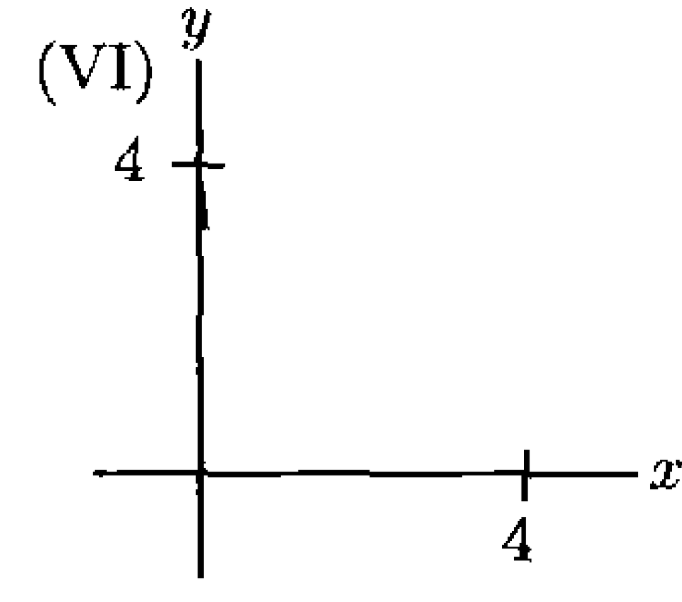












(a) $y' = \mathrm{e}^{-x^2}$　　(b) $y' = \cos y$　　(c) $y' = \cos(4-y)$

(d) $y' = y(4-y)$　　(e) $y' = y(3-y)$　　(f) $y' = x(3-x)$

8. 找出图 10-23 中的斜率场相匹配微分方程.

(a) $y' = -y$　　(b) $y' = y$　　(c) $y' = x$

(d) $y' = 1/y$　　(e) $y' = y^2$

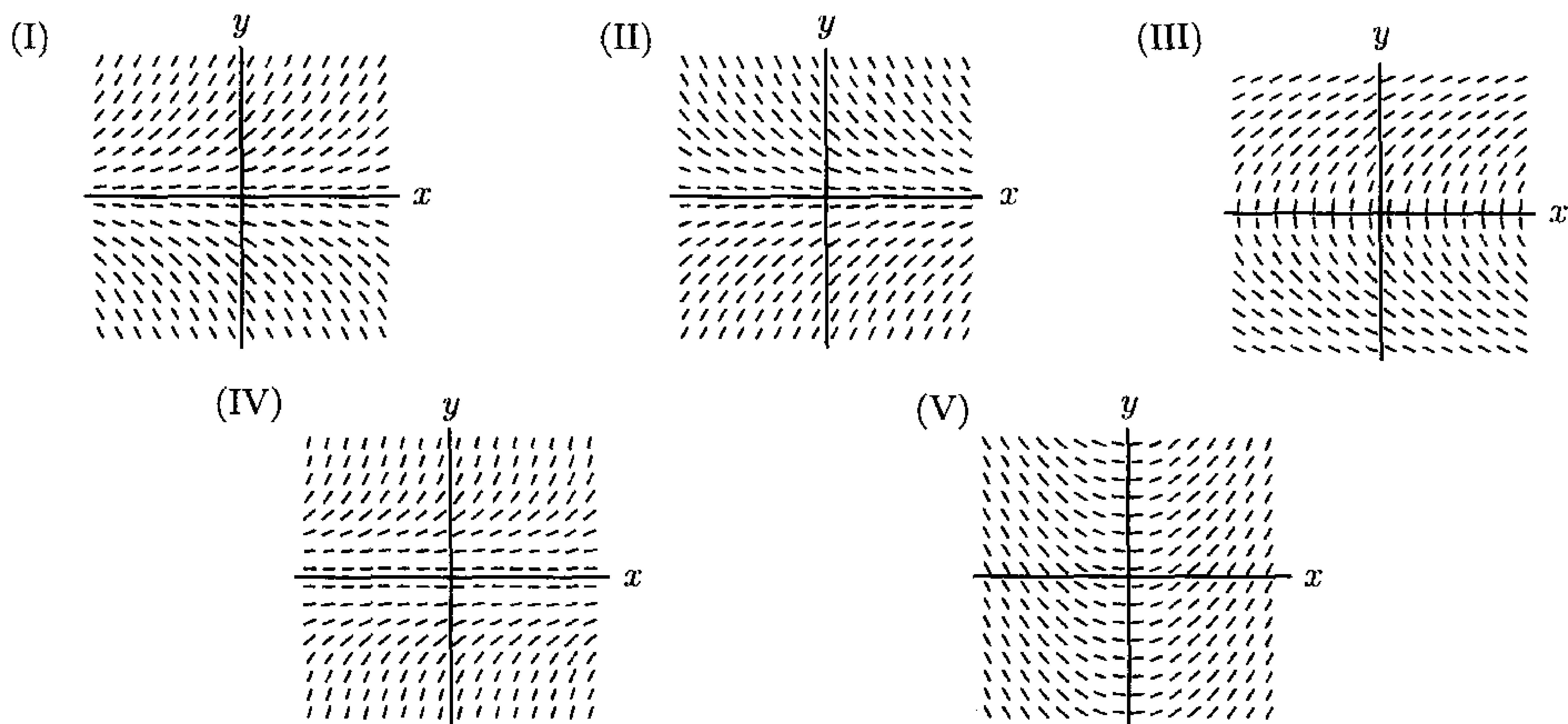


图 10-23

9. 找出图 10-24 中的斜率场相匹配微分方程.

(a) $y' = 1 + y^2$　　(b) $y' = x$　　(c) $y' = \sin x$

(d) $y' = y$　　(e) $y' = x - y$　　(f) $y' = 4 - y$

对于问题 10~15, 考虑问题 9 中的每一个斜率场. 用一两句话定性地描述一下 y 的长期形态. 例如: 随着 x 的增加, 是否有 $y \to \infty$ 或者 y 是否保持有限? 对于不同的起点, 你可以得出不同的极限形态. 在每一情形中, 要求讨论解曲线的极限形态如何依赖于起点.

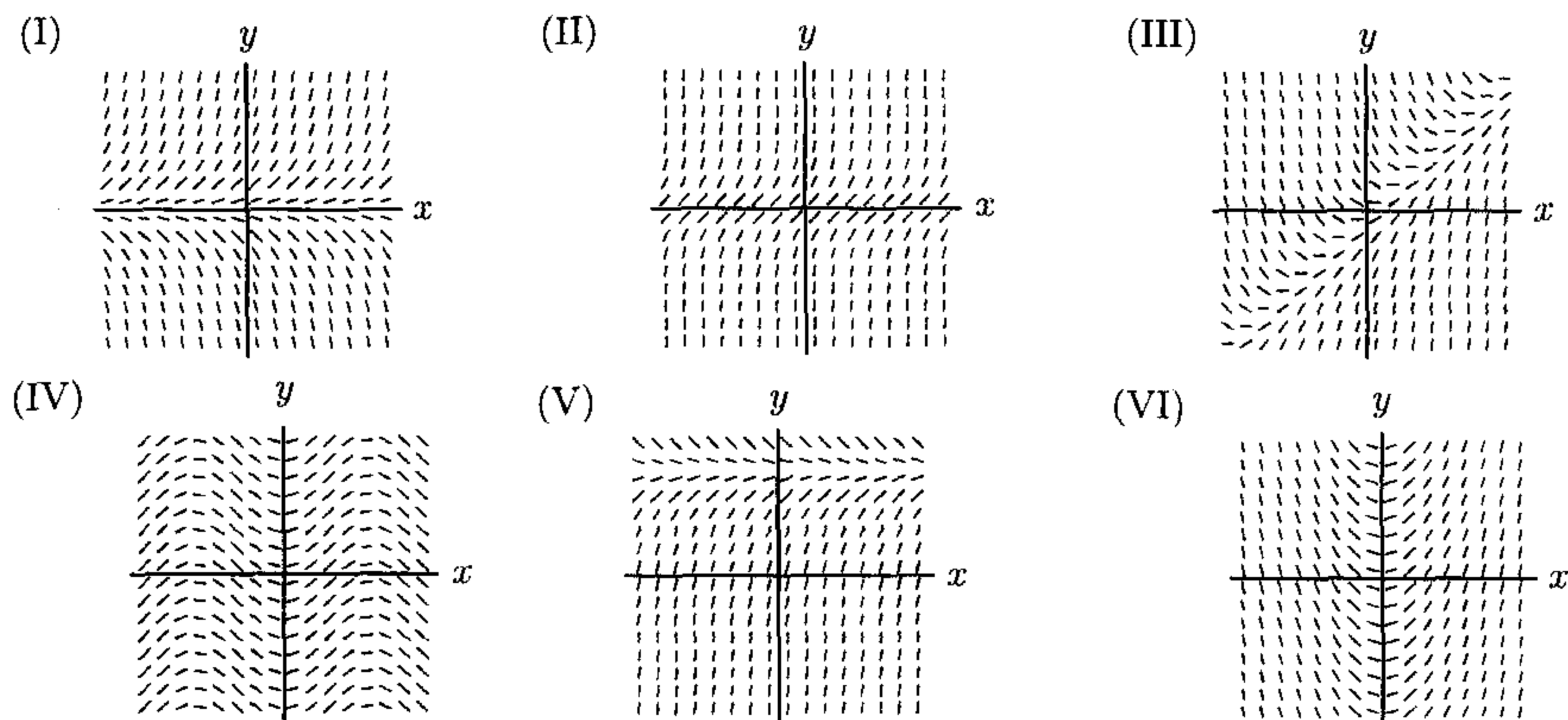


图 10-24　每个斜率场被限制在如下区域: $-5 \leqslant x \leqslant 5$, $-5 \leqslant y \leqslant 5$

10. 斜率场 (I)　　**11.** 斜率场 (II)　　**12.** 斜率场 (III)

13. 斜率场 (IV)　　**14.** 斜率场 (V)　　**15.** 斜率场 (VI)

10.4 指数增长和下降

微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y$ 的一个解为何呢?

它的一个解就是一个导数为自身的函数. 函数 $y=\mathrm{e}^t$ 就拥有这一特征, 因此, $y=\mathrm{e}^t$ 是上述方程的一个解. 事实上, e^t 任意倍数也满足这一特征. 函数族 $y=C\mathrm{e}^t$ 是这一微分方程的通解. 如果 k 为一常数, 那么微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 有相似的结论. 这一微分方程表明 y 的变化率正比于 y. 常数 k 为一比例常数. 把 $y=C\mathrm{e}^{kt}$ 代入该方程, 可以验证 $y=C\mathrm{e}^{kt}$ 为该方程的解. 对于解另一种推导, 参见本章的相关理论部分. 我们有如下结果.

> 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 的通解为
> $$y=C\mathrm{e}^{kt},\quad C\text{ 为任一常数.}$$
> - 对于 $k>0$, 这代表指数增长, 而 $k<0$ 为指数衰减.
> - 常数 C 为 t=0 时, y 的值.

图 10-25 给出了一些 $k>0$ 时解曲线的图形. 对于 $k<0$ 时一些解曲线的图形, 参见图 10-26.

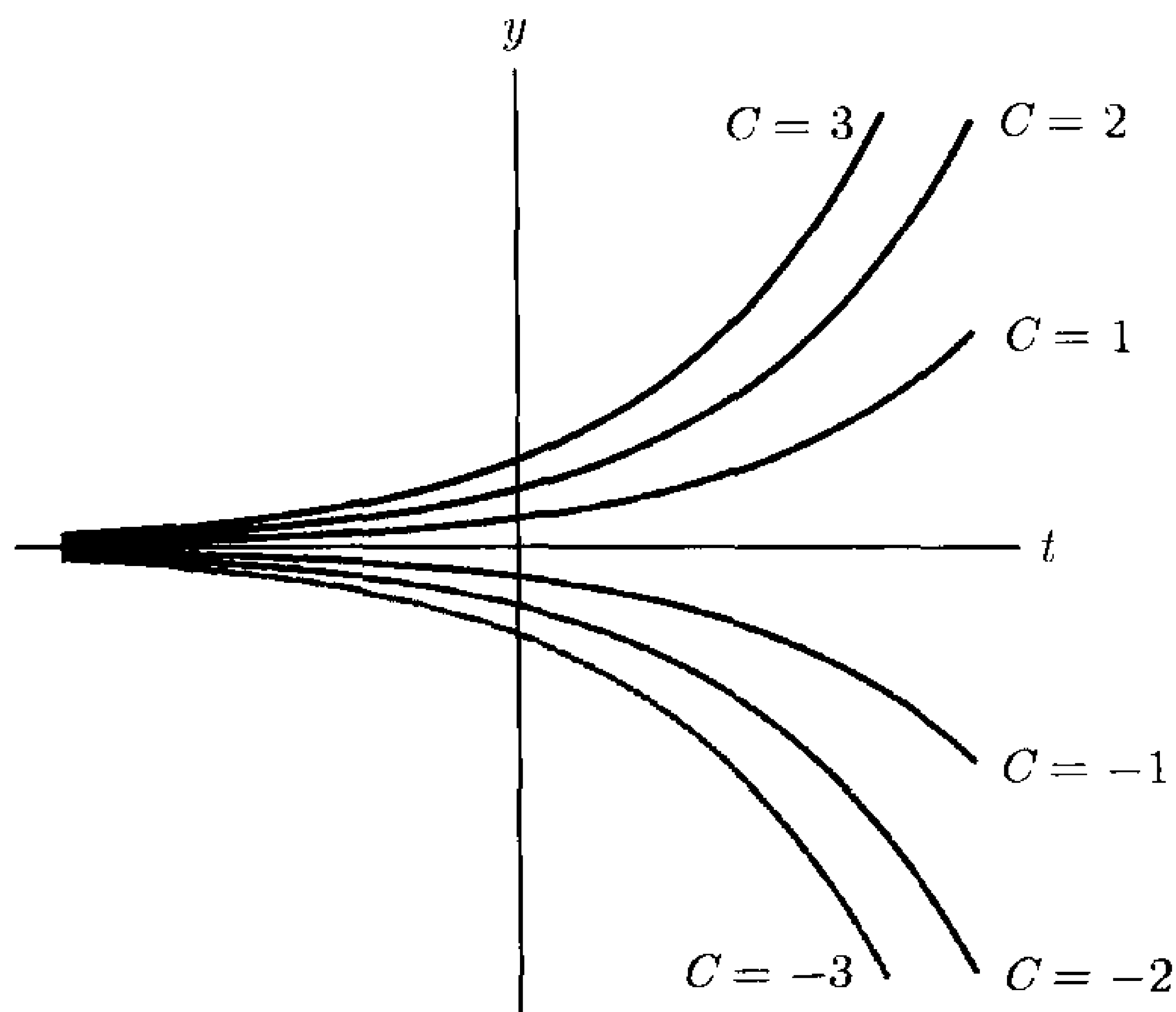


图 10-25 $y=C\mathrm{e}^{kt}$ 的图形, 它是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=ky$ 在某些给定的 $k>0$ 的解

例 1 (a) 找出下列每个微分方程的通解.

(i) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.05y$ (ii) $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-0.3P$ (iii) $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=2z$ (iv) $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=2w$

(b) 对于方程 (i) 找出 t=0, y=50 的特解.

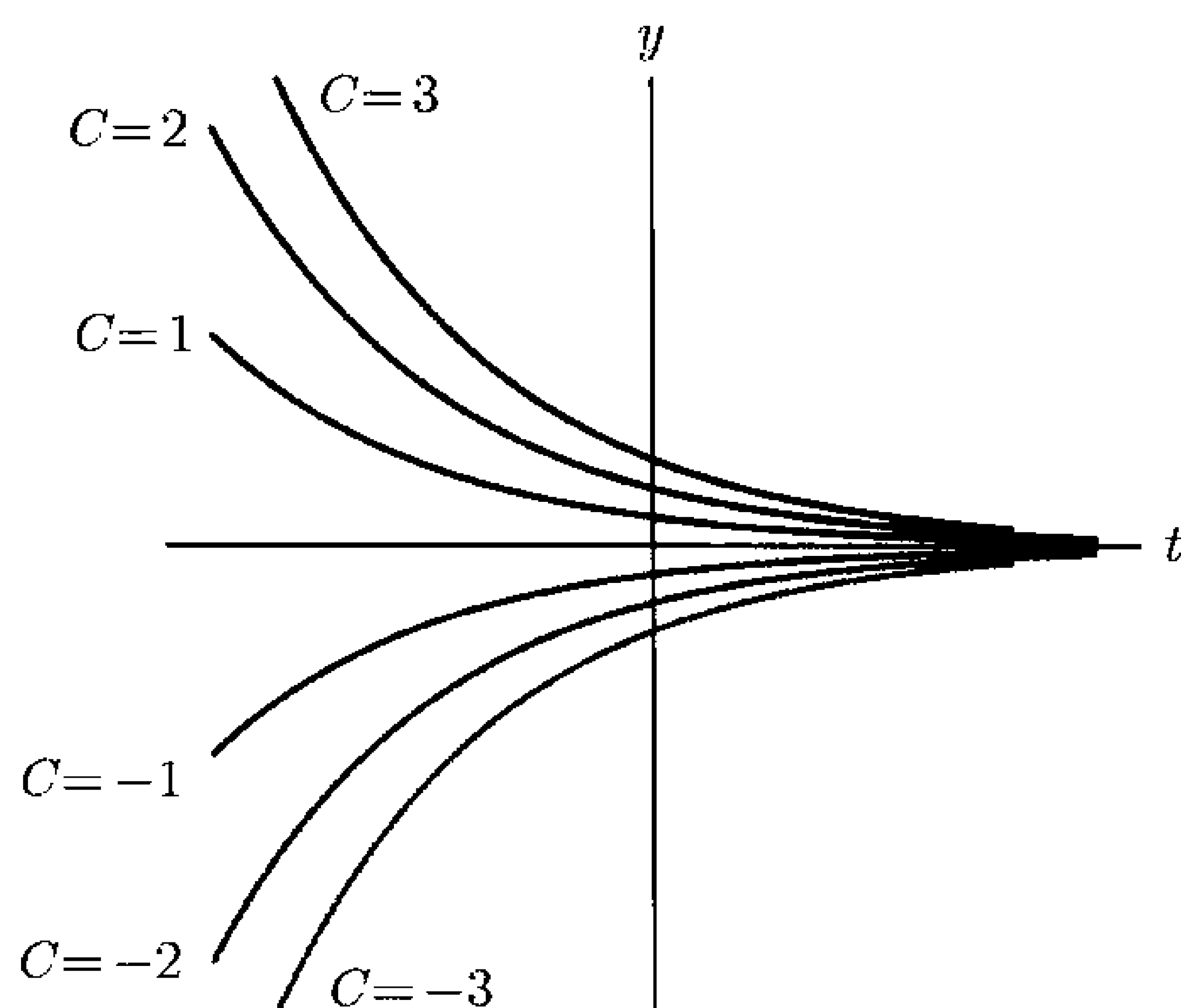


图 10-26 $y=C\mathrm{e}^{kt}$ 的图形, 它是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 在某些给定的 $k<0$ 的解

解 (a)(i), (ii) 及 (iv) 中所给的微分方程均是指数增长或指数衰减的特例. 因为它们每一个都具有如下形式：导数 = 常数 · 因变量.

注意微分方程 (ii) 并不属于这一类型. 10.3 节的例 1 给出它的解为 $w=z^2+C$. 因此, 上述问题通解分别为：(i) $y=C\mathrm{e}^{0.05t}$ (ii) $P=C\mathrm{e}^{-0.3t}$ (iii) $w=z^2+C$ (iv) $w=C\mathrm{e}^{2z}$.

(b) 方程 (i) 的通解为 $y=C\mathrm{e}^{0.05t}$, 把 t=0, y=5 代入可得

$$50=C\mathrm{e}^{0.05(0)},\quad 50=C.$$

因此, $C=50$, 且这一问题特解为 $y=50\mathrm{e}^{0.05t}$. □

10.4.1 人口增长

考虑一个地区拥有人口总数 P, 该地区没有移民迁入迁出. 该地区的人口增长速度正比于其人口规模. 这意味着人口规模越大, 人口增长就越快, 这正如我们所预料 (因为将有更多人生育). 如果单位时间内人口总数以 2%的速度持续增长, 那么我们有

$$\text{人口增长率} = \text{当前人口的 } 2\%,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=0.02P.$$

该方程是形如 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t=kP$ 的方程 k=0.02 时的特例, 且有通解为 $P=C\mathrm{e}^{0.02t}$. 如果 t=0 时刻的初始人口数为 P_0, 那么 $P_0=C\mathrm{e}^{0.02\times(0)}=C$. 因而, $C=P_0$, 且我们有 $P=P_0\mathrm{e}^{0.02t}$.

10.4.2 连续复利

在第 1 章, 我们是通过把连续复利作为利率计息越来越频繁的极限情形来引入的. 这里我们将从一个不同的视角来获得连续复利. 我们想像利息以一个正比于当前账户现金总量的速率增加. 那么账户现金总量越大, 利息增长就越快, 进而账户现金总量增长就越快.

例 2　某银行账户的利息每年以当前账户现金总量 5%的速率连续增长. 假设初始存款为 1000 美元, 且没有其他存款, 也没有从账户中取款.

(a) 写出满足这一账户中现金总量变化的微分方程.

(b) 求解该微分方程且画出解的图形.

解　(a) 我们要找出当前账户中现金总量 B(以美元为单位) 关于时间 t(以年为单位) 的函数. 因为利息每年以当前账户现金总量 5%的速率连续增长, 所以有

$$\text{账户中现金总量的增长率} = \text{当前账户现金总量的 } 5\%.$$

那么, 能描述这一过程的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 0.05B.$$

注意到因为初始存款并不影响利息获取过程, 所以该方程并没有涉及 1000 美元这一初始条件.

(b) 由于 $B_0 = 1000$ 是 B 的初始值, 所以方程的解为

$$B = B_0\mathrm{e}^{0.05t} = 1000\mathrm{e}^{0.05t}.$$

图 10-27 给出这一函数的图.　□

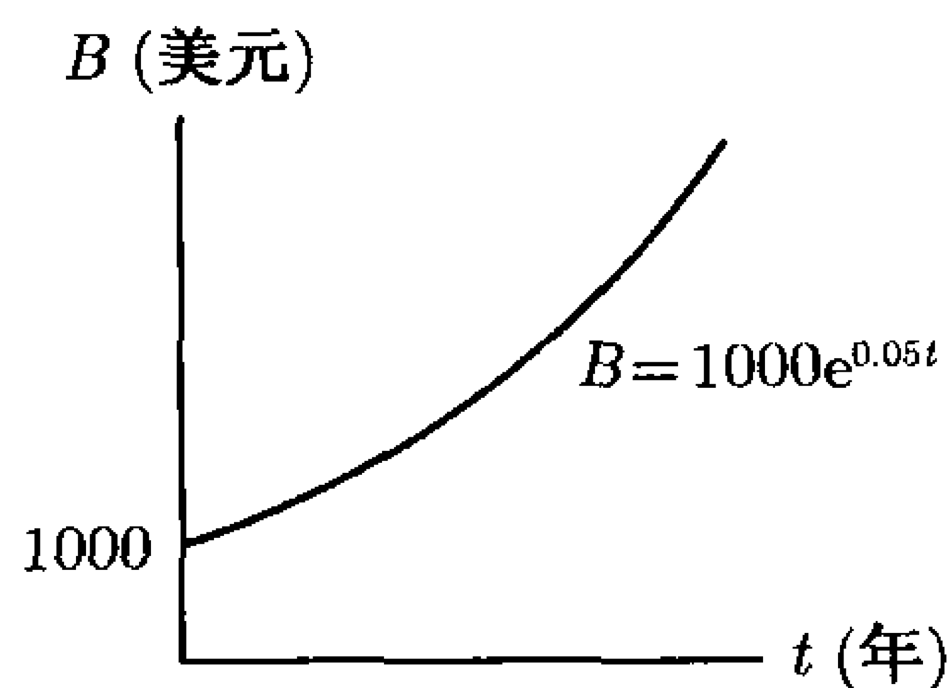


图 10-27　银行账户现金总量随时间变化图

因为货币只能取离散值 (你不可能有不到一分的值), 所以你可能想知道我们怎么可以通过一个微分方程来表示货币量呢? 事实上, 微分方程仅仅是一个近似描述, 而且对于一个较大量的货币, 它是一较好的近似.

10.4.3 五大湖的污染

20 世纪 60 年代, 五大湖污染问题成为公众关注的一个话题. 假设没有新的污染物再次倒入该湖泊, 我们建立一个模型来说明该湖花费了多久才变清澈.

设 Q 表示 t 时刻湖中的污染物总量, 而该湖水量为 V. 假设清水以固定速率 r 流入该湖, 而五大湖中的水也以同样的速率流出. 也假设污染物均匀的遍及该五大湖, 且清水流入后立即与湖中的其他水相混合.

Q 如何随时间变化呢? 首先, 注意到由于污染物只出不进, 因而 Q 不断减少, 随着水不断从湖中流出, 水的污染程度也就越轻. 因此, 污染物的排出率就不断降低.

这告诉我们 Q 是单调递减且上凹的. 其次, 尽管残留的污染物可以任意的小, 但污染物是不可能从湖中完全排出的. 换句话说, Q 是渐进趋于 t 轴的.(参见图 10-28)

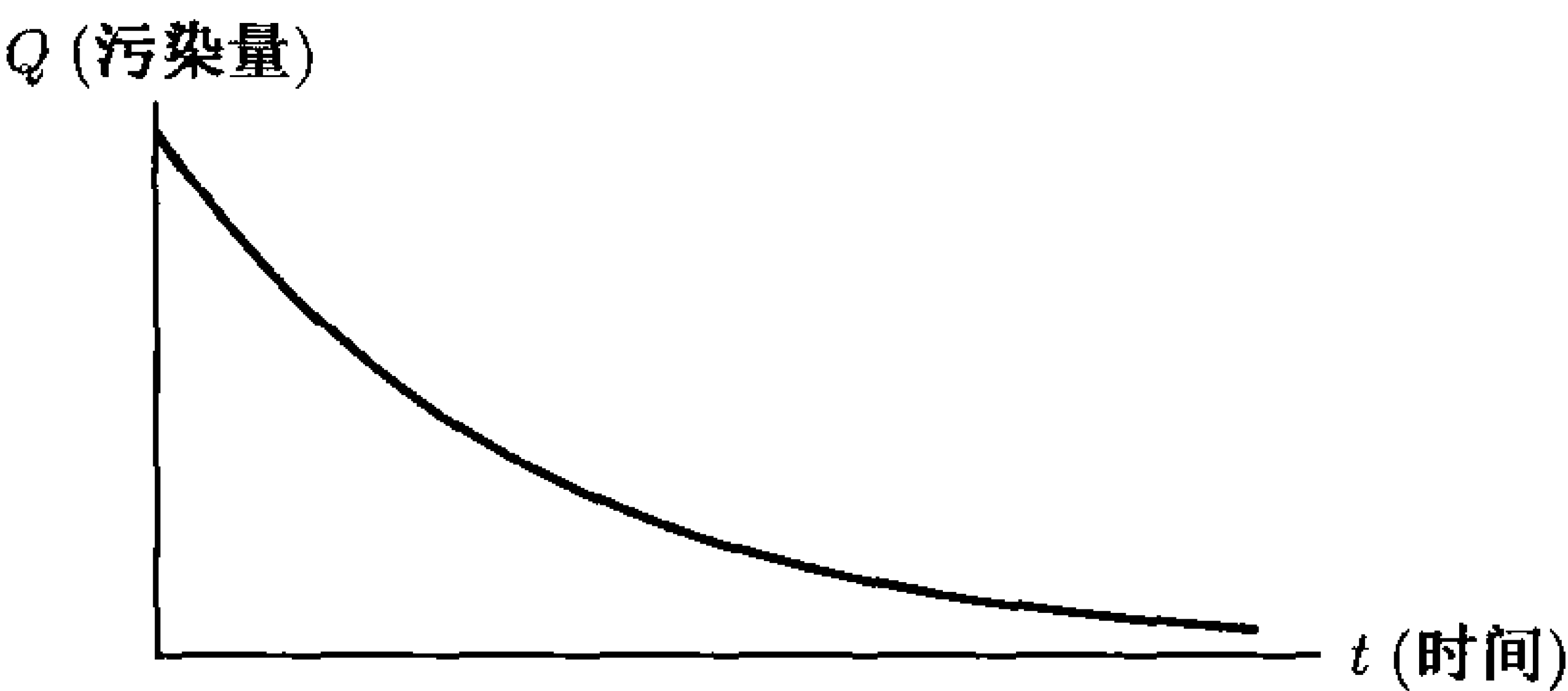


图 10-28 湖中污染物随时间变化图

建立一个关于污染的微分方程

为理解 Q 如何随时间变化, 我们写出关于 Q 的微分方程. 我们有

$$Q\text{ 的变化率} = -(\text{污染物排出率}),$$

其中负号反应了 Q 单调递减这一事实. 在 t 时刻, 污染物的浓度为 Q/V, 且含有这一浓度污染物的水以速率 r 流出湖泊. 那么,

$$\text{污染物排出率} = \text{流出率} \cdot \text{浓度} = r \cdot Q/V.$$

因此, 污染的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{r}{V}Q$$

且其通解为

$$Q = Q_0\mathrm{e}^{-rt/V}.$$

表 10-2 给出了五大湖中四个湖的 V 和 r 的值①. 使用这一数据, 我们可以计算出伊利湖将花费多久的时间才能把其湖中某一比例的污染物的排出湖外.

表 10-2 五大湖的总水量和流量

	$V(\mathrm{km}^3)$	r(立方千米/年)
苏必利尔湖	12 200	65.2
密歇根湖	4900	158
伊利湖	460	175
安大略湖	1600	209

例 3 试问从伊利湖中排出其污染物的 90% 将需要花费多长时间? 排出 99% 又需要多长时间呢?

解 就伊利湖而言, $r/V = 175/460 = 0.38$, 因此, 在 t 时刻, 我们有

$$Q = Q_0\mathrm{e}^{-0.38t}.$$

当排出 90% 的污染物时, 将剩余 10%. 因此, $Q = 0.1Q_0$, 带入上式可得

① 数据来源于 William E. Boyce 和 Richard C. DiPrima,《初等偏微分方程》(纽约: Wiley, 1977).

$$0.1Q_0 = Q_0\mathrm{e}^{-0.38t}.$$

抵消 Q_0 可解出 t: $t = \dfrac{-\ln(0.1)}{0.38} \approx 6$ 年.

类似的, 当排出 99% 的污染物时, 有 $Q = 0.01Q_0$, 因此我们解

$$0.01Q_0 = Q_0\mathrm{e}^{-0.38t}$$

可得 $t = \dfrac{-\ln(0.01)}{0.38} \approx 12$ 年. □

10.4.4 人体的药物数量

正如我们在 10.1 节所看到的, 药物以一个正比于当前病人体内该药物量的固定比例从人体中排出. 如果设 Q 表示残留在病人体内的药物数量, 则

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -kQ.$$

其中负号反应了残留在病人体内的药物数量 Q 不断递减. 该方程的解为 $Q = Q_0\mathrm{e}^{-kt}$; 其数量呈指数下降. 常数 k 依赖于药物类型, Q_0 是零时刻病人体内的药物数量. 有时物理学家使用半衰期 (half life) 来传递相对衰减率的信息, 其中半衰期是指 Q 衰减为原来的一半所花费的时间.

例 4 丙戊酸是人们用来控制癫痫病的一种药物; 它在人体的半衰期约为 15 小时.

(a) 使用半衰期来求出方程 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -kQ$ 的常数 k, 这里 Q 表示服用该药物 t 小时后仍残留在病人体内的药物数量.

(b) 多长时间后, 原来服用剂量的 10% 仍残留在人体内?

解 (a) 由于半衰期约为 15 小时, 所以当 $t = 15$ 时, 我们有 $Q = 0.5Q_0$. 把这些条件带入方程, 我们便可解出 k:

$$\begin{aligned} Q &= Q_0\mathrm{e}^{-kt} \\ 0.5Q_0 &= Q_0\mathrm{e}^{-k(15)} \\ 0.5 &= \mathrm{e}^{-k(15)} \text{ (两边除以 } Q_0) \\ \ln 0.5 &= -15k \text{ (两边取自然对数)} \\ k &= \frac{-\ln(0.5)}{15} = 0.0462 \text{ (解出} k) \end{aligned}$$

(b) 为得出原来服用剂量的 10% 仍残留在人体内所花费时间, 我们把 $0.10Q_0$ 带入关于残留量 Q 的方程, 并解出时间 t, 即为所求.

$$0.10Q_0 = Q_0\mathrm{e}^{-0.0462t}$$

$$0.10 = \mathrm{e}^{-0.0462t}$$

$$\ln 0.10 = -0.0462t$$
$$t = \frac{\ln(0.10)}{-0.0462} = 49.84.$$

在 $t = 49.84$ 时, 或者服用大约 50 小时后, 将剩余原来服用剂量的 10% 残留在人体内. □

习题

找出下面习题 1~6 中微分方程在给定初始条件下的解.

1. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -0.14y$, 当 x=0 时, y=5.6

2. $\mathrm{d}w/\mathrm{d}r = 3w$, 当 r=0 时, w=30

3. $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = 0.02P$, $P(0) = 20$

4. $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = Q/5$, 当 t=0 时, Q=50

5. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x + y/3 = 0$, $y(0) = 10$

6. $\mathrm{d}p/\mathrm{d}q = -0.1p$, 当 q=5 时, p=100

7. 一笔 5000 美元的存款存入一年利率为 1.5%的银行账户, 按连续复利计息.

(a) 写出满足这一账户中现金总量 B 变化的微分方程, B 为时间 t(以年为单位) 的函数.

(b) 求解该微分方程.

(c) 10 年后该账户将有多少钱?

8. 一笔存款存入一年利率为 7%的银行账户, 按连续复利计息. 该账户既没有其他额外存款, 也没有任何取款.

(a) 写出 t 年后, 满足这一账户中所存有的现金总量 B 的微分方程.

(b) 求解 (a) 中的微分方程.

(c) 如果初始存款为 5000 美元, 给出满足这一初始条件的特解.

(d) 10 年后该账户将有多少钱?

9. 大气中臭氧含量 Q, 以正比于其当前含量的固定速率下降. 如果时间 t 以年为单位计, 那么该固定速率为 -0.0025. 写出 Q 的微分方程, 它是 t 的函数. 给出这一方程的通解. 如果大气中臭氧含量以这一速率持续下降, 那么 20 年后, 现在大气中的臭氧含量将下降百分之几?

10. 放射性碘每天大约以 9%的速率衰减. 写出刻画这一行为的微分方程, 并给出方程的解.

11. 使用本节的模型和表 10-2 中的数据, 假设没有新的污染物进入湖泊, 计算从密西根湖和安大略湖排出其污染物的 90%将分别需要花费多长时间. 直接观察中的数据你可以看出哪个湖将花费更长的时间, 请给出你的解释.

12. 使用本节的模型和表 10-2 中的数据, 假设没有新的污染物进入湖泊. 从五大湖中排出其污染物的 80%, 请问哪个湖花费的时间最长, 哪个花费的时间最短. 并给出这两个时间的比值.

13. 肿瘤增长的速率正比于其大小.

(a) 写出肿瘤大小 S(以为 mm 单位) 所满足的微分方程, S 是时间 t 的函数.

(b) 给出该微分方程的解.

(c) 如果 t=0 时肿瘤大小为 5 mm, 关于方程的解, 这将告诉你什么?

(d) 如果我们还知道 t=3 时肿瘤大小为 8 mm, 关于方程的解, 这又将告诉你什么?

14. 血液中的药物经过尿排出以一正比于当时血液中药物含量的固定速率排出体外. 如果一开始注入血液中的药物为 Q_0, 经过 3 小时后, 还有 20%残留在血液中.

(a) 写出 t 小时后, 残留在血液中的药物 Q 所满足的微分方程, 并给出该方程的解.

(b) 如果一病人一开始被注入 100 mg 该药物, 请问 6 h 后, 还有多少药物残留在血液中?

15. 在一些化学反应中, 某物质以一正比于当前该物质量的固定速率随时间变化. 例如, δ 葡萄糖酯转化为葡萄糖酸的过程属于这一情形.

(a) 写出 t 时刻, δ 葡萄糖酯的量 y 所满足的微分方程.

(b) 如果 100 g 的 δ 葡萄糖酯在 1 h 后剩余 54.9 g, 请问 10 h 后将剩余多少 g?

16. 从油井中以一正比于当时井中所储藏油量的固定速率抽取石油. 开始时, 油井中储藏 100 万桶石油; 开采 6 年后还剩 500 000 桶.

(a) 当油井中所余储藏为 600 000 桶时, 油井中油量的下降速度为多少?

(b) 当油井中所余储藏为 50 000 桶时, 油井中油量的下降速度又为多少?

17. 重酒石酸氢可酮用来缓解咳嗽症状, 该药物被充分吸收后, 其在人体的残留量将以正比于当时人体的残留量的固定速率排出. 重酒石酸氢可酮在人体的半衰期为 3.8 h 且使用剂量为 10 mg.

(a) 写出重酒石酸氢可酮被充分吸收后, 在 t 小时, 其在人体内的残留量 Q 所满足的微分方程.

(b) 求解 (a) 中的微分方程.

(c) 借助半衰期, 求出比例常数 k.

(d) 经过 12 小时后, 10 mg 剂量中尚有多少仍残留在人体内?

18. 华法林是一种抗血凝剂. 注射该药后, 其在人体的残留量将以正比于当时人体的残留量的固定速率排出. 华法林在人体的半衰期为 37 h.

(a) 画出从注射该药后, 其在人体内的残留量 Q 随时间 t 的变化图, 并在你的图中标上 37 个小时数.

(b) 写出 Q 所满足的微分方程.

(c) 要使该药物在人体的残留量下降为原来药量的 25%, 将需要花费多长时间?

10.5 应用和建模

上节, 我们考虑了由微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$ 所模型化的几个实际问题.

本节, 我们将考虑几个 y 的变化率为 y 的线性函数的情形, 其方程形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k(y-A),\quad \text{其中 } k \text{ 和 } A \text{ 为常数.}$$

10.5.1 人体的药物数量

从静脉给一病人以 0.5 mg/h 的速度注射华法林, 一种抗血凝剂. 经过新陈代谢后, 华法林以每小时大约以 2% 的速度从人体中排出. t 小时后, 该药物在人体内的残留量 Q(以 mg 为单位) 可由如下微分方程表示:

$$\text{变化率} = \text{注入率} - \text{排出率},$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q.$$

对于 Q 不同的初始值, 该方程可以告诉我们人体内华法林残留量情况吗?

如果 Q 比较小, 那么 $0.02Q$ 就比较小, 该药物从人体的排出的速率低于其进入人体的速率. 由于此时, 注入率大于排出率, 所以变化率为正, 人体内该药物的残留量递增. 如果 Q 足够大以至于 $0.02Q$ 大于 0.5, 那么 $0.5 - 0.02Q$ 为负, 因此, dQ/dt 为负, 此时, 人体内该药物的残留量递减.

对于较小的 Q, 人体内该药物的残留量不断增加直到注入率等于排出率. 对于较大的 Q, 人体内该药物的残留量不断下降直到注入率等于排出率. 当 Q 取何值时, 注入率恰好等于排出率呢? 我们有

$$\text{注入率} = \text{排出率},$$
$$0.5 = 0.02Q,$$
$$Q = 25.$$

如果一开始, 在人体内的华法林残留量为 25 毫克, 那么排出量恰好等于注入量. 该药物在体内的残留量将维持在 25 毫克不变. 也注意到: 当 $Q = 25$ 时, 导数 dQ/dt 为零, 因为

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02 \cdot (25) = 0.5 - 0.5 = 0$$

如果 Q 的初始量为 25, 那么方程的解是一条水平线 Q. 该解被称为**均衡解**.

图 10-29 给出了该方程的斜率场, 并给出了 $Q_0 = 20$, $Q_0 = 25$ 和 $Q_0 = 30$ 时的解曲线. 我们可以看出, 在每一种情形下, 该药物在人体内的残留量均趋于均衡解, 25 毫克. 从 $Q_0 = 30$ 的解曲线, 你应该能联想到一个指数衰减的函数. 事实上, 它是一个向上平移了 25 个单位的指数衰减的函数.

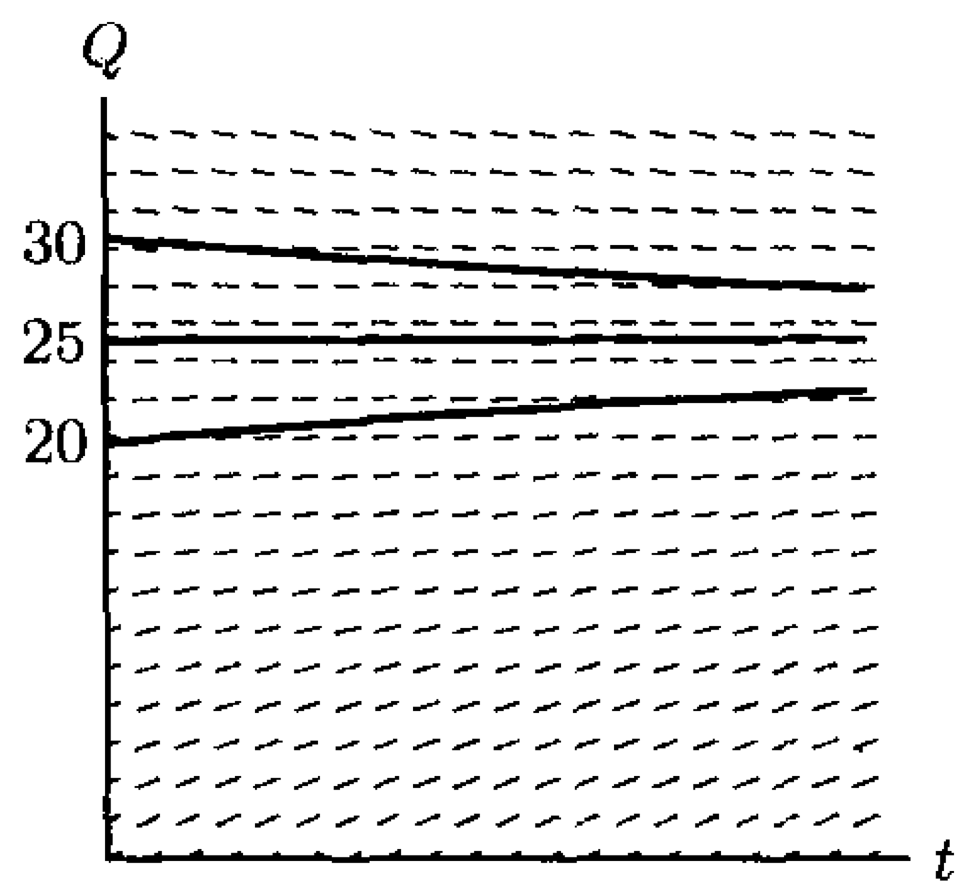


图 10-29 $dQ/dt = 0.5-0.02Q$ 的斜率场

10.5.2 求解微分方程 $dy/dt = k(y - A)$

上例中药物含量满足如下形式的微分方程 $\dfrac{dy}{dt} = k(y - A)$.

现在, 让我们来找出该方程的通解. 由于 A 为常数, $dA/dt = 0$, 因此, 我们有

$$\frac{d}{dt}(y - A) = \frac{dy}{dt} - \frac{dA}{dt} = \frac{dy}{dt} - 0 = k(y - A).$$

因而, $y - A$ 满足一个指数微分方程, 因此, $y - A$ 有如下形式:

$$y - A = Ce^{kt}.$$

关于该解的另外一种推导方法, 参见本章的相关理论部分.

> 微分方程 $\frac{dy}{dt} = k(y - A)$ 的通解为
> $$y = A + Ce^{kt}, \quad C \text{ 为任一常数.}$$

注: 对于这一形式的微分方程, 任意常数 C 并不是变量的初始值而是 $y - A$ 的初始值.

例 1　给出下列微分方程的解:

(a) $\frac{dy}{dt} = 0.02(y - 50)$　　(b) $\frac{dP}{dt} = 5(P - 10)$, 当 t=0 时, P=8

(c) $\frac{dy}{dt} = 3y - 300$　　(d) $\frac{dW}{dt} = 500 - 0.1W$

解　(a) 通解为 $y = 50 + Ce^{0.02t}$.

(b) 通解为 $P = 10 + Ce^{5t}$. 使用初始条件求出 C:

$$8 = 10 + Ce^0$$
$$8 = 10 + C$$

因此, $C = -2$, 进而, 特解为 $P = 10 - 2e^{5t}$.

(c) 首先, 通过对方程右边提取共因子 3, 我们可以把原方程重新写为:

$$\frac{dy}{dt} = 3(y - 100).$$

该方程的通解为 $y = 100 + Ce^{3t}$

(d) 提取 W 的系数, 我们可得:

$$\frac{dW}{dt} = 500 - 0.1W = -0.1\left(W - \frac{500}{0.1}\right) = -0.1(W - 5000).$$

该方程的通解为 $W = 5000 + Ce^{-0.1t}$.　□

例 2　在本节一开始, 我们给出了如下华法林在人体内的残留量的微分方程:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q.$$

写出该微分方程的通解. 并给出 $Q_0 = 20$, $Q_0 = 25$ 和 $Q_0 = 30$ 时方程的特解.

解　首先, 通过提取 -0.02, 我们有可以把原方程重新写为 $dy/dt = k(y - A)$ 的形式:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q = -0.02(Q - 25).$$

该方程的通解为 $Q = 25 + Ce^{-0.02t}$.

为给出 $Q_0 = 20$ 时方程的特解, 我们使用初始条件求出 C:

$$20 = 25 + Ce^0$$
$$C = -5.$$

因此, 当 $Q_0 = 20$ 时, 方程的特解为 $Q = 25 - 5e^{-0.02t}$.

当 $Q_0 = 25$ 时, 我们有 $C = 0$ 且方程的特解为水平线 $Q = 25$. 当 $Q_0 = 30$ 时, 我们有 $C = 5$ 且方程的特解为 $Q = 25 + 5e^{-0.02t}$. 这三个解便是我们前面在图 10-29 中看到的那三个解. □

例 3 一公司每年以其净值的 5%连续获取其收益. 同时, 该公司每年固定向工人支付 200 百万美元工资. 在 10.1 节, 我们已看到该公司在 t 年时的净值满足的微分方程如下:

$$W\text{的变化率} = \text{收益率} - \text{支出率},$$

$$\frac{dW}{dt} = 0.05W - 200.$$

(a) 假设公司的初始净值 W_0 百万美元, 求解该微分方程.

(b) 画出 W_0=3000, 4000, 和 5000 时解的图形. 对于这些值 W_0, 公司会破产吗? 如果会的话, 哪一年破产?

解 (a) 提取 0.05 可得

$$\frac{dW}{dt} = 0.05(W - 4000).$$

通解为

$$W = 4000 + Ce^{0.05t}.$$

为求出常数 C, 我们使用初始条件: t=0 时, $W = W_0$.

$$W_0 = 4000 + Ce^0$$

$$W_0 - 4000 = C$$

把这一 C 值代入 $W = 4000 + Ce^{0.05t}$, 可得

$$W = 4000 + (W_0 - 4000)e^{0.05t}.$$

(b) 如果有 W_0=4000, 那么 $W = 4000$ 为均衡解.

如果 W_0=5000, 那么 $W = 4000 + 1000e^{0.05t}$.

如果 W_0=3000, 那么 $W = 4000 - 1000e^{0.05t}$. 图 10-30 给出了这些函数的图形. 注意到, 如果初始净值 W_0 接近 4000 百万美元但不等于 4000 百万美元, 那么 W 将越来越偏离该值. 我们看到: 如果 W_0=3000, 那么 W 的值将会变为 0, 该公司将会破产. 设 W=0 可解得 $t \approx 27.7$, 因此, 该公司将在它 28 岁时破产. □

10.5.3 均衡解

图 10-29 给出了不同初始量下, 人体内华法林残留量的变化图. 所有这些曲线均为如下方程的解:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.5 - 0.02Q = -0.02(Q - 25).$$

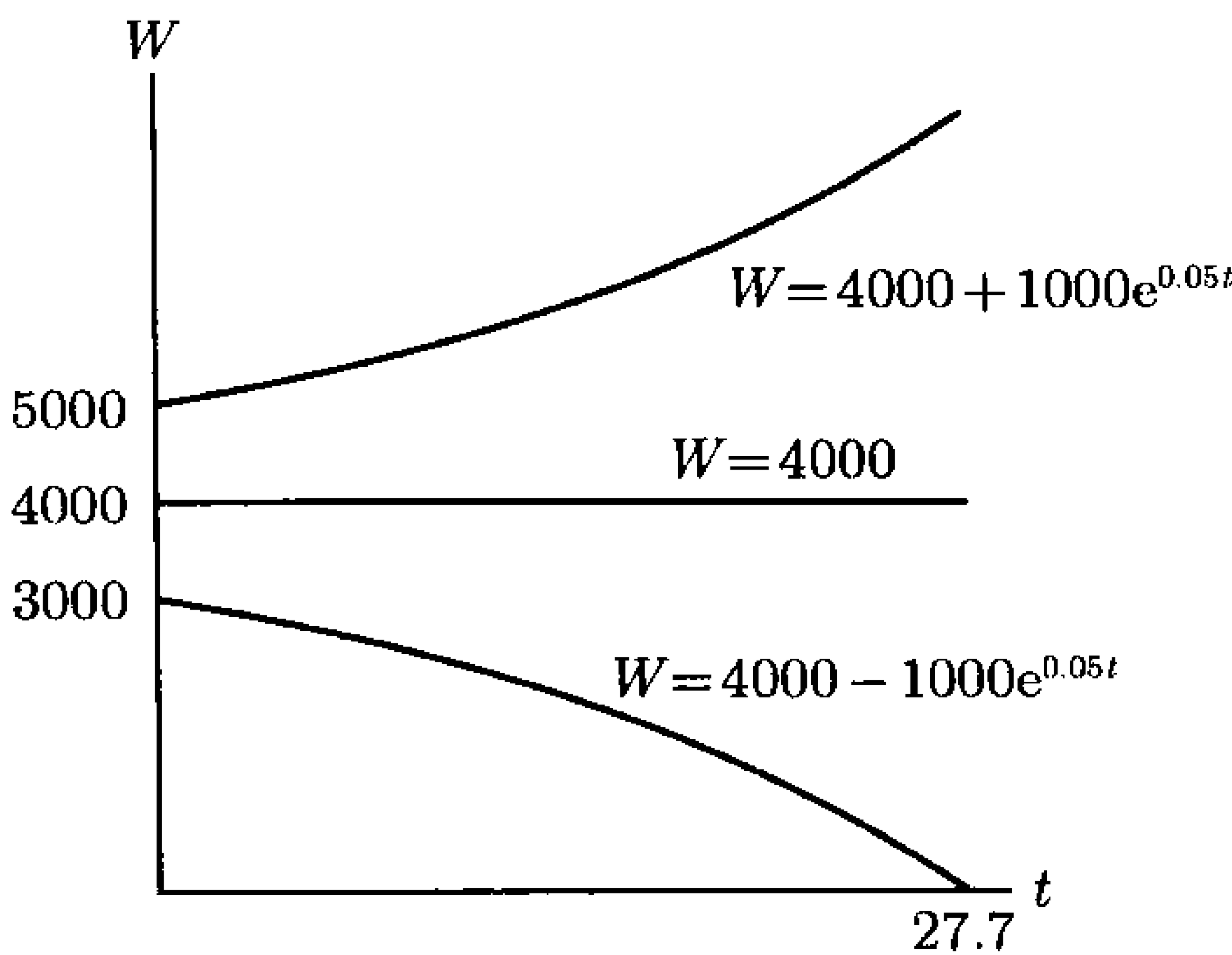


图 10-30　$\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = 0.05W - 200$ 的解

该方程的所有解形如 $Q = 25 + Ce^{-0.02t}$, C 取某些值. 注意到：由于随着 $t \to \infty$, $e^{-0.02t} \to 0$, 所以对于所有的解, 随着 $t \to \infty$, $Q \to 25$. 换句话说, 从长期来讲, 无论初始量为多少, 人体内华法林残留量将趋于均衡解 $Q = 25$.

注意到, 通过求解 $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$, 我们可以直接求出方程的均衡解：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -0.02(Q - 25) = 0,$$
$$Q = 25.$$

由于随着 $t \to \infty$, Q 总是越来越接近均衡值 25, 所以我们称 $Q = 25$ 为 Q 的稳定均衡 (stable equilibrium).

图 10-30 给出了一个与此不同的情形, 它给出了方程 $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.05W - 200$ 的解. 通过观察解曲线或者设 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.05W - 200 = 0.05(W - 4000) = 0$, 我们可以找出该方程的均衡解为 $W = 4000$. 由于只要初始净值 W_0 接近 4000 但不等于 4000, 随着 $t \to \infty$, 那么 W 将越来越偏离 4000, 因此, 我们称这一均衡解是不稳定的.

- 一个**均衡解**就是一个对所有自变量均取常数的解. 其图形是一条水平线. 均衡解可以通过设函数的导数为零来求得.
- 一个均衡解被称为是**稳定**的, 如果随着自变量趋于正无穷, 初始条件的一个微小变化仍可以使方程的解趋于均衡.
- 一个均衡解被称为是**非稳定**的, 如果随着自变量趋于正无穷, 初始条件的一个微小变化可以使方程的解曲线偏离均衡.

通常, 一个微分方程可能有多个均衡解, 也可能没有均衡解.

例 4　找出下列微分方程的均衡解. 并确定该均衡解是稳定的还是非稳定的.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -2(H-20)$　　　　(b) $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 2(B-10)$

解 (a) 为给出方程的解, 我们设 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -2(H-20) = 0,$$

可得 $H = 20$ 为方程的均衡解. 该方程的通解为 $H = 20 + C\mathrm{e}^{-2t}$. 图 10-31 给出了 H_0=10, 20 和 30 时的解曲线. 我们可以看出均衡解是稳定的.

(b) 为给出方程的解, 我们设 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 2(B-10) = 0,$$

可得 $B = 10$ 为方程的均衡解. 该方程的通解为 $B = 10 + C\mathrm{e}^{2t}$. 图 10-32 给出了 B_0=9, 10 和 11 时的解曲线. 我们可以看出均衡解是非稳定的. □

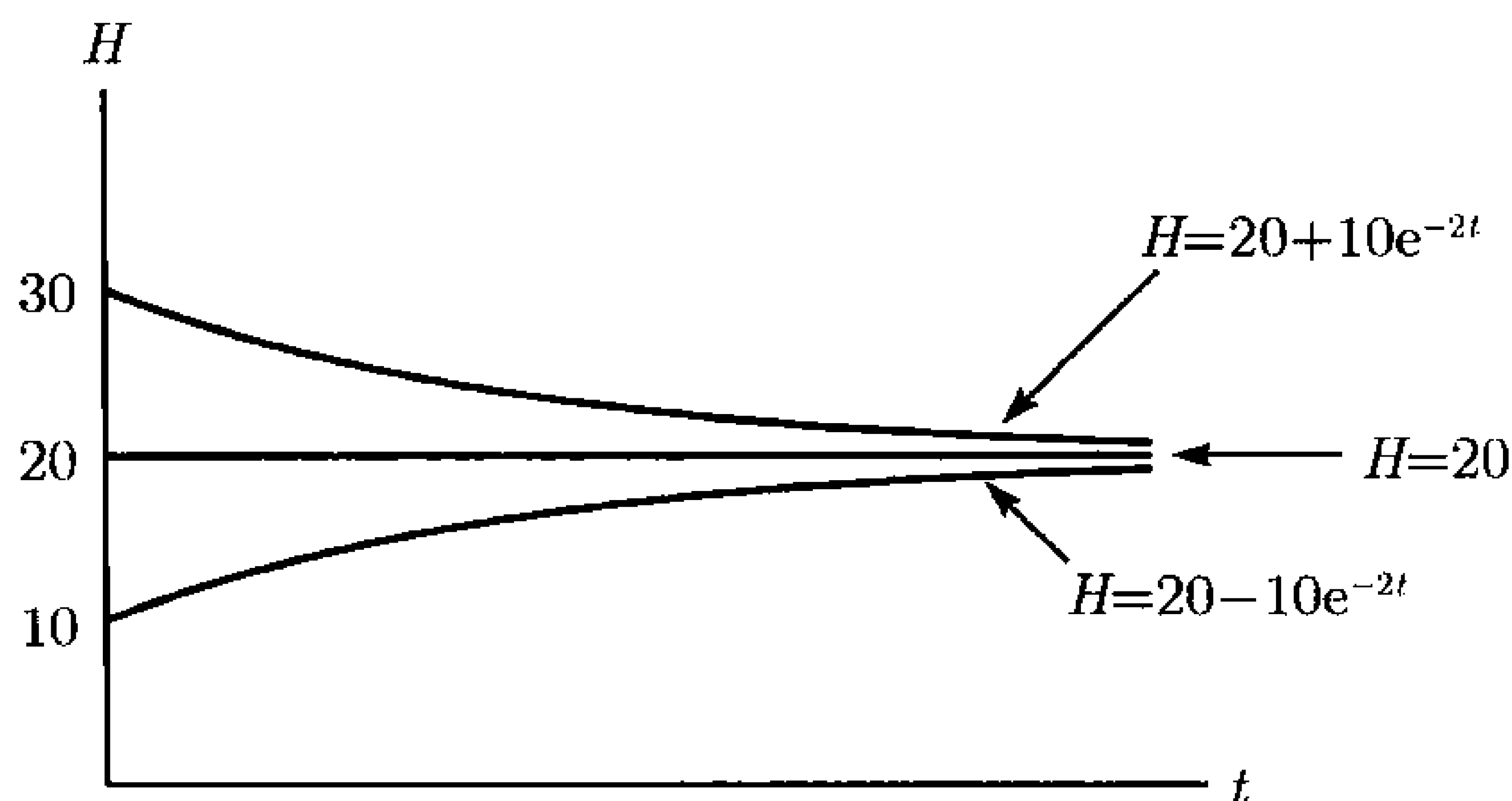


图 10-31　$H = 20$ 是稳定均衡解

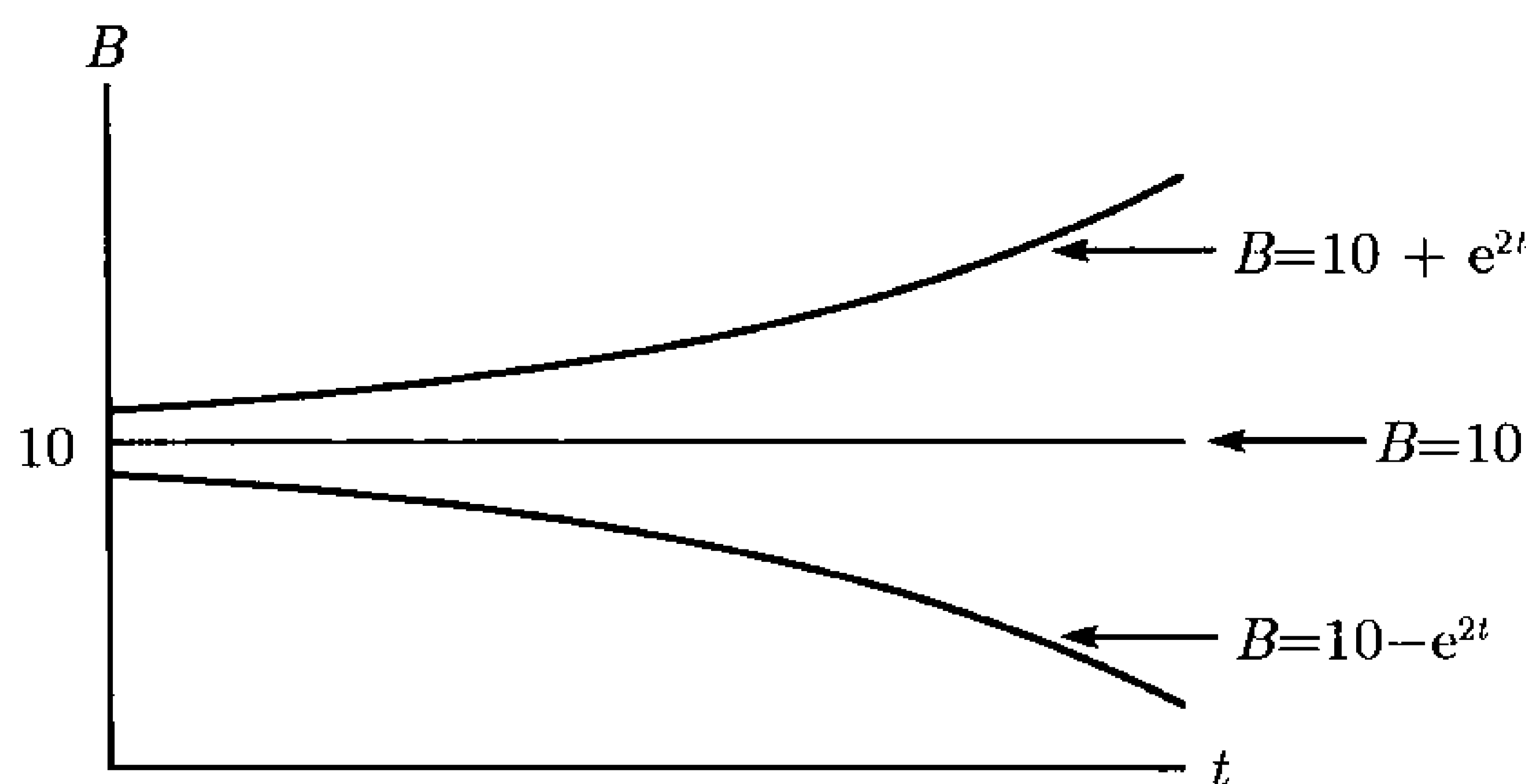


图 10-32　$B = 10$ 是非稳定的均衡解

10.5.4　牛顿冷热法则

牛顿认为一个热物体的温度将以正比于其与周边物体温差的速率下降. 类似的, 一个低温物体的温度将以正比于其与周边物体温差的速率上升.

例如, 一杯放于桌面的热咖啡将以正比于其与周边空气温差的速率下降. 随着咖啡变凉, 由于其与周边空气温差减小, 所以其变冷的速度将会下降. 长期内, 其变冷的速率将趋于零, 而咖啡的温度将趋于室温. 图 10-33 给出了两杯咖啡随时间的

变化图, 其中一杯咖啡的起始温度高于另一杯, 但从长期来看, 两杯咖啡均会趋于室温.

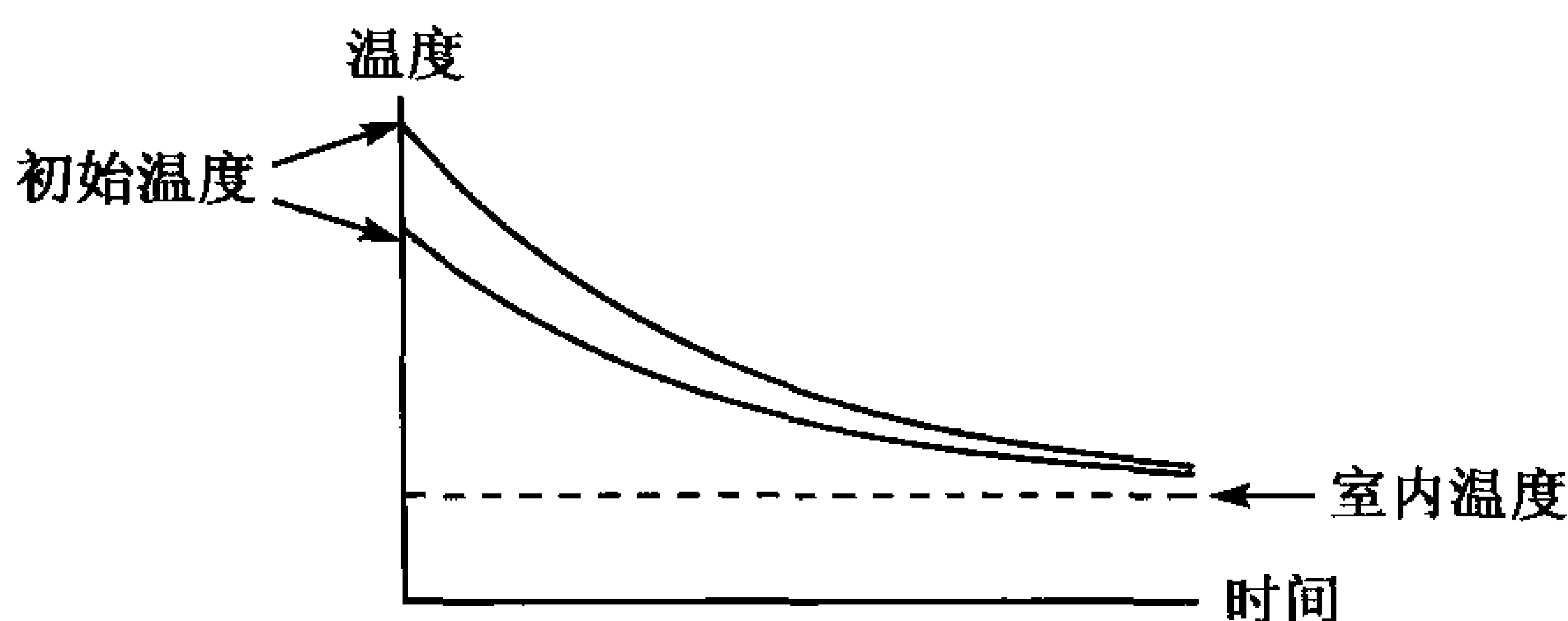


图 10-33 咖啡温度随时间变化图

设 H 为置于室温为 70°F 屋内的一杯咖啡在 t 时刻的温度. 牛顿法则告诉我们, H 的变化率正比于其温度与室温之差:

$$\text{温度变化率} = \text{常数} \cdot \text{温差}.$$

温度变化率为 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$. 而咖啡与室温之差为 $H-70$, 因此,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \text{常数} \cdot (H-70).$$

常数的符号为何呢? 如果咖啡的起始温度高于 70°F(即 $H-70>0$), 那么咖啡的温度下降 (即 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t<0$), 因此, 常数必定为负:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(H-70), \quad k>0.$$

从这一微分方程中, 我们可以获知什么呢? 假设我们取 $k=1$. 图 10-34 中该微分方程的斜率场给出了几条解曲线. 注意到, 正如我们所预期的, 咖啡的温度趋于室温. 该方程的通解为

$$H = 70 + C\mathrm{e}^{-t},$$

其中 C 为任意常数.

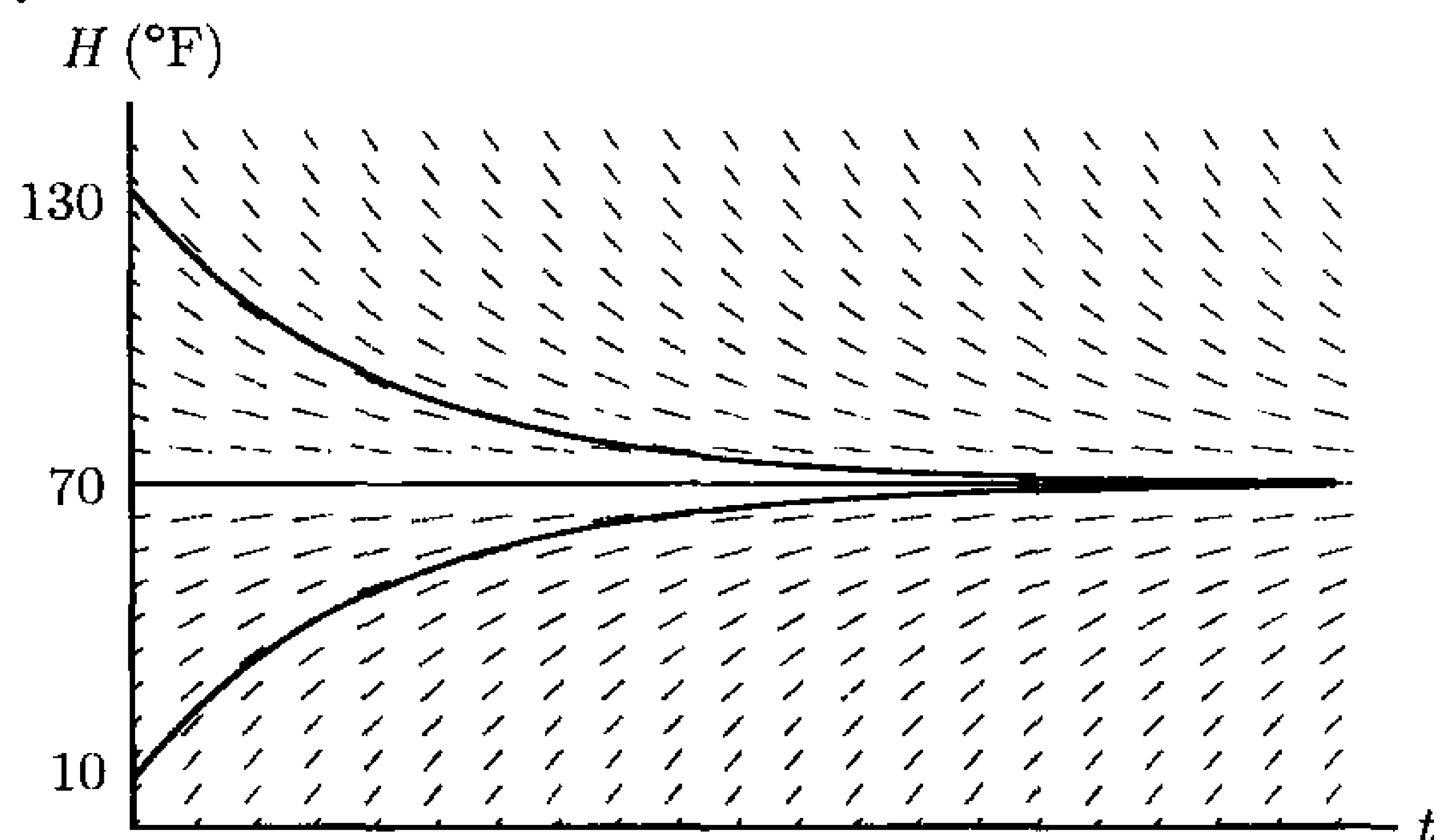


图 10-34 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(H-70)$ 的斜率场

例 5 正午时, 在一个室温为常温 20°C 的房间发现了一具被谋杀者的尸体. 该尸体在正午时的温度为 35°C; 两小时后该尸体的温度为 33°C.

(a) 给出发现该尸体后, 该尸体温度 H 随时间 t 变化的函数.

(b) 画出 H 随 t 的变化图. 长期内, 该温度将发生何变化?

(c) 在被谋杀时, 受害者体温为正常体温 37°C, 试问该受害者是何时被谋杀的?

解 (a) 由牛顿降温法则有

$$\text{温度变化率} = \text{常数} \cdot \text{温差}.$$

由于温差为 $H-20$, 对于某常数 k, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(H-20).$$

该方程的通解为 $H = 20 + C\mathrm{e}^{-kt}$.

为确定 C, 我们使用事实, 当 t=0 时, $H = 35$°C:

$$35 = 20 + C\mathrm{e}^0$$
$$35 = 20 + C.$$

因此, C=15, 且我们有 $H = 20 + 15\mathrm{e}^{-kt}$.

为了求 k, 我们使用事实, 当 t=2 时, $H = 33$:

$$33 = 20 + 15\mathrm{e}^{-k2}.$$

通过分离指数, 我们可解得:

$$13 = 15\mathrm{e}^{-2k}$$
$$\frac{13}{15} = \mathrm{e}^{-2k}$$
$$\ln\left(\frac{13}{15}\right) = -2k$$
$$k = -\frac{\ln(13/15)}{2} = 0.072.$$

因此, 尸体温度 H 为 t 的函数: $H = 20 + 15\mathrm{e}^{-0.072t}$.

(b) $H = 20 + 15\mathrm{e}^{-0.072t}$ 的图形有一个垂直截矩为 $H = 35$, 该值尸体的初始温度. 尸体温度成指数衰减, 最终趋于水平渐渐线 $H = 20$(参见图 10-35). “从长期来看”意味着 $t \to \infty$. 其图形表明随着 $t \to \infty$, $H \to 20$.

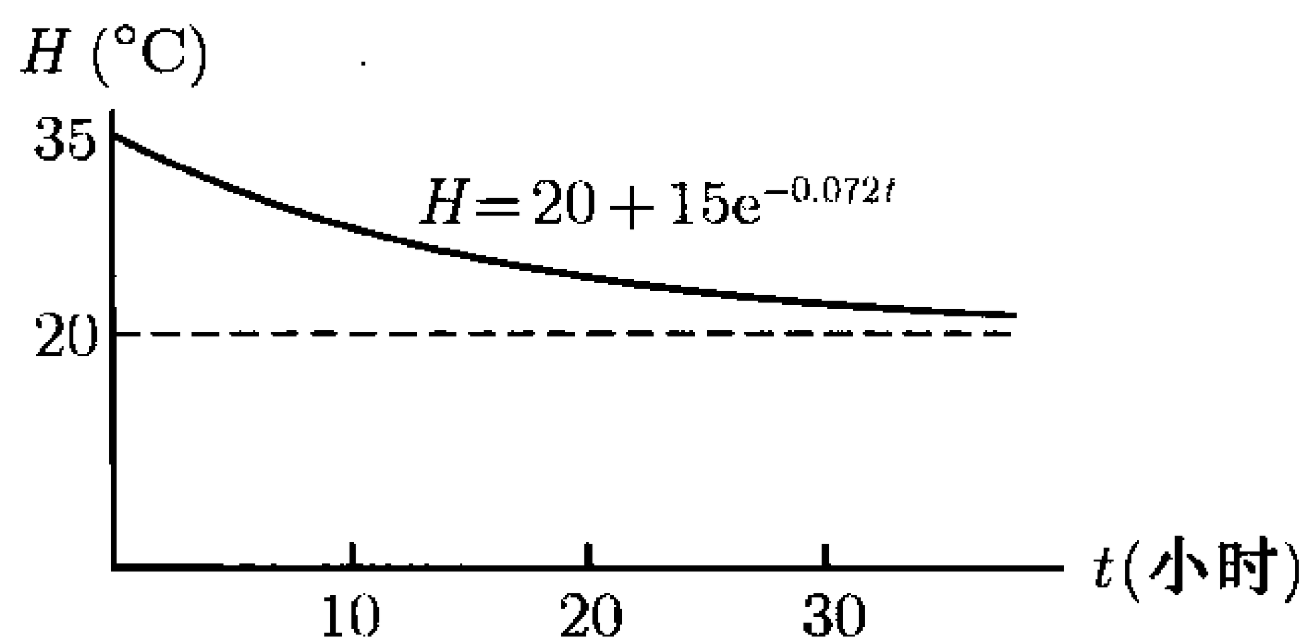


图 10-35 尸体温度

(c) 我们想知道何时尸体的温度为 37°C. 我们把 $H = 37$ 代入并解出 t:

$$37 = 20 + 15\mathrm{e}^{-0.072t}$$

$$\frac{17}{15} = \mathrm{e}^{-0.072t}.$$

两边取自然对数可得

$$\ln\left(\frac{17}{15}\right) = -0.072t.$$

因此, $t = -\dfrac{\ln(17/15)}{0.072} = -1.74$ 小时.

谋杀大约发生在正午前 1.74 小时, 即大约在早晨 10 点 15 分. □

习题

找出下列问题 1~8 的特解.

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0.5(y - 200)$, 当 t=0 时, y=50

2. $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 3(H - 75)$, 当 t=0 时, H=0

3. $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 4B - 100$, 当 t=0 时, B=20

4. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P + 4$, 当 t=0 时, P=100

5. $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0.1m + 200$, $m(0) = 1000$

6. $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.3Q - 120$, 当 t=0 时, Q=50

7. $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + 2B = 50$, $B(1) = 100$

8. $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} + 0.1B - 10 = 0$, $B(2) = 3$

9. 验证 $y = A + C\mathrm{e}^{kt}$ 是微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k(y - A)$ 的一个解

10. 某公司连续每月赚取其公司资产的 2%, 同时, 连续每月支出 80 000 美元.

(a) 写出该公司的价值 V 所满足的微分方程, 其为时间 t(以月为单位) 的函数.

(b) 该微分方程的均衡解为多少? 对于该公司而言, 该值的有何重要意义?

(c) 求解 (a) 中的微分方程.

(d) 如果 t=0 时, 该公司的资产价值为 3 百万美元, 请问一年后其价值为多少?

11. 某账户每年以 8%的利率连续获利, 且其每年固定支出为 5000 美元. 该账户初始存款为 50 000 美元. 写出 t 年时, 该账户中的货币量 B 所满足的微分方程. 该账户是否会清空? 如果会的话, 何时将清空?

12. 某银行账户每年以 7%的连续复利获取利息, 你现向该账户存入 10 000 美元, 且其每年从中固定支出 1000 美元.

(a) 写出 t 年后, 该账户中的货币量 B 所满足的微分方程.

(b) 该微分方程的解为多少? (这是为维持该账户在一年内现金流不变, 现在应向该账户存入的现金额.)

(c) 给出该微分方程的解.

(d) 5 年后该账户将有多少钱?

(e) 画出该方程的解. 对于账户中的现金流而言, 从长期来看, 将会发生什么?

13. 通过静脉注射, 每小时给一病人注射 43.2 mg 的茶碱以缓解其急性哮喘. 该药品以一正比于当前该药在人体中的残留量的固定速率从人体中排出, 如果时间 t 以小时来计算,

该固定比例为 0.082. 假设一开始该病人体内不含有该药物.

(a) 用语言来描述一下, 你预期病人体内的茶碱含量如何随时间变化.

(b) 写出病人体内的茶碱含量 $Q(t)$ 所满足的微分方程.

(c) 求解该微分方程并画出解的图形. 从长期来看, 人体中该药品的含量将会发生什么变化?

14. 某银行账户每年以 10%的连续复利获取利息, 每年向该账户固定存入 1200 美元.

(a) 写出描述该账户中的现金流量 $B = f(t)$ 变化的微分方程.

(b) 给定初始现金流为 $B_0 = 0$, 求解该微分方程.

(c) 5 年后该账户将有多少钱?

15. 假设向一银行账户存入 1000 美元, 该账户每年以 i 的连续复利获取利息, 且其每年固定从该账户支出 100 美元. 画出利率取如下值时, 账户中的货币量随时间的变化图:
(a) 5% (b) 10% (c) 15%. 在每一种情形下, 给出 t 年时, 货币量的表达式.

16. 吗啡是一种用来缓解疼痛的药物. 其在人体内的半衰期为 2 小时. 假设通过静脉注射, 每小时向病人注射 2.5 mg, 且吗啡以一个正比于当前人体中该药物含量的固定比例从人体排出.

(a) 证明, 保留小数点后三位, 吗啡从人体排出的固定比例数为 $k = -0.347$.

(b) 写出 t 小时后, 人体中该药物含量 Q 所满足的微分方程.

(c) 使用上述微分方程找出均衡解. (一旦系统处于稳定, 这就是吗啡在人体中的长期含量.)

17. 每年, 某森林在每平方厘米的地面上会积累 3 g 的枯叶. 同时, 这些枯叶每年以 75%的速率连续分解. 写出 t 年时, 该森林每平方厘米的地面上枯叶量所满足的微分方程. 画出一个显示枯叶量趋于均衡水平的解曲线. 该均衡水平为多少?

18. 一个酗烟者每小时抽五支雪茄. 从每支雪茄中, 人体会吸收 0.4 mg 的尼古丁进入血液. 而尼古丁以正比于当前人体中其含量的固定比例从人体排出, 如果时间 t 以小时来计算, 该固定比例为 -0.346.

(a) 写出人体中尼古丁含量 N(以 mg 为单位) 所满足的微分方程, 其为时间 t(以小时为单位) 的函数.

(b) 假设开始时, 人体血液中不含任何尼古丁. 求解 (a) 中的微分方程.

(c) 该人从早晨 7 点醒来后就开始吸烟. 请问到晚上 11 点睡觉时 (即 16 小时后), 该人血液中尼古丁的含量为多少?

19. 某银行账户每年以 5%的连续复利获取利息, 该账户每年固定支出 12 000 美元, 共支出 20 年.

(a) 写出描述该账户中的现金流量 $B = f(t)$ 变化的微分方程, 其中 t 以年为单位.

(b) 给定初始现金流为 B_0, 求解该微分方程.

(c) 该账户初始存入多少钱, 20 年后该账户中的现金流量将恰好为零?

20. (a) 给出如下微分方程的均衡解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.5y(y-4)(2+y)$.

(b) 使用计算器或计算机, 画出该微分方程的斜率场. 并使用其判断每一个均衡解的稳定性.

21. (a) 给出如下微分方程的均衡解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5y-250$.

(b) 给出该微分方程的通解.

(c) 画出几个不同初始值下, 该方程的解曲线.

(d) 其均衡解是否是稳定的?

22. 图 10-36 给出了一微分方程的斜率场. 估计出该方程的均衡解, 并指出每一个解的稳定性.

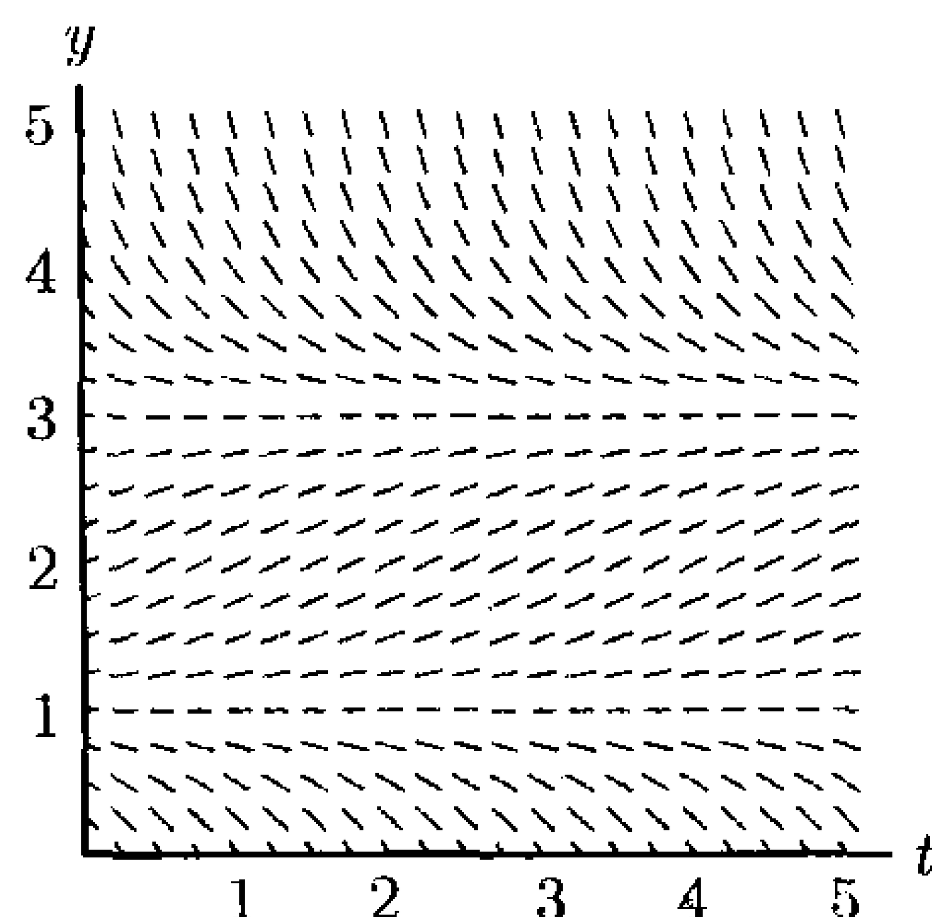


图 10-36

23. 根据一个简单的生理学模型, 一个运动型成年男性每磅体重每天需要吸收 20 卡路里热量才能维持其体重. 如果他每天消费的热量多于或低于其维持其体重所需要的热量, 那么其体重将以一个正比于其所消费的热量与维持其体重所需热量之差的固定比例变化, 该固定比例数为每卡路里 1/3500 磅. 假设某人每天固定摄入 I 卡路里. 设 $W(t)$ 为该人在 t 天时体重 (以磅为单位).

(a) 哪个微分方程以 $W(t)$ 为解?

(b) 求解该微分方程.

(c) 如果该人初始体重为 160 磅, 每天摄入 3000 卡路里, 画出 $W(t)$ 的图形.

24. 某商品初始销售价格为每单位 p 美元. 随着时间推移, 市场力量驱使其价格朝着均衡价格 p^* 变动, 在该均衡价格处供需平衡. Evans 价格调整模型认为价格 p 以正比于其与均衡价格之差的固定比例变动.

(a) 写出 p 随时间变化的微分方程.

(b) 求解 p.

(c) 画出几个不同初始价格在均衡价格之上和之下时, 该方程的解曲线.

(d) 随着 $t\to\infty$, p 将会发生什么变化?

25. 把一个番薯放入 200°C 的锅中加热, 其加热过程满足如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-k(H-200),\quad k\text{为某个正常数}.$$

(a) 如果番薯放入锅中时为, 20°C 求解微分方程.

(b) 使用加热 30 分钟后, 番薯的温度为 120°C, 求出 k 的值.

26. 一个冬天下午 1:00, 你在威斯康星的房子突然断了电, 而且因为停电你的供暖设备停止了工作. 停电时, 你的房间温度为 68°F. 下午 10:00 时, 房间温度为 57°F, 此时你注意到室外温度为 10°F.

(a) 假设你房间温度 T 服从牛顿温度下降法则, 写出 T 所满足的微分方程.

(b) 求解该微分方程, 并估计你第二天早晨 7:00 醒来时, 房间的温度. 你是否应该担心你的水管会冻冰呢?

(c) 在 (a) 中, 关于室外温度, 你做了什么假设? 给定这一 (或许不正确的) 假设, 你将上调还是下调你的估计? 为什么?

27. 一个侦探在早晨 9 点发现了一具被谋杀的受害者尸体. 当时, 尸体的温度为 90.3°F. 一小时后, 其温度为 89.0°F. 房间的温度一直维持在 68°F.

(a) 假设你房间温度 T 服从牛顿温度下降法则, 写出 T 所满足的微分方程.

(b) 求解该微分方程, 并估计凶杀案发生的时间.

28. 通过静脉注射, 每小时向病人注射某药物 r 毫克, 而该药物又以一个正比于当前人体中该药物含量的固定比例从人体排出, 假设该固定比例为 $\alpha > 0$.

(a) 假设一开始时, 求解 t 小时人体中该药物含量 Q(以毫克为单位) 所满足的微分方程. 你的答案中将含有常数 r 和 α. 画出 Q 随时间 t 的变化图. Q 的极限值 Q_∞ 将为多少?

(b) r 增加一倍将对 Q_∞ 有何影响? r 增加一倍又将对到达极限值的一半 $\frac{1}{2}Q_\infty$ 所花费的时间有何影响呢?

(c) α 增加一倍将对 Q_∞ 有何影响? 其又将对到达极限值的一半 $\frac{1}{2}Q_\infty$ 所花费的时间有何影响呢?

10.6 建立两个种群相互影响的模型

迄今为止, 我们已经借助微分方程模型化过单个种群的增长问题. 现在, 我们考虑两个相互影响的种群的增长问题, 这一问题需要两个微分方程来描述. 其例子包括两个竞争食物的物种; 一个物种猎食另一物种; 或者两个相互依存的物种 (共生).

10.6.1 捕食者–猎物模型: 知更鸟与蚯蚓

我们使用 Lotka-Volterra 方程来模型化一个捕食者–猎物模型 (A Predator-Prey Model). 假设我们看到一个简化而又理想化的情形: 在此情形下, 知更鸟是捕食者, 而蚯蚓是猎物[①]. 假设有 r 千只知更鸟, w 百万条蚯蚓. 如果没有知更鸟, 那么蚯蚓将按照如下方程呈指数增长:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = aw, \quad \text{其中 } a \text{ 为一正常数.}$$

如果没有蚯蚓, 那么知更鸟将没有食物, 因此其总数将按照如下方程衰减[②]:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -br, \quad \text{其中 } b \text{ 为一正常数.}$$

现在想象一下, 两个物种相互影响的影响. 显然, 知更鸟的出现对蚯蚓来说是件坏事, 因此,

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = aw - \text{知更鸟对蚯蚓的影响}$$

另一方面, 蚯蚓的出现对知更鸟来说是件好事, 因此,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -br + \text{蚯蚓对知更鸟的影响}$$

① 基于 Thomas A. McMahon 的工作.

② 这一假设预期知更鸟总数将呈指数衰减, 而不是在有限时间内消亡, 这是不实际的.

两个物种究竟是如何相互影响的呢？我们假设一个物种对另一物种的影响正比于他们 "遭遇次数"(当一只知更鸟吃掉一条蚯蚓时，就是一次遭遇) 遭遇次数可能正比于两个物种总数的积，因为，如果保持一个物种总数不变，遭遇次数应该直接正比于另一个物种的总数. 因此，我们假设

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = aw - cwr, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -br + kwr,$$

其中 c 和 k 为正常数.

为分析这一方程组，我们看一下当 $a = b = c = k = 1$ 时的特例：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = w - wr, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -r + wr.$$

相平面

为看出两个物种的增长，我们画出 r 和 w 随时间 t 的变化图. 然而，我们容易获得 r 随 w 的变化图. 如果我们用点 (w, r) 来表示任意时刻蚯蚓与知更鸟的数目，那么该点将随着种群数目的变化而移动. 那么这些点所构成的 wr 平面被称为相平面，且其点的路径被称为相轨迹.

为了给出相轨迹，我们需要建立一个直接联系 r 和 w 的微分方程. 而我们有两个微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = w - wr, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -r + wr.$$

由于 r 是 w 的函数，而 w 又是 t 的函数，由链式法则可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

这告诉我们 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}w} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}w/\mathrm{d}t}$. 因此，我们有 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}w} = \frac{-r + wr}{w - wr}$.

图 10-37 在相平面中给出了该微分方程的斜率场.

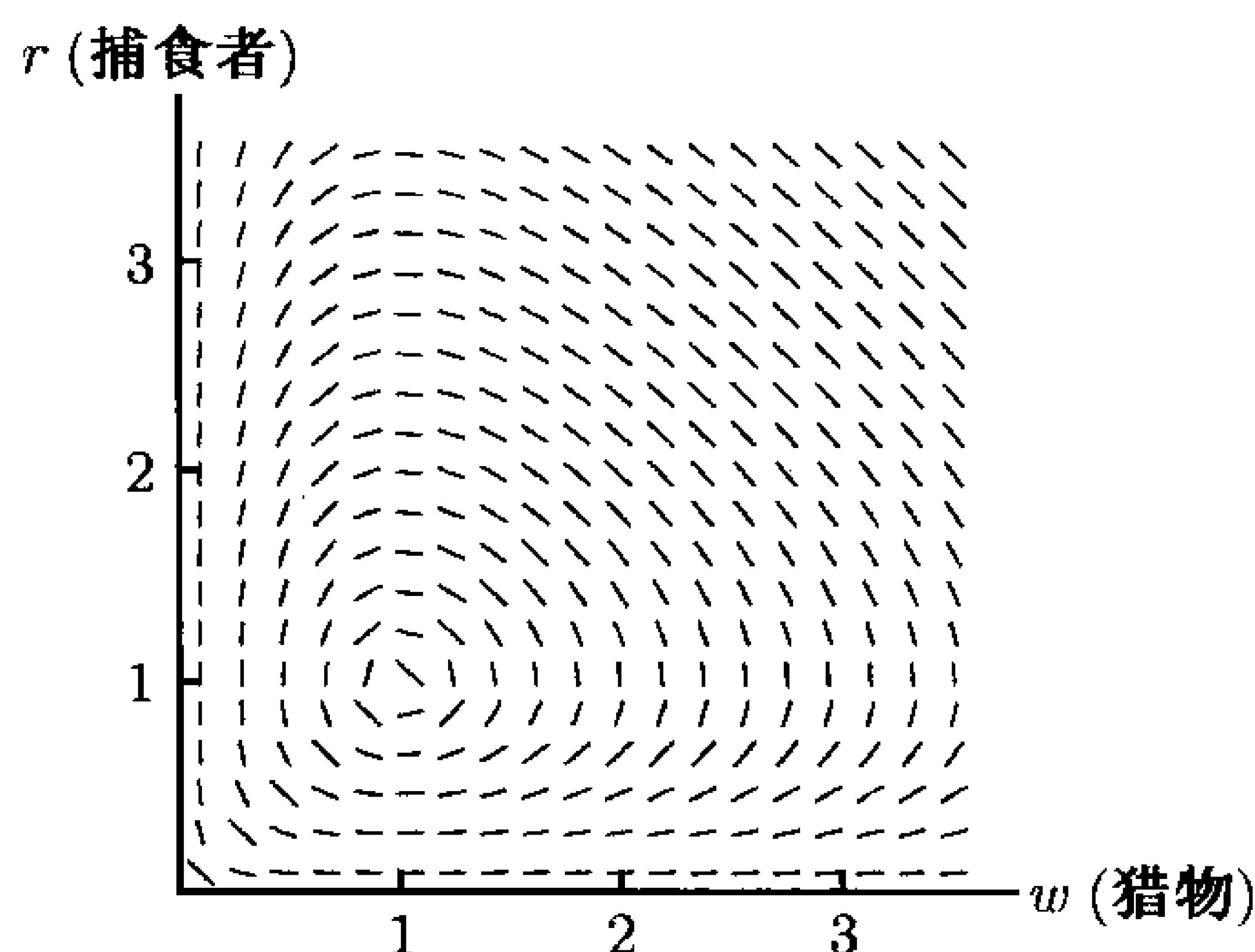


图 10-37 方程 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}w} = \frac{-r + wr}{w - wr}$ 的斜率场

斜率场与均衡点

通过观察斜率场, 我们可以获得一些上述方程解的信息. 在 $(1,1)$ 点, 没有画出其斜率, 这是因为 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}w$ 在该点没有定义, 因为此时两个种群的总数关于时间的导数均为零:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=1-1\cdot 1=0,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-1+1\cdot 1=0.$$

这意味着, 如果在某时刻, $w=1$ 且 $r=1$(即有 1 百万条蚯蚓和 1 千只知更鸟), 那么 w 和 r 将永远保持常数不变. 因此, 点 $w=1, r=1$ 是一个均衡解. 原点也是一个均衡解, 因为, 如果 $w=0$ 且 $r=0$, 那么 w 和 r 也将永远保持常数不变. 斜率场显示没有其他均衡点. 我们可以通过求解下述方程来验证这一结论:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w-wr=0,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r+wr=0,$$

这可以得出仅有 $w=1, r=1$ 和 $w=0, r=0$ 为这两个方程的解.

wr 相平面上的轨迹

现在, 我们来看看相平面上的轨迹. 相平面中曲线上的一点代表种群序对 (w,r) 在时刻 t 同时存在 (尽管 t 没有显示在图中). 在短期内, 种群序对可以被一个附近的点所表示. 随着时间的推移, 该有序对就形成了一条轨迹. 可以证明其轨迹是一条闭曲线. 参见图 10-38.

在其轨迹上, 点将向哪个方向移动呢? 我们看一下原微分方程组. 他们向我们表明了 w 和 r 如何随时同变化. 例如, 想象一下, 我们处于图 10-39 中的 P_0 点, 其中 $w=2.2$ 且 $r=1$; 那么

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r+wr=-1+(2.2)\times(1)=1.2>0.$$

因此, r 将增加, 点将按照图 10-39 所示的方向移动.

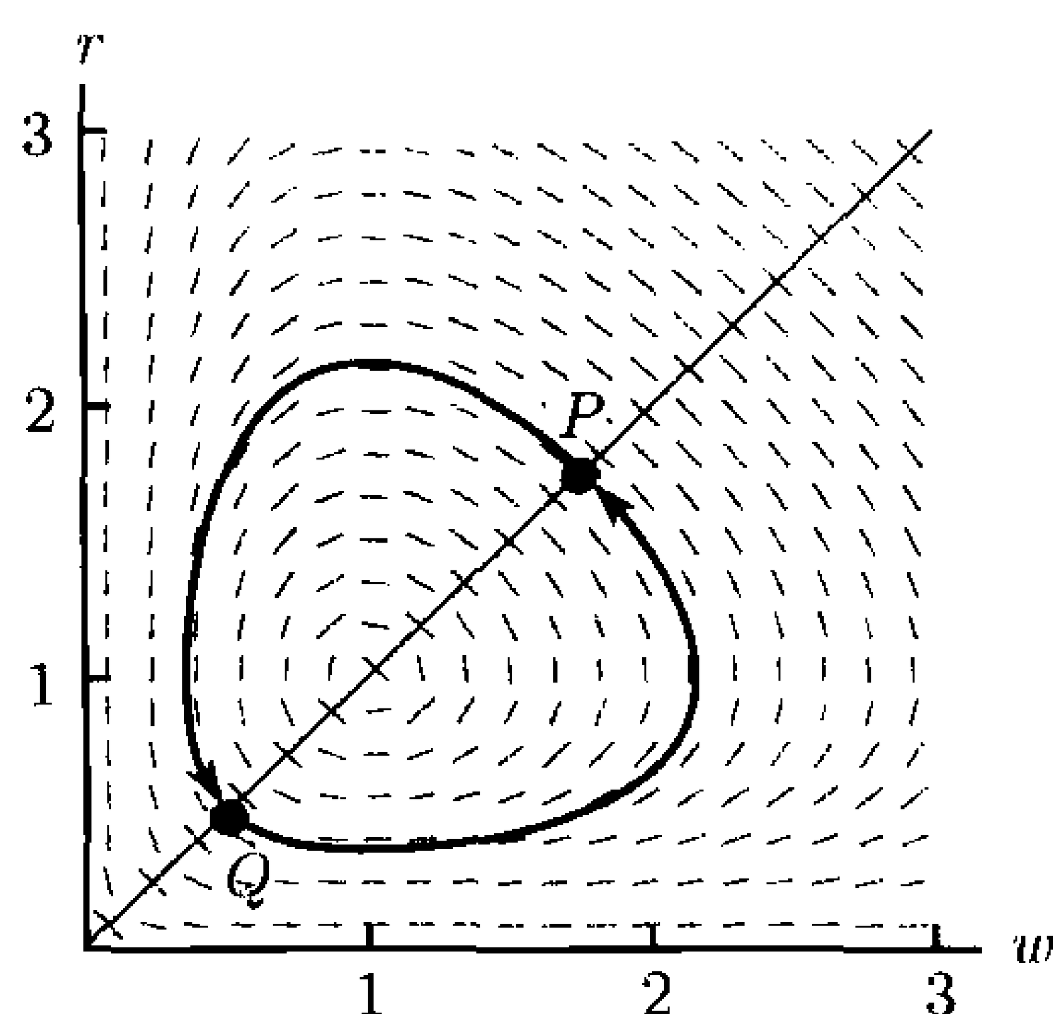


图 10-38 解曲线是闭的

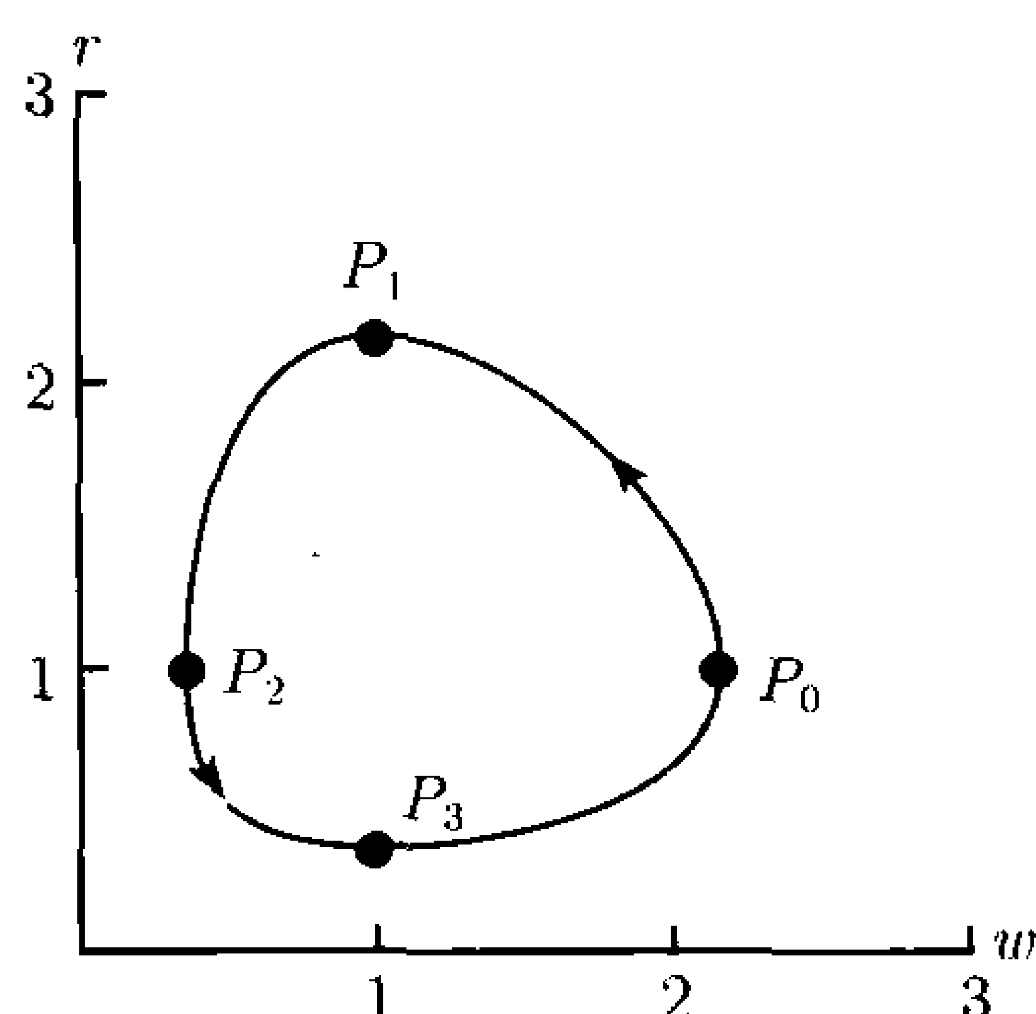


图 10-39 一条轨迹

例 1 假设在 t=0 时刻, 有 2.2 百万条蚯蚓和 1 千只知更鸟. 请描述蚯蚓和知更鸟将随时间如何变化.

解　过 P_0 点 (其中 $w=2.2$ 且 $r=1$) 点的轨迹显示在图 10-38 和图 10-39 中.

开始时, 由于有较多的蚯蚓, 因此, 知更鸟将会获得机会繁衍壮大. 因而, 知更鸟的种群总数将增加, 而蚯蚓的种群数目将减少, 直到大约 2.2 千只知更鸟和 1 百万条蚯蚓为止 (即图 10-39 中的 P_1). 此时, 由于蚯蚓太少而难以维持知更鸟的生存, 因此, 知更鸟开始减少而蚯蚓也将继续减少. 知更鸟将迅速减少, 直到剩下 1 千只知更鸟和 40 万条蚯蚓 (即图 10-39 中的 P_2). 由于此时知更鸟较少, 因此, 蚯蚓将开始增加, 而知更鸟将继续减少, 直到剩余 400 只知更鸟和 1 百万条蚯蚓 (即图 10-39 中的 P_3). 此时, 由于相对于较少的知更鸟而言有较多的蚯蚓, 因此, 两个种群都将增加. 种群数目将恢复到起始时刻的值 (因此, 轨迹形成了一条闭曲线) 且该周期将重新开始. □

本节的习题 17 给出了计算曲线坐标的近似值的方法.

种群数目为时间的函数

轨迹的形状向我们表明了种群数目如何随时间变化. 我们将在图 10-40 中, 使用这一信息来画出每一种群随时间变化的图. 轨迹是一个闭曲线意味着两个种群的数目将周期性地波动. 两个种群数目变化有相同的周期, 且蚯蚓数目达到最大的时刻早于知更鸟四分之一个周期.

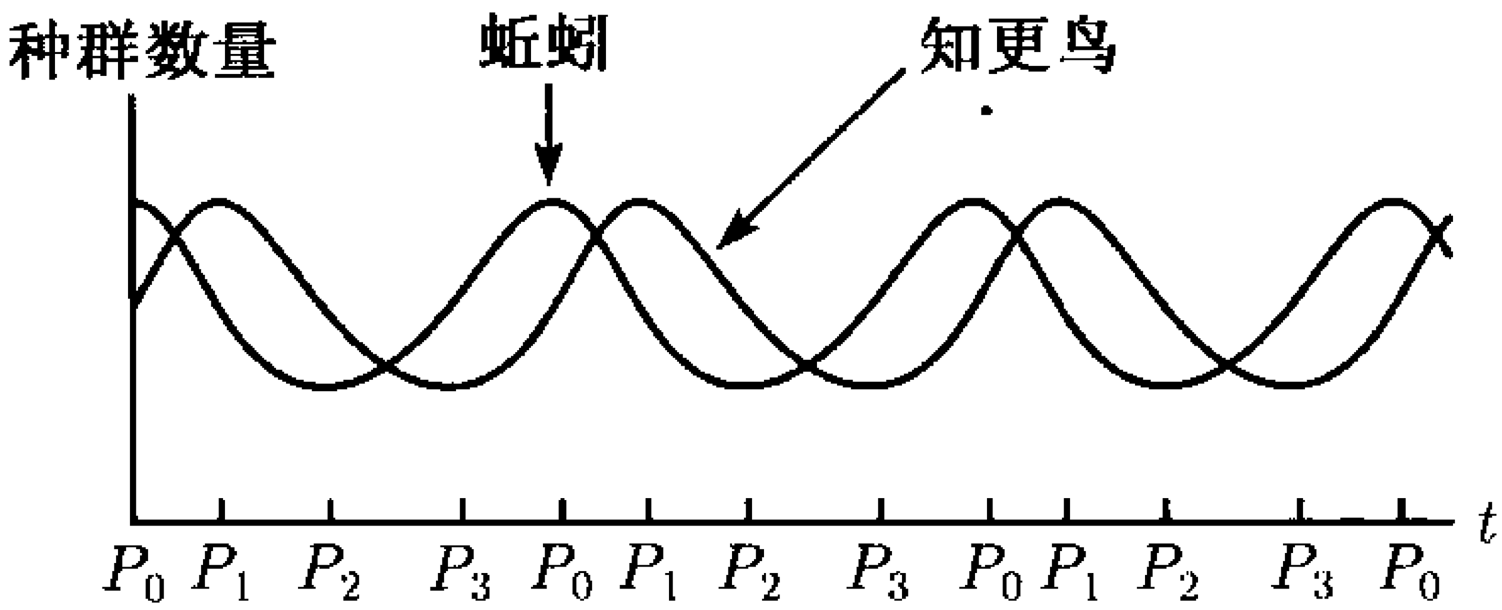


图 10-40　知更鸟 (以千只为单位) 与蚯蚓 (以百万条为单位) 的种群数量随时间变化图

猞猁和兔子

一个拥有长期数据的捕食者 - 猎物系统是加拿大的猞猁和兔子. 这两类动物都是毛皮猎人所喜好的, 而且哈德逊海湾公司关于这两个种群数目在 20 世纪大部分时间的纪录使得我们可以考察这两个种群数目的变化. 这些纪录显示这两个种群数目的上下波动相当有规律, 其周期大约为 10 年. 这一结果可以被 Lotka-Volterra 方程所预测.

10.6.2　种群相互影响的其他形式

这节所使用的方法也可以用来模型化其他类型的两个种群的相互影响, 比如竞争与共生.

例 2 描述由下列微分方程所模型化的两个种群 x 和 y 的相互影响.

(a) $\frac{dx}{dt} = 0.2x - 0.5xy$, $\frac{dy}{dt} = 0.6y - 0.8xy$

(b) $\frac{dx}{dt} = -2x + 5xy$, $\frac{dy}{dt} = -y + 0.2xy$

(c) $\frac{dx}{dt} = 0.5x$, $\frac{dy}{dt} = -1.6y + 2xy$

(d) $\frac{dx}{dt} = 0.3x - 1.2xy$, $\frac{dy}{dt} = -0.7y + 2.5xy$

解 (a) 如果我们忽略相互影响项 xy, 我们有 $\frac{dx}{dt} = 0.2x$, $\frac{dy}{dt} = 0.6y$, 因此, 两个种群数目均呈指数增长. 由于相互影响项是负的, 因此, 两个物种将彼此限制对方的增长, 比如当鹿和麋为共同的食物而竞争时.

(b) 如果我们忽略相互影响项, 两个种群数目均呈指数下降. 然而, 两个相互影响项均为正, 这意味着两个物种将彼此从对方获益, 因此, 它们的关系是共生的. 一个例子是植物通过昆虫授粉.

(c) 忽略相互影响项, x 增加而 y 减少. 相互影响项意味着 y 从 x 中获益, 鸟儿筑巢从树木上获益属于这一情形.

(d) 忽略相互影响项, x 增加而 y 减少. 相互影响项意味着 y 损害 x 而 x 从 y 中获益. 这是一个捕食者–猎物情形, 其中, y 是捕猎者, 而 x 是猎物. □

习题

习题 1~3 给出了两个种群 x 和 y 的增长率 (以千来度量).

(a) 用语言描述一下, 当一个种群不存在时, 另外一个种群数目将发生什么变化.

(b) 用语言描述一下, 两个物种如何相互影响. 并说明种群数目按照所示方程变化的理由, 并给出按照这一方式相互影响的物种的例子.

1. $\frac{dx}{dt} = 0.01x - 0.05xy$, $\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.08xy$

2. $\frac{dx}{dt} = 0.01x - 0.05xy$, $\frac{dy}{dt} = 0.2y - 0.08xy$

3. $\frac{dx}{dt} = 0.2x$, $\frac{dy}{dt} = 0.4xy - 0.1y$

4. 下列微分方程组代表两个种群 x 和 y 的相互影响.

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2xy, \quad \frac{dy}{dt} = -y + 5xy$$

(a) 描述一下两个物种如何相互影响, 以及当一个种群不存在时, 另外一个种群数目将如何变化? 它们是互惠的还是互相有害的?

(b) 如果 $x = 2$ 且 $y = 1$ 时, x 是增加还是减少? y 又是增加还是减少呢? 验证你的答案.

(c) 给出一个关于 $\frac{dy}{dx}$ 的微分方程.

(d) 使用计算机或者计算器画出 (c) 中微分方程的斜率场.

(e) 在你的斜率场中, 画出起点在 $x=2, y=1$ 的轨迹, 并描述种群数目如何随着时间变化.

构造一个微分方程组来模型化习题 5~7 的情形. 你可以假设所有的比例常数为 1.

5. 两个相互竞争的公司. 没有对方, 每个公司都将会更好, 而且两个公司的存在都有害于对方. 两个公司的价值由 x 和 y 表示.

6. x 表示跳蚤的数目. y 表示狗的数目. 跳蚤需要狗来生存. 而狗的数目不受跳蚤数目的影响.

7. 两种化学物质的浓度分别定义为 x 和 y. 单独情况下, 这两种物质均以一个正比于其浓度的速率衰减. 放于一起时, 它们相互作用生成第三种物质. 随着第三种物质的生成, 原来两种物质的浓度都将降低.

8. 两个公司 A 和 B, 相互竞争. 设 x 表示公司 A 的净值 (以百万美元为单位), y 表示公司 B 的净值 (以百万美元为单位). 图 10-41 给出了四个轨迹图. 对于每个轨迹, 描述其初始条件. 还要描述开始发生了什么: 公司开始时是获益还是亏损? 长期来看又将会有何变化?

对于习题 9~19, 设 w 表示生活在一个岛屿上的蚯蚓数目 (以百万条为单位), r 表示知更鸟数目 (以千为单位). 假设 w 和 r 满足下列微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w-wr,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r+wr,$$

图 10-42 给出其对应的斜率场.

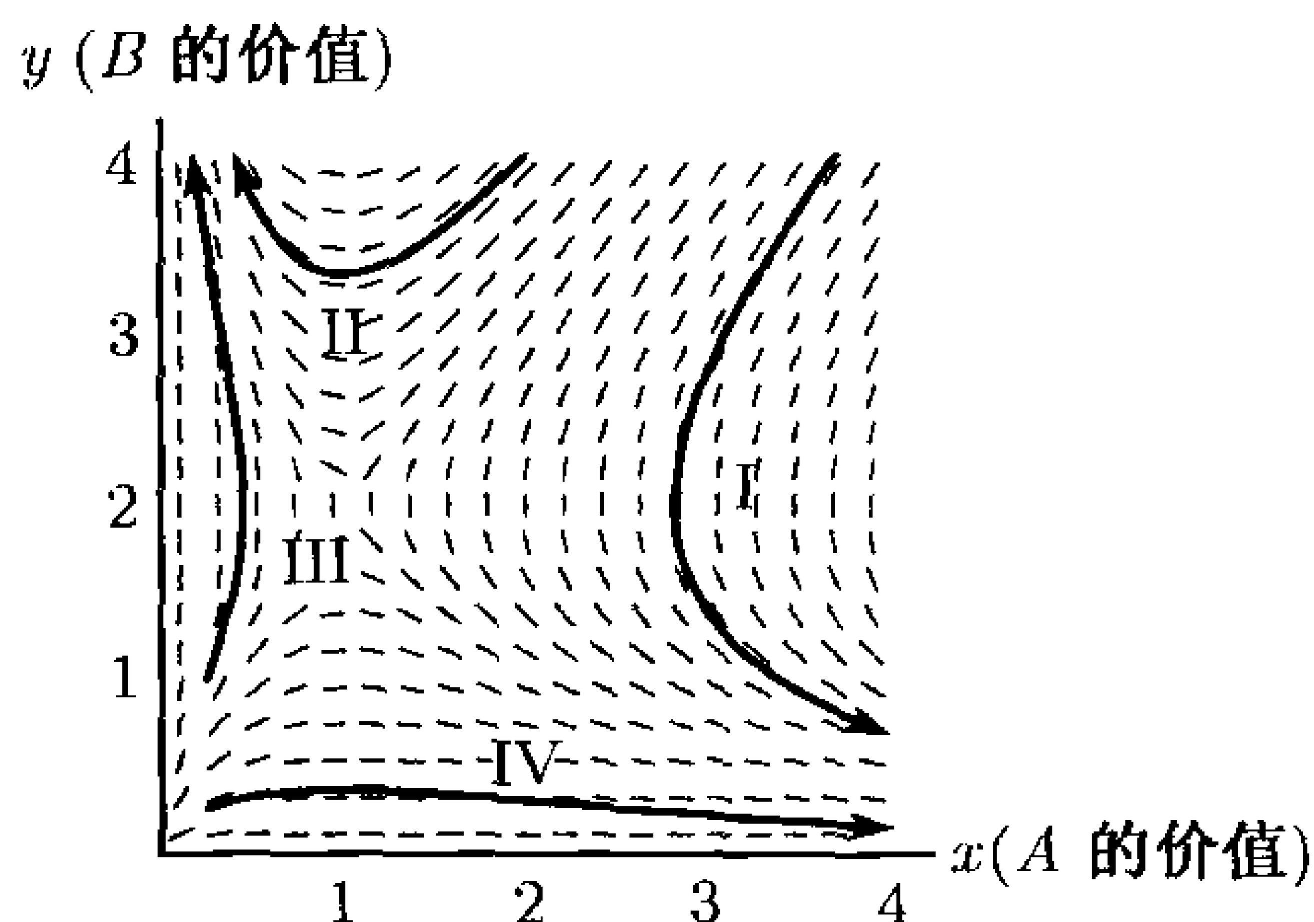


图 10-41

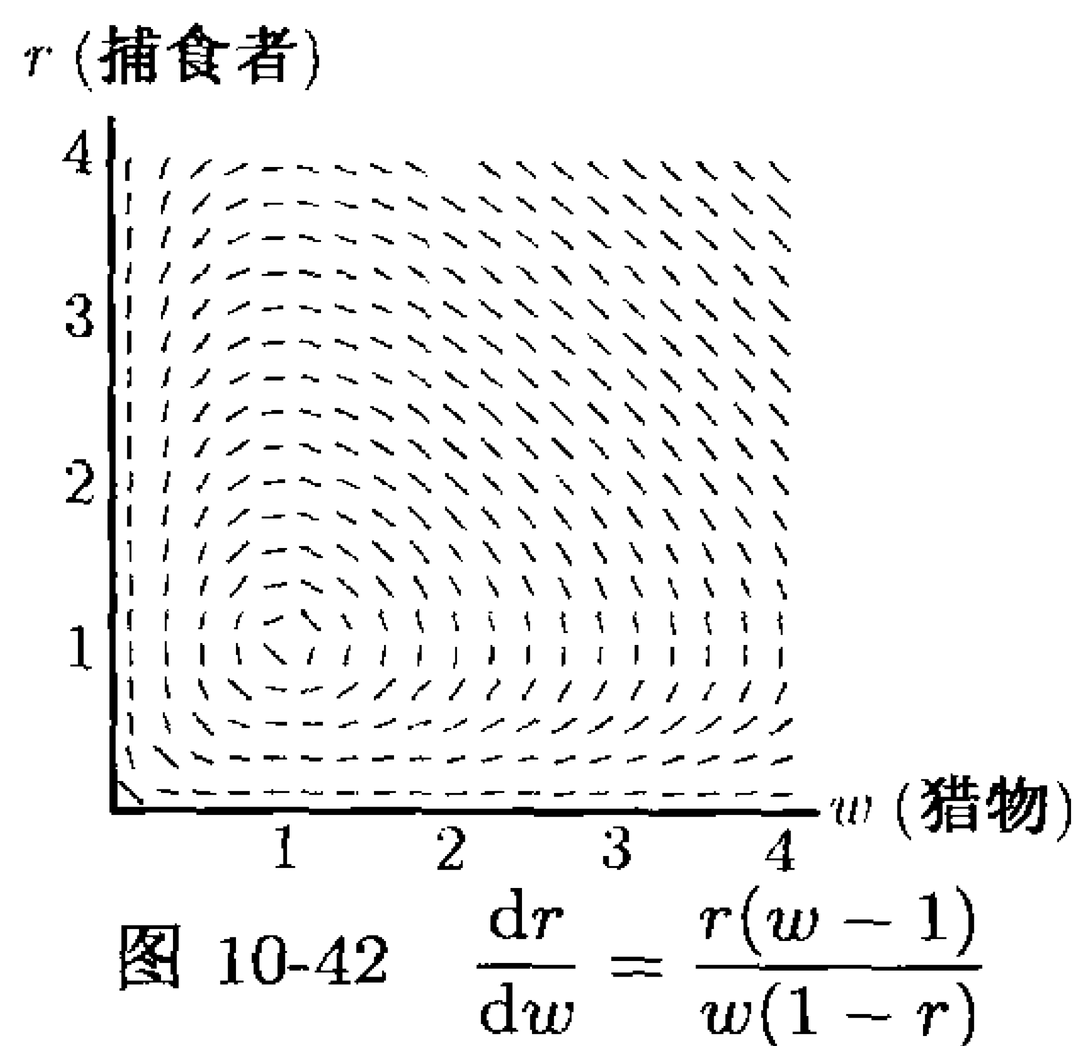


图 10-42 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}w}=\dfrac{r(w-1)}{w(1-r)}$

9. 解释为什么这两个微分是两个物种数目相互影响的一个合理模型. 并解释为什么模型中的符号采用这一形式.

10. 当岛屿上没有知更鸟或没有蚯蚓时, 求解上述微分方程.

11. 描述并解释你所观察到斜率场中的对称性. 这一对称性对解曲线意味着什么?

12. 假设 $t=0$ 时, $w=2$ 且 $r=2$. 请问开始时, 知更鸟和蚯蚓的数目是增加还是减少? 长期来看将会有何变化?

13. 对于问题 12 中所讨论的情形, 估计知更鸟数目的最大值和最小值. 当知更鸟数目达到最大时, 将有多少条蚯蚓?

14. 在同一坐标轴上, 画出 w 和 r(蚯蚓和知更鸟的数目) 随时间的变化图. 在不考虑时间 t 的单位下, 使用初始条件 w 为 1.5 和 r 为 1, 画出 w 和 r 随时间的变化图.

15. 由于岛上的人们十分喜爱知更鸟, 所以他们决定从英国进口 200 只知更鸟, 这将增加其

初始数目到 $r=2.2(t=0$ 时). 请问这是否有意义? 为什么?

16. 假设 $t=0$ 时, $w=3$ 且 $r=1$. 请问开始时, 知更鸟和蚯蚓的数目是增加还是减少? 长期来看将会有何变化?

17. 在 $t=0$ 时, 有 220 万蚯蚓和 1 千知更鸟.

(a) 使用微分方程计算 $t=0$ 时, $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 的值.

(b) 使用初始值和 (a) 部分的答案估计 $t=0.1$ 时, 知更鸟和蚯蚓的数目.

(c) 使用 (a) 部分与 (b) 的方法, 估计 $t=0.2$ 和 0.3 时, 知更鸟和蚯蚓的数目.

18. (a) 假设有 300 万条蚯蚓, 2 千知更鸟. 在图 10-42 的斜率场中, 确定对应于这一情形的点, 并画出这一点的轨迹.

(b) 沿着这一轨迹, 点将沿着什么方向移动? 在轨迹上标上箭头以指明移动方向, 并使用这节给出的关于 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 的方程证明你的答案.

(c) 知更鸟的数目最大能够达到多大? 当知更鸟数达到最大值时, 蚯蚓的数目为多少?

(d) 蚯蚓的数目最大能够达到多大? 当蚯蚓数达到最大值时, 知更鸟的数目为多少?

19. 如果初始时, 有 50 万蚯蚓和 3 千知更鸟, 请再次回答 18 题中的问题.

20. 对于例 2 中的每个方程组, 当 $x=2$ 且 $y=2$ 时, 请确定 x 是增加还是减少? 而 y 又是增加还是减少呢?

21. 对于例 2 中的每个方程组, 请写出关于 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 的微分方程. 并使用计算机或计算器画出 $x, y>0$ 时的斜率场. 然后, 画出过点 $x=3$, $y=1$ 的轨迹.

10.7 建立疾病传播模型

微分方程可以用于预测一个疾病暴发后何时严重到被称为*流行性疾病*[①]的程度, 也可用于确定为防止一场流行病需要给多少人接种疫苗. 下面, 我们考虑一个简单的例子.

10.7.1 发生在一家英国寄宿学校的流感

1978 年 1 月过完寒假后, 一家男孩寄宿学校的 763 名学生返回该校. 返校一周后, 一名男孩感染了流感, 接下来立即又有两人感染. 到月末时, 有近一半的学生感染上了流感. 直到二月中旬[②], 该流行病终止时, 该校大部分学生均受到此次流感的影响.

能够及时预测将有多少人受感染, 并判断出何时应采取措施控制一场流行性疾病, 是英国公共疾病控制中心和美国疾病控制预防中心的一项重要职责.

① 事实上, 一个疾病什么时候被称为流行病并不总是明确的. 医学上通常把一个暴发频率高于通常预期的疾病归为流行病, 这带来一个问题: 究竟何为通常的预期. 例如, 见 C. H. Hennekens 和 J. Buring 合写的*Epidemiology in Medicine*(Boston: Little Brown, 1987).

② 数据来源于 the Communicable Disease Surveillance Centre(UK); 1978 年 4 月发表在 British Medical Journal 的报告: "Influenza in a Boarding School", 和由 J. D. Murray 撰写的*Mathematical Biology* (New York: Springer Verlag, 1990).

10.7.2 *S-I-R* 模型

我们把一个流行性疾病学中广为应用的模型——*S-I-R* 模型——应用于上述寄宿学校流感问题的研究. 设想把该校的学生分为三类:

S=易受感染的人数——那些尚未生病但可能会生病的人数

I=已感染人数——那些当前已经被感染的病人

R=已康复人数或被排除的人数——那些已经被感染过并且不会再感染他人或重新再被感染的人.

在这一模型中, 因为, 不断有人被感染, 所以易受感染的人数将随着时间不断减少. 我们假设人们的被感染率正比于与已感染病人相接触易受感染的人数. 我们预计这两组人的接触人数与 S 和 I 均呈正比关系. (如果 S 翻倍, 我们预计接触人数将翻倍; 同理, 如果 I 翻倍, 我们预计接触人数也将翻倍). 那么, 我们假设接触人数正比于 S 与 I 之积, SI. 换句话说, 我们假设对于某常数 $a>0$, 有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-(\text{易受感染者的被感染率})=-aSI$$

(使用负号是由于 S 是递减的)

已感染人数在两个方向上变化: 新的被感染的人数的加入和其他的病人被排除掉. 新感染的病人是那些离开易受感染组的人数, 其人数以 aSI 比率增加 (这次带有正号). 人们离开已感染人群组, 可能是因为他们已经康复 (或者病死), 或者因为他们从其他人群组中被排除并不再感染其他人. 我们假设人们以正比于已感染人数的比例, 或者以比率 bI 被排除出其他组, 其中 b 为正常数. 那么,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\text{易受感染者的被感染率}-\text{已感染者被排除率}=aSI-bI.$$

假设已从疾病中恢复的人不再成为易受感染者, 已康复人数以比率 bI 增加, 因此, $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=bI$.

我们假设已经患过流感的人将会对其形成免疫, 即患过流感的人不会再患流感. (至少在短期内, 对于一次流感而言, 这一假设是正确的.)

我们可以利用这样的事实, 即 $S+I+R$ 总数不变. (总数即学校中男孩的总人数在整个疾病流行过程中不变; 参见习题第 2 题.) 这样一旦我们知道了 S 和 I 的值, 我们就可以计算出 R, 所以现在我们来求解方程组:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-aSI,$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=aSI-bI.$$

常数 a 和 b

常数 a 度量了疾病的传染性 —— 即度量了疾病从已感染病人传染给疑似病人的迅速程度. 在这一流感案例中, 我们从医疗记载中得知, 这次流行性疾病开始于

一个患病的男孩, 接着大约一天后又有两个人患此病. 那么, 当 $I=1$ 时, $S=762$, 我们有 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t \approx -2$, 因此, 我们可以粗略获得 a 的近似值[①]:

$$a=-\frac{\mathrm{d}S/\mathrm{d}t}{SI}=\frac{2}{762\cdot 1}=0.0026.$$

常数 b 代表已感染病人从已感染人群组中的排除率. 在这一流感案例中, 孩子们通常在生病一两天内便被带到医院就医. 假设每天有一半的已感染病人被排除, 我们取 $b\approx 0.5$. 那么, 我们的方程变为:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-0.0026SI$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0.0026SI-0.5I.$$

10.7.3 相平面

如同 10.6 节的方法, 我们在相平面中观察轨迹. 考虑 I 为 S 的函数, 而 S 为 t 的函数, 我们使用链式法则可得:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=\frac{\mathrm{d}I/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S/\mathrm{d}t}.$$

带入 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t$, 我们得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=\frac{0.0026SI-0.5I}{-0.0026SI}.$$

假设 I 非零, 该方程可近似简化为

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=-1+\frac{192}{S}.$$

图 10-43 给出了该微分方程的斜率场. 图 10-44 给出了初始条件为 $S_0=762$, $I_0=1$ 时的轨迹. 时间由箭头表示, 该箭头指明了点沿着轨迹移动的方向. 疾病开

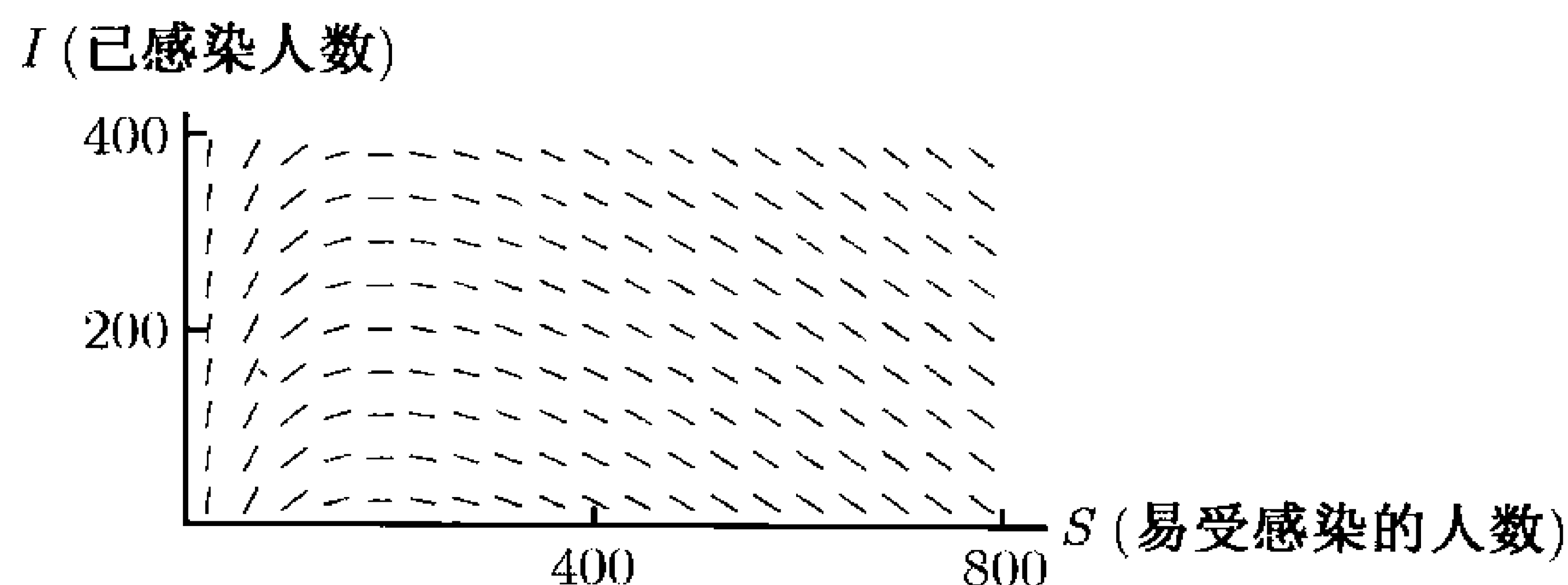


图 10-43 $\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=-1+\dfrac{192}{S}$ 的斜率场

① a 和 b 的值接近于 J. D. Murray 在 Mathematical Biology (纽约: Springer Verlag, 1990) 一书中所获得的值.

始于点 $S_0 = 762, I_0 = 1$. 一开始, 越来越多的人受感染, 而易受感染的人越来越少. 换句话说, S 下降而 I 增加. 后来, 随着 S 继续下降 I 开始下降.

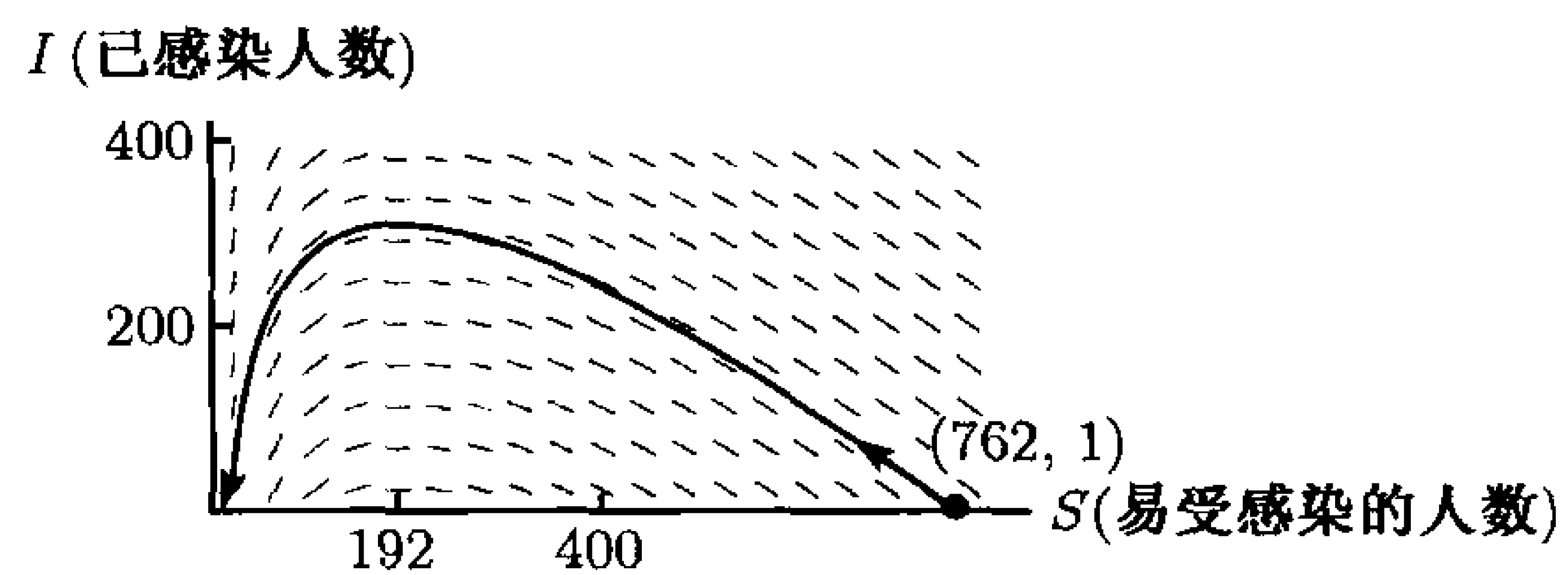


图 10-44 过 $S_0 = 762, I_0 = 1$ 的轨迹

SI 相平面可以告诉我们什么

为了获知疾病如何演变, 让我们看看图 10-44 的曲线形态. I 的值首先增加, 然后不断下降直到降为零. I 的峰值出现在 $S \approx 200$ 时. 通过求解下式, 我们确定峰值出现的准确时间:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = -1 + \frac{192}{S} = 0,$$

其解为 $S = 192$.

注意到, I 的峰值总是出现在相同的 S 值, 即 $S = 192$ 时. 其图像显示: 如果轨迹开始于 $S_0 > 192$, 那么 I 先增后减直到最后降为零. 另一方面, 如果 $S_0 < 192$, 那么由于 I 迅速下降, 因此将没有峰值.

对于这一例子, $S = 192$ 被称为**阈值**. 如果 S_0 在 192 附近或低于 192, 那么将不会有流行性疾病暴发. 如果 S_0 显著高于 192, 一场流行性疾病将暴发[①].

相图标明了 I 的最大值约为 300, 这是在任意时间时, 感染人数所能达到的最大值. 其次, 轨迹所穿过的 S 轴的点代表流行性疾病已经结束的时刻 (因为 $I = 0$). 那么, S 的截矩显示了有多少人从没有感染流感, 因此, 也就显示了有多少人生病.

10.7.4 阈值

对于一般的 SIR 模型, 我有如下结果:

$$\text{阈值} = \frac{b}{a}.$$

如果初始易受感染的人数 S_0 在 $\frac{b}{a}$ 之上, 将有一场流行性疾病暴发; 如果 S_0 在 $\frac{b}{a}$ 之下, 将不会有流行性疾病暴发. 参见习题 11.

① 这里我们使用 J. D. Murray 关于流行性病暴发的定义 —— 已感染人数从初始值 I_0 开始增加并暴发. 见*Mathematical Biology* (纽约: Springer Verlag, 1990).

应该有多少人需要接种疫苗呢

面对一场流感的暴发或者 20 世纪 80 年代几所美国大学校园发生的麻疹, 许多机构考虑实施一个注射疫苗计划. 为了控制一场流行性疾病暴发, 到底需要多少学生接种疫苗呢? 为回答这一问题, 我们假设注射疫苗可以把人们从 S 组中排除掉 (不会增加 I), 这意味着, 把轨迹上初始点沿着 S 轴移到其左边. 为了避免一场流行性疾病, 初始值 S_0 应位于阀附近或低于阀值. 因此, 如果除了 192 名学生外, 其余学生均接种疫苗的话, 寄宿学校流行性病将不会暴发.

S 和 I 随时间变化图

在图 10-44 的轨迹上, 遍及整个流行性疾病暴发期间, 易受感染的人数一直下降. 这是因为人们开始生病, 并康复, 此后将不再被感染. 轨迹也表明感染人数先增后减. 图 10-45 给出了 S 和 I 随时间的变化图.

为了给出时间坐标的变化情况, 我们需要使用数值方法. 结果显示, 疾病发生 6 天后, 感染人数达到其峰值, 尔后开始下降. 20 天后, 整个疫情结束.

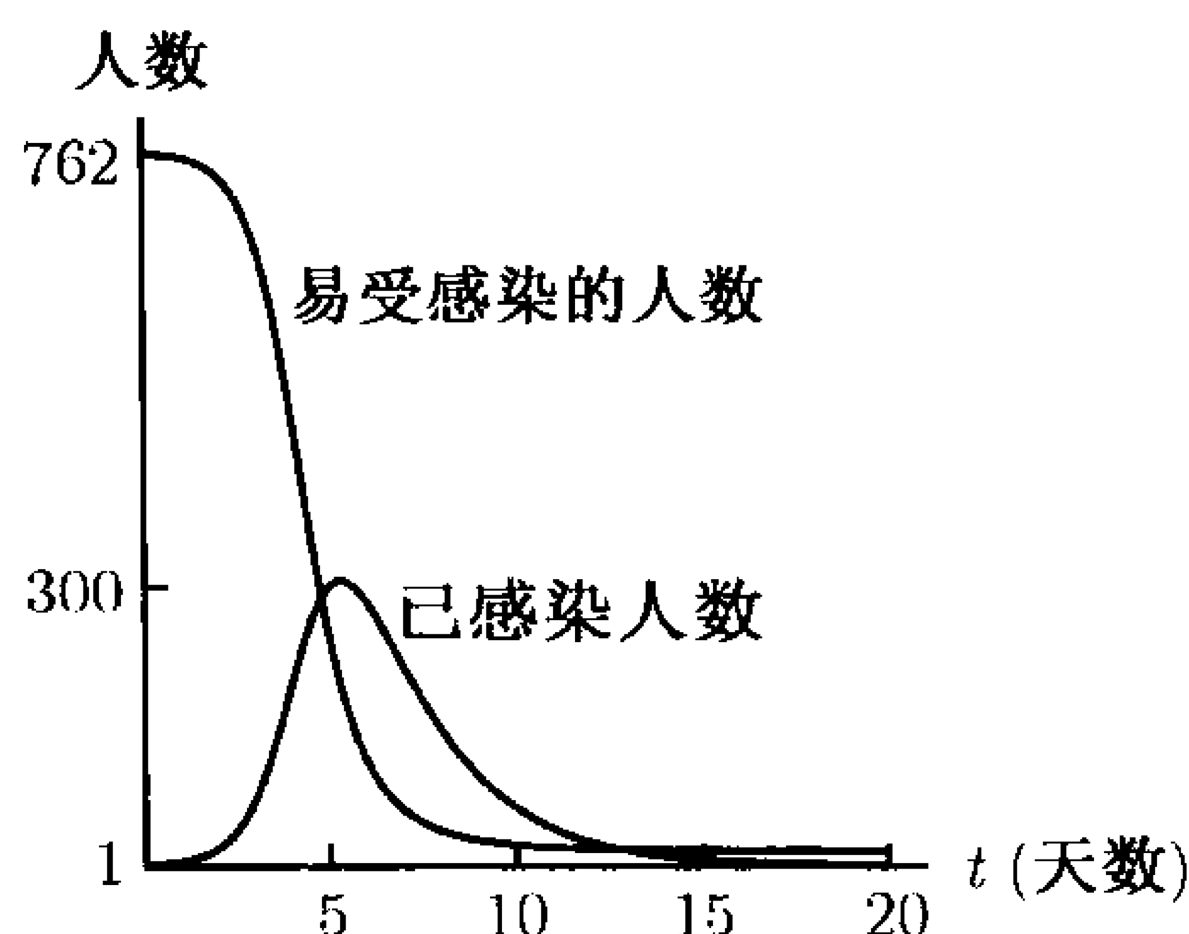


图 10-45 流感随时间的演变

习题

1. 设 I 为一次疾病暴发中的已感染人数而 S 为易受感染的人数. 解释为什么使用如下模型来刻画两组人群的相互影响是合理的:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -aSI,$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = aSI - bI,$$

其中 a 和 b 为正常数.

并解释为什么使用模型中所使用的符号? 又为什么在两个方程中的常数 a 是相同的?

2. 证明如果 I, S 和 R 满足问题 1 中的微分方程, 那么总数 $I+S+R$ 为常数.

3. 解释你如何能由图 10-44 中的轨迹图形得出在那所英国寄宿学校里的大部分学生将会患流感.

4. (a) 在一个拥有 150 名学生的学校, 已开始有一名学生患上流感. 请问 S_0 和 I_0 为多少?

(b) 使用上述 S_0 和 I_0 的值及方程 $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0.0026SI - 0.5I$, 确定开始时该校的感染人数是增加还减少. 关于疾病的传染问题, 上述信息可以告知我们什么?

5. 假设学校拥有 350 名学生, 重新考虑题 4 中的问题.

6. (a) 在图 10-43 中关于 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}S$ 的斜率场中, 画出通过点 $I=1$, $S=400$ 的轨迹.

(b) 当已感染人数达到最大值时, 还有多少易受感染者?

7. 使用图 10-45 估计已感染人数的最大值. 这意味着什么? 它又发生在何时?

8. 比较由下列微分方程所描述的疾病模型与本节中给出的流感模型. 找出与下列微分方程相一致的描述. 并对没有相匹配的描述, 给出与其相对应的微分方程.

(I) $\dfrac{dS}{dt} = -0.04SI \quad \dfrac{dI}{dt} = 0.04SI - 0.2I$

(II) $\dfrac{dS}{dt} = -0.002SI \quad \dfrac{dI}{dt} = 0.002SI - 0.3I$

(III) $\dfrac{dS}{dt} = -0.03SI \quad \dfrac{dI}{dt} = 0.03SI$

(a) 更多的人被感染; 已感染人数被排除掉的速度更慢.
(b) 更多的人被感染; 已感染人数被排除掉的速度更快.
(c) 更少的人被感染; 已感染人数被排除掉的速度更慢.
(d) 更少的人被感染; 已感染人数被排除掉的速度更快.
(e) 已感染人数从来没有被排除掉.

9. 对于问题 8 中的方程组 (I), 它的阀值为多少?

10. 对于问题 8 中的方程组 (II), 假设 S_0=100, 请问开始时, 疾病是否扩散? 如果 S_0=200, 情况又如何呢?

11. 设 I 和 S 满足问题 1 中的微分方程, 并假设 $I \neq 0$.

(a) 如果 $dI/dS = 0$, 给出 S 的值.
(b) 证明如果 S 高于 (a) 部分中所获得的值, 那么 I 将增加; 证明如果 S 低于 (a) 部分中所获得的值, 那么 I 将下降.
(c) 解释你如何知道 (a) 部分中所获得 S 值为阈值.

12. 第一次世界大战期间, 一种特殊的致命性流感夺走了全球约 4000 万个生命[①]. 该流行性疾病首先发生于驻扎在波士顿外围的一个拥有 45 000 名士兵的军营, 1918 年 9 月 7 日第一名士兵感染该病毒. 从 9 月 7 日算起, 随着时间 t(以天为单位) 变化, SIR 模型如下:

$$\frac{dS}{dt} = -aSI$$

$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI$$

通过估计获得模型中的常数 a 和 b 分别为 0.000 267 和 9.865.

(a) 初始值 S_0 和 I_0 为多少?
(b) 请解释该模型如何预期了该流行性疾病发展趋势.
(c) 给出关于 dI/dS 的微分方程. 画出其斜率场, 并估计在这场疾病中, 被感染的士兵总数.
(d) 给出关于 dI/dS 的微分方程的解析解. 并使用该解, 给出在这场疾病中, 被感染的士兵总数的近似值.

---

① "Capturing a Killer Flu Virus", J. Taukenberger, A. Reid, T. Fanning, 《科学美国人》第 292 卷, No.1, 2005 年 1 月.

本章概要

- **微分方程术语**

  解族 (系), 特解, 初始条件, 稳定和非稳定均衡解
- **斜率场**

  可视化一个微分方程的解
- **给出微分方程的解析解**

  $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = ky$的解, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = k(y - A)$的解, Logistic 模型的解
- **使用微分方程建模**

  增长和衰减, 湖泊的污染, 人体中的药物量, 牛顿冷热法则, 公司净值
- **微分方程组**

  两个物种或商业体的相互影响, 捕食者 – 猎物模型, 疾病的传播

复 习 题

1. $y = x^3$ 是否是微分方程 $xy' - 3y = 0$ 的解? 证明你的答案.

2. 对于某一量 y, 假设 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \sqrt{y}$; 假设增长率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 在每单位时间内近似为常数且 y 的初始值为 100. 在下表中填入 y 值.

t	0	1	2	3	4
y	100				

3. 图 10-46 和图 10-47 给出了方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1 + x$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1 + y$ 的斜率场.

(a) 请指出每个方程所对应的斜率场.

(b) 在每个斜率场中, 画出过原点的解曲线.

(c) 对于每个斜率场, 给出所有的均衡解, 并指出每个均衡解的稳定性.

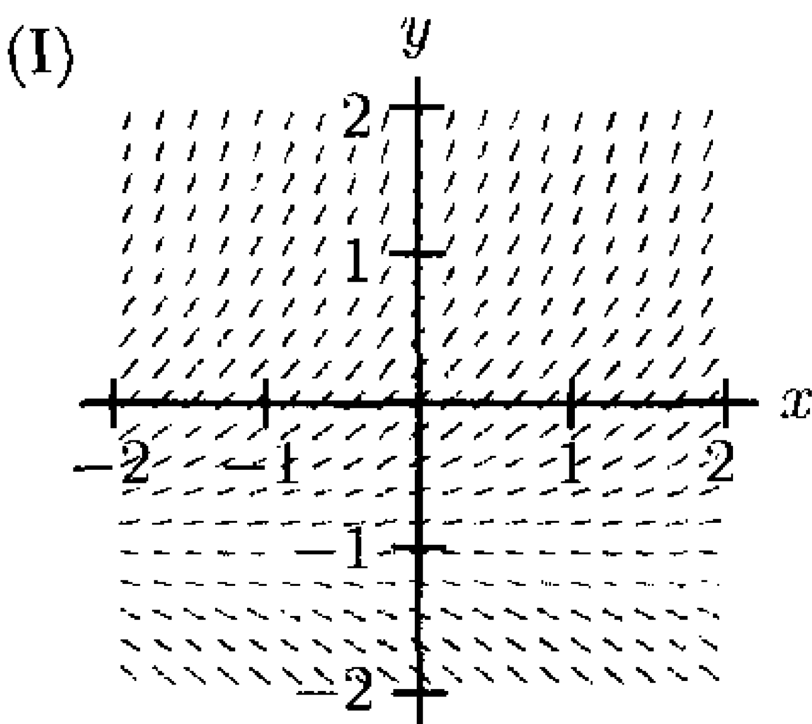


图 10-46

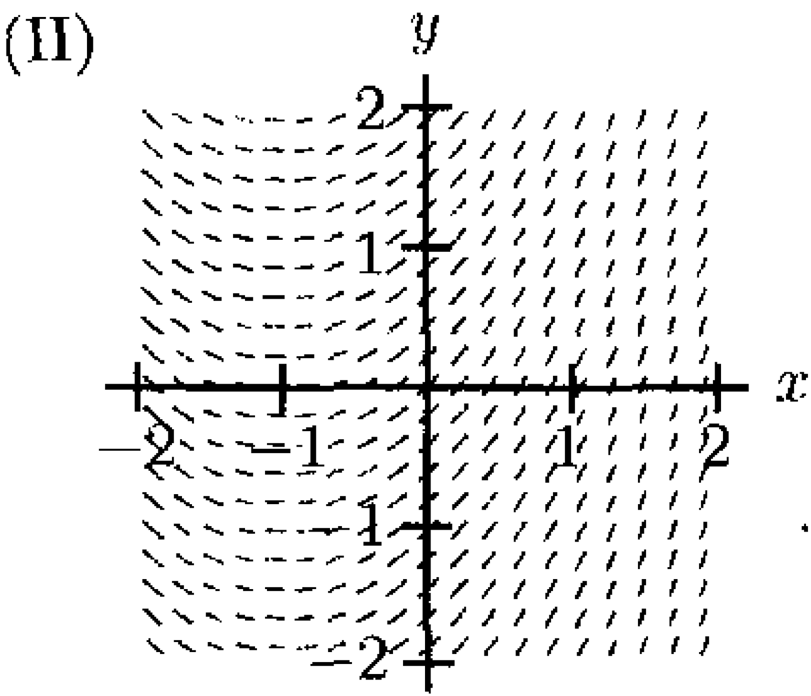


图 10-47

4. 图 10-48 给出了方程 $y' = x + y$ 的斜率场.

(a) 画出过下列点的解曲线.

(i) $(0,0)$ (ii) $(-3,1)$ (iii) $(-1,0)$

(b) 在每个斜率场中, 画出过原点的解曲线.

(c) 对于每个斜率场, 给出所有的均衡解, 并指出每个均衡解的稳定性.

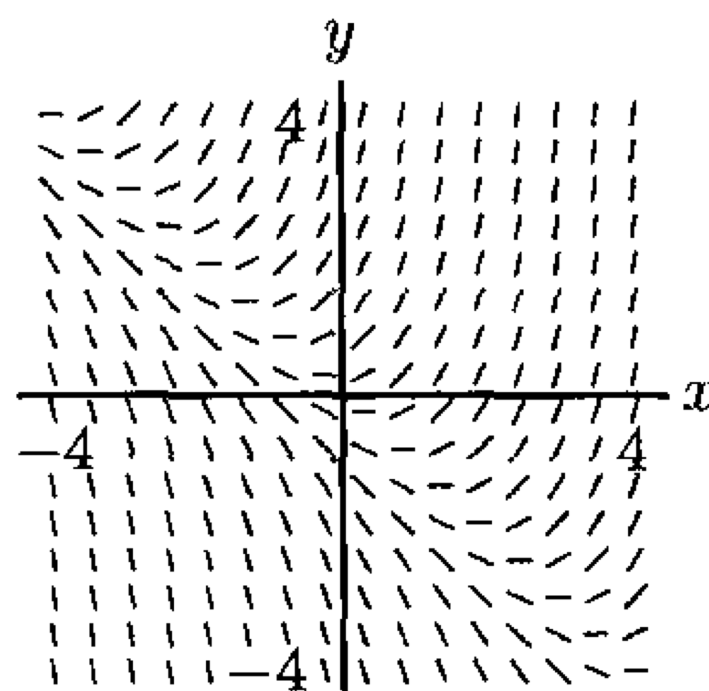


图 10-48 方程 $y' = x + y$ 的斜率场

5. 给出微分方程的 $\frac{dy}{dt} = 2t$ 的通解.

6. 从温度为 40°F 的冰箱中取出一瓶桔子汁放在温度为 65°F 房中. 请写出该瓶桔子汁的温度随时间变化的微分方程. 求出该方程的解, 并画出其解的图形.

7. Gompertz 方程为 $y' = -ay\ln(y/b)$, 其中 a 和 b 为正常数. 该方程描述了动物体内肿瘤增长过程. 借助图 10-49 和图 10-50, 说明该方程在 $a = 1$, $b = 2$ 时的解与方程 $y' = y(2 - y)$ 之解的相似之处和不同之处.

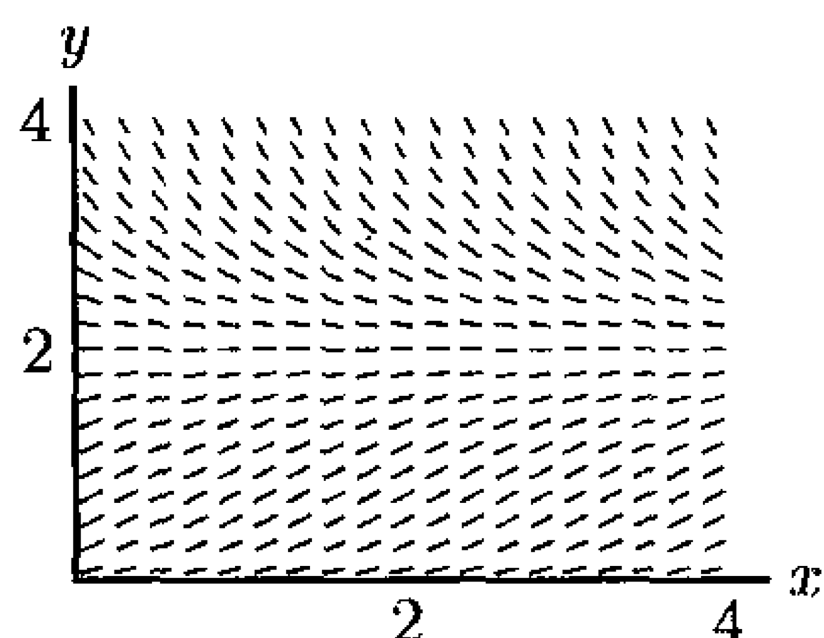


图 10-49 $y' = -y\ln(y/2)$ 的斜率场

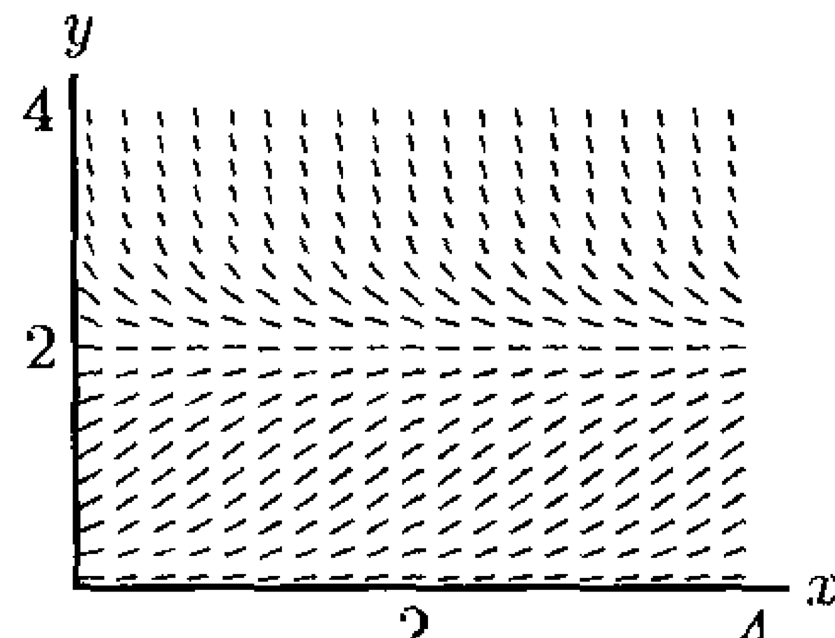


图 10-50 $y' = y(2 - y)$ 的斜率场

8. $\frac{dP}{dt} = t$

9. $\frac{dy}{dt} = 5y$

10. $\frac{dy}{dt} = 5t$

11. $\frac{dP}{dt} = 0.03P$

12. $\frac{dA}{dt} = -0.07A$

13. $\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt} = 2$

14. $\frac{dP}{dt} = 10 - 2P$

15. $\frac{dy}{dt} = 100 - y$

16. $\frac{dy}{dx} = 0.2y - 8$

17. $\frac{dH}{dt} = 0.5H + 10$

对于习题 18~21, 求出所给定初始条件下微分方程的解, 并画出解的图形.

18. $\frac{dP}{dt} = 0.08P$, 当 t=0 时, P=5000

19. $\frac{dy}{dt} = -0.2y$, 当 t=0 时, y=25

20. $\frac{dP}{dt} = 0.08P - 50,\ P(0) = 10$

21. $\frac{dH}{dt} = 100 - 0.5H,\ H(0) = 40$

22. 画出习题 14 中微分方程的斜率场, 并在其斜率场中描出三条不同的解曲线.

23. 某银行账户每年以 r(当利率为 5%时, r=0.05, 等等) 的连续复利获取利息, 假设 2000 年时, 该账户中存入 1000 美元.

(a) 写出从 2000 年算起, t 年后, 该账户中的货币量 M 所满足的微分方程.

(b) 给出该微分方程的解.

(c) 当利率分别为 5%何 10%时, 画出直到 2030 年时该方程的解曲线.

24. 随着世界人口的增加, 用来种植谷物的土地量也不断增加. 假设 $A(t)$ 表示 t 年时, 用于种植谷物的土地的总公顷数. (一公顷约为 2.5 英亩)

(a) 解释为什么可以使用微分方程 $A'(t) = kA(t)$ 来描述 $A(t)$. 你对世界人口与所使用的土地之间的关系做了何种假设?

(b) 1950 年时, 大约有 1×10^9 公顷的土地用于种植谷物. 1980 年时, 这一数字变为 2×10^9. 如果可用于种植谷物的土地最大量为 3.2×10^9 公顷, 请问该模型预言可用土地何时将枯竭? (假设 1950 年时, t=0).

25. 在所有生命体中, 都含有少量放射性同位素碳 14, 并且在生物体死亡之前, 其含量通常是固定的. 生物体死后, 它将以正比于当前碳 14 含量的一个固定比率衰变为较为稳定的碳 12. 其半周期为 5730 年. 假设 $C(t)$ 表示 t 年时碳 14 的含量.

(a) 求出方程 $C'(t) = -kC(t)$ 中常数 k 的值.

(b) 1988 年时, 三组科学家发现都灵裹尸布中 (the Shroud of Turin)——因曾经包裹耶稣的尸体而闻名, 碳 14 含量为新制作衣服中碳 14 含量的 91%[①]. 更加这一数据, 都灵裹尸布大约存在了多久?

26. 某银行账户每年以 10%的连续复利获取利息, 初始时, 该账户没有一文钱. 每年向该账户存入 1000 美元.

(a) 写出该账户中货币量 $B = f(t)$ 的变化率所满足的微分方程.

(b) 求解该微分方程.

27. 一个关于雇工学习一件新任务的速度理论认为雇工知道的越多, 他或者她学的越慢. 假设一个学习的速率等于它尚未学习任务的百分数值. 如果 y 是到时刻 t 时, 已学任务的百分数, 那么, 此刻尚未学习的任务的百分数为 $100 - y$, 因此, 我们可以使用下述微分方程来描述这一问题:

$$\frac{dy}{dt} = 100 - y$$

(a) 求出该微分方程的通解.

(b) 画出几条解曲线.

(c) 如果雇工从 t=0 时 (因此, t=0 时, y=0) 开始学习, 请给出该问题的特解.

28. (a) 方程 $\frac{dy}{dt} = 0.2(y-3)(y+2)$ 的均衡解为何?

① 《纽约时报》, 1988 年 10 月 18 日.

(b) 使用一个制图计算器或计算机画出该方程的斜率场. 并使用其斜率场, 确定每个均衡解的稳定性.

29. 正如你所知道的, 当一门课程结束时, 学生开始忘记他们所学的内容. 一模型 (称为Ebbinghaus 模型) 假设一个学生忘记所学内容的速率正比于当前能记得的内容与某常数 a 之差.

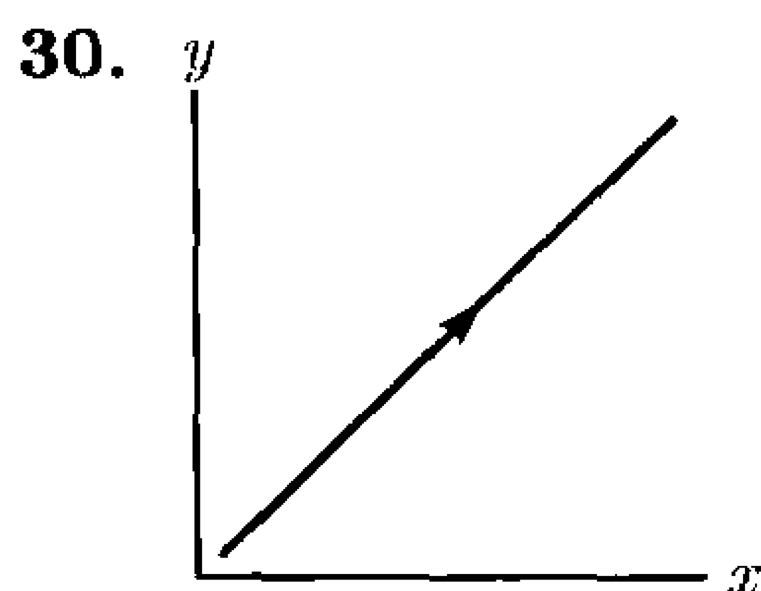
(a) 设 $y = f(t)$ 表示课程结束 t 周后, 能记得的内容的比例. 建立一个关于 y 的微分方程. 你的方程将包含两个常数; 对于所有的 t, a 不超过 y.

(b) 求解该微分方程.

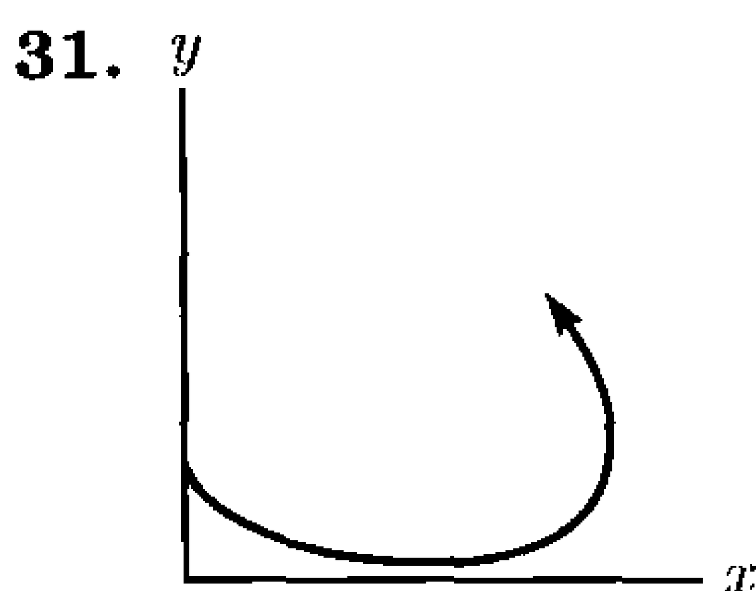
(c) 描述解 $y = f(t)$ 常数 a 的实践意义 (根据记忆的量).

对于习题 30~33, 假设 x 和 y 为两种不同物种的总数. 用语言描述每一物种的总数如何随时间变化.

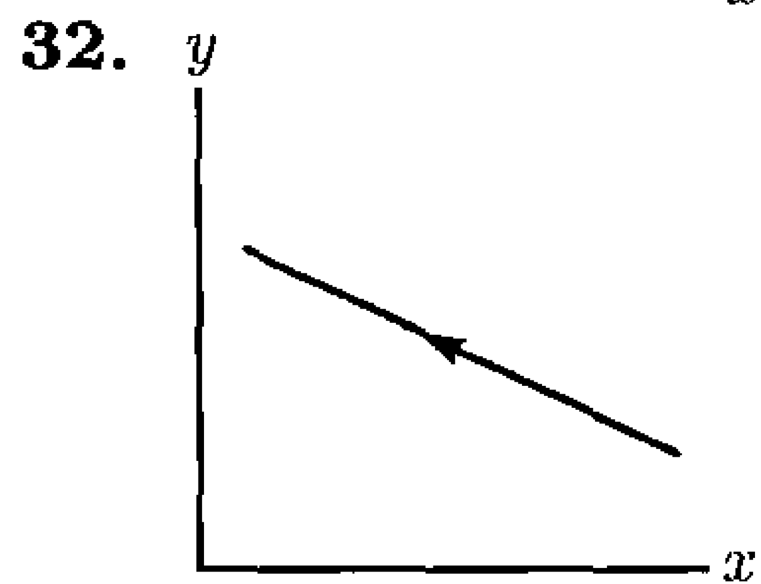
30.



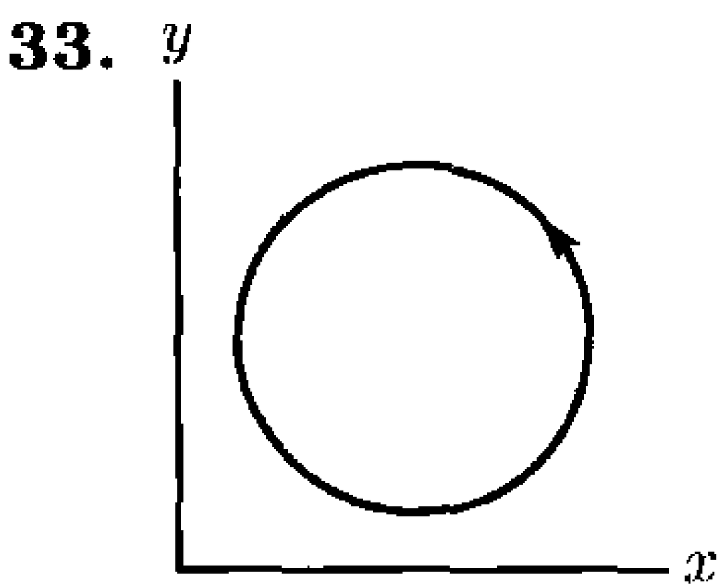
31.



32.



33.



34. (a) 何为微分方程 $y' = f(y)$ 的均衡解? 其中图 10-51 给出了 $f(y)$ 的图形.

(b) 画出 $y' = f(y)$ 的斜率场.

(c) 对于下面的初始条件, 在你的斜率场中画出其解曲线:

(i) $y(0) = 0$　(ii) $y(0) = 1$　(iii) $y(0) = 6$　(iv) $y(0) = 8$

(v) $y(0) = 10$　(vi) $y(0) = 16$　(vii) $y(0) = 17$

(d) 哪个均衡解是稳定的? 哪个是不稳定的?

35. (a) 画出 $f(y) = y - y^2$ 的图形.

(b) 画出微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - y^2$ 的斜率场.

(c) 描述两个图形之间的关系. 特别的, 解释一下你如何从 $f(y)$ 的图形来确定微分方程的均衡解. 并说明你如何确定均衡解的稳定性.

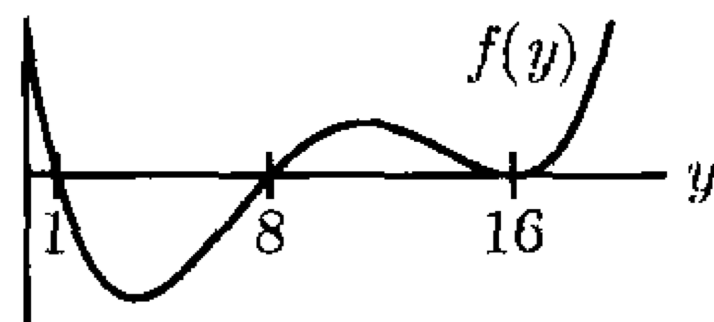


图 10-51

课外自修项目

捕获和 Logistic 增长

在这一项目中, 我们看到一个按 Logistic 方式增长之种群的捕获效应. 例如, 捕

获可以是指钓鱼或伐木. 一个重要的问题是以何数量捕获可以产生一个可持续的产出. 换句话说, 捕获多大数量从长期来看不会引发物种总量的减少.

(a) 当没人钓鱼时, 鱼群的总量服从微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 2N - 0.01N^2,$$

其中 N 为 t 年时的鱼群总量. 画出 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 随 N 的变化图. 并在图中表明 N 的均衡量.

在你的图中注意到: 如果 N 介于 0 和 200 之间, 那么 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 为正, 且 N 不断增加. 如果 N 大于 200, 那么 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 为负, 且 N 不断下降. 通过画出斜率场, 验证这一结论. 使用斜率场画出解的图形, 显示在不同初始值下, N 随 t 的变化图. 并解释你所看到的结果.

(b) 渔夫连续每年钓走 75 条鱼. 设 P 表示 t 年时在捕获条件下的鱼群总量. 解释为什么 P 满足下述微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2P - 0.01P^2 - 75.$$

(c) 画出 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 随 P 的变化图. 求出并标明截距.

(d) 画出关于 P 的微分方程的斜率场.

(e) 回忆一下以下内容: 如果对于某些 P 值 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 为正, 那么对于这些值, P 将增加; 如果对于某些 P 值 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 为负, 那么对于这些值, P 将下降. 但是, P 值从不会超过一个均衡值. 使用这一信息和 (c) 部分的图形回答下列问题.

(i) 均衡 P 值为多少?

(ii) 对于哪些初始 P 值 P 将增加? 在何值时将超过 P 值的限度?

(iii) 对于哪些初始 P 值 P 将下降?

(f) 使用 (d) 中的斜率场, 在下列初始条件下, 画出 P 随时间的变化图:

(i) $P(0) = 40$　　(ii) $P(0) = 50$　　(iii) $P(0) = 60$

(iv) $P(0) = 150$　　(v) $P(0) = 170$

(g) 使用你所画的图形, 确定鱼群总量的均衡值并确定该均衡解的稳定性.

(h) 对于一个鱼群总量, 我们现在看看不同钓鱼水平的效应. 如果每年钓走 H 条鱼, 那么鱼群总量 P 满足下述微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2P - 0.01P^2 - H.$$

(i) 对于 H=75 100 200, 画出 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 随 P 的变化图.

(ii) 对于你在 (i) 部分中所考虑的三个不同的 H 值, 哪一个有初始条件使得鱼群不会最终灭绝.

(iii) 观察一下你在 (ii) 部分中的答案, 确定 H 取何值时, 鱼群最终不会灭绝.

(iv) 给出一项可以确保鱼群长期生存的政策.

种群遗传

种群遗传就是关于种群遗传特征的研究. 一个具体的遗传特征具有两种可能性: 一种是显性的, 比如棕色眼睛; 一种是隐性的, 比如蓝眼睛[①]; 设 b 代表某一特征的隐性基因而 B 代表其显性基因. 种群的每个成员拥有一对如下基因 —— BB(显性个体), bb(隐性个体) 或 Bb(杂交个体). 基因 b 的基因频率是种群中 b 基因的总数除以控制这一特征的所有基因总数 (b 和 B). 当没有基因突变和对种群的外来影响时, 基因频率本质上是固定的. 在这一项目中, 我们考虑基因突变对种群的影响.

设 q 表示基因 b 的基因频率. 那么 q 介于 0 与 1 之间 (因为它是整体的一个比例). 又因为 b 和 B 是唯一两个影响这一特征的基因, 因此, 基因 B 的基因频率为 $1-q$. 设时间 t 是对 "代"(generations) 的度量. 对于每一代而言, 有基因 b 中的一个比例 k_1 转变为基因 B, 而基因 B 中的一个比例 k_2 转变为基因 b.

(a) 解释为什么基因频率 q 满足如下微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -k_1 q + k_2(1-q).$$

(b) 如果 k_1=0.0001, k_2=0.0004, 化简上述关于 q 的微分方程, 并给出方程的解. 初始值为 q_0. 画出 q_0=0.1 和 q_0=0.9 时的解曲线. q 的均衡值为多少? 解释随着一代一代的遗传, 基因频率如何越来越接近均衡值. 并解释你如何获知均衡值完全由相对突变率来决定.

(c) 如果 k_1=0.00003, k_2=0.00001, 重复 (b) 部分的分析.

SARS 的传播

在 2003 年的春季, SARS(Severe Acute Respirator Syndrome) 迅速在几个亚洲国家地区和加拿大暴发. 预期这一疾病的过程 —— 有多少人将被感染, 它将持续多长时间 —— 对于官方力图降低这一疾病的危害性是极为重要的. 这里分析 SARS 是如何通过已感染者和疑似感染者之间的相互影响来传播的.

变量 S 为疑似感染者数量, I 为已感染人数 (他们可能感染他人), R 排除人数 (这组人包括已隔离人数, 已死亡人数和已康复并获得免疫的人数). 时间 t 从 2003 年 3 月 17 日算起, 这一日期是世卫组织 (WHO) 开始发布日 SARS 报告的日期. 3 月 17 日, 香港报告 95 例患者. 在这一模型中

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -aSI$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = aSI - bI,$$

① 取自 C. C. Li, *Population Genetics* (芝加哥: 芝加哥大学出版社, 1995).

且 $S+I+R$=680 万, 即香港在 2003 年的人口总数[1]. 基于 WHO 的数据估计得 $a=1.25\cdot 10^{-8}$

(a) S 和 I 的初始值 S_0, I_0 分别为多少?

(b) 在 2003 年 3 月期间, b 值约为 0.06. 使用计算器或计算机画出这一方程组的斜率场和对应初始条件下的解轨迹. (使用 $0\leqslant S\leqslant 7\cdot 10^6$ 和 $0\leqslant I\leqslant 0.4\cdot 10^6$)

(c) 如果 b=0.06, 你的图形可以告诉你在整个疾病传播过程中有多少人被感染呢? 其阈值为多少? 这一阈值可以告诉你什么信息?

(d) 在 4 月份, 公共卫生官员为控制疾病传播, 对与患者接触过的人员进行隔离. 解释为什么隔离会提高 b 的值.

(e) 使用 4 月份的数值 b=0.24, 画出斜率场. (使用相同的 a 值和时间间隔)

(f) 对于 b=0.24, 阈值为多少? 这可以告诉你什么信息? 并评价隔离政策.

(g) 评价下面每一项应对疾病传播和使城市免于 SARS 影响的政策:

I. 关闭该城市与已感染城市的所有联系. 关闭陆路, 空中, 铁路和其他形式的直接通路.

II. 建立一项隔离政策. 隔离任何与已感染 SARS 者接触过的人员或任何有 SARS 症状者.

---

① www.census.gov, International Data Base(IDB), 2004 年 7 月 8 日.

相 关 理 论

分离变量法

我们已经知道如何使用一个微分方程斜率场来画出解曲线. 现在我们来看看如何给出一些微分方程的分析解和方程的解曲线.

首先, 我们来看一个熟悉的例子, 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y},$$

其解曲线是圆族: $x^2+y^2=C$.

通过求微分, 我们可以验证这些圆为上述微分方程的解; 现在的问题是这些解是如何获得的. 通过把所有的 x 放在方程的一边, 而把 y 放于方程的另一边, 分离变量法推出

$$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x.$$

然后, 我们对方程两边分别求积分, 可得 $\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x$,

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+k.$$

这可以推得我们所期望的圆: $x^2+y^2=C$, 其中 $C=2k$.

你可能担心这样把 dx 和 dy 分离是否合适. 本节最后我们将给出这样处理的理由.

指数增长和下降方程

我们使用分离变量法来推导下述方程的通解: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky$.

分离变量, 我们可得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=k\mathrm{d}t,$$

对方程两边积分有

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int k\mathrm{d}t,$$

即

$$\ln|y|=kt+C, C\text{为常数}.$$

求解 $|y|$ 可得

$$|y|=\mathrm{e}^{kt+C}=\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{C}=A\mathrm{e}^{kt}, \text{其中} A=\mathrm{e}^{C},$$

因此, A 为正值. 那么,

$$y=(\pm A)\mathrm{e}^{kt}=B\mathrm{e}^{kt},$$

其中 $B=\pm A$, 因此, B 为任意非零常数. 尽管没有 C 使得 $B=0$, 但是 B 可以取 0, 因为 $y=0$ 是原方程的一个解. 当我们在第一步中方程两边同除以 y 时, 我们丢掉这个解. 那么我们已经推出了本章前面所使用的方程的解:

$$y=B\mathrm{e}^{kt},\quad B\text{为常数}.$$

例 1 求出下述方程的所有解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k(y-A).$$

解 我们分离变量并求积分有 $\int\frac{1}{y-A}\mathrm{d}y=\int k\mathrm{d}t$.

这可得 $\ln|y-A|=kt+D$, 其中 D 为积分常数. 求解 y 可得

$$|y-A|=\mathrm{e}^{kt+D}=\mathrm{e}^{kt}\mathrm{e}^{D}=B\mathrm{e}^{kt}$$

或

$$y-A=(\pm B)\mathrm{e}^{kt}=C\mathrm{e}^{kt}$$

$$y=A+C\mathrm{e}^{kt}.$$

$C=0$ 也是方程的一个解. 这一结果与前面相同. □

例 2 求出下述方程的解, 并画出其解曲线:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=2P-2Pt,\qquad \text{当 } t=0 \text{ 时},\quad P=5.$$

解 对方程右边进行分解因式有 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P(2-2t)$.

分离变量并求积分可得 $\int\frac{1}{P}\mathrm{d}P=\int(2-2t)\mathrm{d}t$.

因此, $\ln|P|=2t-t^2+C$. 求解 P 可得

$$|P|=\mathrm{e}^{2t-t^2+C}=\mathrm{e}^{2t-t^2}\mathrm{e}^{c}=A\mathrm{e}^{2t-t^2},$$

其中 $A=\mathrm{e}^{C}$, 因此, $A>0$.

其次, A=0 时, 也是方程的一个解. 那么微分方程的通解为:

$$P=B\mathrm{e}^{2t-t^2},\quad B\text{任意}.$$

为了得出 B 的值, 把 t=0, P=5 代入通解, 可得

$$5=B\mathrm{e}^{2\cdot 0-0^2}=B.$$

因此, $P=5\mathrm{e}^{2t-t^2}$.

图 10-52 给出该函数的图形. 由于方程的解可以重新写为

$$P=5\mathrm{e}^{1-1+2t-t^2}=5\mathrm{e}^{1}\mathrm{e}^{-1+2t-t^2}=(5\mathrm{e})\mathrm{e}^{-(t-1)^2},$$

因此, 其图形与函数 $y=\mathrm{e}^{-t^2}$ 有相同的形状——钟形曲线. 这里, 函数的最大值 (通常在 t=0 点) 被向右平移一个单位到 t=1 点.

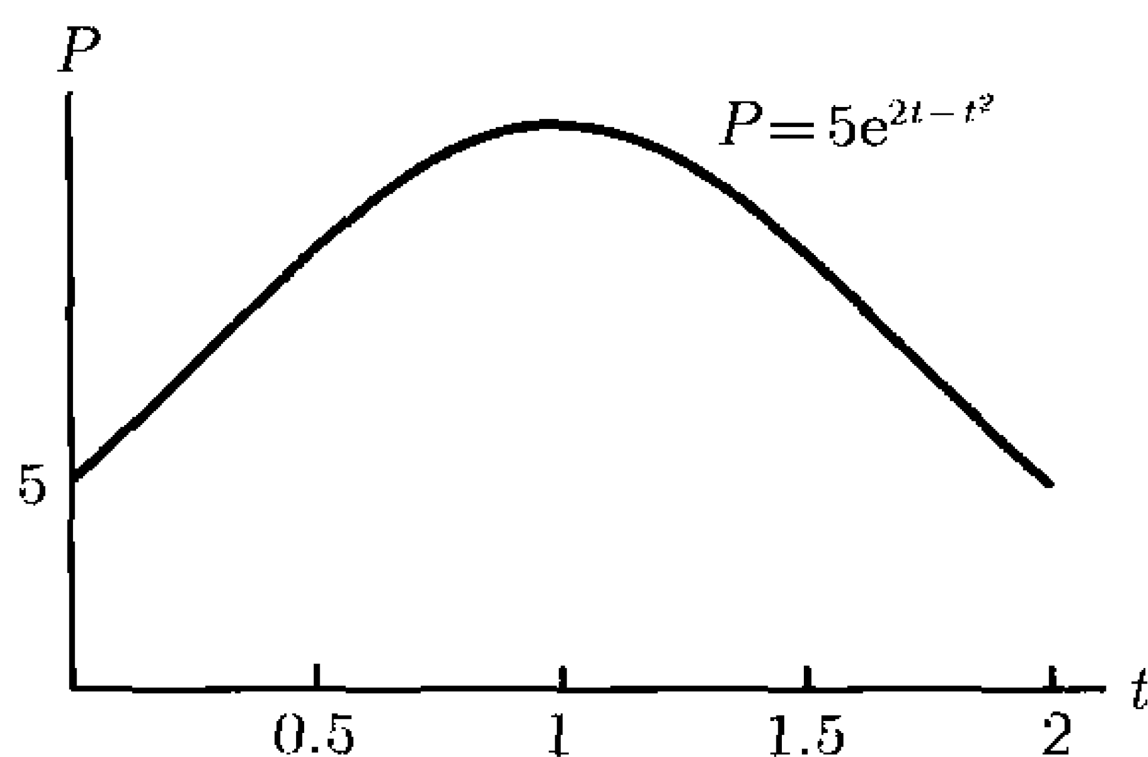


图 10-52 钟形解曲线 □

分离变量法的证明

假设一个微分方程可以写为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)f(y).$$

如果 $f(y)\neq 0$, 我们记 $f(y)=1/h(y)$, 因此, 方程的右边可以视为一个分数,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{g(x)}{h(y)}.$$

如果方程两边同乘以 $h(y)$, 我们有 $h(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)$.

把 y 看作为 x 的函数, 因此, $y=y(x)$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'(x)$, 我们可以把原方程重写为

$$h(y(x))y'(x)=g(x).$$

对方程两边关于 x 积分可得:

$$\int h(y(x))y'(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}x.$$

左边的积分形式暗示我们可以使用 $y=y(x)$ 来替代. 由于 $\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x$, 我们可得

$$\int h(y)\mathrm{d}y=\int g(x)\mathrm{d}x.$$

如果我们能找到 h 和 g 的原函数, 那么我们就获得了方程的解曲线.

注意到: 把原方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(x)}{h(y)}$ 变为 $\displaystyle\int h(y)\mathrm{d}y=\int g(x)\mathrm{d}x$, 就如同我们把 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 视为一个分数, 然后交叉相乘再取积分. 尽管这并不是我们的处理方法, 但是你可以发现这是记住这一方法的一个有效的办法. 事实上, 术语 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是由莱布尼茨引入来简化这类问题的 (更特别的, 是为了使链式法则看上去可以抵消).

习题

使用分离变量法求出下列习题 1~12 中微分方程在给定初始条件下的解:

1. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-2P,\ P(0)=1$

2. $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p}=\dfrac{L}{2},\ L(0)=100$

3. $P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=1,\ P(0)=1$

4. $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}=m, m(1)=2$

5. $2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u^2, u(0)=1$

6. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=zy, z=1,\ y=0$

7. $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}y}+R=1, R(1)=0.1$

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{y}{3+t}, y(0)=1$

9. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=te^z$, 过原点

10. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{5y}{x}, y=3,\ x=1$

11. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y^2(1+t), y=2,\ t=1$

12. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z+zt^2,\ z=5,\ t=0$

13. 确定下列哪个微分方程是可分离变量的. 不用求出方程的解.
    (a) $y'=y$
    (b) $y'=x+y$
    (c) $y'=xy$
    (d) $y'=\sin(x+y)$
    (e) $y'-xy=0$
    (f) $y'=y/x$
    (g) $y'=\ln(xy)$
    (h) $y'=(\sin x)(\cos y)$
    (i) $y'=(\sin x)(\cos xy)$
    (j) $y'=x/y$
    (k) $y'=2x$
    (l) $y'=(x+y)/(x+2y)$

使用分离变量法求出下列习题 14~19 中微分方程的解, 假设 a, b, k 为非零常数.

14. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=P-a$

15. $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=b-Q$

16. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k(P-a)$

17. $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=aR+b$

18. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}-aP=b$

19. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky^2(1+t^2)$

20. (a) 下述方程描述了一个人如何学习: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=100-y$. 请给出该方程的通解.
    (b) 画出该方程的斜率场并画出 $y(0)=25$ 和 $y(0)=110$ 时的解曲线.
    (c) 对于 (b) 部分中的每个初始条件, 给出方程的特解, 并在图中画出其曲线.
    (d) 这两个特解中, 哪个解可以刻画一个人的学习曲线.

21. (a) 画出微分方程 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=xy$ 的斜率场.
    (b) 画出几个解曲线.
    (c) 使用解析法, 给出该方程的解.

第 11 章　几 何 级 数

本章我们研究几何级数和它的应用. 几何级数是一系列数值的和, 每一项为其前一项的固定倍数. 我们将考察含有有限项和无穷项的几何级数.

11.1 节引入几何级数. 11.2 节讨论几何级数在商业和经济学中的应用, 比如年金和乘数效应问题. 11.3 节我们将把几何级数应用于生命科学的相关问题, 比如药物重复剂量问题.

11.1　几 何 级 数

11.1.1　药物重复剂量问题

疟疾是一种通过蚊子来传播疾病的寄生性传染病, 该病主要发生在热带地区. 从古到今, 该病一直存在, 每年有数亿人感染此病, 并有数百万人因感染此病而丧生. 大约在 1630 年, 秘鲁的耶稣门徒把金鸡纳树皮引入西方作为第一种治疗疟疾的药物. 药物奎宁是该树皮中的活性成分, 今天我们仍然使用这一药物.

假设为预防疟疾, 在每天的同一时间给一个人服用 50 mg 的奎宁. 服用第一剂药后, 人体中含有 50 mg 奎宁. 那么服用第二剂药后呢? 由于新陈代谢, 一天后, 人体仅残留原有药量的 23%. 服用第二剂药后, 人体中奎宁含量为第二剂药量 (50 mg) 加上第一剂药的残留量 ($50\cdot0.23=11.5$ mg), 即 61.5 mg.

设 Q_n 代表服用第 n 剂药后, 人体中的奎宁含量 (以 mg 为单位). 那么,

Q_1 = 第一剂药量 =50

Q_2 = 第二剂药量 + 第一剂药的残留量 = $50 + 50 \cdot 0.23 = 61.5$

Q_3= 第三剂药量 + 之前药物的残留量 = $50 + 61.5 \cdot 0.23 = 64.145$

注意到, 我们可以对 Q_3 进行分解, 以分别显示第一剂药和第二剂药的贡献:

$$Q_3 = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2,$$

因此, 我们有 Q_3= 第三剂药量 + 第二剂药的残留量 + 第一剂药的残留量.

Q_3 的分解形式使得我们可以猜测其后 Q_n 的表达式:

$$Q_4 = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + 50 \cdot (0.23)^3 = 64.753$$

$$Q_5 = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + 50 \cdot (0.23)^3 + 50 \cdot (0.23)^4 = 64.893$$

$$Q_6 = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + 50 \cdot (0.23)^3 + 50 \cdot (0.23)^4 + 50 \cdot (0.23)^5 = 64.925$$

$$\vdots$$

$$Q_{10} = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + \cdots + 50 \cdot (0.23)^8 + 50 \cdot (0.23)^9 = 64.935$$

比较 Q_6 和 Q_{10} 的值, 我们可以看出其数量稳定在 64.9 mg 附近. 看图 11-1. 注意到在计算 Q_6 和 Q_{10} 时, 尽管我们保留了几位小数, 但是从实践角度而言, 这两个值如此接近, 基本没有什么差异.

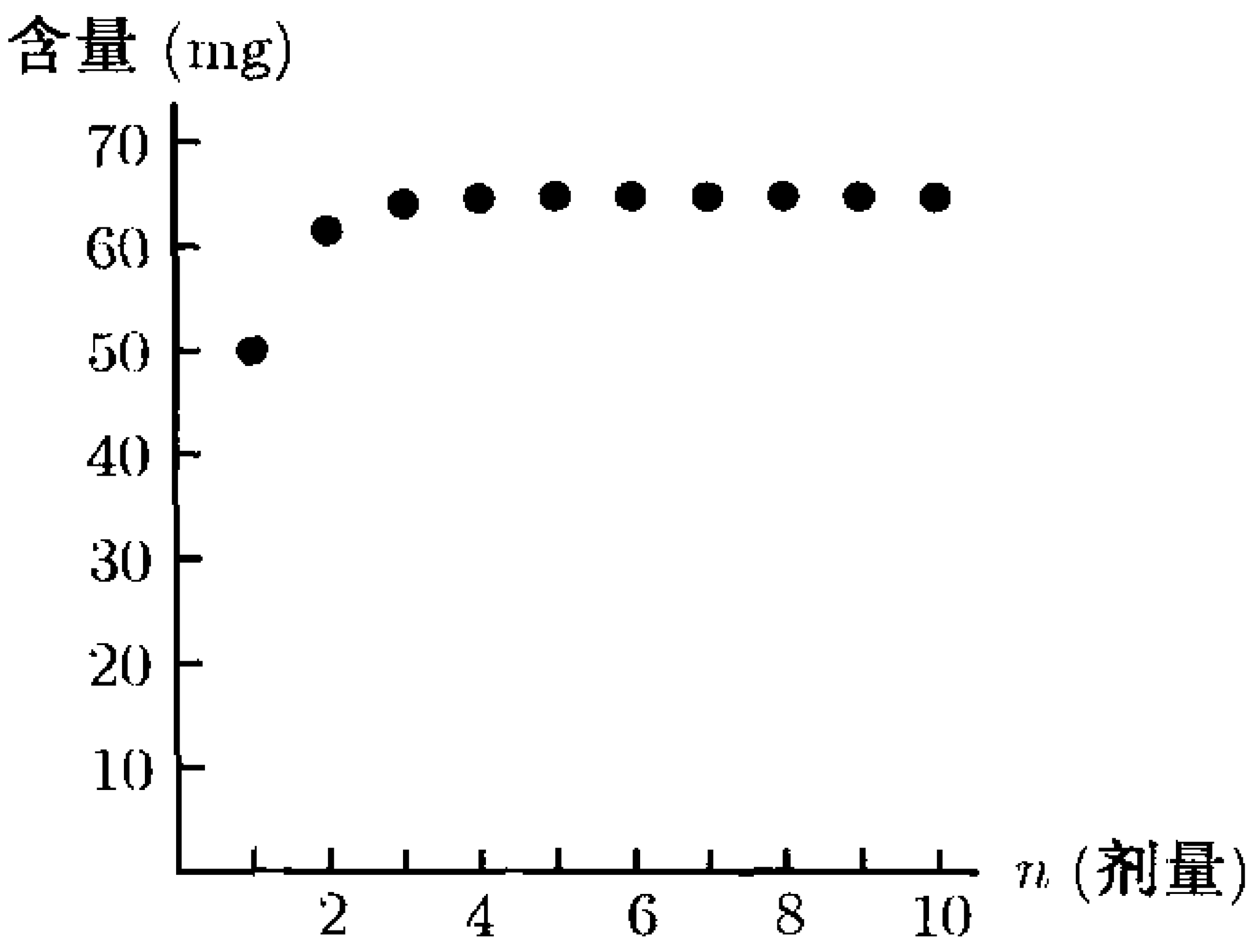


图 11-1 奎宁含量渐趋平稳

11.1.2 向一储蓄账户反复存款

存钱的人常常定期存入某一固定的钱数. 假设每年向一存款利率为 5%(按连续复利计息) 的储蓄账户存入 1000 美元. 设 B_n 表示存款 n 年后, 该账户的现金总数 (以美元为单位). 那么,

$B_1=$ 第一年存款 $=1000$.

$B_2=$ 第二年存款 + 第一年存款所得 $=1000+1000(1.05)=2050$.

$B_3=$ 第三年存款 + 之前存款所得 $=1000+2050(1.05)=3152.5$.

如同上例, 我们对 B_3 进行分解以分别显示第一年和第二年存款的贡献:

$B_3=1000+2050(1.05)=1000+(1000+1000(1.05))(1.05)$

$B_3=1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2$

$B_3=$ 第三年存款 + 第二年存款所得 + 第一年存款所得

B_3 的分解形式使得我们可以猜测 B_6 和 B_{10} 的表达式. 取值可得:

$B_6=1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2+1000(1.05)^3+1000(1.05)^4+1000(1.05)^5$

$\quad=6801.91$

$B_{10}=1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2+\cdots+1000(1.05)^8+1000(1.05)^9=12\,577.89$

注意到, 现金总数是无限增大的. 参见图 11-2.

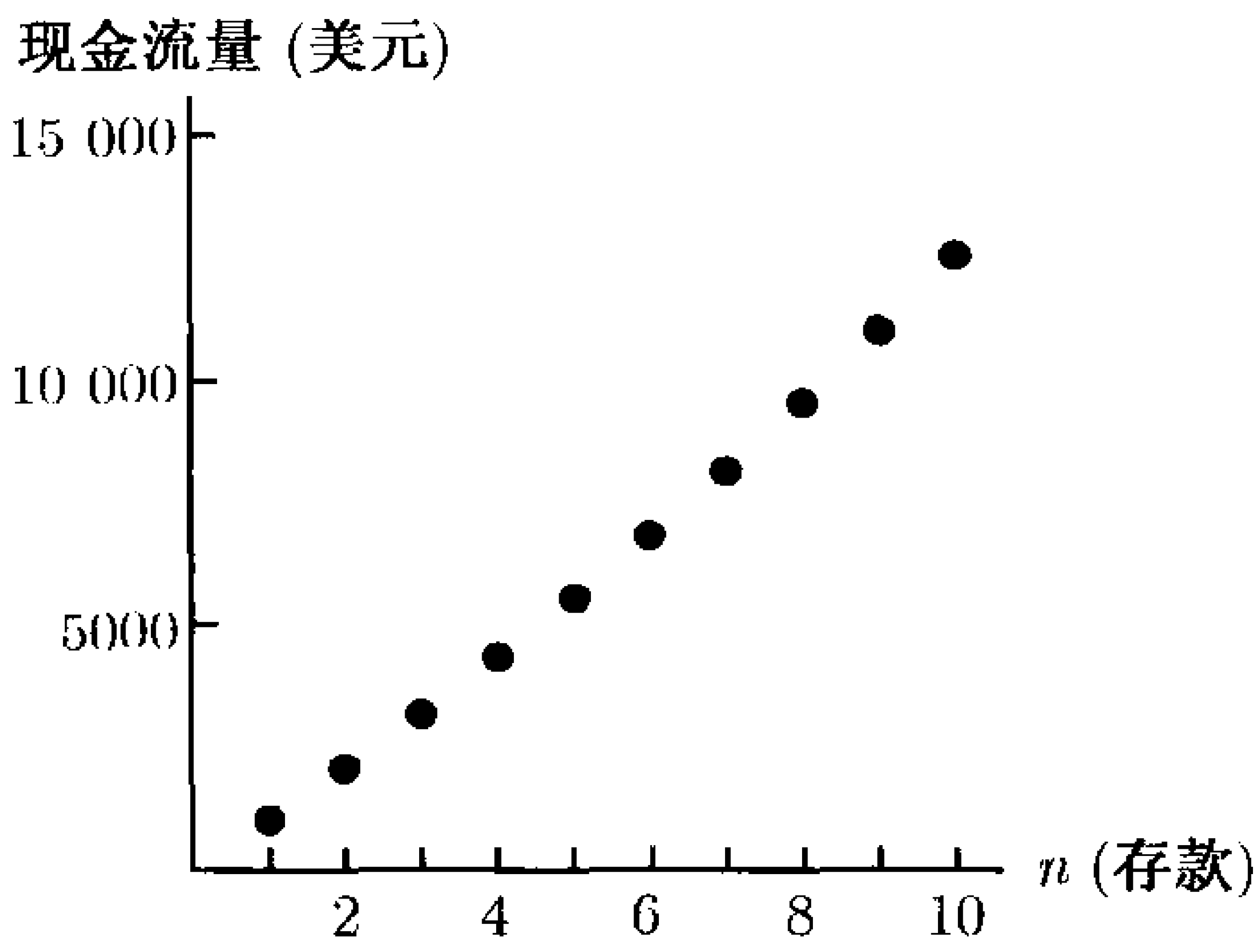


图 11-2 银行账户现金流量的无限增长

11.1.3 有限项几何级数

在上述两例中，我们遇到形如 $a + ar + ar^2 \cdots + ar^8 + ar^9$ 的和式. 如此一个和式被称为*有限项几何级数*. 一个几何级数是一系列数值的和，每一项为其前一项的固定倍数. 其第一项为 a，而其固定乘数或其后面项的共同比率为 r.

> 一个 n 项的有限几何级数 (对于某正整数 n) 有如下形式
> $$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

11.1.4 一个有限项几何级数的和

在上述奎宁的例子中，假设我们想获得 Q_{40}，服用 40 剂药后人体奎宁的含量：

$$Q_{40} = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + \cdots + 50 \cdot (0.23)^{38} + 50 \cdot (0.23)^{39}.$$

为计算 Q_{40}，似乎我们不得不加 40 项. 多亏有一个更好的办法.

我们写 S_n 为级数的前 n 项之和，也就是直到 ar^{n-1} 项的和：

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}.$$

两边同乘以 r 得

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

然后用 rS_n 减去 S_n，等式右边除两项外将全抵消，即

$$S_n - rS_n = a - ar^n,$$

因此，$(1-r)S_n = a(1-r^n)$.

如果 $r \neq 1$，我们便可求出 S_n. 这一结果被称为 S_n 的*闭形表达式*.

> **一个有限项几何级数的和为**
> $$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

注意公式中的 n 为和 S_n 中的项数.

例 1 在奎宁的例子中，计算 Q_{40} 和 Q_{100}.

解 我们在前面得到

$$Q_{40} = 50 + 50 \cdot 0.23 + 50 \cdot (0.23)^2 + \cdots + 50 \cdot (0.23)^{38} + 50 \cdot (0.23)^{39}.$$

这是一个有限项几何级数，其中 a=50, r=0.23. 使用 n=40 的求和公式，我们有

$$Q_{40} = \frac{50(1-(0.23)^{40})}{1-0.23} = 64.935.$$

服用 40 剂药后人体奎宁的含量为 64.935 mg.

类似的，使用 n=100 的求和公式，我们有

$$Q_{100} = \frac{50(1-(0.23)^{100})}{1-0.23} = 64.935.$$

服用 100 剂药后人体奎宁的含量仍为 64.935 毫克. 保留小数点后三位, 这一含量似乎已经稳定. □

例 2 在上述银行存款的例子中, 计算 B_{40} 和 B_{100}.

解 我们有

$$B_{40} = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + \cdots + 1000(1.05)^{39}.$$

这是一个有限项几何级数, 其中 a=1000, r=1.05. 由 n=40 的求和公式可得

$$B_{40} = \frac{1000(1-(1.05)^{40})}{1-1.05} = 120\ 799.77.$$

存款 40 年后, 该账户的现金总数为 120 799.77 美元.

类似的, 使用 n=100 的求和公式, 我们有

$$B_{100} = \frac{1000(1-(1.05)^{100})}{1-1.05} = 2\ 610\ 025.16.$$

存款 100 年后, 该账户的现金总数为 2 610 025.16 美元. 复利使得这 100 000 美元的投资增加到超过了 2 百万美元. □

11.1.5 无穷项几何级数

假设一个有限项几何级数有 n 项, 当 $n \to \infty$ 时, 将会发生什么呢? 我们得到一个无穷项几何级数.

一个**无穷项几何级数**有如下形式:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n + \cdots.$$

级数后面的符号 "$\cdots$" 表明序列将持续到永远——它是无限的.

无穷项几何级数的和

给定一个无穷项几何级数

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots,$$

我们称其前 n 项和为部分和, 记为 S_n. 为计算 S_n, 我们使用公式

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

当 $n \to \infty$ 时, S_n 将会有何变化呢? 这依赖于 r 的值. 如果 $|r| < 1$, 即 $-1 < r < 1$, 那么, 随着 $n \to \infty$, $r^n \to 0$. 因此, 随着 $n \to \infty$, 有

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \to \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

那么, 如果 $|r| < 1$, 随着 $n \to \infty$, 部分和 S_n 将达到一个极限值 $\frac{a}{1-r}$. 当这一情况发生时, 我们定义无穷多项级数的和为该极限, 并说该级数收敛于 $\frac{a}{1-r}$.

> 对于 $|r|<1$, **无穷项几何级数的和为**
> $$S=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n+\cdots=\frac{a}{1-r}.$$

另一方面, 如果 $|r|>1$, 那么当 $n\to\infty$ 时, r^n 与部分和没有极限 (如果 $a\neq 0$). 在这一情形下, 我们说级数是发散的. 如果 $r>1$, 那么级数的项将越来越大, 且如果 $a>0$, 那么部分和趋于 $+\infty$, 或如果 $a<0$, 部分和将趋于 $-\infty$. 如果 $r<-1$, 那么级数的项将越来越大, 那么随着 $n\to\infty$, 部分和将震荡摆动, 且级数发散.

如果 $r=1$, 那么将发生什么呢? 级数变为

$$a+a+a+a+\cdots,$$

因此, 如果 $a\neq 0$, 那么部分和将无限增大, 且级数将不收敛. 如果 $r=-1$, 级数变为

$$a-a+a-a+a-\cdots,$$

且, 如果 $a\neq 0$, 那么部分和将在 a 与 0 之间摆动. 此时, 级数不收敛.

例 3　对于下列每一个无穷级数, 给出其前三个部分和及其和 (如果和存在).

(a) $10+10(0.75)+10(0.75)^2+\cdots$

(b) $250+250(1.2)+250(1.2)^2+\cdots$

解　(a) 这是一个 a=10, r=0.75 时的无穷多项几何级数. 前三个部分和为.

$S_1=10.$

$S_2=10+10(0.75)=10+7.5=17.5.$

$S_3=10+10(0.75)+10(0.75)^2=10+7.5+5.625=23.125.$

因为 $|r|<1$, 所以级数收敛且其和为

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{10}{1-0.75}=40.$$

如果对越来越大的 n, 我们给出其部分和, 那么他们将越来越接近 40(参见习题 15).

(b) 这是一个 a=250, r=1.2 时的无穷多项几何级数. 前三个部分和为:

$S_1=250.$

$S_2=250+250(1.2)=250+300=550.$

$S_3=250+250(1.2)+250(1.2)^2=250+300+360=910.$

因为, $r>1$, 那么级数发散, 且部分和无限增大. (参见习题 16)　□

例 4　如果每天注射 50 mg 的奎宁直到永远, 那么给出一剂服用后而下一剂服用之前人体内奎宁的长期含量.

解　因为奎宁是不断注射直到永远, 由例 1, 我们知道人体中奎宁的长期含量为

$$Q=50+50\cdot 0.23+50\cdot(0.23)^2+\cdots.$$

这是一个 a=50, r=0.23 时的无穷多项几何级数. 因为 $-1 < r < 1$, 那么该级数收敛于一个有限和, 该有限和为

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{50}{1-0.23} = 64.935.$$

服用该药后, 人体内奎宁的长期含量为 64.935 mg. 图 11.1 给出了这一值. 事实上, 服用 10 剂后, 保留小数点三位, 人体中奎宁含量与长期值相同 (因为 $Q_{10} = 64.935$)

在服用下一剂之前, 人体内奎宁的长期含量是多少呢? 由于一剂为 50 mg, 在服用下一剂之前, 人体内奎宁的长期含量为 64.935−0=14.935 mg. 那么, 从长期来看, 人体内奎宁的含量总是在 15 mg 和 65 mg 之间摆动. □

例 5 假设我们每年向例 2 中所述账户中存入 1000 美元直到永远. 该账户的现金总量是否会稳定于一个确定的量? 请给出解释.

解 因为存款不断进行直到永远, 存入一笔款后, 银行的账户中的现金总量表示如下:

$$B = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + \cdots.$$

这是一个 a=1000, r=1.05 时的无穷项几何级数. 由于 r 大于 1, 所以该级数发散. 这意味着, 如果你坚持向一账户中存入 1000 美元, 那么, 你的现金总量将无限增大, 即使无息也是如此. 这与例 2 中的图 11-2 相匹配. □

习题

1. 用两种方法给出下述级数的和: 使用加法运算和使用几何级数公式.

$$3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2$$

2. 用两种方法给出下述级数的和: 使用加法运算和使用几何级数公式.

$$50 + 50(0.9) + 50(0.9)^2 + 50(0.9)^3$$

对于习题 3~14, 如果和存在, 请求出其和.

3. $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

4. $20 + 20(1.4) + 20(1.4)^2 + \cdots + 20(1.4)^8$

5. $1000 + 1000(1.08) + 1000(1.08)^2 + 1000(1.08)^3 + \cdots$

6. $500 + 500(0.6) + 500(0.6)^2 + \cdots + 500(0.6)^{15}$

7. $30 + 30(0.85) + 30(0.85)^2 + 30(0.85)^3 + \cdots$

8. $25 + 25(0.2) + 25(0.2)^2 + 25(0.2)^3 + \cdots$

9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^8}$

10. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

11. $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{3}{2^{10}}$

12. $1000 + 1500 + 2250 + 3375 + 5062.5 + \cdots$

13. $200+100+50+25+12.5+\cdots$

14. $-2+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\cdots$

15. 在例 3(a) 中, 我们给出了 $a=10$, $r=0.75$ 时的级数的部分和, 并证明了该级数的和为 40. 请给出 $n=5$, 10, 15, 20 时的部分和 S_n, 随着 n 增加, 该部分和是否越来越接近于 40?

16. 在例 3(b) 中, 我们给出了 $a=250$, $r=1.2$ 时的级数的部分和. 请给出 $n=5$, 10, 15, 20 时的部分和 S_n, 随着 n 增加, 其部分和是否向我们所预期的 $r>1$ 的情况, 将无限增大呢?

17. 每月给一利息为 0.5%的账户中存入 500 美元, 按月复利计息.

(a) 第 6 次存款后, 该账户现金总量为多少? 第 6 次存款前又为多少?

(b) 第 12 次存款后, 该账户现金总量为多少? 第 12 次存款前又为多少?

18. 一家庭, 每年给一利息为 8.12%的账户中存入 5000 美元, 按年复利计息. 第 20 次存款后, 该账户现金总量为多少?

19. 每天早晨给一病人注射 25 mg 的抗炎药物, 且注射 24 小时后, 该药仍有 40%留在病人体内. 给出在下列情形时, 病人体内该药的含量:

(a) 注射 3 次后

(b) 注射 6 次后

(c) 从长期来看, 注射一剂该药后

20. 每天给人体中注射 100 mg 某药物. 注射 24 小时后, 前天药量的 82%仍留存在人体. 请问, 在注射一剂药后, 而尚未注射下一剂药时, 该药在人体的长期含量为多少?

21. 在例 4 中, 我们看到, 如果每 24 小时服用 50 mg 的奎宁, 那么在刚服下一剂后人体中奎宁的长期含量约为 65 mg, 而在即将服用下剂药时, 人体中奎宁的含量约为 15 mg. 我们以每公斤体重所含奎宁毫克数来度量人体中奎宁浓度. 为使该药物有效, 人体中奎宁平均浓度不得低于 0.4 mg/kg. 而浓度超过 3 mg/kg 时将对人体不利.

(a) 通过对刚服下一剂后人体中奎宁的含量和即将服用下剂药时人体中奎宁的含量约为取平均来估计人体中奎宁的平均长期含量.

(b) 对于一个体重为 70 kg 的人, 给出其体内奎宁的平均浓度. 对该人而言, 这一处方是安全和有效的吗?

(c) 对于一个什么范围内的体重, 这一处方在长期内所产生浓度是

(i) 太低? (ii) 不安全?

22. 一辆旧车花费了 1500 美元, 第一修理花费了 500 美元, 此后每年的修理费比上年增加 20%. 请给出拥有该辆车 10 年所花费的总成本.

11.2 在商业和经济中的应用

11.2.1 年金

年金就是在一个固定的时间段内或无限期内, 定期获得的一系列相同的支付或存款. 我们可以使用几何级数的和来计算一项年金的总价值.

例 1 一项年金每年向一账户中存入 5000 美元, 该账户的年利率为 7%, 按复利计息. 存款 10 年后, 该账户中的现金总量为多少?

解 第 10 年的存款向该账户贡献了 5000 美元. 前一年的存款获取了一年的利息, 因此其贡献为 5000(1.07) 美元. 获了两年利息的存款贡献了 $5000(1.07)^2$ 美元. 依次进行, 我们可得:

$$10\text{年后该账户的现金总量}=5000+5000(1.07)+5000(1.07)^2+\cdots+5000(1.07)^9.$$

其和是一个 a=5000, r=1.07 时的有限项几何级数. 我们使用 n=10 时的求和公式有:

$$10\text{ 年后该账户的现金总量}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{5000(1-1.07^{10})}{1-1.07}=69\ 082.24.$$

存款 10 年后, 该账户中的现金总量为 69 082.24 美元. □

年金的现值

年金的现值是指为在未来获得一系列固定的支付, 今天必须存入的货币量. 我们如何来计算这一现值呢? 我们首先考虑一个单一支付. 假设三年后, 从一个年利率为 8%, 按复利计息的账户中提取 1000 美元. 现值是使得下式成立的 P 值: $1000=P(1.08)^3$,

因此, 我们有

$$\text{现值}=P=1000(1.08)^{-3}.$$

为了获得一笔四次支付的现值 (一次支付在当前, 一次支付在一年后, 一次支付在两年后, 一次支付在三年后), 我们只需把他们的现值加起来. 假设利率相同, 均为 8%, 我们有:

$$\text{该支付的现值}=1000+1000(1.08)^{-1}+1000(1.08)^{-2}+1000(1.08)^{-3}.$$

正如下列所示, 使用这一方法, 我们可以求出任何年金的现值.

例 2 一账户的年利率为 8%, 按复利计息. 每年从该账户支出 10 000 美元, 从今年开始支付, 共支付 20 年. 为获得这一支付, 现在应向该账户存入多少钱? 换句话说, 这一年金的现值为多少?

解 当前支付的现值为 10 000 美元. 第二年支付的现值为 $10\ 000(1.08)^{-1}$. 由于第 20 年的支付是在 19 年后支付, 因此, 第 20 年的支付的现值为 $10\ 000(1.08)^{-19}$. 以美元计算整个年金的现值 P 为

$$P=10\ 000+10\ 000(1.08)^{-1}+10\ 000(1.08)^{-2}+\cdots+10\ 000(1.08)^{-19}.$$

把上式中的项重新写为 $(1.08)^{-2}=((1.08)^{-1})^2$, $(1.08)^{-3}=((1.08)^{-1})^3$, 等等, 我们可看出 P 为一有限项几何级数的和

$$P=10\ 000+10\ 000(1.08)^{-1}+10\ 000((1.08)^{-1})^2+\cdots+10\ 000((1.08)^{-1})^{19}$$

我们使用 a =10 000, $r=(1.08)^{-1}$ 和 n=20 时的求和公式, 可得

$$现值 = P = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{10\ 000(1-((1.08)^{-1})^{20})}{1-(1.08)^{-1}} = 106\ 035.99$$

那么为支付这一年金, 我们现在必须存入 106 035.99 美元. 注意到该年金的总支付为 $20 \cdot 10\ 000$ 美元 $= 200\ 000$ 美元, 因此, 现值大大低于最终支付的钱数. □

例 3 如果例 2 中的年金, 每年支出 10 000 美元, 不再是支付 20 次, 而是永久支付 (即永远支付). 那么这一年金的现值为多少?

解 由于该支付为永久支付, 因此其现值为无穷和:

$$现值 = P = 10\ 000 + 10\ 000(1.08)^{-1} + 10\ 000((1.08)^{-1})^2 + 10\ 000((1.08)^{-1})^3 + \cdots$$

这是一个 a=10 000, $r = (1.08)^{-1} = 0.925\ 926$ 的无穷项几何级数. 由于 $-1 < r < 1$, 因此, 该级数收敛于一个有限和. 我们有

$$现值 = P = \frac{a}{1-r} = \frac{10\ 000}{1-(1.08)^{-1}} = 135\ 000$$

这一永久年金的现值为 135 000 美元. 注意到该永久年金需要的总支付仅仅比上述支付期为 20 的年的年金多支付约 29 000 美元, 这是复利的力量. □

11.2.2 乘数效应

一个政府需要进行减税以刺激经济的发展. 那么一项税收消减的总效应有多大呢? 由于一个人少缴纳的税收中将有一部分被花费, 并变成另一人的收入, 而后者的支出又将变成其他人的收入, 等等, 因此, 减税对整个经济的总效应将远远超过减税本身. 这一效应被称为乘数效应.

例 4 一政府实施减税 30 亿美元. 每个获得减税的人, 将其减税所得收入的 75%用于花销, 而 25%用于存储. 给出这一减税政策所产生的额外总支出.

解 额外支出是指由减税政策所引发的消费者支出. 这 30 亿美元的接收者将其中的 75%花费, 即花费了 22.5 亿美元. (注意初始花费不是 30 亿美元而是为 30(0.75)=22.5 亿美元) 而 22.5 亿美元的接收者, 又将其中的 75%用于支出, 即支出了 22.5(0.75)=16.875 亿美元. 这一部分支出的接收者又将其中的 75%用于支出, 等等, 直到无穷. 那么,

$$额外总支出 = 22.5 + 22.5(0.75) + 22.5(0.75)^2 + 22.5(0.75)^3 + \cdots (亿美元).$$

这是一个 a=22.5, $r = 0.75$ 的无穷级数. 由于 $-1 < r < 1$, 所以这一无穷级数收敛于一个有限和. 我们有

$$额外总支出 = \frac{a}{1-r} = \frac{22.5}{1-(0.75)} = 90(亿美元).$$

那么, 在这些假设下, 一项 30 亿美元的减税政策将带来 90 亿美元的额外支出. □

11.2.3 市场稳定点

假设一家制造厂商每年生产确定数量的某产品, 且这些产品每年有一固定比率(无论使用多久) 会失效或不再被使用. 从长期来看, 当某年的年生产量完成后, 正在使用的该产品总量被称为*市场稳定点*.

例 5 美国造币厂 (US Mint) 每年生产大约 130 亿枚硬币, 其中每年大约 10%进入流通领域.[①]

解 我们假设该造币厂每年生产 130 亿枚硬币. 在任意一年, 将新生产 130 亿枚硬币, 且从上年留存下 130(0.9) 亿枚 (由于有 10%退出流通). 而从两年前留存下 $130(0.9)^2$ 亿枚, 等等. 如果 N 为流通中的硬币总数 (以亿为单位), 那么,

$$N = 130 + 130(0.9) + 130(0.9)^2 + \cdots.$$

这是一个 a=130, r=0.9 的无穷级数. 由于 $-1 < r < 1$, 所以这一无穷级数收敛于一个有限和, 且其和为

$$N = \frac{a}{1-r} = \frac{130}{1-(0.9)} = 1300.$$

那么, 今天有大约 1300 亿枚硬币在流通. 其市场稳定在 1300 亿枚. □

习题

1. 每年向一年利率为 6% 的账户储存 2000 美元, 按复利计息. 在刚刚第 5 次存款前后, 该账户的资金总量为多少?
2. 每年向一年利率为 8.5% 的账户储存 1000 美元, 按复利计息. 在刚刚第 20 次存款后, 该账户的资金总量为多少? 这一资金中有多少来自年存款, 又有多少来自利息?
3. 一年金的月利率为 0.5%, 按复利计息, 从现在开始, 总共支付 36 个月, 每月 1000 美元. 请问, 这一年金的现值为多少?
4. 从现在开始, 一年金每年从一年利率为 7.2% 的账户支出 50 000 美元, 按复利计息. 请问, 如果按如下时间支付, 这一年金的现值为多少?
   (a) 支付十年 (b)永久支付
5. 一捐助者, 设立一项捐款用于资助一额度为 10 000 美元的年度奖学金. 该捐助款每年获取利率为 6% 的利息, 按复利计息. 如果从现在开始, 每年颁发一项该奖项, 按如下时间连续颁发, 请问, 该捐款需要存入多少钱?
   (a) 直到颁发了 20 个奖项 (b)永久颁发
6. 每年支付 5000 美元, 共支付 20 年, 从现在开始作为第一年来支付. 该支付来自于一个年利率为 10% 的账户, 该账户按复利计息. 为应对这一支付, 现在必须存入多少钱?
7. 从现在开始, 一永久年金每年从一年利率为 1% 的账户支出 20 000 美元, 按复利计息. 请问, 这一年金的现值为多少?

---

① 来源: www.pennies.org/pennyfacts.html.

8. 一 10 000 美元存单, 存入一年利率为 8% 的账户, 按复利计息. 从现在开始, 每年从该账户支出 10 000 美元. 请问, 到这一账户支空为止, 总共支付了多少次?
9. 一雇主, 在你工作的第一天向你支付 1 便士, 其后每天你的工资翻倍. 一周工作 7 天, 求出在你工作下列期限后, 你的总收入.
   (a) 一周 (b)两周 (c)三周 (d)四周
10. 一雇工接受了一份工作, 起薪为 30 000 美元, 并在接下来的 10 年, 每年增加 4% 用于生活成本. 请问, 在第 11 年年初时, 该工人的工资为多少? 其前 10 年的总收入为多少?
11. 一产品每年新生产 10 000 个单位, 且每年其在用总数中的 25% 被废弃, 请求出其市场稳定点.
12. 美国财政部铸印局每天大约生产 1800 万个新 1 元; 损坏的美钞由联邦银行销毁. 大约有 40 亿美元的美钞在流通. 假设流通中的 1 美钞有一固定百分比退出流通, 使用几何级数估计这一百分比.
13. 一公司每年销售某产品 1000 个单位, 且每年其在用总数中的 20% 被废弃.
   (a) 请求出产品的市场稳定点.
   (b) 如果到达市场稳定点比较缓慢, 那么由于市场条件的变化, 在用的该产品总数就不可能接近这一值. 做一张表, 给出在第 n=5, 10, 15, 20 年产出刚完成时, 在用的该产品的总数 S_n. 以观察该市场达到市场稳定点的快慢.
14. 对一个公司进行估值的一种方法就是计算其所有未来收益的现值. 假设一农场预计从现在开始, 每年销售价值 1000 美元的圣诞树, 直到永远. 请问, 这一圣诞树商业的现值为多少? 假设年利率为 4%, 按复利计息.
15. 为刺激经济, 政府实施一项 50 亿美元的减税政策. 如果每个接受这一收益的人, 将按如下比例支出这一收益, 请求出这一减税政策所引发的额外总支出.
   (a) 其中的 80% (b)其中的 90%
16. 为刺激经济, 政府实施一项 N 美元的减税政策. 如果每个接受这一收益的人, 将按如比例 k 支出这一收益, 其中 $0 < k < 1$.
   (a) 请给出这一减税政策所引发的额外总支出公式 (根据 N 和 k).
   (b) 如果 k=0.85, 由这一政策所引发的额外总支出为 N 的多少倍?

11.3 在生命科学中的应用

11.3.1 稳态的药物水平

定期给一病人服用某一剂量的某药物. 由于在每一时间区间内, 每一剂量的药物中的一些药物被新陈代谢并被排出, 因此, 正如我们在 11.1 节所看到的, 人体中的该药物的含量将趋于一个*稳态*. 在稳态时, 人体中该药物的含量将在最大值 (刚服下一剂药后, 达到其最大值) 和最小值 (在即将服用下一剂药前, 达到其最小值) 之间波动. 稳态时, 在服用一剂药期间, 其排出的药量等于所服用的药量. (参见习题 20)

例 1 某人耳朵感染, 每 4 小时服用一次氨卡西林, 每次服用 200 mg. 在一个 4 小时的区间内, 在该区间的末期时, 将留存开始时人体所含该药量的 12%. 请问在如下情形时, 人体中该药物的含量为多少?

(a) 刚刚服下第 3 片药时? (b) 刚刚服下第 6 片药时?

(c) 在稳态水平, 刚刚服下一剂药时, 和即将服用下一剂药时?

解 设 Q_n 表示刚服下第 n 剂药时, 人体中氨卡西林的含量 (以 mg 为单位). 我们有

$$Q_n = 200 + 200(0.12) + 200(0.12)^2 + \cdots + 200(0.12)^{n-1}.$$

我们使用 a=200, r=0.12 的有限项几何级数求和公式.

(a) 使用 n=3, 我们有

$$Q_3 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{200(1-(0.12)^3)}{1-(0.12)} = 226.88 \text{ mg}.$$

(b) 使用 n=6, 我们有

$$Q_6 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{200(1-(0.12)^6)}{1-(0.12)} = 227.272\,0 \text{ mg}.$$

(c) 刚服用一剂药后, 稳态水平值, Q(以毫克为单位) 为无穷几何级数的和

$$Q = 200 + 200(0.12) + 200(0.12)^2 + 200(0.12)^3 + \cdots.$$

由于 r=0.12, 且 $-1 < r < 1$, 所以这一无穷级数收敛于一个有限和

$$Q = \frac{a}{1-r} = \frac{200}{1-(0.12)} = 227.272\,7 \text{ mg}$$

从 (b) 部分的答案中, 我们看到人体中氨卡西林的含量在服用 6 剂药后已几乎达到了稳态值.

在稳态水平, 即将服用下一剂药时, 人体中氨卡西林的含量仅仅比刚服用一剂药后的含量低一剂的量, 因此,

在服用下一剂药前的稳态值 = 服用一剂药后的稳态值 − 一剂的量

=227.272 7 − 200

=27.272 7 mg.

习题 5 给出了如何使用这一关系计算氨卡西林的长期含量 Q 的方法. □

例 2 丙戊酸是一种用于控制癫痫病的药物, 其半衰期为 15 小时. 如果每 12 小时服用 D 毫克, 那么, 在刚服用一剂药后人体中该药物的稳态值为多少?

解 服用一剂药量 D 后, 人体中丙戊酸的含量 Q 成指数衰减, 因此, $Q = Db^t$, 其中 t 为时间 (以小时为单位). 由于半衰期为 15 小时, 我们可以通过解方程求出 b:

$$0.5D = Db^{15}$$

$$0.5 = b^{15}$$

$$b = (0.5)^{1/15}$$

由于每 12 小时服用一次药, 我们想知道 12 小时后, 该药物还有多少残留在人体. 使用 t=12, 我们有

$$12\text{ 小时后残留的比例} = b^{12} = ((0.5)^{1/15})^{12} = (0.5)^{12/15} = (0.5)^{0.8}.$$

如果每 12 小时服用 D 毫克的药, 那么, 刚服用一剂后的稳态值为

$$\text{稳态值} = D + D(0.5)^{0.8} + D((0.5)^{0.8})^2 + \cdots.$$

这是一个 $r = (0.5)^{0.8}$=0.574 35 的无穷几何级数. 由于 $-1 < r < 1$, 所以该级数收敛, 且其和为

$$\text{稳态值} = \frac{a}{1-r} = \frac{D}{1-(0.5)^{0.8}} = 2.35D.$$

那么, 刚服用一剂药后人体中该药物的稳态值约为 2.35 倍的服用剂量. □

11.3.2 人体中毒素的累积

在除锈剂或杀虫剂中发现的毒素或有害物能进入食物链并通过食物在人体中累积. 我们可以使用几何级数来计算一有害物在人体中积累的总量.

例 3 某人每天摄入了 5 mg 的某毒素, 该毒素每天以 2%的比率连续排出. 请问, 从长期来看, 每天结束时, 有多少该毒素积累在人体中?

解 由于该毒素每天以 2%的比率连续排出, 那么, 一天前摄入 5 mg 的量将下降为 $5e^{-0.02}$, 两天前摄入 5 mg 的量将下降为 $5e^{-0.02(2)} = 5(e^{-0.02})^2$, 等等. 从长期来看, 每天结束时, 我们有

$$\text{毒素总累积量} = 5 + 5(e^{-0.02}) + 5(e^{-0.02})^2 + 5(e^{-0.02})^3 + \cdots.$$

这是一个 a=5, $r = e^{-0.02}$=0.980 2 的无穷几何. 由于 $-1 < r < 1$, 所以该级数收敛, 且其和为

$$\text{毒素总累积量} = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-e^{-0.02}} = 252.5\text{ mg}.$$

随着时间的推移, 每天结束时, 积累在人体中该毒素量为 252.5 mg. □

11.3.3 自然资源的耗竭

假设某有限的自然资源 (比如石油) 的当期使用量以一个固定比率增加, 那么几何级数可以用于估计该资源可以维持的时间.

例 4 到 2003 年年末时, 世界石油的储藏量约为 11 480 亿桶. 在 2003 年期间, 世界大约消费了 270 亿桶. 在过去的十年间, 石油消费量大约每年增加 1%[1]. 假设未来每年的石油消费量以这一比率持续增加, 请问这一石油储藏量可以维持多久?

---

① www.bp.com/liveassets/bp_internet/globalbp/globalbp_uk_englishi/pubulications/energy_review/STAGING/local_assets/download/pdf /oil_setcion_2004.pdf, 2005 年 5 月 15 日.

解 在上述假设下, 2004 年石油的使用量预期为 270(1.01). 2005 年, 我们预期为 $270(1.01)^2$. 再下年为 $270(1.01)^3$, 等等. 那么, 以 1 亿桶为单位, n 年的石油使用量 Q_n 为

$$Q_n = 270(1.01) + 270(1.01)^2 + 270(1.01)^3 + \cdots + 270(1.01)^n.$$

这是一个 $a = 270(1.01), r = 1.01$ 的 n 项有限几何级数, 由公式求和, 我们有

$$Q_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = 270(1.01)\frac{(1-(1.01)^n)}{1-1.01} = 2\ 7270((1.01)^n - 1).$$

由于总储量为 11 480(以 1 亿桶为单位), 我们想知道 n 为何值时, Q_n 达到 11 480. 我们可以使用数值方法或几何方法估计出 n 的值, 我们也可以通过分析方法给出 n 的值:

$$27\ 270((1.01)^n - 1) = 11\ 480$$
$$(1.01)^n - 1 = \frac{1148}{2727} = 0.4210$$
$$(1.01)^n = 1.4210.$$

取对数并使用 $\ln(A^p) = p \ln A$, 我们有

$$n \ln(1.01) = \ln(1.4210)$$
$$n = \frac{\ln(1.4210)}{\ln(1.01)} = 35.3 \text{ 年}.$$

那么, 如果维持现有的消费模式, 大约 35 年后, 世界石油的供给量将会耗竭. 然而, 如果改变消费模式, 石油储藏被耗竭的时间长度将非常不同. 习题 2 考虑每年增加 2.5%和每年减少 0.5% 时的预期, 这是过去十年间石油消费增量的最大值和最小值. □

11.3.4 几何级数与微分方程

本节, 我们使用几何级数公式来模型化药物含量问题. 在第 10 章, 我们使用微分方程分析了这一问题. 这将产生一个问题: 我们何时使用几何级数, 而又何时使用微分方程呢? 这一答案依赖于服用药品的剂量是*离散的*(如每天早晨吃一片), 还是*连续的*(如静脉注射).

例 5 一病人, 每天服用某药品 25 mg. 服用该药物后, 在新陈代谢作用下, 每天以 10%的比率连续排出. 请问, 从长期来看, 人体中该药物的含量为多少?

(a) 假设每天早晨注射一次该药 25 mg, 使用一几何级数来计算. (分别求出在刚注射下一剂药时和即将注射下一剂药时的人体中该药物的含量)

(b) 假设每天通过静脉注射给人体注射该药物 25 mg, 使用微分方程来计算.

解 (a) 每天注 25 mg, 由于在新陈代谢作用下, 每天又将以 10%的比率连续排出, 所以, 一天后该药量将剩余 $25e^{-0.1}$ mg. 两天后该药量将剩余 $25(e^{-0.1})^2$ mg. 那么,

该药物在人体的长期含量为

$$\text{刚注射一剂后的稳态值} = 25 + 25(e^{-0.1}) + 25(e^{-0.1})^2 + 25(e^{-0.1})^3 + \cdots.$$

我们使用 $a=25$, $r = e^{-0.1}$ 的无穷几何级数求和公式:

$$\text{刚注射一剂后的稳态值} = \frac{a}{1-r} = \frac{25}{1-e^{-0.1}} = 262.7 \text{ mg}.$$

由于, 每次注射 25 mg, 所以,

$$\text{即将注射下一剂药时的稳态值} = 262.7 - 25 = 237.7 \text{ mg}.$$

(b) 药物每天以连续方式进入人体 25 mg, 又以 0.1 倍当前人体中该药含量的固定比率连续排出. 如果 Q 表示 t 天后人体中该药的含量, 那么, Q 满足如下微分方程

$$\frac{dQ}{dt} = 25 - 0.1Q.$$

正如我们在第 10 章所看到的, 人体中该药物的长期含量为该微分方程的均衡解. 当 Q 不变化时, 达到其均衡解, 也就是说, 当 $dQ/dt = 0$ 时. 我们有

$$\frac{dQ}{dt} = 25 - 0.1Q = 0$$

$$Q = 250 \text{ mg}.$$

当药物每天以连续方式进入人体时, 人体中该药物的长期含量为 250 mg. 注意到这一数值介于离散剂量下的最大药物含量和最小药物含量之间. □

习题

1. 在 2003 年, 世界约消费量为 285 亿桶, 比 2002 年增加了 2.1%.[①] 假设未来每年的石油消费量以这一比率持续增加, 请问这一石油储藏量可以维持多久?
2. 与例 4 相同, 假设 2003 年年末时, 世界石油的储藏量为 11 480 亿桶. 在 2003 年期间, 世界大约消费了 270 亿桶. 估计在如下消费假设下, 这一石油储藏量可以维持多久?
   (a) 每年减少 0.5%　(b)每年增加 2.5%
3. 每天早晨, 给一病人注射某药物 50 mg. 在一个 24 小时的区间末, 该药物有 60%残留在人体. 请问如下情形, 人体中该药物的含量为多少?
   (a) 刚注射下第 3 剂药时
   (b) 刚注射下第 7 剂药时
   (c) 在稳态下, 刚注射下一剂药时
4. 华法林是一种抗凝血剂, 其半衰期为 37 小时. 每天在同一时间, 给一病人注射 5 mg 的华法林, 持续注射 10 天.
   (a) 刚注射下第 10 剂药后, 有多少华法林残留在人体?
   (b) 注射下第 10 剂药, 一天后, 有多少华法林残留在人体? 注射下第 10 剂药, 10 天后又有多少华法林残留在人体?

① 《2004 年世界能源统计年鉴》, www.bp.com.

5. 本题给出了另一种推导长期氨卡西林含量的方法 (参见本节例 1). 从长期来看, 刚服下一剂药后, 人体中氨卡西林含量将稳定在 Q(mg). 4 小时后, 在即将服用下一剂药时, 人体中将含有较少的氨卡西林. 然而, 如果已经达到稳定状态, 那么再服用一剂药人体中的氨卡西林含量将恢复到 Q(mg), 因此, 人体排出氨卡西林的量固定在 200 mg. 使用这一信息求出 Q.
6. 每天在同一时间, 给一病人一次性注射某药物 120 mg. 每天排泄该药物的 30%.
   (a) 使用无穷几何级数, 给出刚注射下一剂药后, 人体该药含量的稳态值.
   (b) 证明在稳态时, 一天中所排出的药量等于该药的日注射量.
7. 每天在同一时间, 给一病人口服 50 mg 的抗抑郁剂, 氟西汀. 其半衰期为 3 天.
   (a) 服药 24 小时后, 该药量的多大比例仍残留在人体?
   (b) 刚服下第 7 剂药后, 人体中氟西汀的含量为多少?
   (c) 刚刚服下一剂药时, 人体中氟西汀含量的稳态值为多少?
8. 一患有慢性疼痛病的病人, 每 4 小时, 服用一片含有 30 mg 吗啡的药物. 吗啡的半衰期为 2 小时.
   (a) 在即将服下第 6 片药和刚刚服下第 6 片药后, 人体含有多少吗啡?
   (b) 分别求出在刚服下一片药时和即将服用下一片药时的人体中吗啡含量的稳态值.
9. (a)一种过敏性药物的半衰期为 18 周, 一周服用一次, 一次服用 100 mg. 求出在刚服下一剂药时, 人体中该药含量的稳态值.
   (b) 只有在刚服下药时, 人体中该药含量达到 2000 mg 下, 该药才会有效. 请问, 要使该药有效, 需要几周的时间?
10. 吸一支某品牌的雪茄, 将使人体吸收 1.2 mg 的尼古丁. 尼古丁每小时以 34.65% 的比率从人体排出, 但如果人体中尼古丁含量超过 60 mg, 将会致命. 如果某人以下列频率吸一支雪茄, 请给出吸一支雪茄后, 人体中尼古丁含量的稳态值. 尼古丁含量是否会达到致命水平?
    (a) 每小时 (b) 每半小时 (c) 每 15 分钟
    (d) 每 6 分钟 (e) 每 3 分钟
11. 每天午饭时, 某人摄入某种杀虫剂中含有的毒素 8 mg, 该毒素每天以 0.5% 的比率连续从人体排出. 在长期内, 有多少该毒素在人体累积? 分别给出该人在刚刚吃完午饭后和即将吃午饭时, 人体中该毒素含量的稳态值.
12. 在 2004 年年末, 某矿产的总储藏量为 350 000 m^3. 在 2005 年时, 大约使用了该矿产 5000 m^3. 每年, 该矿产的预期消费量增加 8%. 在这些假设下, 这一储藏量何时将枯竭?
13. 今年我们使用某矿产 1500 kg, 且该矿产的消费量年增长率为 4%. 该矿产的储藏量估计为 120 000 kg. 请问, 大约何时该储量将耗尽?
14. 在 2003 年年末时, 天然气的储藏量为 175.78(万亿) 立方米; 2003 年, 大约消费了天然气 2591(十亿)[①] 立方米. 如果天然气消费每年 2%, 估计该储藏量可以维持多久? (注: 1 万亿 $=10^{12}$, 10 亿 $=10^9$)
15. 在过去 10 年, 每年天然气的增加比例介于 0% 和 5% 之间. 使用 14 题中的数据, 在下

① www.bp.com/liveassets/bp_internet/globalbp/globalbp_uk_englishi/pubulications/energy_ r-eview/STAGING/local_assets/download/pdf/natural_gas_setcion_2004.pdf.

列年增加率下, 估计这一天然气储藏量将能维持多久?

(a) 0% (b)5%

习题 16~18 考虑了在改变使用模式下, 12 题中的矿产可以维持多久的问题. 例如, 随着储藏量减少, 人类开发出了该矿产的替代品.

16. 如果该矿产的使用量年增加 4%, 请问该矿产的储藏量可以维持多久?

17. 如果该矿产的使用量每年维持在 5000 m^3, 请问该矿产的储藏量可以维持多久?

18. 如果该矿产的使用量年减少 4%, 请问该矿产的储藏量可以维持多久?

19. (a) 某药物以固定的周期给病人注射, 该固定周期的时间长度等于其半衰期 (也就是说, 当第一剂药残留一半时, 注射下一剂药.) 求出在刚注射下一剂药时, 人体中该药含量的稳态值, 该值为剂量 D 的函数.

(b) 如果某药物在人体中长期含量的合意值为 300 毫克, 且服药间隔为其半衰期, 请问, 每剂药应服用多少?

20. 在固定时间间隔内, 一次服药某药物 D, 且在一个时间间隔后, 将残留该药量的某一比例 r. 证明在稳态时, 两次服药间隙内排出的量等于一次服药的量.

本章概要

- **几何级数**

有限项和无穷多项

- **几何级数的和**

部分和, 无穷级数的收敛性

- **商业与经济应用**

年金, 现值, 乘数效应, 市场稳定点

- **生命科学应用**

药物重复剂量问题, 毒素累积, 自然资源的耗竭

复习题

对于下列习题 1~8, 如果和存在, 请求出其和.

1. $5+5\cdot 3+5\cdot 3^2+\cdots+5\cdot 3^{12}$

2. $20+20(1.45)+20(1.45)^2+\cdots+20(1.45)^{14}$

3. $100+100(0.85)+100(0.85)^2+\cdots 100(0.85)^{10}$

4. $1000+1000(1.05)+1000(1.05)^2+\cdots$

5. $75+75(0.22)+75(0.22)^2+\cdots$

6. $500(0.4)+500(0.4)^2+500(0.4)^3+\cdots$

7. $31\,500+6300+1260+252+\cdots$

8. $65+\dfrac{65}{1.02}+\dfrac{65}{(1.02)^2}+\cdots+\dfrac{65}{(1.02)^{18}}$

9. 大约在 1993 年 1 月 1 日, 芭芭拉・史翠珊和索尼签署了一份每年 2 百万美元的合约, 持续 10 年. 假设第一笔支付在签署当天执行. 其后所有支付在每年的第一天支付. 也假设所有支付存入一年利率为 4%的银行账户. 按复利计息.

(a) 该账户中有多少钱

(i) 在 1999 年 12 月 31 日晚? (ii) 在最后支付日?

(b) 在签署之日, 该合约的现值为多少?

10. 一个吸食一支雪茄的烟雾的人, 会摄入尼古丁 0.4 mg, 一小时后, 该尼古丁量的 71% 仍残留在人体. 如果从早晨 7 开始, 该人每小时吸一支雪茄, 当在晚上 11 点刚刚吸完烟时, 其体内尼古丁的含量为多少?

11. 图 11-3 给出了药物氨酰心安在血液中的含量随时间变化图, t=0 时服下第一剂药. 为降低血压, 一天服用一次氨酰心安, 一次服用 50 mg.

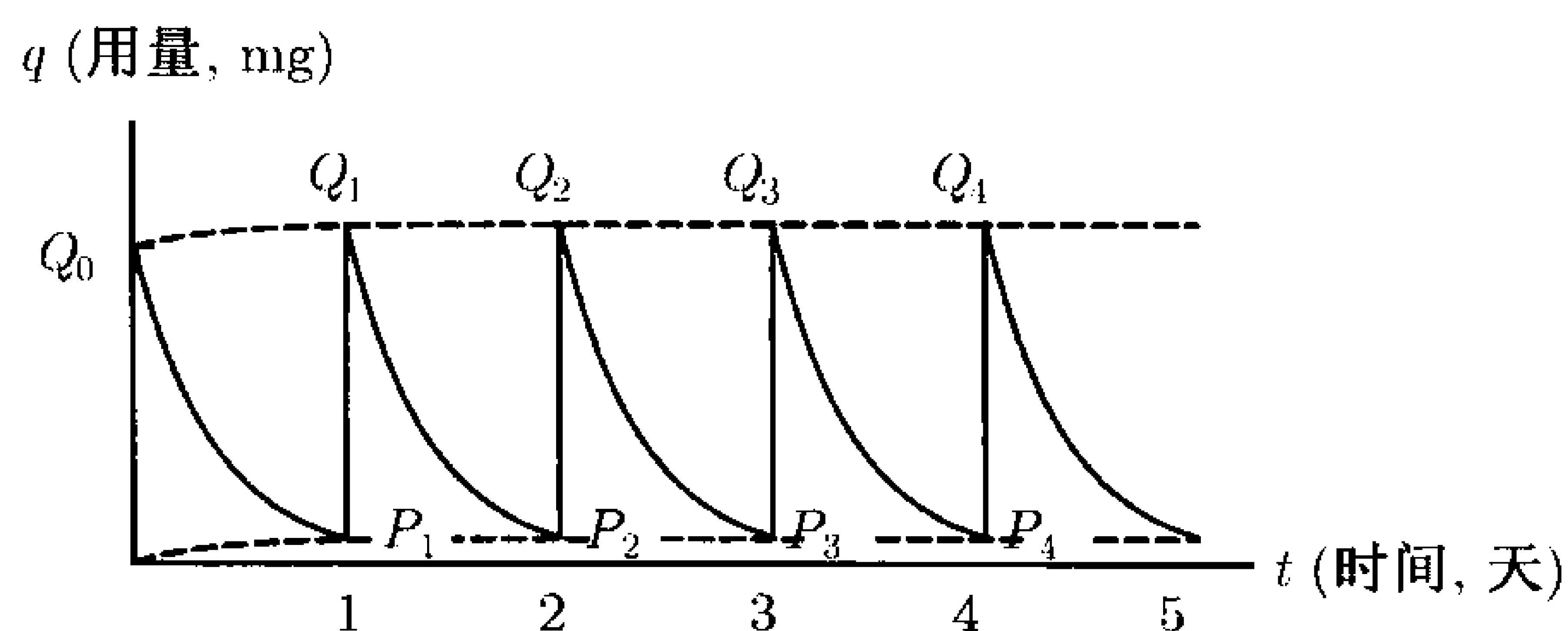


图 11-3

(a) 如果氨酰心安在血液中的半衰期为 6.3 小时, 在一个 24 小时服药期的开始服下的氨酰心安, 在该服药期的末期时, 仍然有百分之几残留在血液中?

(b) 给出显示在图 11-3 中的量 $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$, 和 Q_n 的表达式. 并写出 Q_n 闭形表达式.

(c) 给出显示在图 11-3 中的量 $P_1, P_2, P_3, \cdots$, 和 P_n 的表达式. 并写出 P_n 闭形表达式.

12. 头孢氨苄是一种抗生素, 其在人体的半衰期为 0.9 小时, 每 6 小时服用一片含有 250 mg 头孢氨苄含量的药物.

(a) 在一个 6 小时服药期的开始服下的头孢氨苄, 在该服药期的末期时, 仍然有百分之几残留在人体 (假设在此期间没有服药)?

(b) 给出 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 的表达式, 其中 Q_n 毫克表示刚刚服下第 n 剂药后, 头孢氨苄在人体中的含量.

(c) 给出 Q_3 和 Q_4 的闭形表达式, 并估算他们的值.

(d) 给出一个 Q_n 的表达式, 并把其写为闭形式.

(e) 如果病人坚持服药, 使用你在 (d) 部分的答案来求出从长期来看, 刚刚服下一片药后, 头孢氨苄在人体中的含量

13. 本题处理削减税收对一国经济的累积效应的估计问题. 假设政府实施一项总额为 100(百万美元) 的减税政策. 我们假设所有这一减税的受益者, 将把其获益的 80% 用于支出, 20% 用于存储. 那么, 由这一减税政策所带来的额外收入中的 100(0.8)=80(百万美元)

将被支出, 且因此变为其他人的收入. 假设获得这些收入的人也将其中的 80% 用于支出, 即 80(0.8) (百万美元), 等等. 计算由这一减税政策所带来的总额外支出.

14. 本题说明银行如何创造信用并由此贷出比存款更多的货币. 假设一家银行的初始存款为 100 美元. 银行的经验证明, 平均来讲, 在任意时刻只有 8% 的存款会被存款人提取. 因此, 银行家毫无顾虑的贷出他们存的 92%. 那么, 他将把原有 100 美元中的 92 美元贷款给其他消费者 (比如, 去创业). 而这 92 美元迟早会存入银行的. 那么, 92 美元中的 92%, 或者 92(0.92) =84.64 美元将被再次贷出, 并最终存入银行. 这 84.64 美元中的 92% 又将被贷出, 等等.

(a) 求出经过这些交易后, 存在银行的总货币量.

(b) 存入银行的货币总量除以原有存款被称为信用乘数. 计算这一例子中的信用乘数, 并解释这一数字所告诉我们的信息.

15. 在第一次世界大战前, 英国政府发行了一种称为统一公债的长期债券, 该债券每年支付给其拥有者或它的继承者一个固数目的钱, 直到永远 (那一时代的漫画家把依靠这一支付生存的贵族们描述为沉睡在统一公债中的醉汉). 如果该债券每年支付 10 £, 那么预期一个人可以给该公债支付何价格? 假设第一次支付是从购买之日起后一年, 且年利率保持为 4%, 按复利计息. (£ 为英镑, 英国的货币单位)

16. 一个循环小数总能被一个分数所表示. 本题给出如何把一个循环小数写为一个几何级数, 而这一级数将帮助你找到对应的分数. 考虑小数 0.232 323⋯.

(a) 使用 0.232 323=0.23 + 0.002 3 + 0.000 023 + ⋯ 这一事实, 把求出 0.232 323⋯ 写为一个几何级数.

(b) 使用几何级数求和公式证明 0.232 323⋯ = 23/99.

17. 一个球从 10 ft 高掉下, 并不断弹跳. 每次弹跳到弹跳前高度的 $\frac{3}{4}$. 那么, 该球第一次撞击地面后, 又弹跳到 $10\left(\frac{3}{4}\right)$=7.5 ft 高. 第二次撞击地面后, 弹跳到 $7.5\left(\frac{3}{4}\right)=10\left(\frac{3}{4}\right)^2=$ 5.625 ft 高.

(a) 给出第 n 次撞击地面后, 该球弹跳高度的表达式.

(b) 分别给出该球撞击地面第 1 次, 第 2 次, 第 3 次, 第 4 次时, 它所经过的总垂直距离.

(c) 给出该球第 n 次撞击地面时, 它所经过的总垂直距离. 并给出该答案的闭形表达式.

下列习题 18~20 讨论债券问题, 这些债券是由政府发行用于募集资金的. 一购买 1000 美元该债券的个体, 给政府 1000 美元, 并反过来在债券的到期日前, 每 6 个月或每年接受一个固定货币数量的收入, 这一收入被称为*息票收入*. 在获得最后一笔息票收入时, 个体也将获得 1000 美元或其本金.

18. 假设年利率为 6%, 按复利计息. 对于一个每年支付 50 美元的 10 年期债券, 一张 1000 美元的该债券的现值为多少 (从现在开始算作第一年)?

19. 假设年利率为 4%, 按复利计息. 对于一个每年支付 50 美元的 10 年期债券, 一张 1000 美元的该债券的现值为多少 (从现在开始算作第一年)?

20. **(a)** 假设年利率为 5%, 按复利计息. 对于一个每年支付 50 美元的 10 年期债券, 一张 1000 美元的该债券的现值为多少 (从现在开始算作第一年)?

(b) 由于 50 美元是 1000 美元的 5%, 因此, 这一债券常被称为 5% 债券. 当利率为 5% 时, 关于本金与这张债券的现值之间的关系, 部分 (a) 的答案可以告诉你什么?

(c) 如果年利率高于 5%, 按复利计息, 那么本金和债券的现值中, 哪个较大? 为什么你认为债券可以被视为按一个*折扣*(discount) 来交易?

(d) 如果年利率低于 5%, 按复利计息, 那么为什么你认为债券可以被视为按一个*溢价*(premium) 来交易?

课外自修项目

1. *你有共同的祖先吗?*

在本项目中, 我们将估计你的祖先的数目, 并确定是否有共同的祖先. (一个共同的祖先是指一个人表现出其家族的两面特征. 例如, 如果你母亲这支的曾祖母也是你父亲这支的祖母, 那么她是一个共同祖先.)

(a) 通常, 每个人有两个生物上的父母, 4 个生物上祖父母, 8 个生物上的曾祖父母, 等等. 写出一个你所拥有的祖先的数目, 追溯到第 n 代.

(b) 一代人持续多长时间呢? 估计一下, 当一个婴儿出生时, 典型的父母亲的年龄. 这是一代人的时间长度. 如果我们追溯到 100 年, 500 年, 1000 年, 2000 年前, 将包含了多少代人?

(c) 如果我们追溯到 100 年, 500 年, 1000 年, 2000 年前, 使用你在部分 (a) 和 (b) 所获得的答案, 来估计你的祖先数目.

(d) 在部分 (a) 和 (c), 我们独立计算每一个祖先, 因此, 我们隐含假设你没有共同祖先. 根据 1999 年时, 全球拥有 6(十亿) 人口, 而公元 1 年时有 200(百万) 人口这一事实, 来判断我们的隐含假设是否合理. 解释你的理由.

2. *国民经济扩张的* Harrod-Hicks *模型*

Harrod-Hicks 模型预期如果一个国家经济正在增长, 那么该国在一年内的国民收入将与其前一年的国民收入相关. 如果我们设 $f(n)$ 表示第 n 年的国民收入, 那么该模型预测, 对某些常数 k 和 h, 有

$$f(n+1) = kf(n) - h, \qquad \text{其中} k > 1, \quad h > 0.$$

(a) 设 $C = f(0)$. 借助 k, h 和 C 写出 $f(1), f(2)$ 和 $f(3)$.

(b) 证明

$$f(1) = kC - h,$$
$$f(2) = k^2C - (1+k)h,$$
$$f(3) = k^3C - (1+k+k^2)h$$

使用这些公式来猜测 $f(n)$ 的公式.

(c) 使用一个有限项几何级数求和公式, 给出 $f(n)$ 的一个闭形表达式.

3. 在体育运动中赢的概率

在某体育运动中, 赢得一场比赛要求领先对手 2 分, 也就是说如果现在得分相同, 你必须连得两分才能获胜.

(a) 对于一些运动项目 (比如, 网球), 每击一次球均计一分 (point), 如果你赢得下一分的概率总是 p. 那么你的对手赢得下一分的概率总是 $1—p$.

(i) 你赢得下两分的概率为多少?

(ii) 下两分中, 你和你的对手各赢得一分 (也就是说, 你们没有一个人赢得两分) 的概率为多少?

(iii) 下两分中, 你和你的对手各赢得一分, 然后你在其后连得两分的概率为多少?

(iv) 你要么全赢下两分, 要么和对手各赢一分, 然后赢得其后两分的概率为多少?

(v) 给出你获得平局的概率 w 的公式.

(vi) 计算当 p=0.5, 0.6, 0.7, 0.4 时, 你获得平局的概率.

(b) 对于其他运动 (比如, 排球), 只有轮到你发球, 你才能得分. 只有你赢得一球, 你才能获得发球权. 假设轮到你发球时, 你得分的概率为 p, 而轮到你的对手发球时, 她得分的概率 q.

(i) 假设现在你发球, 你首先赢得下一分的概率为多少?

(ii) 假设你获得一球, 下轮发球权归你. 使用你在 (a) 部分获得的答案和 S 的公式, 计算你获得平局的概率 (假设你必须连赢两分才能获胜).

- 假设 p=0.5, q=0.5 且轮到你发球.
- 假设 p=0.6, q=0.5 且轮到你发球.

附　　录

下面的课外自修项目要求利用试算表 (Microsoft Excel). 它们都可以用第 1 章中的思想来做. 另外, 项目 8(Verhulst: Logistic 模型) 和项目 9(信息的传播) 是从另一个角度考虑第 4 章和第 10 章中的材料. 项目 4(住宅按揭比较) 用到了几何级数, 但是在学习第 11 章之前也可以做它.

课外自修制表项目

1. Malthus: 人口超过粮食供应

在本项目中, 我们比较指数增长和线性增长. 我们观察指数函数最终控制线性函数.

人口增长的最著名的模型之一是由 Thomas Malthus 在 19 世纪初期建立的. Malthus 确信, 当人类人口以指数增长时, 其生活资料以线性增长. Malthus 根据这一观察得出的悲观结论是, 地球的人口必然超过生活资料, 结果是粮食供不应求. (Malthus 又注意到只有战争、饥荒、流行病、大规模的性别抑制或者其他严厉抑制人口增长的措施才能改变这一形势.)

下面的表格给出了一个如同方案一样的试算表的一部分. [①] 初始人口是 1 百万, 可用粮食能养活 2 百万人. 人口每年以 3% 的年增长率增长, 而粮食产量每年增加 100 000 单位. 这些人口和粮食增长率放在试算表右边的格子里. 第 4 列包含每个人的可用粮食占总人口的比. 试算表包括一个安全比 —— 只要粮食对人口的比在 1.5 这个数字之上, 第 5 列就显示 “是”; 当该比在这个数字之下第 5 列就显示 “不是”(如此下去直到 21 世纪结束).

我们发现最初粮食充足 —— 粮食对人口的比是 2, 这意味着粮食是养活这些人口所必需的 2 倍. 最初几年该比是增加的, 但是到了某一点它开始下降, 并且最终该比降到 1 以下.

(1) 像所给表格一样制作你的试算表, 将它延拓到 2100 年. 实际上每格应该包含一个公式——例外的是第 6 格包含 “1999” “1 000 000” “2 000 000” “3.00%” “100 000” “1.5”.

(2) (a) 大约多少年粮食对人口的比最大?

---

① 数据来源于 Graeme Bird.

(b) 哪一年该比达到 1?

(3) 至少有两个途径可以改进当前的状况：降低人口增长率, 或者增加粮食供应.

(a) 为了使得直到 2100 年粮食对人口的比都不能达到 1, 人口增长率必须降到多少? (保持粮食供应每年增加 100 000 单位.)

(b) 为了达到同一个目标, 直到 2100 年该比都不能达到 1, 粮食供应必须增加多少? (保持原来的人口增长率 3%.)

(4) 利用原有的方案, 创建下面每个图表 (既有行又有列). 将该图表延拓到 2100 年, 使得人口增长超过粮食供应的点非常明显.

(a) 将年放在水平轴上, 显示人口和粮食.

(b) 将年放在水平轴上, 只显示比.

年	人口	粉食供应	比	在安全比之一	
1999	1 000 000	2 000 000	2.00	是	年人口增长率 3.00%
2000	1 030 000	2 100 000	2.04	是	
2001	1 060 900	2 200 000	2.07	是	
2002	1 092 727	2 300 000	2.10	是	粮食年增长量 100 000
2003	1 125 509	2 400 000	2.13	是	
2004	1 159 274	2 500 000	2.16	是	
2005	1 194 052	2 600 000	2.18	是	安全比 1.5
2006	1 229 874	2 700 000	2.20	是	
2007	1 266 770	2 800 000	2.21	是	
2008	1 304 773	2 900 000	2.22	是	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
2098	1 865 886 6	1 190 000 0	0.64	不是	
2099	1 921 863 2	1 200 000 0	0.62	不是	
2100	1 979 519 1	1 210 000 0	0.61	不是	

2. 信用卡债务

你有一张欠款 2000 美元的信用卡. 你的信用卡公司收取 1.5% 的月利率并且要求最低月支付为你当时欠款余额的 2.5%. (该方案与许多信用卡公司所采用的类似, 参见问题 8.)

[注意：问题 (1)~(2) 你不需要试算表, 但需要一个计算器.]

(1) 如果月利率是 1.5%, 那么实际年利率是多少?

(2) 作为规则, 要求的最小月支付应该超过一个月的应收利息. (例如, 这里 2.5% 的最低月支付超过 1.5% 的月收取利息.) 说明情况为什么会如此. 如果所要求的最低月支付低于应收利息, 信用卡欠款余额会怎样?

假设你决定每月只按所要求的最低月支付付清你的 2000 美元的信用卡欠款. 又假设你不再从信用卡中支取, 因为你试图付清它.

(3) 因为 2000 美元的 2.5% 是 50 美元, 所以你的首个月支付是 50 美元. 假设你每月只按所要求的最低月支付来付款, 在你制作试算表计算之前, 猜一猜需要多长时间可以将你的全部欠款余额从 2000 美元降到不足 50 美元. 粗略估计非常好; 利用普通的想法并且说明你的理由.

(4) 超过规定的时间, 你的月支付会减少, 你的月支付是从 50 美元开始的. 解释为什么会这样. 你的月支付会减少影响你对问题 3 的解答吗?

(5) 虽然你只欠信用卡公司 2000 美元, 由于收取利息, 实际上你的支付会比 2000 美元多一点儿. 好好猜一猜 (在做具体计算之前), 当你将最初的 2000 美元欠款还清时, 你大概已经付给信用卡公司多少钱.

制作一个试算表显示从你开始支付债务算起的月数、你的当前欠款余额、当月应付的利息以及你的付款, 每一项放在试算表的一列. 每一个量应该由一个公式来计算.

例如: 为了确定你所需要的公式, 要想到你最初的欠款余额是 2000 美元, 收取的月利息是 1.5%, 所要求的最低月支付是 2.5%. 这样, 在第一个月的开头, 你的欠款余额就是 2000 美元, 因为你还没有支付. 因此, 在第一个月末, 你欠款的利息是余额 2000 美元的 1.5% 或者是 30 美元. 你的最低月支付是余额 2000 美元的 2.5% 或者是 50 美元. 这样, 在第二个月的开头, 你的新的欠款余额就是旧的欠款余额 2000 美元加上利息 30 美元再减去 50 美元的付款, 也就是 1980 美元. 注意到第二个月的数据依赖于第一个月的数据; 类似地, 第三个月的数据依赖于第二个月的数据, 等等. 按照这个程序确定出你所需要的公式将它们放在试算表的每一列中.

一旦制作好了可用的试算表, 请回答下列问题.

(6) 问题 3 中你的猜测如何? 用你的试算表求出需要多长时间可以将你的欠款余额从 2000 美元降到不足 50 美元. 你的猜测是接近呢, 还是你对实际需要花费如此长的时间感到惊讶呢?

(7) 问题 5 中你的猜测如何? 用你的试算表算出当你将欠款余额还到不足 50 美元时你恰好支付给信用卡公司多少钱. 如何将这一数字与原债务 2000 美元进行比较?

(8) 用你的试算表求出需要多长时间可以将你的欠款余额从 2000 美元降到 0 美元. 还是你回答不了? 究竟有没有这一时刻你恰好将所欠的债务全部还清? [提示: 实际上, 最低月支付和收取的利息会变得不现实. 从哪个角度讲它们是不现实的? 现实的信用卡公司是如何避免这一情况的?]

(9) 现在让我们用数字做个实验看看到底发生了什么. 在下列每种情形, 对你的试算表作一些适当的变化. 假设只要你的欠款余额在 50 美元以下, 你就能一次

性付清.

(a) 如果你每个月比所要求的最低月支付多支付 1 美元, 需要多长时间可以将你的欠款降到不足 50 美元? 当你还清了所有债务时, 你总共向你的债权人支付了多少钱? 用这种支付方案代替问题 5 中的方案你节约了多少钱?

(b) 你的首个月支付是 50 美元. 如果你每月支付 50 美元, 而不是支付所要求的最低月支付, 需要多长时间可以将你的欠款降到不足 50 美元? 如果用这种支付方案代替习题 5 中的方案, 你节约了多少钱?

(c) 最近, 许多信用卡公司提出了类似于如下的建议: 如果你将你的债务从他们竞争者发行的卡中转到他们的卡中, 他们将收取你较低的利率. 假设你找到了一个愿意作这种转换的信用卡公司, 并且他们的月利率是 1% 而不是 1.5%. 保持原有的假设都不变, 需要多长时间可以将你的欠款降到不足 50 美元, 另外你总共向你的债权人支付了多少钱? 与你支付给原来的信用卡公司相比你节约了多少钱?

(10) 关于付清一个信用卡债务, 将问题 3~5 中的方案与问题 9 中的每个方案进行比较, 你会得出什么样的结论?

3. 选择银行贷款

一家当地银行提供了如下贷款套餐. 用试算表决定哪个选项是最佳的. 该套餐如下:

- 2000 美元的贷款, 年利率 9%, 24 期付清按月分期付款.
- 2000 美元的贷款, 年利率 10%, 36 期付清按月分期付款.
- 2000 美元的贷款, 年利率 9.25%, 52 期付清按两周分期付款.

还款时利息以相同的频率重复计算. 注意到第一种和最后一种贷款有两年支付期限; 中间一种贷款有三年支付期限.

(1) 利用试算表决定哪种贷款在银行的总支付方面是最便宜的. (参见下面的提示.)

(2) 利用试算表决定哪种贷款在最低月支付方面是最容易负担的. (参见下面的提示.)

提示: 问题 1 和问题 2 的困难部分在于算出你的每月 (或每两周) 支付. 有这样的公式通过还款期限、贷款额和收取的利率可以算出支付额, 但是我们不用它们, 我们利用试算表. 其想法是, 你可以对支付额应该是多少作一个推断猜测, 然后用试算表对你的答案进行核算. 通过观察试算表, 你能够决定你的猜测是太高了还是太低了, 从而改进你原来的猜测. 令人吃惊的是, 通过这种猜测核算的方法你能很快地瞄准所要求的月支付, 直到最接近的分.

例如, 考虑第一种贷款, 两年期 9% 年利率的 2000 美元贷款. 制作一个试算表, 包括 2000 美元的初始欠款余额, 第一个月的利息, $(9\%/12)\cdot 2000\text{美元} = 15\text{美元}$, 以

及对月支付的猜测. 有许多方式可以猜测月支付. 比如说一种方式, 你借了两年期 9% 年利率的 2000 美元贷款, 你大概欠 2000美元$(1.09)^2$ = 2376美元. (不要想到每月重复 —— 这只是粗略的估计.)24 期均等地付清这个数额, 每个月的支付是 2376 美元/24=99 美元. 所以, 我们猜测月支付是 100 美元. 用这个猜测, 第二个月的余额是

$$(2000\text{美元}) + (\text{第一个月的利息}15\text{美元}) - (100\text{美元还款}) = 1915\text{美元}.$$

这样, 下一个月的利息是 $(9\%/12) \times 1915$美元, 并且下一个月的支付将同第一个月的支付一样, 也是 100 美元. 重复这一过程直到确定出 24 个月 (两年) 的支付额. 你会看到最后的余额是负的, 意味着你付给银行的钱比你实际欠的要多. 这说明付清你的 2000 美元贷款每月支付 100 美元太高了. (这就是我们做上述估计时所说到的情形. 你明白为什么吗?) 由于 100 美元太高了, 因此你猜测月支付 80 美元是对的. 如果你这样做, 你会看到 24 个月以后你仍然欠银行一些钱. 这就告诉你每月支付 80 美元太低了, 并且实际支付大概在 80 美元和 100 美元之间. 这一过程可以重复进行直到获得精确的月支付.

4. 住宅按揭比较

为了做这个项目, 先要到银行询问实际按揭贷款的利率. 银行很乐意提供它们.

要获取 100 000 美元零附加点的 30 年贷款利率、15 年的贷款利率、30 年的两周贷款利率和 20 年的贷款利率 (如果可能). (注意: 某些贷款包含附加点. 附加点是当贷款等于所借款额的 1% 时付给贷方的附加费. 最典型的是, 如果付给一个附加点或两个附加点你就能得到较低的利率. 我们只考虑零附加点的贷款.)

下面的公式可以确定你的支付 x:

$$x = \frac{Pr^n(r-1)}{r^n - 1}$$

其中 P 是贷款额 —— 在本情形中为 100 000 美元 ——n 是还款次数. 对于按月支付的 30 年期贷款, $n = 360$; 对于 30 年期的两周贷款, $n = 780$(每年还款 26 次). 最后, r 等于每个计息期的利率加上 1.(例如, 若利率是 2%, 那么 $r = 1.02$.) 在问题 4 中, 你能用下面几何级数[①]求和公式导出这个 x 的公式:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$$

(1) 假如你打算在整个贷款期间住在你的房子里, 利用所给的信息, 以及你从银行获取的实际利率清单, 确定哪种贷款 (30 年的贷款、30 年的两周贷款、20 年的贷款还是 15 年的贷款) 是最佳的. 假设整体花费最少的按揭是最佳的. (在现实生活中, 当附加点和税都考虑在内时, 情况更加复杂.) 尽管做这一题可能不需要试算表, 但无论如何你自己想要制作一个.

① 几何级数在第 11 章有详细的讨论.

(2) 银行通常要求月支付不超过申请者月收入的几分之几. 由于这个原因, 一般来说较少的月支付贷款容易获得. 因此, "最佳贷款"——你可以在问题 1 中找到——也许不是 "最容易获得" 的贷款. 你的实际利率清单中的哪种贷款月支付最低? 哪种最高?

(3) 假设你希望在五年内以 145 000 美元的价格卖掉你的房子. 在这种情况下你应该选择哪种贷款? [提示: 这里的目的是获得最大利润. 算出五年后你已经付给银行多少钱, 那时候你的剩余债务是多少. 当你卖掉你的房子的时候, 剩余的债务应该立刻还给银行, 所以你的利润是 (房子的出售价格)−(银行的贷款余额)−(在前五年付给银行的款额).]

(4) 导出月支付 x 的公式. [提示: 用 x 和 r 的几何级数表示 n 个月以后你的贷款余额. 当你付清你的贷款时贷款余额等于 0; 用这个事实解 x. 化简最终表达式 (通过求几何级数的和) 得到求 x 的公式.]

5. 彩票中奖的现值

1993 年 2 月 24 日星期三, 马萨诸塞州 Dennis 港的 Bruce Hegarty 收到了他在大批百万国家彩票中所中的 26 680 940 美元大奖的首期款项. 排定 Bruce Hegarty 先生分不止 19 次逐年收到这样的款项. 彩票委员会签署的每张支票是总奖金的二十分之一, 即 334 047 美元. 彩票委员会为什么不预先支付 Hegarty 先生的全部奖金, 而要他等待 20 年?

(1) 假设年贴现率 (利率) 是 5%、10% 和 15%, 计算彩票委员会付出的钱的现值. 在每种情形下, 26 680 940 美元奖金的面值相当于现值的百分之多少?

(2) 多少贴现率可以导致付款的现值只值奖金面值的一半?

(3) 作出不同贴现率的支付现值图形, 贴现率的范围从 0% 到 15%. 描述该图形. 关于彩票委员会为什么不预先支付 Hegarty 先生的全部奖金, 该图形告诉了你什么?

6. 投资比较

考虑两个投资工程. 工程 A 在一年内建成, 最初成本是 10 000 美元. 经过五年的期限它产生了如下递减的利益流: 5000 美元, 4000 美元, 3000 美元, 2000 美元, 1000 美元. 工程 B 在两年内建成. 最初成本是第一年 10 000 美元第二年 50 000 美元. 接下来四年每年产生 60 000 美元利益. 哪个投资工程更可取?

(1) 假设年贴现率 (利率) 是 4% 计算两个工程的现值. 哪个工程更可取? [提示: 把支出看作是负的收入看作是正的.]

(2) 假设年贴现率 (利率) 是 16% 计算两个工程的现值. 现在哪个工程更可取?

(3) 完全用语言描述为什么低贴现率对一个投资工程有利, 而高贴现率对另一

个投资工程更有利.

(4) 一个贴现率使得工程的现值变为零就称为*内部回报率*. 工程 A 的内部回报率是多少? 工程 B 的内部回报率是多少? [提示: 对不同的贴现率进行猜测直到将现值降到 0 美元.]

(5) 作一个两种投资关于贴现率的现值图, 贴现率的范围是 0% 到 30%. 该图的哪些特征与两个工程的内部回报率相对应?

7. 为了将来投资: 学费支付

13 岁和 17 岁的两个青少年, 他们的父母将一笔钱存入银行账户以 7% 的复利年利率挣得利息. 该存款是用来支付每年 10 000 美元的连续 8 年的大学学费. 账户支出从最初存入之后的一年开始.

(1) 用试算表模仿该父母所开的储蓄账户. 每年年终, 该账户挣得 7% 的利息, 并且有 10 000 美元的提款. 确定最初需要存入多少钱才能保证 8 年的每年 10 000 美元学费支付. 对不同的值进行猜测, 看看哪个值使你 9 年后恰好没有剩余.

(2) 回答完问题 1 后, 用试算表计算 8 年的每年 10 000 美元学费支付的现值, 从未来的一年开始, 贴现率为 7%.

(3) 比较问题 1 和问题 2 的答案. 这是巧合吗? 讨论一下.

(4) 假设该父母只存入 50 000 美元到储蓄账户. 如果保证 8 年的每年 10 000 美元学费支付, 账户挣得的年利率必须是多少? [提示: 对各种贴现率计算支付的现值.]

8. 新的还是旧的

你正在决定是买新车还是旧车 (同一型号) 以及要使用多少年. 你要使得你的总花费最少, 这些费用包括两部分: 汽车价值的损失和修理费. 一辆新车花费 20 000 美元, 每年它的价值损失 20%. 第一年的修理费是 400 美元以后逐年增加 25%.

(1) 制作一个试算表给出每年的汽车价值、价值损失、修理费以及总费用. 四舍五入到最接近的美元, 前两行看起来像这样:

年	价值	损失	修理费	总费用
1	20 000	4000	400	4400
2	16 000	3200	500	3700
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(2) 哪年的总费用最低?

(3) 你打算使用 5 年. 比较一辆新车和一辆使用两年的旧车的总花费.

(4) 如果你计划使用 5 年你应该买一辆多旧的车?

(5) 在你的试算表中增加两列, 显示买一辆不同使用年数的二手车使用 4 年和 5 年其每年的平均费用. 买使用多少年限的二手车最好?

(6) 一辆新车花费 30 000 美元, 每年它的价值损失 25%: 修理费从 500 美元开始以后逐年增加 10%. 如果你买一辆使用了 7 年的旧车, 你应该使用 4 年还是 5 年? 每种情形每年的平均费用是多少?

(7) 一辆车新的时候花费 30 000 美元. 你买一辆使用了 4 年的旧车要使用 5 年: 修理费和问题 6 中的一样. 如果每年的平均费用是 2300 美元, 求出它的价值损失率.

9. Verhulst: Logistic 模型

动物总数 P 经过一个时间间隔 Δt 的相对增长率由公式:

$$\text{相对增长率} = \frac{1}{P} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

给出. 在指数增长中, 相对增长率是一个常数. 尽管指数增长经常用来建立动物总数模型, 但是这种模型预示着动物总数将无限增长, 因此不符合实际. 19 世纪 30 年代, 比利时数学家 P.F.Verhulst 提出了 Logistic 模型, 按照这种模型当动物总数增加时动物总数的相对增长率线性地减少到 0. Verhulst 模型预示着动物总数规模最终要稳定在一个叫做*承受能力*的值上.

为了明白 Verhulst 的 Logistic 模型是怎么起作用的, 假设一对种兔被带到一座没有兔子的小岛上. 开始兔子的总数每个月增加到两倍. 这意味着最初每个月的相对增长率是 100%. 然而, 最终当总数增长时每个月的相对增长率要降到 0%. 假设当兔子总数达到 10 000 只时, 相对增长率达到 0%. (因此, 这个小岛的承受能力是 10 000.) 利用试算表, 我们可以建立兔子的总数随时间变化的模型.

(1) 设 P 是总数 r 是每个月的相对增长率. Verhulst 假设当总数增加时相对增长率线性地减少. 这意味着当 P 从 10 000 只兔子变到 0 时, r 从 0% 变到 100%. 解释下面关于 r 的公式为什么适合 Verhulst 的假设: $r = 0.0001 \times (10\ 000 - P)$.

(2) 用一个试算表表示最初两年 (24 个月) 该岛上每个月兔子的总数. 作出兔子的总数随时间变化的图形. 描述兔子总数的性态. [提示: 从两只兔子开始, 用问题 1 中的公式计算相对增长率. 然后, 更新每个月的兔子总数和相对增长率.]

(3) 作图, 将兔子总数的 Logistic 模型与每个月以常相对增长率 100% 的指数增长的兔子总数进行比较. 两个模型都从两只兔子开始. 描述二者之间的相似之处和不同之处. Logistic 模型比指数模型有什么优势? (在设置图形参数时你要小心; 否则, 你所看到的是, 指数总数上升得非常快而 Logistic 总数一点都看不见.)

(4) Logistic 模型的核心就是总数增长时相对增长率线性减少. 然而, 这不是说相对增长率关于时间线性减少. 作一个最初两年的相对增长率关于时间变化的图形. 描述相对增长率关于时间变化的性态.

(5) (a) 关于兔子总数增长的不同假设会导致不同的 Logistic 曲线. 在问题 1 中, 我们假设最初的相对增长率是 100%, 当兔子总数达到 10 000 只时相对增长率降到 0%. 这导致了公式 $r = 0.0001 \times (10\,000 - P)$. 现在假设最初的相对增长率是 10%(而不是 100%). 关于 r 和 P 的新的公式是什么? (承受能力仍然是 10 000, 所以当 $P = 0$ 时 $r = 10\%$, 并且当 P 增加到 10 000 时 r 减少到 0%.)

(b) 利用你的关于相对增长率 r 的新公式, 让我们看看不同的最初兔子总数是如何导致不同的 Logistic 曲线的. 建立如下方案的模型, 期限是 5 年 (60 个月): 最初是 100 只兔子的兔子总数、最初是 5 000 只兔子的兔子总数、最初是 12 500 只兔子的兔子总数以及最初是 17 500 只兔子的兔子总数. 将你的所有数据放在同一个图表中. 当兔子总数超过该岛兔子承受能力时兔子总数会怎么样? 这有什么意义?

10. 信息的传播: 两个模型的比较

居民传播信息对政策制定者很重要. 例如, 农业部门利用数学模型了解本国的技术革新和新种子类型的传播.

本项目中, 你将比较信息传播的两个不同模型——其中之一是 Logistic 模型. 假设在两个情形中人口是 10 000 而最初掌握信息的只有 100 人. 设 N 表示 t 时刻掌握信息的人数.

模型 1: 如果信息是通过大众媒体 (电视、广播、报纸) 传播的, 绝对传播率是 $\Delta N/\Delta t$, 假设它与当时没有掌握信息的人数成正比. 假设 t 是天数, 比例常数是 10%. 例如, 第一天没有掌握信息的人数是 10 000 − 100=9900. 因为 9900 的 10% 是 990, 所以第一天的信息传播率是每天 990 人. 这意味着第二天, 没有掌握信息的人数 8910 并且传播率是 8910 的 10%, 也就是每天 891 人, 如此下去.

模型 2: 如果信息传播换作口头传播, 绝对传播率与掌握信息的人数和没掌握信息的人数之积成正比. 假设 t 是天数, 比例常数是 0.002%. 例如, 第一天掌握信息的人数和没掌握信息的人数之积是 $100 \times 9900 = 990\,000$. 因为 990 000 的 0.002% 大约是 20, 所以第一天的信息传播率是每天 20 人. 这意味着第二天, 掌握信息的人数和没有掌握信息的人数之积是 $120 \times 9880 = 1\,188\,600$, 这就给出了传播率是 1 188 600 的 0.002%, 大约是每天 891 人, 如此下去.

(1) 利用试算表, 比较两个模型所反映的居民信息传播. 制作一个图表, 比较两个模型所反映的掌握信息的人数关于时间变化的预报. 描述两个模型的相似之处和不同之处. 为什么模型 1 适合存在大众媒体的时候? 为什么模型 2 适合缺少大众媒体的时候?

(2) 两个模型中的哪一个是 Logistic 模型? 你如何断定? 另外一个模型表示的是哪种增长类型? 你如何断定?

(3) 由定义, 如果一个总数的相对变化率是目前总数的递减线性函数那么该总

数就是 Logistic 增长. 尽管模型 2 由绝对增长率定义, 说明它为什么还导致 Logistic 增长.

(4) 我们的试算表只是一个近似解. 讨论为什么会这样? [提示: 其误差比舍入误差要大.]

11. 第一次世界大战期间的流感

在第一次世界大战期间, 一种特别致命的流行性感冒在全世界范围内夺去了约四亿人的生命①. 这种流行病是在波士顿外一个 45 000 名士兵的军营中开始发作的, 其中第一个士兵患病是在 1918 年 9 月 7 号. 在本问题中你要为 1918 年流感暴发的 SIR 模型制作一个试算表. 从初值 S_0 和 I_0 开始, 对任意的时间增量 Δt, 易感染者和染病者人数的变化近似为

$$\Delta S \approx -aSI\Delta t$$

$$\Delta I \approx aSI\Delta t - bI\Delta t.$$

(1) 取 $\Delta t = 0.1$, $a = 0.0003$, $b = 10$, 制作一个试算表, 它的前几行看上去像这样:

t	S	I	Δs	ΔI
0	44 999	1	−1.3500	0.3500
0.1	44 997.65	1.3500	−1.822 40	0.4724
0.2	44 995.828	1.8224	···	···

(2) 第五天有多少士兵得病? 这一天有多少人是易感染者?

(3) 改变试算表使得使用者输入的任何值 Δt, a, b 都能被接受.

(4) 对于 1918 年的流行病, 利用值 $a = 0.000\,267$, $b = 9.865$, 减少 Δt 的值直到 9 月 16 号生病的士兵数达到一个稳定的估计. 到这一天有多少士兵被感染?

(5) 估计需要多长时间 1918 年的流行病才会结束?

① “捕获一种杀人的流感病毒”, J. Taukenberger, A. Reid, T. Fanning, 载于《科学美国人》, 292 卷第 1 期, 2005 年 1 月.

预 先 测 验

本节中的预先测验涵盖了使用本书时所需要的技巧. 在课程开始时做它有助于你确定所需要尽早复习的代数知识, 这有助于你学习顺利.

预先测试题

1. 图 1 中的直线方程是什么?

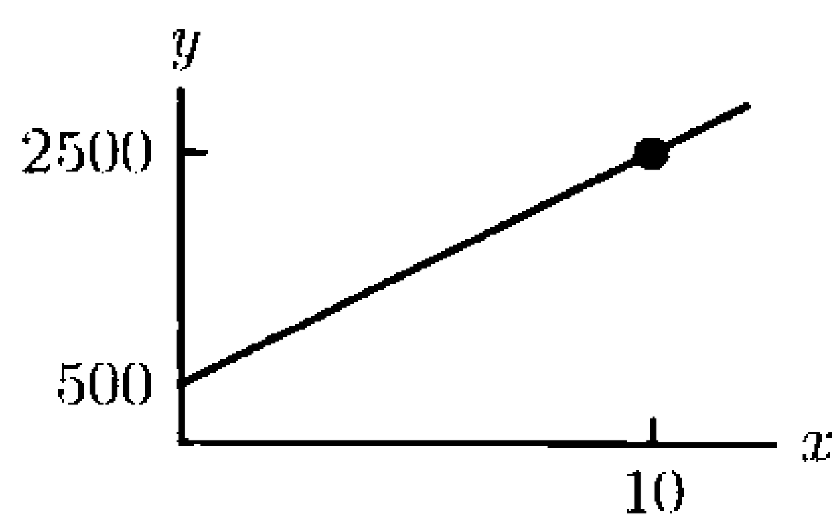


图 1

2. 图 2 中 a 的值是多少?

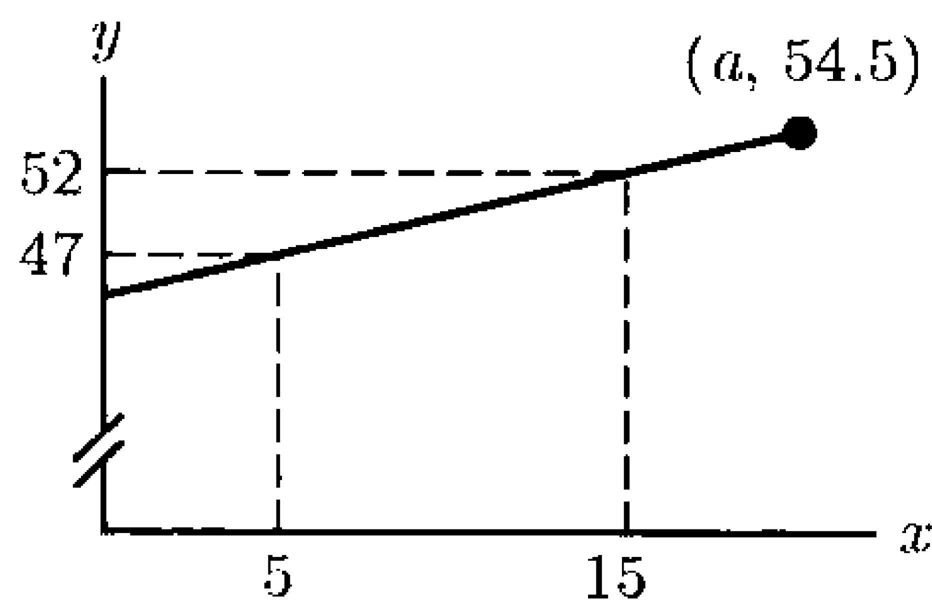


图 2

3. 求图 3 中的 a_1 和 a_2.

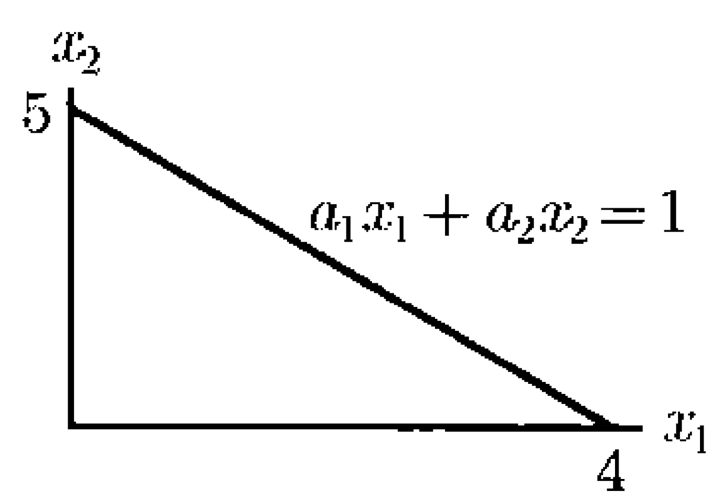


图 3

4. 图 4 中四条直线的每一条斜率是 0, 1, 2, −1, −2 中的一个, 指出每一条直线的斜率.

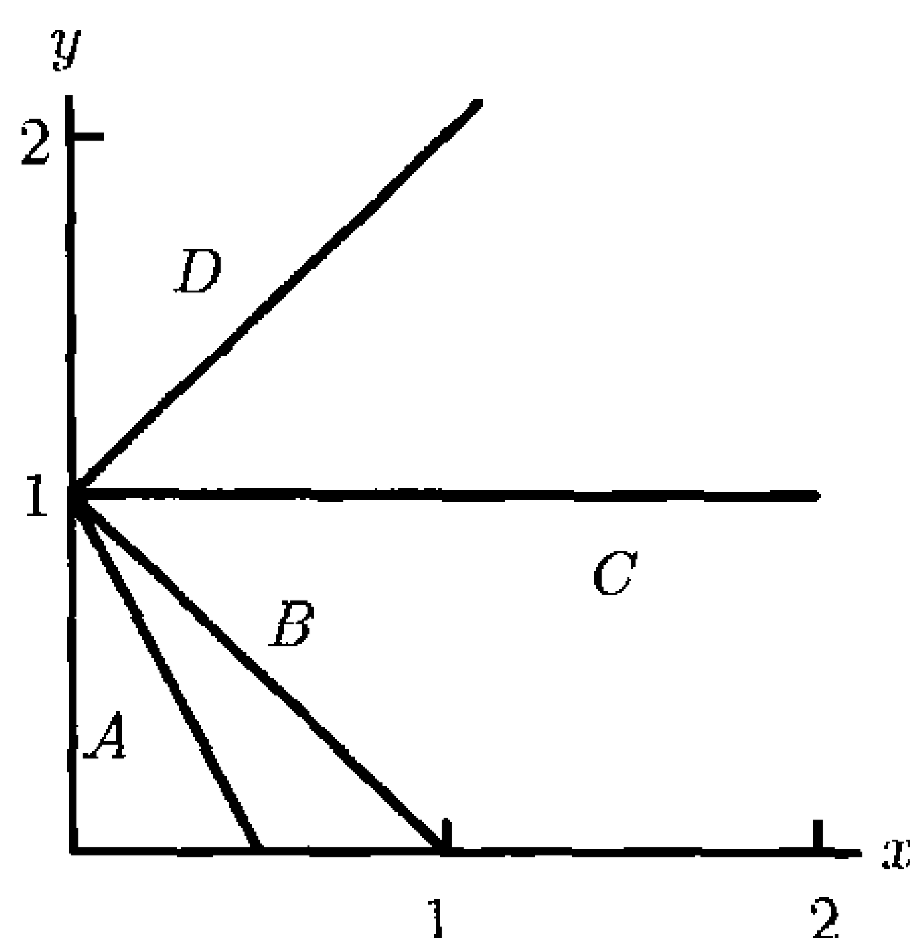


图 4

5. 解出 P_0:

$$P = P_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^t.$$

6. 解出 r:

$$P = \left(1+\frac{r}{n}\right)^t.$$

7. 如果 $f(t) = 4t + (t+3)^2$, 求 $f(0)$.

8. 如果 $f(x) = 4x + 28$, 解方程 $f(x) = 0$.

9. 下面哪个等于 $16 - x^2 + 6x$?

(a) $7 + (3-x)^2$

(b) $16 - (x-3)^2$

(c) $25 - (x-3)^2$

(d) $52 - (x-6)^2$

(e) $25 - (x+3)^2$

(f) 以上都不是

10. 图 5 中点 Q 的坐标是什么?

11. 图 5 中点 P 的坐标是什么?

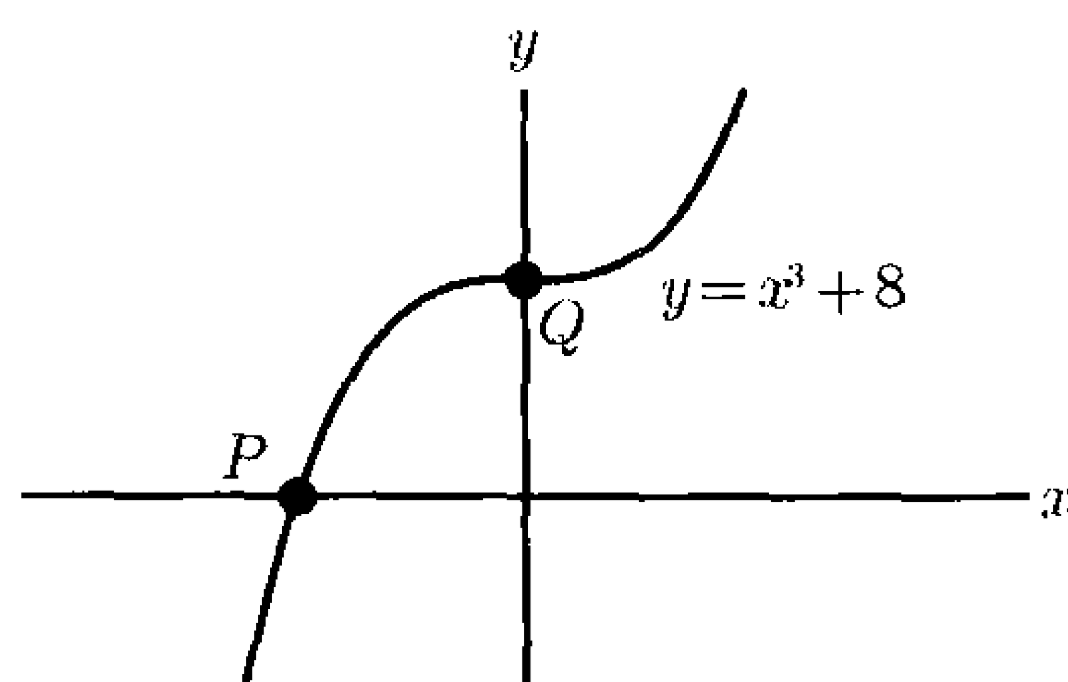


图 5

12. 求 $|-10| + |10|$.

13. 下面哪个等于 $\dfrac{T}{E}$?

(a) $\dfrac{E^2+T}{E}$

(b) $\dfrac{E}{E^2+T}$

(c) $E+T$

(d) $\dfrac{T+E}{E+1}$

(e) $\dfrac{T+E}{E}$

14. 下面哪个等于 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{u}$?

(a) $\dfrac{1}{uy}$ (b) $\dfrac{1}{u+y}$

(c) $\dfrac{u+y}{uy}$ (d) $\dfrac{u}{y}$

(e) $\dfrac{2}{y+u}$

15. 下面哪个等于 $x^{-1}y+y^{-1}x$?

(a) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

(c) $\dfrac{xy}{x+y}$ (d) $\dfrac{x+y}{xy}$

(e) $\dfrac{y+x}{x+y}$

16. 如果 $\dfrac{\sqrt[3]{t}}{t}=t^a$, a 是多少?

17. 化简 $(x^2x^5)^4$.

18. 化简 $W^{2/3}W^{3/2}$.

19. 展开并合并同类项: $-5u\left(\dfrac{3}{u}-2v\right)$.

20. 求解 p 的方程 $3p+4=9$.

21. 求解 x 的方程 $2x+a=5(1-x)$.

22. 求解 w 的方程 $2\sqrt{w}-3=9$..

23. 求解 n 的方程 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{n}$.

24. 求解 q 的方程 $Cq+Dq=A$.

25. 已知 $m=2, x_0=3, y_0=10$, 求解 x 的方程 $y-y_0=m(x-x_0)$.

26. 若 $-2x+9y-9=0$, 求 $y=0$ 时的 x.

27. 若 $3s-8t=7$, 求 $t=s+1$ 时的 s.

28. 分解因式 $12x^2-6a^2x$.

29. 分解因式 $C^2a^3b-Cab^3$.

30. 下面哪个是 $x^2+2x-15$ 的因式分解?

(a) $(x+1)^2-16$ (b) $(x-3)(x+15)$

(c) $x(x+2)-15$ (d) $(x+2)(x-15)$

(e) 以上都不是

31. $(x-2)(x+1)(2x-5)$ 的零点是什么?

32. $y=(x-2)(x+1)(2x-5)$ 的 y 截距是什么?

33. 若 $W^2-2W-8=4(W-2)$, 求 W 所有可能的值.

34. 若 $s=d^2+d+1$ 并且 $d=g+1$, 用 g 表示 s.

35. 若 $\theta=x^2-1$ 用 x 表示 $(\theta+1)^2$.

36. 若 $b=-2z$, 用 z 表示 b^2-2b.

37. 方程 $y=a^x$ 经过点 $(-3,1/8)$. a 是多少?

38. 如果 $s=2$ 和 $t=0$ 是 $as^5=s^7+t$ 的解, a 是多少?

39. 利用下表, w 的值是多少时 $q=7$?

w	-4	-1	1	6	10
q	4	2	7	-2	2

40. 利用下表, 下午 6 时的温度是多少?

时间 (午夜后的小时)	0	6	12	18
温度 (°F)	36	48	65	55

41. 对某个常数 k, $M=kN$. 如果 $N=12$ 时 $M=0.84$, $N=6$ 时 M 等于多少?

42. 图 6 中阴影矩形的面积是多少?

43. 图 6 中阴影三角形的面积是多少?

44. 价格以 1.042 的因子增加, 价格增加的百分比是多少?

45. 最初值 21000 美元的汽车现在的价值不到最初的 32%, 汽车的现值是多少?

46. 标价 45 美元的商品降价 25% 进行销售. 顾客要付销售价加上 8% 的销售税. 顾客要付多少钱?

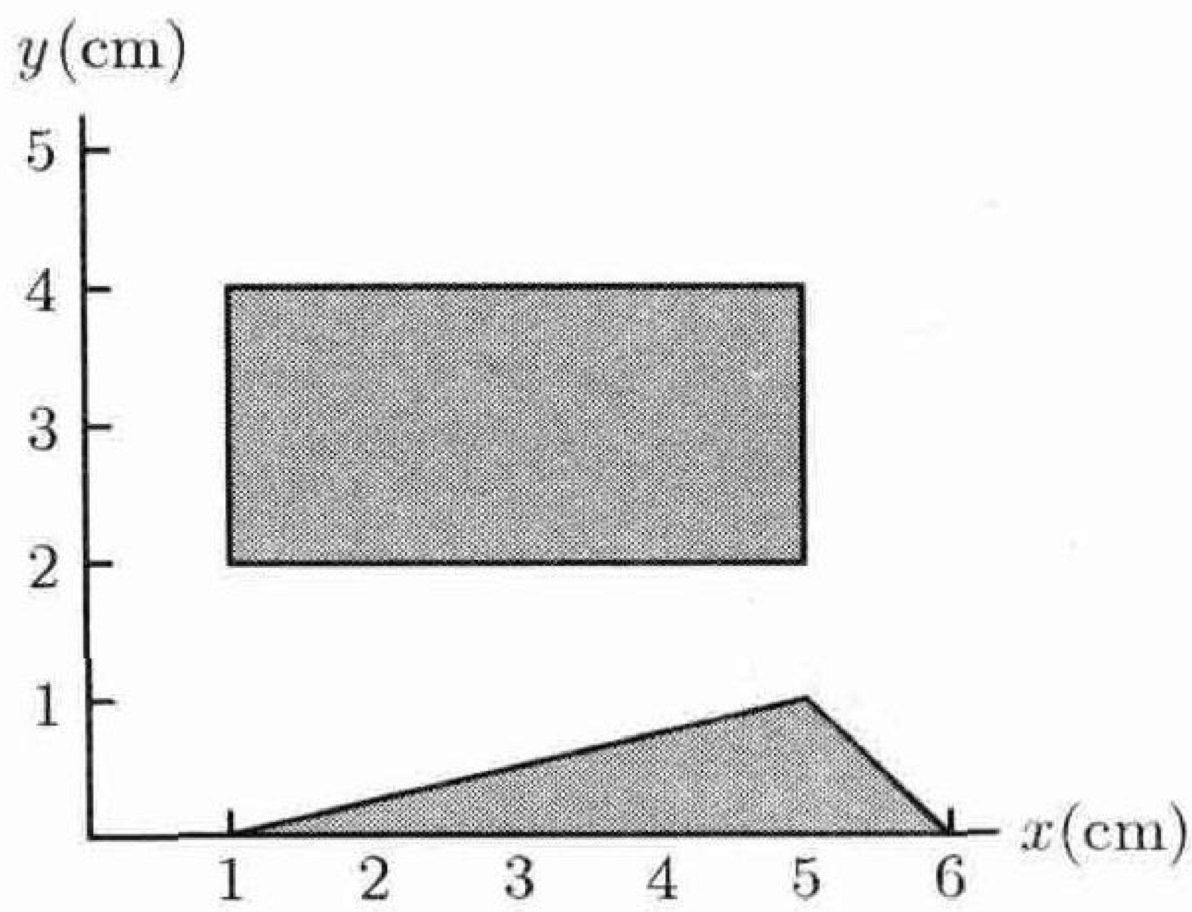


图 6

三角方面的题 (非必须的)

1. $y=\cos x$ 的竖直截距是多少?

2. $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=2\pi$(包括在内) 之间的零点有哪些?

3. 3π 弧度是多少度?

4. 在图 7 中正弦图形最高点的坐标是什么?

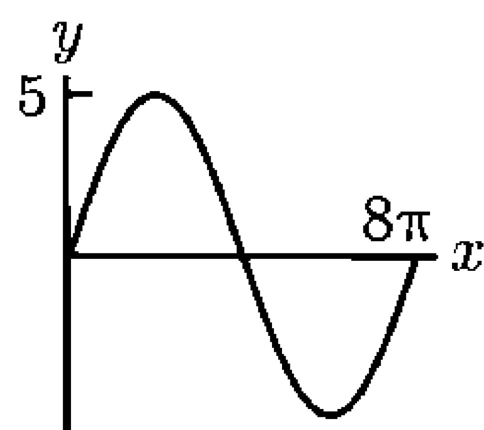


图 7

法定计量单位与常用非法定计量单位的对照和换算表

	法定计量单位		常用非法定计量单位		换算关系
	名称	符号	名称	符号	
长度	千米 (公里)	km		KM	1 千米 (公里)=0.6214 英里
	米	m	公尺	M	1 米 =3.2808 英尺 =1.0936 码
	分米	dm	公寸		1 分米 =0.1 米
	厘米	cm	公分		1 厘米 =0.01 米 =0.3937 英寸
	毫米	mm	公厘	m/m，MM	1 毫米 =0.001 米
	微米	μm	公微	μ,mμ，μM	1 微米 $=10^{-6}$ 米
	纳米	nm	毫微米	mμm	1 纳米 $=10^{-9}$ 米
			英里	mile	1 英里 =1760 码 = 5280 英尺 =1.6093 公里
			码	yd	1 码 =3 英尺 =0.9144 米
			英尺	ft	1 英尺 =12 英寸 =0.3048 米
			英寸	in	1 英寸 =2.5400 厘米
面积	平方千米 (平方公里)	km^2			1 平方千米 (平方公里)=1000000 平方米 =100 公顷 =0.3861 英里
			公顷	ha	1 公顷 =10000 平方米 =100 公亩 =2.4711 英亩
			公亩	a	1 公亩 =100 平方米 =0.0247 英亩
	平方米	m^2	平米		1 平方米 =10.7639 平方英尺 =1.1960 平方码
	平方分米	dm^2			1 平方分米 =0.01 平方米
	平方厘米	cm^2			1 平方厘米 =0.0001 平方米
			平方英里		1 平方英里 =640 英亩 =2.5900 平方公里
			英亩		1 英亩 =4840 平方码 =40.4686 公亩
			平方码		1 平方码 =9 平方英尺 =0.8361 平方米
			平方英尺		1 平方英尺 =144 平方英寸 =0.0929 平方米
			平方英寸		1 平方英寸 =64516 平方厘米
体积	立方米	m^3			1 立方米 =1000 立方分米 = 35.3147 立方英尺 =1.3080 立方码
	立方分米	dm^3			1 立方分米 =0.001 立方米
	立方厘米	cm^3			1 立方厘米 =0.00000 立方米
			立方码		1 立方码 =27 立方英尺 =0.7646 立方米
			立方英尺		1 立方英尺 =1728 立方英寸 =0.0283 立方米
			立方英寸		1 立方英寸 =16.3871 立方厘米
容积	升	L(1)	公升、立升		1 升 =0.2200 加仑 (英)
	毫升	ml	西西	c.c.，cc	1 毫升 =0.001 升
			加仑		1 加仑 (英)=4.5461 升
质量	吨	t	公吨	T	1 吨 =1000 千克
	千克 (公斤)	kg			1 千克 =2.2046 磅 (常衡)
	克	g	公分	gm	1 克 =0.001 千克
	毫克	mg			1 毫克 =0.000001 千克
			磅	lb	1 磅 =16 盎司 =0.4536 千克
			盎司	oz	1 盎司 =28,3495 克
时间	年	a		y,yr	1y=1yr=1rh
	天 (日)	d			
	小时	h		hr	1hr=1 小时
	分	min		(′)	1′=1 分
	秒	s		S,sec,(″)	1”=1S=1sce=1 秒